Вещественное уравнение мКдФ: классическая и альтернативные формулы конечнозонных решений

А.О. Смирнов

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

50 лет конечнозонному интегрированию
Москва, МИАН, 16-18 сентября 2024

Вещественное модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза

$$v_t + v_{xxx} - 6v^2 v_x = 0$$

является одним из самых известных интегрируемых нелинейных уравнений. Пара Лакса для него имеет вид

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = 2^{2k} W_{2k} \Psi,$$

где $k = 1$,

$$U = \lambda J + Q, \quad J = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & v(x) \\ v(x) & 0 \end{pmatrix},$$

Введение

$$W_1 = \lambda U + W_1^0, \quad W_{k+1} = \lambda W_k + W_{k+1}^0, \quad k \geq 1,$$
$$W_k^0 = \begin{pmatrix} F_k & H_k \\ G_k & -F_k \end{pmatrix},$$

$\Psi = (\psi_1, \psi_2)^t$, $i^2 = -1$, $v(\mathrm{x}) \in \mathbb{R}$, $\mathrm{x} = (x, t, \dots)$ и

$$H_1 = -G_1 = \frac{i}{2} v_x, \quad F_1 = -\frac{i}{2} v^2,$$
$$H_2 = G_2 = \frac{1}{2} v^3 - \frac{1}{4} v_{xx}, \quad F_2 = 0.$$

При $k > 1$ условиями совместности уравнений пары Лакса являются высшие уравнения из иерархии мКдФ.

Наряду с вещественным модифицированным уравнением мКдФ существуют его комплексные формы, являющиеся членами иерархии АКНС. Пара Лакса для комплексного уравнения мКдФ имеет вид тот же самый вид, где

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & ip(x) \\ -iq(x) & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$H_1 = -\frac{1}{2}p_x, \quad G_1 = -\frac{1}{2}q_x, \quad F_1 = -\frac{i}{2}pq,$$
$$H_2 = \frac{i}{2}p^2q - \frac{i}{4}p_{xx}, \quad G_2 = -\frac{i}{2}pq^2 + \frac{i}{4}q_{xx}, \quad F_2 = \frac{1}{4}(qp_x - pq_x).$$

Введение

Из условия совместности пары Лакса для комплексного уравнения мКдФ вытекает следующая система уравнений

$$p_t + p_{xxx} - 6pqp_x = 0,$$
$$q_t + q_{xxx} - 6pqq_x = 0.$$

Полагая $q = \sigma p^*$, где $\sigma = \pm 1$, получаем комплексные уравнения мКдФ

$$p_t + p_{xxx} - 6\sigma |p|^2 p_x = 0.$$

Знак $\sigma = -1$ соответствует фокусирующему уравнению мКдФ, а знак $\sigma = +1$ – дефокусирующему.

Спектральная кривая

Рассмотрим риманову поверхность $\Gamma = \{(\chi, \lambda)\}$ рода g:

$$\Gamma : \quad \chi^2 = \prod_{j=1}^{g+1} (\lambda^2 - s_j^2), \quad s_j > 0.$$

Зададим на ней канонический базис циклов $(a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g)$, как показано на рисунке, и канонический базис нормированных голоморфных дифференциалов

$$d\mathcal{U}_j = \sum_{k=1}^{g} c_{jk} \frac{\lambda^{g-k} d\lambda}{\chi}, \quad \oint_{a_k} d\mathcal{U}_j = \delta_{kj}.$$

Спектральная кривая

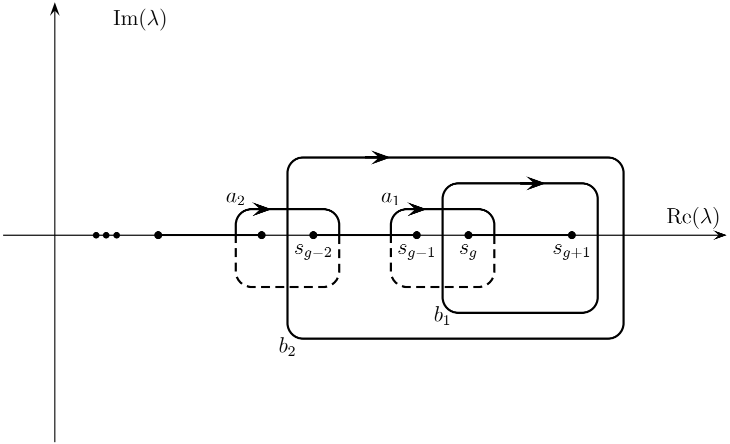

Figure: Базис циклов на Γ

Спектральная кривая

Рассмотрим на Γ также нормированные абелевы интегралы второго и третьего рода:

$$
\begin{aligned}
&\Omega_j(\mathcal{P}) = \mp i2^{2j-2}(\lambda^{2j-1} + K_j + O(\lambda^{-1})), && \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^\pm, \\
&\omega_0(\mathcal{P}) = \mp(\ln\lambda - \ln K_0 + O(\lambda^{-1})), && \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^\pm, \\
&\chi(\mathcal{P}) = \pm(\lambda^{g+1} + O(\lambda^{g-1})), && \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^\pm, \\
&\oint_{a_k} d\Omega_j = \oint_{a_k} d\omega_0 = 0.
\end{aligned}
$$

Как обычно, построим матрицу периодов B и векторы периодов V^k:

$$B_{kj} = \oint_{b_k} d\mathcal{U}_j, \quad B^t = B, \quad \mathrm{Im}(B) > 0,$$
$$(\mathrm{V}^k)_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_j} d\Omega_k.$$

Напомним, что для b-периодов дифференциала $d\omega_0$ выполняются следующие соотношения

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b_j} d\omega_0 = \Delta_j = \mathcal{U}_j(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathcal{U}_j(\mathcal{P}_\infty^-),$$

где путь интегрирования, соединяющий точки $\mathcal{P}_\infty^-$ и $\mathcal{P}_\infty^+$, не пересекает ни один из базисных циклов.

Спектральная кривая

Нетрудно видеть, что на Γ существуют три инволюции:

1. гиперэллиптическая $\tau_0 : (\chi, \lambda) \to (-\chi, \lambda)$, $\tau_0 \mathcal{P}_\infty^\pm = \mathcal{P}_\infty^\mp$,
2. голоморфная $\tau_h : (\chi, \lambda) \to ((-1)^{g+1}\chi, -\lambda)$, $\tau_h \mathcal{P}_\infty^\pm = \mathcal{P}_\infty^\pm$,
3. антиголоморфная $\tau_a : (\chi, \lambda) \to (\chi^*, \lambda^*)$, $\tau_a \mathcal{P}_\infty^\pm = \mathcal{P}_\infty^\pm$.

Канонический бизис циклов под действием голоморфной и антиголоморфной инволюций инволюций преобразуется по следующим правилам

$$\tau_h a_j = -a_{g+1-j}, \quad \tau_h b_j = -b_{g+1-j},$$
$$\tau_a a_j = a_j, \quad \tau_a b_j = -b_j.$$

Поэтому, выполняются следующие соотношения

$$\tau_h d\mathcal{U}_j = -d\mathcal{U}_{g+1-j}, \quad \tau_h d\Omega_j = -d\Omega_j, \quad \tau_h d\omega_0 = d\omega_0,$$
$$\tau_a d\mathcal{U}_j = (d\mathcal{U}_j)^*, \quad \tau_a d\Omega_j = -(d\Omega_j)^*, \quad \tau_a d\omega_0 = (d\omega_0)^*$$

и

$$M_g^t B M_g = B, \quad B^* = -B,$$
$$M_g^t \mathrm{V}^j = \mathrm{V}^j, \quad (\mathrm{V}^j)^* = -\mathrm{V}^j, \quad K_j = 0, \quad j \geq 1,$$
$$M_g^t \Delta = \mathrm{e} - \Delta, \quad \Delta^* = \Delta, \quad K_0^* = K_0,$$

где $(M_g)_{kj} = \delta_{k,g+1-j}$, $(\mathrm{e})_j = 1$, $M_g^t = M_g$, $M_g^2 = I_g$, I_g – единичная матрица.

Функция Бейкера-Ахиезера

Следуя работам Итса А.Р. и Котлярова В.П, построим матричную функцию Бейкера-Ахиезера в следующем виде

$$\Psi(\mathcal{P}, \mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \psi(\mathcal{P}, \mathrm{x}) & \psi(\tau_0 \mathcal{P}, \mathrm{x}) \\ \phi(\mathcal{P}, \mathrm{x}) & \phi(\tau_0 \mathcal{P}, \mathrm{x}) \end{pmatrix},$$

где $\mathrm{x} = (x, t_1, t_2, \dots)$,

$$\psi(\mathcal{P}, \mathrm{x}) = r_1(\mathrm{x}) \frac{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}, \mathrm{x}))}{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}, 0^t))} \exp\{\Omega(\mathcal{P}, \mathrm{x})\},$$

$$\phi(\mathcal{P}, \mathrm{x}) = r_2(\mathrm{x}) \frac{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}, \mathrm{x}) + \Delta)}{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}, 0^t))} \exp\{\omega_0(\mathcal{P}) + \Omega(\mathcal{P}, \mathrm{x})\}.$$

Функция Бейкера-Ахиезера

Здесь $r_j(\mathrm{x})$ – нормирующие множители,

$$\mathcal{A}(\mathcal{P},\mathrm{x}) = \mathcal{U}(\mathcal{P}) + \mathrm{V}^1 x + \sum_{j\geq 1} \mathrm{V}^{j+1} t_j + \mathrm{Z}_0,$$

$$\Omega(\mathcal{P},\mathrm{x}) = x\Omega_1(\mathcal{P}) + \sum_{j\geq 1} t_j \Omega_{j+1}(\mathcal{P}),$$

Z_0 – начальная фаза. Тэта функция $\Theta(\mathrm{p})$ определяется следующими соотношениями

$$\Theta[\eta;\zeta](\mathrm{p}|B) = \sum_{\mathrm{m}\in\mathbb{Z}^g} \exp\{\pi i(\mathrm{m}+\eta)^t B(\mathrm{m}+\eta) + 2\pi i(\mathrm{m}+\eta)^t(\mathrm{p}+\zeta)\},$$

$$\Theta[0;0](\mathrm{p}|B) \equiv \theta(\mathrm{p}|B) \equiv \Theta(\mathrm{p}).$$

Функция Бейкера-Ахиезера

Пусть функции $\psi(\mathcal{P},x)$ и $\phi(\mathcal{P},x)$ имеют следующие асимптотики в окрестностях бесконечно удаленных точек $\mathcal{P}_\infty^{\pm}$:

$$\psi(\mathcal{P},x)=\left(\rho_1+\sum_{j\geq 1}\alpha_j^{+}(x)\lambda^{-j}\right)e^{-i\lambda x-i\sum_{k\geq 1}t_k 2^{2k}\lambda^{2k+1}},\quad \mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^{+},$$

$$\phi(\mathcal{P},x)=\frac{1}{\lambda}\left(s_2(x)+\sum_{j\geq 1}\beta_j^{+}(x)\lambda^{-j}\right)e^{-i\lambda x-i\sum_{k\geq 1}t_k 2^{2k}\lambda^{2k+1}},\quad \mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^{+}$$

$$\psi(\mathcal{P},x)=\left(s_1(x)+\sum_{j\geq 1}\alpha_j^{-}(x)\lambda^{-j}\right)e^{i\lambda x+i\sum_{k\geq 1}t_k 2^{2k}\lambda^{2k+1}},\quad \mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^{-},$$

$$\phi(\mathcal{P},x)=\lambda\left(\rho_2+\sum_{j\geq 1}\beta_j^{-}(x)\lambda^{-j}\right)e^{i\lambda x+i\sum_{k\geq 1}t_k 2^{2k}\lambda^{2k+1}},\quad \mathcal{P}\to\mathcal{P}_\infty^{-}.$$

Тогда

$$r_1(x) = \rho_1 \frac{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, 0^t))}{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, x))},$$
$$r_2(x) = K_0 \rho_2 \frac{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^-, 0^t))}{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^-, x) + \Delta)}$$

и

$$s_1(x) = \rho_1 \frac{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^-, x))\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, 0^t))}{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, x))\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^-, 0^t))},$$
$$s_2(x) = K_0^2 \rho_2 \frac{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, x) + \Delta)\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^-, 0^t))}{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^-, x) + \Delta)\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, 0^t))}.$$

Матричный конечнозонный потенциал

Из асимптотики построенной функции Бейкера-Ахиезера следует, что она удовлетворяет следующим матричным дифференциальным уравнениям

$$\partial_x \Psi = (\lambda J + Q)\Psi, \quad \partial_{t_k} \Psi = 2^{2k} W_k \Psi,$$

где $W_1 = \lambda^2(\lambda J + Q) + \lambda W_1^1 + W_1^0$,
$W_{k+1} = \lambda^2 W_k + \lambda W_{k+1}^1 + W_{k+1}^0$,

$$J = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & v(x) \\ \widetilde{v}(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$v(x) = \frac{2i}{\rho_2} s_1(x) = \frac{2i\rho_1}{\rho_2} \frac{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^-, x))\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, 0^t))}{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, x))\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^-, 0^t))},$$

$$\widetilde{v}(x) = -\frac{2i}{\rho_1} s_2(x) = -\frac{2iK_0^2\rho_2}{\rho_1} \frac{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, x) + \Delta)\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^-, 0^t))}{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^-, x) + \Delta)\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, 0^t))}.$$

Учитывая, что $\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^-)+\Delta=\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+)$, и полагая

$$\rho_2=\frac{i\rho_1\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+,0^t))}{K_0\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^-,0^t))},$$

имеем

$$v(\mathrm{x})=2K_0\frac{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+,\mathrm{x})-\Delta)}{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+,\mathrm{x}))},$$
$$\widetilde{v}(\mathrm{x})=2K_0\frac{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+,\mathrm{x})+\Delta)}{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+,\mathrm{x}))}.$$

Чтобы получить условия на параметры решения, при которых выполняется тождество $\widetilde{v}(x) \equiv v(x)$, изменим в тэта функции $\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, x) + \Delta)$ решетку суммирования. После замены $m = M_g n$ имеем:

$$\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, x) + \Delta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp\left\{\pi i m^t B m + 2\pi i m^t(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, x) + \Delta)\right\} =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp\left\{\pi i n^t (M_g^t B M_g) n + 2\pi i n^t (M_g^t \mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, x) + M_g^t \Delta)\right\} =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp\left\{\pi i n^t B n + 2\pi i n^t (M_g^t \mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, x) + e - \Delta)\right\} =$$

$$= \Theta(M_g^t \mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, x) - \Delta).$$

Матричный конечнозонный потенциал

Поскольку

$$M_g^t \mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, \mathrm{x}) = M_g^t \left(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) + \mathrm{V}^1 x + \sum_{j\geq 1} \mathrm{V}^{j+1} t_j + \mathrm{Z}_0 \right) =$$

$$= M_g^t \left(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) + \mathrm{Z}_0 \right) + M_g^t \mathrm{V}^1 x + \sum_{j\geq 1} M_g^t \mathrm{V}^{j+1} t_j =$$

$$= M^t \left(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) + \mathrm{Z}_0 \right) + \mathrm{V}^1 x + \sum_{j\geq 1} \mathrm{V}^{j+1} t_j =$$

$$= (M_g^t - I) \left(\mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) + \mathrm{Z}_0 \right) + \mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, \mathrm{x}),$$

то, полагая $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{Z}_1 - \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+)$, где Z_1 есть собственный вестор матрицы M_g: $M_g \mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_1$, имеем

$$\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, \mathrm{x}) + \Delta) = \Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, \mathrm{x}) - \Delta).$$

Матричный конечнозонный потенциал

Из условий $(V^j)^* = -V^j$, $\Delta^* = \Delta$, $K_0^* = K_0$, $Z_1^* = -Z_1$ следует, что функция $v(x)$ является вещественной.
Таким образом, при выполнении условия

$$Z_0 = Z_1 - \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+),$$

где $M_g Z_1 = Z_1$ и $Z_1^* = -Z_1$, формула

$$v(x) = 2K_0 \frac{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, x) - \Delta)}{\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, x))}$$

определяет конечнозонное решение вещественного уравнения мКдФ.

Редукция решения при $g = 2g_0$

Сначала рассмотрим случай $g = 2g_0$. Наличие голоморфной инволюции τ_h приводит к тому, что Γ накрывает две поверхности меньшего рода (род каждой поверхности равен g_0):

$$\Gamma_+ : \quad w_+^2 = \prod_{j=1}^{2g_0+1} (E - s_j^2),$$

$$\Gamma_- : \quad w_-^2 = E \prod_{j=1}^{2g_0+1} (E - s_j^2),$$

где $E = \lambda^2$, $w_+ = \chi$, $w_- = \lambda\chi$ и

$$\frac{E^k dE}{w_+} = 2\frac{\lambda^{2k+1} d\lambda}{\chi}, \quad \frac{E^k dE}{w_-} = 2\frac{\lambda^{2k} d\lambda}{\chi}.$$

Редукция решения при $g = 2g_0$

Выберем на поверхностях $\Gamma_\pm$ канонические базисы циклов, как показано на рисунке

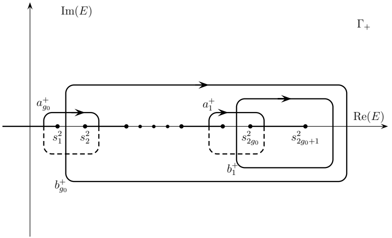

Figure: Каноничские базисы циклов на $\Gamma_\pm$

а также базисы нормированных голоморфных дифференциалов:

$$dU_j^\pm = \sum_{k=1}^{g_0} c_{jk}^\pm \frac{E^{g_0-k}\,dE}{w_\pm}, \quad \oint_{a_k^\pm} dU_j^\pm = \delta_{kj}.$$

Отображения между поверхностями порождают следующие отображения базисов циклов

$$(a_1, \ldots, a_{2g_0})^t \to S(a_1^+, \ldots, a_{g_0}^+, a_1^-, \ldots, a_{g_0}^-)^t,$$
$$(b_1, \ldots, b_{2g_0})^t \to R(b_1^+, \ldots, b_{g_0}^+, b_1^-, \ldots, b_{g_0}^-)^t,$$

где

$$S = R = \begin{pmatrix} I_{g_0} & I_{g_0} \\ M_{g_0} & -M_{g_0} \end{pmatrix}, \quad S^t R = 2I_{2g_0},$$

Напомним, что $(I_g)_{jk} = \delta_{jk}$, $(M_{g_0})_{jk} = \delta_{j,g_0+1-k}$.

Редукция решения при $g = 2g_0$

Поскольку нормированные голоморфные дифференциалы связаны равенством

$$\begin{pmatrix} d\mathcal{U}^+ \\ d\mathcal{U}^- \end{pmatrix} = S^t d\mathcal{U},$$

то выполняются следующие соотношения ($j = 1, \ldots, g_0$)

$$d\mathcal{U}_j = \frac{1}{2}\left(d\mathcal{U}_j^+ + d\mathcal{U}_j^-\right), \quad d\mathcal{U}_{g_0+j} = \frac{1}{2}\left(d\mathcal{U}_{g_0+1-j}^+ - d\mathcal{U}_{g_0+1-j}^-\right).$$

Следовательно,

$$S^t B S = \begin{pmatrix} 2B^+ & 0 \\ 0 & 2B^- \end{pmatrix},$$

где $B^\pm$ есть матрицы b-периодов голоморфных дифференциалов $d\mathcal{U}^\pm$.

Редукция решения при $g = 2g_0$

Из соотношения $\tau_h d\Omega_j = -d\Omega_j$ вытекает следующее равенство

$$d\Omega_j = -i2^{2j-2}(2j-1)\left(\lambda^{2j+2g_0-2} + \sum_{k=1}^{j+g_0-1} f_k \lambda^{2j+2g_0-2-2k}\right)\frac{\lambda d\lambda}{\chi} =$$

$$= -i2^{2j-3}(2j-1)\left(E^{j+g_0-1} + \sum_{k=1}^{j+g_0-1} f_k E^{j+g_0-1-k}\right)\frac{dE}{w_+} = d\Omega_j^+,$$

где $\Omega_j^+(\mathcal{Q})$ – абелев интеграл второго рода, $\mathcal{Q} \in \Gamma_+$,

$$\begin{aligned} \Omega_j^+(\mathcal{Q}) &= i2^{2j-2}\left(\xi^{-2j+1} + O(\xi)\right), && \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}_\infty, \\ w_+ &= \xi^{-2g_0-1} + O(\xi), && \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}_\infty, \end{aligned}$$

ξ – локальный параметр в окрестности точки $\mathcal{Q}_\infty$, $E = \xi^{-2}$.

Редукция решения при $g = 2g_0$

Вычисляя периоды интеграла $\Omega_j^+(\mathcal{Q})$, получаем

$$0 = \oint_{a_k} d\Omega_j = \sum_{m=1}^{g_0} S_{km} \oint_{a_m^+} d\Omega_j^+ \quad \Rightarrow \quad \oint_{a_m^+} d\Omega_j^+ = 0$$

и

$$(\mathrm{V}^j)_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_k} d\Omega_j = \sum_{m=1}^{g_0} R_{km} \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_m^+} d\Omega_j^+ = \sum_{m=1}^{g_0} R_{km} (\mathrm{W}^j)_m \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{V}^j = \begin{pmatrix} I_{g_0} \\ M_{g_0} \end{pmatrix} \mathrm{W}^j,$$

где

$$(\mathrm{W}^j)_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_m^+} d\Omega_j^+ .$$

Следовательно,

$$S^t \mathrm{V}^j = \begin{pmatrix} I_{g_0} & M_{g_0} \\ I_{g_0} & -M_{g_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{g_0} \\ M_{g_0} \end{pmatrix} \mathrm{W}^j = 2 \begin{pmatrix} \mathrm{W}^j \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Редукция решения при $g = 2g_0$

Из равенств $M_g Z_1 = Z_1$, $Z_1^* = -Z_1$ вытекает следующая структура вектора Z_1:

$$Z_1 = \begin{pmatrix} Z^+ \\ M_{g_0} Z^+ \end{pmatrix}, \quad (Z^+)^* = -Z^+,$$

из которой вытекает равенство

$$S^t Z_1 = 2\begin{pmatrix} Z^+ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$S^t \mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, x) = S^t \left(Z_1 + V^1 x + \sum_{j\geq 1} V^{j+1} t_j \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2Z^+ \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2W^1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \sum_{j\geq 1} \begin{pmatrix} 2W^{j+1} \\ 0 \end{pmatrix} t_j = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^+(x) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{A}^+(x) = 2Z^+ + 2W^1 x + \sum_{j\geq 1} 2W^{j+1} t_j.$$

Редукция решения при $g = 2g_0$

Из соотношения $\tau_h d\omega_0 = d\omega_0$ имеем

$$d\omega_0 = -\left(\lambda^{2g_0} + \sum_{k=1}^{g_0} h_k \lambda^{2g_0-2k}\right)\frac{d\lambda}{\chi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(E^{g_0} + \sum_{k=1}^{g_0} h_k E^{g_0-k}\right)\frac{dE}{w_-} = \frac{1}{2} d\omega_0^-,$$

где $\omega_0^-(\widehat{\mathcal{P}})$ – абелев интеграл третьего рода, $\widehat{\mathcal{P}} \in \Gamma_-$,

$$\omega_0^-(\widehat{\mathcal{P}}) = \mp\left(\ln E - \ln \widehat{K}_0 + O(E^{-1})\right), \qquad \widehat{\mathcal{P}} \to \widehat{\mathcal{P}}_\infty^\pm,$$

$$w_- = \pm(E^{g_0+1} + O(E^{g_0})), \qquad \widehat{\mathcal{P}} \to \widehat{\mathcal{P}}_\infty^\pm.$$

Редукция решения при $g = 2g_0$

Вычисляя a-периоды интеграла $\omega_0^-(\widehat{\mathcal{P}})$, получаем

$$0 = \oint_{a_k} d\omega_0 = \sum_{m=1}^{g_0} S_{k,g_0+m} \oint_{a_m^-} \frac{1}{2} d\omega_0^- \quad \Rightarrow \quad \oint_{a_m^-} d\omega_0^- = 0.$$

Таким образом, интеграл $\omega_0^-(\widehat{\mathcal{P}})$ является нормированным. Следовательно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b_j^-} d\omega_0^- = \widetilde{\Delta}_j^- = \mathcal{U}_j^-(\widehat{\mathcal{P}}_\infty^+) - \mathcal{U}_j^-(\widehat{\mathcal{P}}_\infty^-),$$

где путь интегрирования, соединяющий точки $\widehat{\mathcal{P}}_\infty^-$ и $\widehat{\mathcal{P}}_\infty^+$, не пересекает ни один из базисных циклов. Т.е.

$$\widetilde{\Delta}_j^- = 2 \int_0^{\infty^+} d\mathcal{U}_j^-.$$

Редукция решения при $g = 2g_0$

Вычисляя координаты вектора Δ, имеем $(1 \le j \le g_0)$

$$\Delta_j = 2\int_{-s_{2g_0+1}}^{-\infty} d\mathcal{U}_j = -\int_{s^2_{2g_0+1}}^{+\infty} d\mathcal{U}_j^+ + \int_{s^2_{2g_0+1}}^{\infty^+} d\mathcal{U}_j^- = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Delta_j^-,$$

$$\Delta_{g_0+j} = 2\int_{-s_{2g_0+1}}^{-\infty} d\mathcal{U}_{g_0+j} = -\int_{s^2_{2g_0+1}}^{+\infty} d\mathcal{U}_{g_0+1-j}^+ - \int_{s^2_{2g_0+1}}^{\infty^+} d\mathcal{U}_{g_0+1-j}^- =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Delta_{g_0+1-j}^-,$$

где

$$\Delta_j^- = 2\int_{s^2_{2g_0+1}}^{\infty^+} d\mathcal{U}_j^- .$$

Редукция решения при $g = 2g_0$

Следовательно,

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e} + \Delta^- \\ \mathrm{e} - M_{g_0}\Delta^- \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S^t\Delta = \begin{pmatrix} \mathrm{e} \\ \Delta^- \end{pmatrix}.$$

Заметим также, что выполняются равенства: $\widetilde{\Delta}^- = \Delta^- + \mathrm{e}$ и $\widehat{K}_0 = K_0^2$.

Редукция решения при $g = 2g_0$

Из теоремы о редукции многомерной тэта-функции Римана вытекают следующие равенства

$$\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, \mathrm{x}) + \Delta) = \sum_{\mathrm{m}\in\mathbb{Z}^g} \exp\left\{\pi i \mathrm{m}^t B \mathrm{m} + 2\pi i \mathrm{m}^t(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, \mathrm{x}) + \Delta)\right\} =$$

$$= \sum_{\mathrm{k}\in\mathbb{Z}^g(S)} \sum_{\mathrm{n}\in\mathbb{Z}^g} \exp\left\{\pi i (S\mathrm{n} + \mathrm{k})^t B (S\mathrm{n} + \mathrm{k}) + \right.$$

$$\left. + 2\pi i (S\mathrm{n} + \mathrm{k})^t (\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, \mathrm{x}) + \Delta)\right\} =$$

$$= \sum_{\mathrm{k}\in\mathbb{Z}^g(S)} \sum_{\mathrm{n}\in\mathbb{Z}^g} \exp\left\{\pi i (\mathrm{n} + \eta(\mathrm{k}))^t S^t B S (\mathrm{n} + \eta(\mathrm{k})) + \right.$$

$$\left. + 2\pi i (\mathrm{n} + \eta(\mathrm{k}))^t (S^t \mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, \mathrm{x}) + S^t \Delta)\right\} =$$

$$= \sum_{\mathrm{k}\in\mathbb{Z}^g(S)} \Theta[\eta^+(\mathrm{k}); 0]\left(\mathcal{A}^+(\mathrm{x}) + \mathrm{e}\middle| 2B^+\right) \Theta[\eta^-(\mathrm{k}); 0](\Delta^- | 2B^-) =$$

$$= \sum_{\mathrm{k}\in\mathbb{Z}^g(S)} (-1)^{2\mathrm{e}^t \eta^+(\mathrm{k})} \Theta[\eta^+(\mathrm{k}); 0]\left(\mathcal{A}^+(\mathrm{x})\middle| 2B^+\right) \Theta[\eta^-(\mathrm{k}); 0](\Delta^- | 2B^-)$$

Редукция решения при $g = 2g_0$

и

$$\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, \mathrm{x})) = \sum_{\mathrm{k}\in\mathbb{Z}^g(S)} \Theta[\eta^+(\mathrm{k}); 0]\left(\mathcal{A}^+(\mathrm{x})\middle| 2B^+\right)\Theta[\eta^-(\mathrm{k}); 0](0|2B^-).$$

Здесь сумма $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}^g(S)$ означает суммирование по $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}^g$, где

$$\eta(\mathrm{k}) = S^{-1}\mathrm{k}, \quad 0 \le \eta_j(\mathrm{k}) < 1, \quad \eta(\mathrm{k}) = \begin{pmatrix} \eta^+(\mathrm{k}) \\ \eta^-(\mathrm{k}) \end{pmatrix}.$$

Число слагаемых в сумме равно $|\det(S)|$.
Из вида матрицы S вытекают следующие равенства: $S^{-1} = \frac{1}{2}S^t$ и $|\det(S)| = 2^{g_0}$. Можно показать, что этим условиям удовлетворяют следующие значения характеристики $\eta(\mathrm{k})$:

$$\eta^-(\mathrm{k}) = \eta^+(\mathrm{k}), \quad \eta_j^+(\mathrm{k}) \in \{0; 1/2\}, \quad j = 1, \dots, g_0.$$

Редукция решения при $g = 2g_0$

Таким образом, вещественное конечнозонное решение модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза в случае $g = 2g_0$ имеет вид

$$v(\mathrm{x}) = 2\widehat{K}_0^{1/2} \frac{\sum_{\eta^+} (-1)^{2\mathrm{e}^t \eta^+} \Theta[\eta^+;0](\mathcal{A}^+(\mathrm{x})|2B^+)\Theta[\eta^+;0](\Delta^-|2B^-)}{\sum_{\eta^+} \Theta[\eta^+;0](\mathcal{A}^+(\mathrm{x})|2B^+)\Theta[\eta^+;0](0|2B^-)},$$

где суммирование проходит по $\eta^+ \in \mathbb{Z}^{g_0}$, $\eta_j^+ \in \{0;1/2\}$, $j = 1, \ldots, g_0$, число слагаемых в суммах равно 2^{g_0}.

Редукция решения при $g = 2g_0 - 1$, $g_0 \neq 1$

Нассмотрим случай $g = 2g_0 - 1$. Наличие голоморфной инволюции τ_h приводит к тому, что Γ накрывает две поверхности меньшего рода (род поверхности Γ_+ равен $g_0 - 1$, а род поверхности Γ_- равен g_0):

$$\Gamma_+ : \quad w_+^2 = \prod_{j=1}^{2g_0} (E - s_j^2),$$

$$\Gamma_- : \quad w_-^2 = E \prod_{j=1}^{2g_0} (E - s_j^2),$$

где $E = \lambda^2$, $w_+ = \chi$, $w_- = \lambda\chi$ и

$$\frac{E^k dE}{w_+} = 2\frac{\lambda^{2k+1} d\lambda}{\chi}, \quad \frac{E^k dE}{w_-} = 2\frac{\lambda^{2k} d\lambda}{\chi}.$$

Выберем на поверхностях $\Gamma_\pm$ канонические базисы циклов, как показано на рисунке,

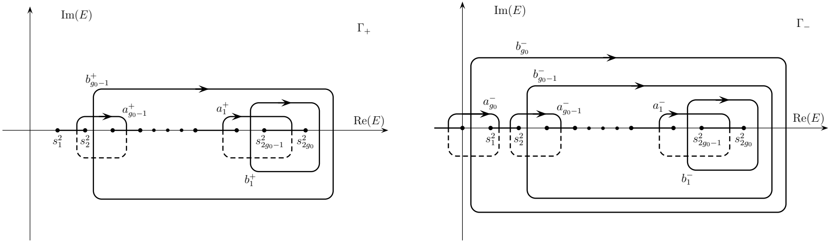

Figure: Канонические базисы циклов на $\Gamma_\pm$

и базисы нормированных голоморфных дифференциалов:

$$d\mathcal{U}_j^+ = \sum_{k=1}^{g_0-1} c_{jk}^+ \frac{E^{g_0-1-k}dE}{w_+}, \quad d\mathcal{U}_j^- = \sum_{k=1}^{g_0} c_{jk}^- \frac{E^{g_0-k}dE}{w_-},$$

$$\oint_{a_k^\pm} d\mathcal{U}_j^\pm = \delta_{kj}.$$

Отображения между поверхностями порождают следующие отображения базисов циклов

$$(a_1, \ldots, a_{2g_0-1})^t \to S(a_1^+, \ldots, a_{g_0-1}^+, a_1^-, \ldots, a_{g_0}^-)^t,$$
$$(b_1, \ldots, b_{2g_0-1})^t \to R(b_1^+, \ldots, b_{g_0-1}^+, b_1^-, \ldots, b_{g_0}^-)^t,$$

где

$$S = \begin{pmatrix} I_{g_0-1} & I_{g_0-1} & 0 \\ 0^t & 0^t & 2 \\ -M_{g_0-1} & M_{g_0-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} I_{g_0-1} & I_{g_0-1} & 0 \\ 0^t & 0^t & 1 \\ -M_{g_0-1} & M_{g_0-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$S^t R = 2I_{2g_0-1}.$

Редукция решения при $g = 2g_0 - 1$, $g_0 \neq 1$

Из равенства

$$\begin{pmatrix} d\mathcal{U}^+ \\ d\mathcal{U}^- \end{pmatrix} = S^t d\mathcal{U}$$

вытекают следующие соотношения $(j = 1, \ldots, g_0 - 1)$

$$d\mathcal{U}_j = \frac{1}{2}\left(d\mathcal{U}_j^+ + d\mathcal{U}_j^-\right), \quad d\mathcal{U}_{g_0+j} = \frac{1}{2}\left(d\mathcal{U}_{g_0-j}^- - d\mathcal{U}_{g_0-j}^+\right),$$
$$d\mathcal{U}_{g_0} = \frac{1}{2} d\mathcal{U}_{g_0}^-.$$

Из формул для отображений базисов циклов и базисов голоморфных дифференциалов вытекает следующее равенство

$$S^t B S = \begin{pmatrix} 2B^+ & 0 \\ 0 & 2B^- \end{pmatrix},$$

где $B^\pm$ есть матрицы b-периодов голоморфных дифференциалов $d\mathcal{U}^\pm$.

Из соотношения $\tau_h d\Omega_j = -d\Omega_j$ вытекает следующее равенство

$$d\Omega_j = -i2^{2j-2}(2j-1)\left(\lambda^{2j+2g_0-2} + \sum_{k=1}^{j+g_0-1} f_k\lambda^{2j+2g_0-2-2k}\right)\frac{d\lambda}{\chi} =$$

$$= -i2^{2j-3}(2j-1)\left(E^{j+g_0-1} + \sum_{k=1}^{j+g_0-1} f_k E^{j+g_0-1-k}\right)\frac{dE}{w_-} = d\Omega_j^-,$$

где $\Omega_j^-(\mathcal{Q})$ – абелев интеграл второго рода, $\mathcal{Q} \in \Gamma_-$,

$$\Omega_j^-(\mathcal{Q}) = i2^{2j-2}\left(\xi^{-2j+1} + O(\xi)\right), \qquad \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}_\infty,$$
$$w_- = \xi^{-2g_0-1} + O(\xi), \qquad \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}_\infty,$$

ξ – локальный параметр в окрестности точки $\mathcal{Q}_\infty$, $E = \xi^{-2}$.

Редукция решения при $g = 2g_0 - 1$, $g_0 \neq 1$

Вычисляя периоды интеграла $\Omega_j^-(\mathcal{Q})$, имеем

$$0 = \oint_{a_k} d\Omega_j = \sum_{m=1}^{g_0} S_{k,g_0-1+m} \oint_{a_m^-} d\Omega_j^- \quad \Rightarrow \quad \oint_{a_m^-} d\Omega_j^- = 0$$

и

$$(\mathrm{V}^j)_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_k} d\Omega_j = \sum_{m=1}^{g_0} R_{k,g_0-1+m} \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_m^-} d\Omega_j^- =$$

$$= \sum_{m=1}^{g_0} R_{k.g_0-1+m} (\mathrm{W}^j)_m \quad \Rightarrow \quad \mathrm{V}^j = \begin{pmatrix} I_{g_0-1} & 0 \\ 0^t & 1 \\ M_{g_0-1} & 0 \end{pmatrix} \mathrm{W}^j,$$

где

$$(\mathrm{W}^j)_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_m^-} d\Omega_j^- .$$

Редукция решения при $g = 2g_0 - 1$, $g_0 \neq 1$

Следовательно,

$$S^t \mathrm{V}^j = \begin{pmatrix} I_{g_0-1} & 0 & -M_{g_0-1} \\ I_{g_0-1} & 0 & M_{g_0-1} \\ 0^t & 2 & 0^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{g_0-1} & 0 \\ 0^t & 1 \\ M_{g_0-1} & 0 \end{pmatrix} \mathrm{W}^j = 2\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{W}^j \end{pmatrix}.$$

Из равенств $M_g \mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_1$ и $\mathrm{Z}_1^* = -\mathrm{Z}_1$ вытекает следующая структура вектора Z_1:

$$\mathrm{Z}_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Z}^+ \\ z_{g_0}^- \\ M_{g_0-1}\mathrm{Z}^+ \end{pmatrix}, \quad (\mathrm{Z}^+)^* = -\mathrm{Z}^+, \quad (z_{g_0}^-)^* = -z_{g_0}^-,$$

Таким образом, имеем

$$S^t Z_1 = 2\begin{pmatrix} 0^t \\ Z^+ \\ z_{g_0}^- \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0^t \\ Z^- \end{pmatrix}, \quad (Z^-)^* = -Z^-.$$

и

$$S^t \mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, x) = S^t \left(Z_1 + V^1 x + \sum_{j\geq 1} V^{j+1} t_j \right) =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2Z^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2W^1 \end{pmatrix} x + \sum_{j\geq 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2W^{j+1} \end{pmatrix} t_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{A}^-(x) \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{A}^-(x) = 2Z^- + 2W^1 x + \sum_{j\geq 1} 2W^{j+1} t_j.$$

Редукция решения при $g = 2g_0 - 1$, $g_0 \neq 1$

Из соотношения $\tau_h d\omega_0 = d\omega_0$ имеем

$$d\omega_0 = -\left(\lambda^{2g_0-2} + \sum_{k=1}^{g_0-1} h_k \lambda^{2g_0-2-2k}\right)\frac{\lambda d\lambda}{\chi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(E^{g_0-1} + \sum_{k=1}^{g_0-1} h_k E^{g_0-1-k}\right)\frac{dE}{w_+} = \frac{1}{2} d\omega_0^+,$$

где $\omega_0^+(\widehat{\mathcal{P}})$ – абелев интеграл третьего рода, $\widehat{\mathcal{P}} \in \Gamma_+$,

$$\omega_0^+(\widehat{\mathcal{P}}) = \mp\left(\ln E - \ln \widehat{K}_0 + O(E^{-1})\right), \qquad \widehat{\mathcal{P}} \to \widehat{\mathcal{P}}_\infty^\pm,$$

$$w_+ = \pm(E^{g_0} + O(E^{g_0-1})), \qquad \widehat{\mathcal{P}} \to \widehat{\mathcal{P}}_\infty^\pm.$$

Редукция решения при $g = 2g_0 - 1$, $g_0 \neq 1$

Вычисляя a-периоды интеграла $\omega_0^+(\widehat{\mathcal{P}})$, имеем

$$0 = \oint_{a_k} d\omega_0 = \sum_{m=1}^{g_0-1} S_{k,m} \oint_{a_m^+} \frac{1}{2} d\omega_0^+ \quad \Rightarrow \quad \oint_{a_m^+} d\omega_0^+ = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b_j^+} d\omega_0^+ = \widetilde{\Delta}_j^+ = \mathcal{U}_j^+(\widehat{\mathcal{P}}_\infty^+) - \mathcal{U}_j^+(\widehat{\mathcal{P}}_\infty^-),$$

где путь интегрирования, соединяющий точки $\widehat{\mathcal{P}}_\infty^-$ и $\widehat{\mathcal{P}}_\infty^+$, не пересекает ни один из базисных циклов. Т.е.

$$\widetilde{\Delta}_j^+ = 2 \int_{s_1^2}^{\infty^+} d\mathcal{U}_j^+.$$

Редукция решения при $g = 2g_0 - 1$, $g_0 \neq 1$

Вычисляя координаты вектора Δ, имеем $(1 \leq j \leq g_0 - 1)$

$$\Delta_j = 2\int_{-s_{2g_0}}^{-\infty} d\mathcal{U}_j = \int_{s_{2g_0}^2}^{\infty^+} d\mathcal{U}_j^+ - \int_{s_{2g_0}^2}^{+\infty} d\mathcal{U}_j^- = \frac{1}{2}\Delta_j^+ + \frac{1}{2},$$

$$\Delta_{g_0+j} = 2\int_{-s_{2g_0}}^{-\infty} d\mathcal{U}_{g_0+j} = -\int_{s_{2g_0}^2}^{\infty^+} d\mathcal{U}_{g_0-j}^+ - \int_{s_{2g_0}^2}^{+\infty} d\mathcal{U}_{g_0-j}^-$$

$$= -\frac{1}{2}\Delta_{g_0-j}^+ + \frac{1}{2},$$

$$\Delta_{g_0} = 2\int_{-s_{2g_0}}^{-\infty} d\mathcal{U}_{g_0} = -\int_{s_{2g_0}^2}^{+\infty} d\mathcal{U}_{g_0}^- = \frac{1}{2}.$$

где

$$\Delta_j^+ = 2\int_{s_{2g_0}^2}^{\infty^+} d\mathcal{U}_j^+.$$

Следовательно,

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e} + \Delta^+ \\ 1 \\ \mathrm{e} - M_{g_0-1}\Delta^+ \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S^t\Delta = \begin{pmatrix} \Delta^+ \\ \mathrm{e} \end{pmatrix}.$$

Заметим также, что выполняются равенства: $\widetilde{\Delta}^+ = \Delta^+ + \mathrm{e}$ и $\widehat{K}_0 = K_0^2$.

Редукция решения при $g = 2g_0 - 1$, $g_0 \neq 1$

Из теоремы о редукции многомерной тэта-функции Римана вытекают следующие равенства

$$\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, \mathrm{x}) + \Delta) = \sum_{\mathrm{m}\in\mathbb{Z}^g} \exp\left\{\pi i \mathrm{m}^t B \mathrm{m} + 2\pi i \mathrm{m}^t(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, \mathrm{x}) + \Delta)\right\} =$$

$$= \sum_{\mathrm{k}\in\mathbb{Z}^g(S)} \sum_{\mathrm{n}\in\mathbb{Z}^g} \exp\left\{\pi i (S\mathrm{n} + \mathrm{k})^t B (S\mathrm{n} + \mathrm{k}) + \right.$$

$$\left. + 2\pi i (S\mathrm{n} + \mathrm{k})^t (\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, \mathrm{x}) + \Delta)\right\} =$$

$$= \sum_{\mathrm{k}\in\mathbb{Z}^g(S)} \sum_{\mathrm{n}\in\mathbb{Z}^g} \exp\left\{\pi i (\mathrm{n} + \eta(\mathrm{k}))^t S^t B S (\mathrm{n} + \eta(\mathrm{k})) \right.$$

$$\left. + 2\pi i (\mathrm{n} + \eta(\mathrm{k}))^t (S^t \mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, \mathrm{x}) + S^t \Delta)\right\} =$$

$$= \sum_{\mathrm{k}\in\mathbb{Z}^g(S)} \Theta[\eta^+(\mathrm{k}); 0](\Delta^+ | 2B^+) \Theta[\eta^-(\mathrm{k}); 0] \left(\mathcal{A}^-(\mathrm{x}) + \mathrm{e} \middle| 2B^-\right) =$$

$$= \sum_{\mathrm{k}\in\mathbb{Z}^g(S)} (-1)^{2\mathrm{e}^t \eta^-(\mathrm{k})} \Theta[\eta^+(\mathrm{k}); 0](\Delta^+ | 2B^+) \Theta[\eta^-(\mathrm{k}); 0] \left(\mathcal{A}^-(\mathrm{x}) \middle| 2B^-\right)$$

и

$$\Theta(\mathcal{A}(\mathcal{P}_\infty^+, \mathrm{x})) = \sum_{\mathrm{k} \in \mathbb{Z}^g(S)} \Theta[\eta^+(\mathrm{k}); 0](0|2B^+)\Theta[\eta^-(\mathrm{k}); 0] \left(\mathcal{A}^-(\mathrm{x}) \middle| 2B^-\right).$$

Здесь сумма $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}^g(S)$ означает суммирование по $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}^g$, где

$$\eta(\mathrm{k}) = S^{-1}\mathrm{k}, \quad 0 \leq \eta_j(\mathrm{k}) < 1, \quad \eta(\mathrm{k}) = \begin{pmatrix} \eta^+(\mathrm{k}) \\ \eta^-(\mathrm{k}) \end{pmatrix}.$$

Число слагаемых в сумме равно $|\det(S)|$.
Из формул для матриц S и R вытекают следующие равенства: $S^{-1} = \frac{1}{2}R^t$ и $|\det(S)| = 2^{g_0}$. Можно показать, что этим условиям удовлетворяют следующие значения характеристики $\eta(\mathrm{k})$:

$$\eta_j^-(\mathrm{k}) \in \{0; 1/2\}, \quad j = 1, \dots, g_0, \quad \eta_j^+(\mathrm{k}) = \eta_j^-(\mathrm{k}), \quad j = 1, \dots, g_0 - 1.$$

Редукция решения при $g = 2g_0 - 1$, $g_0 \neq 1$

Таким образом, конечнозонное решение модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза в случае $g = 2g_0$ имеет вид

$$v(\mathrm{x}) = 2\widehat{K}_0^{1/2} \frac{\sum_{\eta^-} (-1)^{2\mathrm{e}^t\eta^-} \Theta[\eta^-; 0](\mathcal{A}^-(\mathrm{x})|2B^-)\Theta[\eta^+; 0](\Delta^+|2B^+)}{\sum_{\eta^-} \Theta[\eta^-; 0](\mathcal{A}^-(\mathrm{x})|2B^-)\Theta[\eta^+; 0](0|2B^+)},$$

где суммирование проходит по $\eta^- \in \mathbb{Z}^{g_0}$, $\eta_j^- \in \{0; 1/2\}$, $j = 1, \ldots, g_0$, $\eta_j^+ = \eta_j^-$, $j = 1, \ldots, g_0 - 1$, число слагаемых в суммах равно 2^{g_0}.

Спасибо за внимание

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (соглашение No 22-11-00196)