Научно-образовательный центр при МИАН, весна 2024

Г.Б. Шабат,
СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Лекция 2 (19 февраля 2024)
Многообразия. Общий взгляд и начало классификации

2.0. Окольцованные пространства

Атласы не всегда удобны, а локально определённые функции некоторого класса – всегда.

2.0.0. Категория открытых множеств. Для $\mathbf{X} \in\in \mathcal{TOP}$ вводим <u>малую</u> категорию его открытых множеств $\mathcal{OP}_{\mathbf{X}}$. Его объекты – это просто открытые множества пространства $\mathbf{X}$, то есть

$$\mathcal{OP}_{\mathbf{X}} := \{U \mid U \in \mathrm{OP}_{\mathbf{X}}\}$$

(обратите внимание на шрифты!). Множество $\mathrm{OP}_{\mathbf{X}}$ частично упорядочено включением $\subseteq$, и морфизмы в $\mathcal{OP}_{\mathbf{X}}$ строятся так же, как и для любого частично упорядоченного множества – см. ниже.

Наша основная конструкция (структурного пучка на топологическом пространстве $\mathbf{X}$) будет определена в терминах малой категории $\mathcal{OP}_{\mathbf{X}}$. Можно ли восстановить топологическое пространство по этой малой категории? В случае утвердительного ответа пространство называется *трезвым*; это определение трезвости будет называться *категорным*, а равносильность категорного определения стандартному общетопологическому предлагается установить в задаче **2.1**.

2.0.1. Частично упорядоченные множества как малые категории. Для частично упорядоченного множества $(I, \preccurlyeq)$ определим малую категорию $\mathcal{I}$ с множеством объектов

$$\mathcal{I} = \{i \mid i \in I\}$$

и множествами морфизмов

$$\mathrm{MOR}_{\mathcal{I}}(i,j) := \begin{cases} \{*\}, \text{ если } i \preccurlyeq j, \\ \varnothing, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Здесь $\{*\}$ – произвольное одноэлементное множество.

В случае частично упорядоченного множества $(\mathrm{OP}_{\mathbf{X}}, \subseteq)$ lдля пары $U \subset V$ вводится обозначение морфизма включения

$$\iota_{U \hookrightarrow V} : U \hookrightarrow V$$

и обозначение множеств морфизмов переписывается:

$$\mathrm{MOR}_{\mathcal{OP}_{\mathbf{X}}}(U, V) := \begin{cases} \{\iota_{U \hookrightarrow V} : U \hookrightarrow V\}, \text{ если } U \subseteq V, \\ \varnothing, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Это переобозначение может показаться малосодержательным в рассматриваемом случае, но становится осмысленным при переходе к *этальной* топологии, которой, к сожалению, не найдётся места в нашем курсе.

2.0.2. Определение окольцованного пространства. *Окольцованным пространством* называется пара $(\mathbf{X}, \mathcal{O})$, где $\mathbf{X} \in\in \mathcal{TOP}$, а другая компонента пары – *функтор*

$$\mathcal{O} : \mathcal{OP}_{\mathbf{X}}^{\leftarrow} \longrightarrow\!\!\!\longrightarrow \mathcal{ANN}.$$

Здесь для категории $mathcalC$ через $\mathcal{C}^{\leftarrow}$ обозначена *инверсная* категория (стрелки перевёрнуты), а $\mathcal{ANN}$ – категория *коммутативных колец с единицей.*

Функтор $\mathcal{O}$ называется *структурным* (пред)пучков.

2.1. Что такое многообразие?

2.1.0. Уточнения. Топологические пространства $\mathbf{X}$ в парах $(\mathbf{X}, \mathcal{O})$ по умолчанию будут предполагаться *хаусдорфовыми*, *компактными* и *связными.* Иногда, впрочем, от этих предположений будет интересно (а иногда необходимо) отказаться.

Основное же предположение заключается в том, что, как уже обсуждалось, $\mathbf{X}$ – *топологические многообразия*, то есть локально гомеоморфны *евклидову шару*

$$\mathbb{B}_1(\mathbb{R}^n, ||) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x}| \leq 1\}.$$

В дальнейшем мы будем позволять себе обозначать этот шар просто $\mathbb{B}$.

Пучки[1] соответствующих классов непрерывных функций оределяются очевидным образом. Мы будем обозначать их $\mathcal{O}_{\mathbb{B}}$, считая, что класс функций ясен из контекста.

2.1.1. Какие многообразия не охвачены? Симплектические, комбинаторные и (увы!) в некотором смысле алгебраические.

2.1.2. Карты, атласы, отношения соседства. Под *картой* на любом многообразии $\mathbf{X}$ любого из рассматриваемых нам классов понимается любое открытое множество $\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$, для которого существует изоморфизм окольцованных

---

[1] Владеющий этим понятием слушатель легко проверит, что легко определяемые структурные <u>пред</u>пучки рассматриваемых классов являются пучками.

пространств
$$\big(\mathbf{U}, \mathcal{O}\big|_{\mathbf{U}}\big) \simeq \big(\mathbb{B}, \mathcal{O}_{\mathbb{B}}\big).$$
Существование карт, содержащих любую точку многообразия, следует из определения многообразий.

Любой набор карт, покрывающих многообразие, называется *атласом* (на многообразии). Из предположения о компактности рассматриваемых нами многообразий вытекает наличие конечных атласов.

Проекции шара на координатные оси определяют вложения вида
$$(x_1, \dots, x_n) : \mathbf{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$
или
$$(x_1, \dots, x_n) : \mathbf{U} \hookrightarrow \mathbb{C}^n$$
непрерывными, гладкими или голоморфными функциями. Во всех случаях $x_i \in \mathcal{O}(\mathbf{U})$, а набор $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ называется *набором локальных координат.*

Любые два набора $\vec{x} : \mathbf{U} \hookrightarrow \mathbb{k}^n$ и $\vec{y} : \mathbf{V} \hookrightarrow \mathbb{k}^n$ определяют *отношения соседства*
$$\vec{y} \circ \vec{x}^{-1\circ} : \vec{x}(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) \xrightarrow{\simeq} \vec{x}(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}),$$
задаваемые наборами функций класса $\mathcal{O}$. Многообразие с атласом
$$\mathbf{X} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{U}_\alpha$$
может быть определено как
$$\mathbf{X} = \frac{\coprod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{U}_\alpha}{\approx},$$
где $\approx$ – отношение эквивалентности, определённое отношение соседства. Такое определение многообразия целиком определяется наборами функций на открытых подмножествах пространств $\mathbb{k}^n$; оно часто встречается в старых учебниках по многообразиям.

2.1.3. Морфизмы. В этом курсе мы в основном будем заниматься классификацией многообразий с точностью до *изо*морфизма, но на всякий случай определение приведём. Проще всего дать его в наибольшей общности, в терминах окольцованных пространств.

Пусть $(\mathbf{X}, \mathcal{O})$ и $(\mathbf{X}', \mathcal{O}')$ – окольцованные пространства. Тогда морфизм из $(\mathbf{X}, \mathcal{O})$ в $(\mathbf{X}', \mathcal{O}')$ задаётся непрерывным отображением
$$f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}'$$
и для каждого открытого множества $\mathbf{V} \in \mathrm{Op}_{\mathbf{X}'}$ морфизмом колец
$$\mathcal{O}'(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathcal{O}\big(f^{-1\circ}(\mathbf{V})\big).$$
Все эти морфизмы должны быть согласованы определённым образом. Сформулировать эти требования, а также связать с общекатегорным понятием, предоставляется читателю в упражнении **2.7.**

Нетрудно также дать определение морфизма многообразий в классических терминах атласов и локальных координат. При этом, однако, придётся вести довольно много обозначений, а также вести некоторые структуры на множестве атласов.

2.2. Одномерные многообразия

Такое многообразие единственно: окружность $\mathbb{S}^1$. В дальнейшем сферы

$$\mathbb{S}^n := \left\{ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$$

будут играть важную роль в курсе.

$\mathbb{S}^1$ – одна из всего двух сфер, допускающих групповую структуру. Другая – сфера $\mathbb{S}^3$ единичных *кватернионов*.

Сфера $\mathbb{S}^1$ *параллелизуема*, как и любая группа. Иначе говоря, их касательные расслоения тривиальны. Другие параллелизуемые сферы – $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^7$ и $\mathbb{S}^{15}$.

Сферы, начиная с $\mathbb{S}^1$ – один из немногих классов многообразий, допускающие явную *триангуляцию*.

Сглаживаемость топологических окружностей – нетривиальный результат.