

# Математические вопросы теории открытых квантовых систем и геометрия пространства-времени

И.В. Волович

Отдел Математической физики  
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

*МИАН*  
*13-15 мая 2024 г.*

- Проект посвящён изучению математических вопросов теории квантовых открытых систем с учетом геометрических свойств пространства-времени.
- Исследование квантовой динамики в открытых системах важно как для развития математической физики, так и приложений, связанных с квантовыми технологиями.

- I. Математические задачи, возникающими при анализе проблемы Хокинга необратимой потери информации при квантовом излучении черных дыр (информационный парадокс)
- II. Теории открытых квантовых систем
- III. Теории бесконечномерных динамических систем

# Основные участники проекта РНФ

- д.ф.-м.н., И.В. Волович
- д.ф.-м.н., Катанаев Михаил Орионович,
- д.ф.-м.н. Козырев Сергей Владимирович
- д.ф.-м.н. Сакбаев Всеволод Жанович

# Тема I: информационный парадокс

- Проблема Хокинга необратимой потери информации при квантовом излучении черных дыр (информационный парадокс)
- Ставится задача: получить динамические модели, с помощью которых можно дать интерпретацию эволюции энтропии черных дыр при их испарении.
- Есть результаты в маломерных случаях. В 4-х мерном случае эта задача не решена.

# Уравнения Эйнштейна

- Пространство-время  $(M, g)$
- Уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

- Метрика Шварцшильда

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2$$
$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$$



# Черная дыра



# Волновое уравнение

- Волновое уравнение для скалярного поля

$$\square \phi = 0$$

- Решение

$$\phi_{\mathbf{R}} = \int_0^{\infty} d\omega (\mathbf{f}_{\omega} \mathbf{a}_{\omega} + \mathbf{f}_{\omega}^* \mathbf{a}_{\omega}^{\dagger})$$

$$[\mathbf{a}_{\omega}, \mathbf{a}_{\omega'}^{\dagger}] = \delta(\omega - \omega')$$

# Преобразование Боголюбова

- Шварцшильд  $\implies$  Крускал

$$a \implies b$$

$$\langle 0 | b_{\omega}^{\dagger} b_{\omega} | 0 \rangle = \frac{2M}{\pi\mu} \frac{1}{e^{8\pi M\omega} - 1}$$

- Температура Хокинга:

$$T_H = \frac{1}{8\pi M}$$

# Парадокс потери информации

- Чисто состояние  $\rightarrow$  Коллапс
- Излучение  $\rightarrow$  Смешанное состояние

- Однако

$$M \rightarrow 0$$

$$T_H \rightarrow \infty$$

- Взрыв

# Термодинамика черных дыр

- 1-ый закон

$$dM = TdS$$

- Энтропия

$$S_{\text{BH}} = \frac{\text{Area}}{4} = \frac{1}{16 \pi T^2}$$

- Энтропия

$$S_{\text{BG}} = \frac{L^d}{2^d \pi^{\frac{d}{2}} \beta^{\frac{d}{2}} \lambda^{\frac{d}{2}}} \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \zeta \left( \frac{d}{2} + 1 \right)$$

$\zeta$  - дзета функция Римана

# Бозе газ = Шварцшильд

$$S_{\text{BG}} \sim \beta^{-d/2}$$

$$S_{\text{BH}} \sim \beta^2$$

Отрицательные размерности:

$$-d/2 = 2 \Rightarrow d = -4$$

I. Aref'eva and I. Volovich, "Violation of the third law of thermodynamics black holes, Riemann zeta function and Bose gas in negative dimensions,"

Eur. Phys. J. Plus 139 (2024) 300

# Аналитическое продолжение по размерности пространства-времени

- 't Hooft and Veltman, Analytical continuity of QFT
- К. Wilson, Phase transition in statistical mechanical

$$d = 4 - \epsilon$$

# Задел по теме I

- Имеется следующий задел:
  - Построена единая теория термодинамики черной дыры Шварцшильда и Бозе газа
  - Это сделано с использованием аналитического продолжение по размерности пространства-времени и дзета-функции Римана



# Ожидаемые результаты по теме I

Обобщить результаты на случай:

- Заряженной черной дыры
- Вращающейся черной дыры
- Общие вопросы
  - Геометрия пространства-времени
  - vs.
  - операторная алгебра

## Тема II. Теории открытых квантовых систем

- Задел, см.

Доклад И.В., части посвященные работам И.В., С. Козырева, А.Трушечкина  
<https://www.mathnet.ru/rus/present42731>  
а также работы А. Теретенкова

- ожидаемые результаты

# Тема III. Теории бесконечномерных динамических систем

- Наиболее интересные примеры открытых квантовых систем рассматриваются в бесконечномерном гильбертовом пространстве.
- Будет проведено исследование качественных свойств траекторий бесконечномерных гамильтоновых систем, включая эргодичность, свойства блуждания и перемешивания



## Golconda by Rene Magritte

- Задел: Случайные блуждания в бесконечномерных пространствах и инвариантные меры,

V. Zh. Sakbaev, Flows in infinite-dimensional phase space equipped with a finitely-additive invariant measure. *Mathematics*, 11 (5), 1161, (2023)

# Спасибо за внимание!