КВАДРАТИЧНЫЕ ЭКСПОНЕНТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ: КОНЕЧНЫЕ СУММЫ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, РЯДЫ

Ситник Сергей Михайлович

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

СПб семинар по истории математики, 7 марта 2024 г.

План доклада

Квадратичные экспоненты:

1. Конечные суммы
2. Интегральные преобразования
3. Ряды

$$L_1(x, y) = \exp(iaxy), Q_2(x, y) = \exp(i(ax^2 + by^2 + cxy)), x, y \in \mathbb{R}$$

$$R_3(z) = \exp(az^2 + bz + c), z \in \mathbb{Z}, a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

План доклада

Классические объекты:

1.
$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} \exp(kt), t = \ln(x),$$
$$(S(w) = \sum_{k=0}^{n} \exp(ikw)).$$

2.
$$F(f(x))(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixt) f(x)\, dx.$$

3.
$$T(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, |z| \leq 1.$$

План доклада

Аналоги с квадратичными экспонентами:

1.
$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{k^2} = \sum_{k=0}^{n} \exp(k^2 t), t = \ln(x),$$
$$(S(w) = \sum_{k=0}^{n} \exp(ik^2 w)).$$

2.
$$F(f(x))(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iQ(x,t))\, f(x)\, dx.$$

3.
$$T(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2}, |z| \leq 1.$$

Основные темы доклада

СУММЫ ГАУССА, символы Лежандра, ДПФ, МДПФ ...

====================

КВАДРАТИЧНОЕ (ДРОБНОЕ) ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ,

Интегралы Френеля, преобразование Вейерштрасса, ПДО Броса-Ягольницера ...

====================

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМ СДВИГАМ ФУНКЦИЙ ГАУССА

опыт Фраунгофера, волны Френеля, когерентные состояния, пакет Gaussian ...

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855)

Квадратичные экспоненты: конечные суммы, суммы Гаусса

Геометрическая прогрессия: $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \exp(ixk)$

Суммы Гаусса: $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \exp(ixk^2)$

$$Q(x)\bar{Q}(x) = |Q(x)|^2, Q(x) = \pm(???!!!)\sqrt{|Q(x)|^2}.$$

$\pm(???!!!)$ — 11 лет!
Закон квадратичной взаимности.
Современные доказательства — используют символ Лежандра, тета-функции Якоби.

Символ Лежандра. Линеаризация.

$$G(n) = \sum_{k=0}^{n} \exp(\frac{2\pi i k^2}{n}) = \begin{cases} \sqrt{n}, n = 1(mod 4) \\ i\sqrt{n}, n = 3(mod 4). \end{cases}$$

Вычисление - задачник Фаддеев, Соминский.

Кубические суммы: $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \exp(ixk^3) - - - ???$

Метод тригонометрических сумм.

Berndt, B. C.; Evans, R. J.; Williams, K. S. (1998). Gauss and Jacobi Sums. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. Wiley.

Квадратичные экспоненты: ДПФ

Дискретное преобразование Фурье — ДПФ.

$$f_{kj} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp(-i\frac{2\pi kj}{n}), \ 0 \le k \le n-1, \ 0 \le j \le n-1.$$

Свойства: унитарность, $F_n^4 = I$, спектр.
Резольвенты, спектральные проекторы.
След — это сумма Гаусса !!!

$n = 4$

$$F_4 = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

Как устроена матрица, связь с корнями из единицы.

Важность ДПФ для приложений определяется в том числе и тем, что задачи о вычислении ДПФ, циклической свертки последовательностей, произведения больших чисел или многочленов по существу эквивалентны. Фундаментальное значение также имеют быстрые алгоритмы ДПФ, в которых число необходимых операций уменьшено по сравнению с обычным бесхитростным вычислением за счёт изощрённой оптимизации порядка выполнения действий. Наиболее известны быстрые алгоритмы Гуда, Кули и Тьюки, Винограда, Рейдера. Фундаментальную роль ДПФ играет в современной криптографии.

Несмотря на широкую известность преобразования ДПФ, некоторые стандартные задачи для него имеют малоизвестные широкому кругу специалистов свойства. Рассмотрим в качестве примера естественную задачу о нахождении спектра ДПФ при любом n. Решение этой задачи отсутствует в литературе по преобразованиям Фурье и нетривиально. Известно, что четвертая степень ДПФ есть тождественное преобразование, поэтому собственными значениями могут быть лишь числа $\pm 1, \pm i$. Вопрос состоит в вычислении кратностей этих чисел. Аналогия с непрерывным преобразованием Фурье, для которого четыре этих числа совершенно равноправны, приводит к весьма правдоподобному предположению, что хотя бы в случае размерности $n = 4N$ собственные значения ДПФ также равноправны, и, следовательно, все имеют кратность N . Однако вычисления уже при $n = 4$ опровергают это предложение. В этом случае значения $-1, -i$ являются простыми, значение 1 имеет кратность 2 , а значение i вообще отсутствует в спектре! Всё это нарушает симметрию спектра, присущую непрерывному случаю.

Квадратичные экспоненты: ДПФ

n	***1***	***i***	***-1***	***-i***
2	1	0	1	0
3	1	1+	1	0
4	2	0	1	**1+**
5	2	**1+**	1	1
6	2	1	**2+**	1
7	2	1	2	**2+**
8	**3+**	1	2	2
9	3	**2+**	2	2
10	3	2	**3+**	2
11	3	2	3	**3+**
12	**4+**	2	3	3
13	4	**3+**	3	3
14	4	3	**4+**	3
15	4	3	4	**4+**
16	**5+**	3	4	4

Квадратичные экспоненты: ДПФ

n	1	i	-1	- i
4N	***N+1 (+)***	N-1	N	N
4N+1	N+1	***N (+)***	N	N
4N+2	N+1	N	***N+1 (+)***	N
4N+3	N+1	N	N+1	***N+1 (+)***

Таблица: размерности собственных подпространств.

Пусть размерность $N = 4m$. Спектральное распределение размерности.

НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ, НАРУШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО РАВНОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Данный результат был для произвольного значения n доказан знаменитым математиком Исаем Шуром (I. Schur) в 1921 году, результат несколько раз переоткрывался и стал фольклорным. (Отметим, что в одной замечательной книге, знаменитой множеством нестандартных фактов и заключений, Исайа Шур назван белорусским математиком, он действительно родился в Бобруйске). Основным моментом при доказательстве неожиданно является тот факт, что для нахождения указанных кратностей необходимо вычисление знаменитых квадратичных тригонометрических сумм Гаусса, которые являются следами матриц ДПФ. Нахождение точной формулы для квадратичных тригонометрических сумм заняло у Гаусса около 10 (!) лет с 1801 по 1811, сам он написал об этой задаче, "что решение многих трудных вопросов теории чисел не отняло столько дней, сколько взяло лет работы решение вопроса об этом". Для сравнения, теория гипергеометрических функций была создана Гауссом за несколько месяцев, что прослеживается по его подробным дневникам.

Непросто выписываются и соответствующие наборы собственных векторов для матрицы ДПФ. В этом направлении представляют интерес либо несложные алгоритмы получения собственных векторов, либо их особенно простой вид. Например, интересны вещественные наборы собственных векторов.
Заметим, что матрица ДПФ составляется нами по очевидному геометрическому способу: корни из единицы обходятся против часовой стрелки. Например, при n=4 порядок такой: $1, -i, -1, i$. Но равновозможны и логичны и все другие способы упорядочивания множества корней, при этом возникает целое множество различных новых модифицированных дискретных преобразований Фурье.

Квадратичные экспоненты: МДПФ

Определение. *Рассмотрим множество корней степени n из единицы, упорядоченное произвольным способом: $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Назовём модифицированным дискретным преобразованием Фурье (МДПФ), построенным по данной перестановке множества корней из единицы, оператор с матрицей размеров $n \times n$, для которой в строке с номером k стоят величины $r_1^{k-1}, r_2^{k-1}, \ldots, r_n^{k-1}$ в соответствии с выбранной перестановкой.*

Ясно, что в результате получится некоторая матрица Вандермонда. Мы будем также нормировать эту матрицу множителем $\frac{1}{\sqrt{n}}$. В результате получится такая матрица МДПФ:

$$F_r = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \ldots & r_n^2 \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Всего при данном n получится $n!$ различных модифицированных преобразований. Обычное классическое ДПФ вместе с его обратным также входят в этот набор, остальные являются новыми. Так при $n = 4$ получаются 24 различных МДПФ, при $n = 5$ получаются 120 преобразований. Далее нашей целью является изучение спектральных свойств указанных новых модифицированных преобразований Фурье. В частности, представляют особый интерес при $n = 4N$ преобразования с симметричным спектром (при $n = 4$ с простым), что не выполняется для обычных ДПФ ни в каких размерностях. Такие преобразования с симметричным спектром являются в определённом смысле более естественными, чем обычное ДПФ, так как они более похожи на свой непрерывный аналог в плане равноправности точек спектра. Не исключено, что такие преобразования за счёт более простых спектральных свойств могут оказаться полезными при различных приложениях.

Далее приводятся результаты расчётов на компьютере для случая n=4. Получившиеся 24 модифицированных преобразования Фурье разбиты нами на группы из похожих по своим свойствам преобразований. Далее мы указываем номер соответствующего преобразования, образующую его перестановку корней и для каждой группы кратко перечисляем основные особенности на примере первого преобразования из данной группы. 1) $r = (1, -i, -1, i)$ (это обычное ДПФ), 2) $r = (1, i, -1, -i)$ (это его обратное). Квадрат преобразования с номером 1 является действительной матрицей перестановок вида

$$F_r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

спектр кратный $(1, 1, -1, -i)$, характеристический полином получен в явном виде: $x^4 - (1-i)x^3 - (1+i)x^2 + (1-i)x + i$, как и набор действительных собственных векторов:
$(-1, 1, 1, 1), (0, -1, 0, 1), (2, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)$.

3) $r=(-1,i,1,-i)$ 4) $r=(-1,-i,1,i)$.
Квадрат преобразования с номером 3 является действительной матрицей вида

$$F_r^2=\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

спектр кратный $(1,i,i,-i)$, характеристический полином получен в явном виде

$$x^4-(1+i)x^3+(1+i)x^2-(1+i)x+i,$$

как и набор комплексных собственных векторов:
$(0,-1,0,1),(-1,-2i,1,0),(i,1,-i,1),(1,0,1,0)$.
В случаях 1–4 перестановки состоят из корней, занумерованных по кругу, причём нумерация начинается не с первообразных корней -1,1. Четвёртая степень преобразования есть единичная матрица. Построено явно диагонализирующее преобразование.

5) $r=(-1,i,1,-i)$, 6) $r=(-1,-i,1,i)$, 7) $r=(i,-1,-i,1)$, 8)$r=(-i,-1,i,1)$.

В случаях 5-8 перестановки состоят из корней, занумерованных по кругу, причём нумерация начинается с первообразных корней $-i, i$. Степени преобразования с номером 5 имеют вид:

$$F_r^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, F_r^4=\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \qquad F_r^{16}=E.$$

Отметим, что F_r^2 напоминает матрицы спинорных представлений, а её ненулевые блоки похожи на матрицы Паули. Это модифицированное МДПФ имеет простой спектр, состоящий из значений $\sqrt[4]{i}$, в отличии от классического преобразования той же размерности с кратным спектром !!! Характеристический полином получен в явном виде: x^4-i.

С этого момента начинаются вычислительные затруднения у пакета
MATHEMATICA, он не смог посчитать по одной компоненте каждого из собственных векторов по своему алгоритму, выдав их как корни некоторых уравнений высокой степени. Например, первому собственному значению соответствует такой собственный вектор

$$\{s, (1-\sqrt{2}+\sqrt{4-2\sqrt{2}})i, \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, 1\},$$

где s является первым по нумерации пакета MATHEMATICA корнем возвратного уравнения восьмой степени

$$s^8-8s^7+32s^6-24s^5+2s^4+24s^3+32s^2+8s+1=0.$$

9) $r=\{1,-1,i,-i\}$, 10) $r=\{1,-1,-i,i\}$, 11) $r=\{1,i,-i,-1\}$, 12) $r=\{1,-i,i,-1\}$.

Это оставшиеся перестановки, начинающиеся с 1.

Квадрат преобразования с номером 9 является комплексной матрицей следующего вида

$$F_r^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}+\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{i}{2} & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Аналогично устроены другие чётные степени данной матрицы.

Это МДПФ также имеет простой спектр:

$$\{-\frac{\sqrt{7}+1}{4}-\frac{\sqrt{7}-1}{4}i, \frac{\sqrt{7}-1}{4}+\frac{\sqrt{7}+1}{4}i, -1, 1\}.$$

Характеристический полином получен в явном виде:

$$x^4+(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})x^3-(1+i)x^2-(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})x+i.$$

Найден в явном виде набор из двух комплексных и двух вещественных собственных векторов:
$\{0,\frac{1}{2}i\left((2+i)+\sqrt{7}\right),-\frac{1}{2}i\left((2-i)+\sqrt{7}\right),1\}$,
$\{0,-\frac{1}{2}i\left((-2-i)+\sqrt{7}\right),\frac{1}{2}i\left((-2+i)+\sqrt{7}\right),1\}$, $\{-1,1,1,1\},\{3,1,1,1\}$.
Осталось рассмотреть оставшиеся преобразования.

$13)r=\{i,1,-1,-i\},14)r=\{-i,1,-1,i\},15)r=\{-1,1,i,-i\},16)r=\{-1,1,-i,$

$17)r=\{i,-1,1,-i\},18)r=\{-i,i,1,-1\},19)r=\{-i,-1,1,i\},20)r=\{i,-i,1,-$

$21)r=\{i,-i,-1,1\},22)r=\{-i,i,-1,1\},23)r=\{-1,i,-i,1\},24)r=\{-1,-i,i,$

Для первого их них с номером 13 квадрат преобразования является комплексной матрицей следующего вида

$$F_r^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & -\frac{1}{2}+\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}+\frac{i}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}-\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}-\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Остальные степени состоят из заполненных матриц со всё более громоздкими элементами.

Все эти МДПФ имеют простой спектр !!! Для преобразования с номером 13 спектр состоит из значения 1 и трёх занумерованных в определённом порядке корней уравнения

$$2s^6 - 2s^5 + 3s^4 - 2s^3 + 3s^2 - 2s + 2 = 0,$$

которые MATHEMATICA не сумела вычислить в явном виде (хотя это возможно, так как данное возвратное уравнение сводится к кубическому). Характеристический полином получен в явном виде:

$$x^4 - (\frac{3}{2} + \frac{i}{2})x^3 + (1+i)x^2 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i)x + i.$$

Собственный вектор один найден в явном виде {1,1,-1,1}, в трёх остальных по одной компоненте равны 1, остальные найдены в неявном виде как занумерованные в определённом порядке корни уравнений вида

$$s^6 + 2s^5 + 6s^4 + 14s^3 + 25s^2 + 12s + 4 = 0, s^3 - s^2 - 4s + 2 = 0.$$

Таким образом, получается довольно неожиданный результат, что подавляющее большинство МДПФ при n=4 в плане спектральных свойств устроены проще стандартного, так как все они имеют простой спектр. Из приведённых результатов вычислений следует, что лишь четыре преобразования имеют кратный спектр, как и классическое. Они отвечают случаям, когда в перестановке корни обходятся на единичной окружности по часовой стрелке или против неё, причём начиная не с первообразных корней. При этом, МДПФ, отвечающие обходу по окружности при старте с первообразных корней, по-видимому, обладают наиболее простыми спектральными свойствами.

Некоторые обобщения, дополнения и приложения.

При произвольных n доказана унитарность всех МДПФ. Следовательно, все их спектры лежат на единичной окружности, и получен явный вид обратных преобразований. Это несложно установить пользуясь тем, что все МДПФ являются произведениями обычного ДПФ и соответствующих матриц перестановок. Отметим, что некоторые частные случаи рассмотренных здесь матриц МДПФ известны и используются в современных быстрых алгоритмах Гуда и Рейдера.

К сожалению, установить строго другие содержательные результаты о спектральных свойствах при произвольных n не удаётся ввиду сложности доказательств. При помощи компьютера для небольших n вычислены начальные степени преобразований, проекторы на собственные подпространства и резольвенты, различные стандартные алгебраические факторизации матриц. На основании анализа компьютерных вычислений представляется верной следующая гипотеза.

Гипотеза 1. При всех размерностях матриц МДПФ, кратных четырём, размерности собственных подпространств не совпадают только для МДПФ, отвечающим циклическим круговым перестановкам, которые начинаются не с первообразных корней. Если эта гипотеза верна, то за стандартный ДПФ выбран самый неудачный вариант с точки зрения вопроса о простоте устройства спектра.

Гипотеза 2. Все МДПФ имеют базис из вещественных собственных векторов.

Заметим, что автору не известен общий критерий наличия вещественного базиса из собственных векторов у произвольной комплексной матрицы. Для обычного ДПФ идея построения следующая. Пусть уже вычислены кратности всех собственных чисел и соответствующие проекторы на собственные подпространства, тогда собственные вектора можно получить по следующему элементарному алгоритму: выбрать стандартный базис (а в принципе - и любой другой), и подействовать на орты последовательно всеми проекторами нужное число раз с учётом кратности значений спектра. К сожалению, полного набора собственных векторов при произвольном выборе начального базиса может и не получится.

Мы рассмотрели в работе варианты с перестановками корней, то есть столбцов матрицы обычного ДПФ. Можно рассмотреть дальнейшее обобщение, когда одновременно переставляются и строки, то есть мы отказываемся от того, чтобы МДПФ определялось степенной матрицей. Такие преобразования также являются унитарными и частично исследованы на компьютере. Их удобно использовать для анализа сигналов, в которых редкие ненулевые элементы разбросаны среди нулевых. Для таких сигналов ДПФ неустойчиво при вычислениях и обладает другими нежелательными свойствами. Тогда можно при помощи первой матрицы перестановки собрать все ненулевые элементы вместе, выполнить преобразование, а затем при помощи второй матрицы обратной перестановки восстановить первоначальный порядок следования элементов в массиве данных. Применение МДПФ к преобразованному сгруппированному сигналу является более предпочтительным и даёт ряд вычислительных преимуществ.

Введённые МДПФ позволяют также обобщить тригонометрические суммы Гаусса.

Определение. Обобщённой квадратичной суммой Гаусса называется след матрицы соответствующего МДПФ, то есть

$$G(P,Q,n)=\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(i\frac{2\pi}{n}p(k)q(k)\right),P=(p(0),p(1),...,p(n-1)),$$
$$Q=(q(0),q(1),...,q(n-1)),$$

где P,Q – две произвольные перестановки множества чисел $(0,1,\ldots,n-1)$.

ОТКРЫТАЯ ПРОБЛЕМА. Вычислить в явном виде обобщённые квадратичные суммы Гаусса в терминах заданных перестановок P и Q, порождающих соответствующее МДПФ.

Авторам представляется, что это чрезвычайно сложная задача, никаких даже приблизительных путей её решения в настоящее время не видно (с такой оценкой согласился в частной переписке и один из авторов монографии, приведённой выше, Bruce Berndt). Тем не менее, решение сформулированной открытой проблемы позволило бы находить размерности собственных подпространств МДПФ при любых размерностях теоретически, без компьютера.

Представляют также интерес быстрые модифицированные ДПФ в сравнении со стандартным БПФ.
Отметим, что ДПФ широко применяются в криптографии. На основе результатов настоящей работы можно предложить следующий алгоритм шифрования информации. Отправитель и получатель заранее знают, какой из вариантов МДПФ данного порядка используется при обмене, а противнику (атакующему) это не известно. Ввиду огромности числа $n!$ подобный алгоритм может быть не менее стойким, чем стандартные алгоритмы с большой длиной ключа. Кроме того, при данном методе требуется минимальная модификация существующих алгоритмов и программ, сводящаяся к простой замене одной матрицы на другую. Кроме того, модифицированное преобразование Фурье и суммы Гаусса связаны с квадратичным или дробным преобразованием Фурье, которое находит применения в методе квадратичной экспоненциальной аппроксимации сигналов

Квадратичные экспоненты: интегральные преобразования

Augustin–Jean Fresnel (1788 — 1827)

Опыт Фраунгофера. Волны Френеля.
Квадратичные экспоненты как падающие волны. Интегралы Френеля.

Квадратичные экспоненты: когерентные состояния

Современная оптика - теория когерентных состояний.
Когерентные состояния — это функции вида (например)

$$f(x, a, b) = \exp(iax) \times \exp(ibx^2).$$

Проблема полноты.
Преобразование Баргмана, пространство Фока.
Пакет GAUSSIAN.

1. Переломов А. М. Обобщённые когерентные состояния и их применения.
Москва : Наука, 1987. – 272 с.
2. Бутырская Е. Компьютерная химия: основы теории и работа с программами Gaussian и GaussView.
М., Солон-пресс, 2011.- 224 с.
3. Лекции по пространствам Фока, преобразованию Баргмана - интернет ???

Многоликое квадратичное преобразование Фурье

Fractional/Quadratic/Fresnel/Bohr/Wiener Fourier transform.

$$(F^\alpha f)(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-e^{2i\alpha})}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}i(x^2+y^2)\cot(\alpha)} e^{ixy\csc(\alpha)} f(x)dx;$$

Это действительно дробная степень преобразования Фурье.
Это действительно полугруппа.

$$L_\nu = -\frac{1}{4}D^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{\nu+1}{2}.$$

Литература

1. Ozaktas H., Zalevsky Z., Kutay M.The Fractional Fourier Transform: with Applications in Optics and Signal Processing.—Wiley, 2001.—513 p.
2. Alexander D. Poularikas. Transforms and Applications Handbook, Third Edition. 2010 by CRC Press, 911 p.
3. Elina Shishkina, Sergei Sitnik. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. 2020, Elsevier. Academic Press. 592 P.
4. Ситник С.М., Шишкина Э.Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя, 2019, ФИЗМАТЛИТ, 224 стр.
5. Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений.
Современная математика. Фундаментальные направления. 2018, Том 64, № 2. С. 211–426.

Приложение к оценке нормы преобразования Фурье

Неравенство Бабенко - Бекнера.

$$||Ff||_q \leq c(p,q)||f||_p, 1/p + 1/q = 1, 1 < p \leq 2,$$

постоянная Бабенко- Бекнера

$$c(p,q) = \left(p^{1/p} q^{1/q}\right)^{n/2}.$$

При доказательстве используется квадратичное преобразование Фурье и неравенство для средних в комплексной плоскости. Равенство достигается только на функциях Гаусса - квадратичных экспонентах.

$$F(L_1)$$

- неизвестен !!!!

Рассмотрим задачу В.Паули. В краткой формулировке она состоит в определении по модулю функции или её преобразования Фурье фазы этой функции. Такая задача возникла не на пустом месте. Для функций, возникающих в теории рассеяния, такая связь между фазой и амплитудой действительно существует, она выражается так называемыми дисперсионными соотношениями с применением преобразований Гильберта на полуоси.

Приведём точную формулировку.

ЗАДАЧА ПАУЛИ.

Пусть $f \in L_2$. Можно ли восстановить саму функцию (с точностью до множителя, равного по модулю единице), если известны модуль самой функции и её преобразования Фурье?

Достаточно давно к этой задаче был дан отрицательный ответ, построены контрпримеры, демонстрирующие неединственность. При этом в том числе использовались разложения в ряды по сдвигам функций Гаусса, которые мы рассмотрим кратко ниже. Но недавно совершенно неожиданно было показано, что это дефект только классического преобразования Фурье. А для квадратичных преобразований Фурье любого порядка, кроме классического, единственность в задаче Паули имеет место и ответ положительный. Это показывает ещё с одной стороны полезность семейства КПФ.

Задача Н.И.Ахиезера

Известно, что от интегрального определения классического преобразования Фурье при определённых условиях можно перейти к определению этого преобразования в виде ряда.

Definition

Пусть f_n — это коэффициенты разложения функции $f(x)$ по ортонормированной системе функций Эрмита $H_n(x)$. Тогда преобразование Фурье можно определить формулой

$$(Ff)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\pi i n) f_n H_n(t). \tag{1}$$

Задача Н.И. Ахиезера. Вывести из определения в виде ряда (1) интегральную форму преобразования Фурье.

Ахиезер Н.И. Лекции об интегральных преобразованиях. Харьков, 1984.

стр. 47 (48).

Эта задача имеет прямой путь решения, который приводит к цели, но с обманом: подставить в формулу (1) выражения для коэффициентов f_n по системе Эрмита, переставить ряд и интеграл, под интегралом получается билинейное ядро, которое суммируется по формуле Мелера ([?], с. 194, форм. (22)) к нужному ответу. Только в формуле Мелера параметр должен лежать строго внутри единичного круга, а в нашем случае он попадает точно на его границу, и формула неприменима. Таким образом, суть этой задачи состоит в строгом обосновании перестановки ряда и интеграла на границе сходимости некоторого билинейного ряда по функциям Эрмита. Автор не знает решения этой задачи сам, и не узнал его от многих коллег, с которыми эту задачу обсуждал.

Для квадратичного преобразования Фурье естественнее давать как раз сначала определение в виде ряда, а не в виде достаточно длинной интегральной формулы.

Definition

Пусть f_n — это коэффициенты разложения функции $f(x)$ по ортонормированной системе функций Эрмита $H_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n H_n(x). \tag{2}$$

Тогда квадратичное преобразование Фурье с параметром α можно определить формулой

$$(F^{\alpha} f)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(\alpha i n) f_n H_n(t). \tag{3}$$

Отметим, что при таком определении $F^{-\pi}$ — это обычное преобразование Фурье, F^{π} — его обратное, F^0 — тождественное преобразование. Справедливы естественные свойства

$$(F^{\alpha})^{-1} = (F^{-\alpha}), \quad F^{\alpha}F^{\beta} = F^{\alpha+\beta}. \tag{4}$$

Обобщённая задача Ахиезера для квадратичного преобразования Фурье Вывести из определения в виде ряда интегральную форму квадратичного преобразования Фурье (2).

Отметим, что обобщённая задача для квадратичного преобразования Фурье даже важнее, чем для классического, так как позволяет первоначально использовать определение в виде ряда, а затем вывести из него интегральное представление.

Для квадратичного преобразования Ханкеля можно также сформулировать обобщённую задачу Ахиезера. В этом случае функция и квадратичное преобразование Ханкеля разлагаются в ряды по системе ортонормированных функций Лагерра на полуоси, роль формулы Мелера играет аналогичная формула для билинейного ряда по функциям Лагерра — это формула Хилле–Харди

Ozaktas H., Zalevsky Z., Kutay M. The Fractional Fourier Transform: with Applications in Optics and Signal Processing.—Wiley, 2001.

Осипов В. Ф. Почти периодические функции Бора–Френеля.—Санкт–Петербург: изд.–во С.–П.У., 1992.

Абжандадзе З. Л., Осипов В. Ф. Преобразование Фурье–Френеля и некоторые его приложения.— Санкт–Петербург: С.–П.У., 2000.

QUADRATIC EXPONENTIALS: Series

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f_k \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2s^2}\right),$$

$$g(m) = f(m), m \in \mathbb{Z}.$$

Why use Gaussians?

1. Fresnel waves.
2. Gabor frames. Nobel prize for holography.
3. GAUSSIAN package. Nobel prize for computer package!!!

(in fact for applications in biology, chemistry, quantum phasics...)

QUADRATIC EXPONENTIALS: Series

Three main approaches:

1. Special functions — theta functions.
2. Use of DFT and Jacobi–Poisson summation.
3. Linear systems.

References:

1. V. Maz'ya, G. Schmidt. Approximate approximations/ Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys and Monographs, 2007. 349 P.
2. Zhuravlev M. V., Kiselev E. A., Minin L. A., Sitnik S. M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions// Journal of Mathematical Science, Springer. — 2011. — 2(173). — P. 131–140.
3. E. A. Kiselev, L. A. Minin, I.Ya.Novikov, S. M. Sitnik. On the Riesz Constants for Systems of Integer Translates. Mathematical Notes. Springer. 2014, Vol. 96, issue 1-2, pp. 228-238.
4. Sitnik S. M., Timashov A.S., Ushakov S.N. Finite dimensional applications for quadratic exponential approximation. Scientific

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!