Геометрическое доказательство ослабленной формулировки теоремы Хилла-Хопкинса-Равенела об инварианте Кервера (фрагмент)

П.М.Ахметьев

Семинар "Некоммутативная геометрия и топология";
14 декабря 2023

Предварительные определения

Пусть $r \ge 3$, $r \equiv -1 \pmod 3$– произвольное натуральное число.

Определение классифицирующего пространства

Пространство K представлено в виде объединения подпространств

$$K^{[r-s]}(k_1, \dots, k_s), \qquad 1 \le s, \le r. \tag{1}$$

которые мы называем элементарным стратом глубины $r - s$ по определенному правилу.

Определим элементарный страт при помощи системы координат. Для упрощения обозначений предположим, что $s = r$ фиксировано и максимально. Обозначим через $(\check{x}_{1,j}, \check{x}_{2,j})$, $j = 1, \dots, r$ набор упорядоченных r-пар точек на стандартной окружности S^1, причем требуется, чтобы $\check{x}_{1,j} = \omega_j \check{x}_{2,j}$, $\omega_j = \pm\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \in S^1$.

Если при этом выполнено сразу для всех j соотношение: $\check{x}_{1,j} = \mathbf{i}\check{x}_{2,j}$, или соотношение $\check{x}_{1,j} = -\mathbf{i}\check{x}_{2,j}$, то такой исключительный страт называется антидиагональным и не рассматривается.

Введем координату λ, называемую координатой момента, вдоль которой менее глубокие страты примыкают к более глубоким. Страт глубины $r - s + 1$ соединен двумя отрезками с двумя стратами глубины $r-s$. Предположим, что $s=0$, рассмотрим страт глубины 1 в котором пропущена угловая координата с номером j. Такой страт соединяется отрезком с каждым максимальным стратом, в котором k-угловые координаты те же самые при $k \neq j$; при $k=j$ две новых координаты на максимальном страте различаются значением вычета $\omega_j = \pm\mathbf{i}$.

Если имеется квадрат, составленный из отрезков, соединяющих между собой 4 максимальных страта с различными вычектами ω_j, ω_k, то к страту глубины 2 соостоящему из угловых координат с номерами, отличными от j,k подклеивается центр 2-клетки, границей которой служит указанный черырехугольник. Более глубокие клетки комплекса нам не понадобятся. Построенный комплекс обозначим через K.

Для каждого элементарного (неантидиагонального) страта пару наборов угловых координат можно рассматривать с точностью до 8 преобразований: Два независимых антиподальных преобразования углов в каждом наборе и перенумерация наборов. Это означает, что определено свободное действие группы диэдра $\mathbf{D}$ порядка 8 на комплексе K. При этом определена следующая диаграмма подгрупп, определяющая диаграмму двулистных накрытий:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_4(b^2) \arrow[rr, hook] \arrow[dd, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4(b) \arrow[dd, hook] \\
& \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4(A, \dot{A}) \arrow[dr, hook] & \\
\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4(a, \dot{a}) \arrow[rr, hook] & & C = (a, b)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
K_{b^2} \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & K_b \arrow[dd] \\
& \overline{K} \arrow[dr] & \\
K_{a\dot{a}} \arrow[rr] & & K
\end{tikzcd}$$

В этой диаграмме пространство K_{b^2}, обозначается через $[(x,y),\lambda]$, причем координату момента λ можно опустить. В пространстве K_{b^2} точка (x,y) совпадает с точкой $(-x,-y)$, но не с точками $(\mathbf{i}x,\mathbf{i}y)$,$(-\mathbf{i}x,-\mathbf{i}y)$.

Предписанная система угловых координат на максимальном страте

Вспомним, что угловые координаты на пространстве K определены неоднозначно, а с точностью до преобразования из $\mathbf{D}$. Скажем, что система координат на максимальном элементарном страте предписанная, если число вычетов $\omega_j = +\mathbf{i}$ составляет больше половины от полного числа вычетов r, (r–нечетно, среди набора вычетов есть вычеты как $+\mathbf{i}$, так и $-\mathbf{i}$.)

Конструкция эквивариантного морфизма над расслоений над K_{b^2} слой прообраза неупорядоченная пара двух вещественных прямых, слой образа $\mathbb{C}$

Definition 1. Рассмотрим полиэдр $K^{(1)}_{b^2}$, который состоит из всех стратов глубины 1, 0. Определим следующее τ_a-инволютивное дизъюнктное объединение:

$$K^{(0)}_{b^2,t} \cup K^{(0)}_{b^2,s} = K^{(0)}_{b^2}. \tag{2}$$

Выберем в $K^{(0)}_{b^2,t}$ все максимальные страты для которых предписанная система координат имеет вычетов $+\mathbf{i}$ более половины (скажем, что предписанная система координат привязана к Δ_+). Выберем в $K_{b^2,s}$ все остальные максимальные страты, т.е. такие, для которых предписанная система координат содержит вычетов $-\mathbf{i}$ более половины от общего числа r. Инволюция τ_a переставляет пространства $K^{(1)}_{b^2,t}$ и $K^{(1)}_{b^2,s}$ в (3), эта инволюция переводит вычет угловой координаты в сопряженный вычет соответствующей угловой координаты. Тем самым, инволюция τ_a переводит предписанный набор вычетов на страте в сопряженный предписанный набор. Формула (2) определена. Эта формула продолжается на весь полиэдр $K^{(1)}_{b^2}$ следующим способом:

$$K^{(1)}_{b^2,t} \cup K^{(1)}_{b^2,s} = K^{(1)}_{b^2}. \tag{3}$$

Над пространством $K^{(1)}_{b^2} = K^{(1)}_{b^2,t} \cup K^{(1)}_{b^2,s}$ определим пару расслоений, которые снабжены инволюциями τ_i, τ_b, τ_i и определим эквивариантный морфизм этих расслоений. Если мы опустим инволюцию τ_a, то над факторпространством $K^{(1)}$ окажутся тривиальными.

Слой $E_{\mathbb{R}}$ является дизъюнктным объединением двух вещественных прямых $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$: $E_{\mathbb{R}} = K^{(1)}_{b^2} \times (\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R})$. Единичные вектора слоев $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ над $K^{(1)}_{b^2,t}$ обозначаются через $\pm t_+$, $\pm t_-$. Базисные вектора определяют лучи на прямых.

Неформально говоря, в нижеследующей конструкции морфизма нижний индекс $\pm$ для слоя прообраза в t-страте ассоциирован с мнимым положительным (отрицательным, соответственно) угловым вычетом δ_j. Для s-страта ситуация обратная: нижний индекс $\pm$ для слоя прообраза ассоциирован с мнимым положительным (отрицательным, соответственно) угловым вычетом δ'_j τ_a-эквивариантного образа страта. Это означает, что на самом s-страте нижний индекс $\pm$ слоя ассоциирован с отрицательным (положительным, соответственно) угловым вычетом.

Это правило соответствует тому, что когда мы переходим со страта α_1 из $\hat{K}^{(0)}_{b^2,t}$ (с вершины) в соседний страт α_2 из $\hat{K}^{(0)}_{b^2,s}$ (в соседнюю вершину) по страту глубины 1 (по отрезку), слой t_+ трансформируется в слой t_+.

Определим расслоение-образ морфизма. Это расслоение обозначим через $E_{\mathbb{C}}$, без эквивариантной τ_a-структуры это расслоение является тривиальным расслоением $E_{\mathbb{C}} = K^{(1)}_{b^2} \times \mathbb{C}$. Обозначим через z координату слоя (комплексная прямая) этой тривиализации. Определим (τ_i, τ_b, τ_a)-эквивариантную структуру расслоений образа и прообраза. В расслоении $E_{\mathbb{R}}$ (вспомним, что инволюция τ_a меняет компоненты в (3), инволюции τ_i действует на базе расслоения тождественно, а инволюция τ_b действует внутри каждого максимального страта инвариантно и не меняет компоненты в (3)) по следующим формулам:

$$\tau_a : ((x,y), t_\pm) \mapsto ((y,x), t_\mp) \tag{4}$$

$$\tau_b : ((x,y), t_\pm) \mapsto ((-y,x), t_\pm) \tag{5}$$

$$\tau_i : ((x,y), t_\pm) \mapsto ((x,y), -t_\mp). \tag{6}$$

Действия соответствующих инволюций в образе $E_{\mathbb{C}}$ определяются формулами:

$$\tau_a : ((x,y),z) \mapsto ((y,x),\bar{z}) \tag{7}$$
$$\tau_b : ((x,y),z) \mapsto ((-y,x),z) \tag{8}$$
$$\tau_i : ((x,y),z) \mapsto ((x,y),\bar{z}). \tag{9}$$

Построенный набор трех инволюций попарно коммутирует. Отметим, что инволюция τ_a сопрягает слой расслоения $E_{\mathbb{C}}$ посредством $z \mapsto \bar{z}$, а также переставляет ориентированные слои $E_{\mathbb{R}}$. Наш предварительный результат формулируется так.

Theorem 2. *Существует (τ_a, τ_b, τ_i)-эквивариантный морфизм F расслоения $E_{\mathbb{R}}$ в расслоение $E_{\mathbb{C}}$, который является послойным мономорфизмом.*

Доказательство. Мы определим морфизм F над максимальными стратами при помощи коллекции вычетов. Затем, мы продолжим этот морфизм на страты глубины 1 эквивариантным способом. Неформально говоря, после того, как F над нульмерном остовом правильно определено, над каждым отрезком окажется только два способа построить расширенный морфизм. Построенное расширение обозначим через $F^{(1)}$. Мы подготовимся, тем самым, к доказательству основного результата, в котором будет проверено, что препятствие к продолжению построенного морфизма до морфизма над K_{b^2} обращается в ноль.

Lemma 3. *Существует (τ_a, τ_b, τ_i)-эквивариантный морфизм $F^{(0)}$ на максимальных стратах глубины* 0.

Полный θ-вычет, целочисленный полный Θ^R-вычет

Предположим, что мы рассматриваем максимальный страт из $K^0_{b^2,t}$, в этом случае полная коллекция вычетов $\{\delta_j\}$ существует при всех $1 \le j \le r$ координатах. Определим в таком максимальном t-страте α_1 полный вычет по формуле: $\theta = \prod_{j=1}^{r} \delta_j$. Число r нечетное, поэтому θ чисто мнимый и принимает два значения $\{-\mathbf{i}, +\mathbf{i}\}$. Мы ассоциируем такой вычет в отрицательным базисным вектором $-1 \in t_+$ на соответствующем линейном слое, сопряжение вычета $\bar{\theta}$ ассоциируем с положительным базисным вектором $+1 \in t_-$ на другом линейном слое.

В страте $\alpha_2 \subset K_{b^2,s}$ вычет δ'_j определим как вычет соответствующей угловой координаты в сопряженном страте $\tilde{\tau}_a(\alpha_2))$. Тем самым, для сопряженной пары стратов $(\alpha_2, \tilde{\tau}_a(\alpha_2))$ мы имеем $\tilde{\tau}_a$-инволютивное произведение: $\prod_{j=1}^{r} \delta_j|_{\tilde{\tau}_a(\alpha_2)} = \prod_{j=1}^{r} \delta'_j|_{\alpha_2}$. В страте $\alpha_2 \subset \hat{K}_{b^2,s}$ вычет δ_j определен как угловой вычет координаты в самом страте и для соответствующей пары стратов $(\alpha_2, \tilde{\tau}_a(\alpha_2))$ определено τ_a-косоинволютивное произведение: $\overline{\prod_{j=1}^{r} \delta_j|_{\tilde{\tau}_a(\alpha_2)}} = \prod_{j=1}^{r} \delta_j|_{\alpha_2}$.

В s-страте α_2 произведение $\theta' = \prod_{j=1}^{r} \delta'_j$ ассоциируем с вектором $+1 \in t_+$ слоя расслоения, а произведение $\overline{\theta'} = \theta = \prod_{j=1}^{r} \delta_j$ ассоциируем с вектором $-1 \in t_-$. Вычет θ называется полным τ_a-косым вычетом. В t-страте получится $\theta = \theta'$; в s-страте получится $\theta = \overline{\theta'}$.

Для t-страта α_1 следующая сумма:

$$\Theta_1^R = \sum_{j=1}^{r} \delta_j \tag{10}$$

является целочисленным поднятием вычета θ, такая сумма называется целочисленным Θ^R-вычетом.

Для s-страта α_2 следующая сумма:

$$\Theta_2^R = \sum_{j=1}^{r} (\delta'_j) \tag{11}$$

называется целочисленным Θ^R-вычетом, это целочисленное поднятие сопряженного вычета $\bar{\theta} = \theta'$ в α_2, вычет Θ^R является τ_a-инвариантным.

Итак, δ'_j скажем, что $\tilde{\tau}_a$-инвариантным, Θ^R является $\tilde{\tau}_a$-инвариантным, вычет θ является τ_a-косым (тильду не пишем): для соответствующей пары точек получим: $\mathbf{x} \in \alpha_1, \tilde{\tau}_a(\mathbf{x}) = \tau_a(\mathbf{x}) \in \tau_a(\alpha_1)$:

$$\overline{\theta}|_{\mathbf{x}} = \theta|_{\tau_a(\mathbf{x})},$$

$$\sum_{j=1}^{r} \delta'_j|_{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{r} \delta'_j|_{\tilde{\tau}_a(\mathbf{x})}.$$

Над точкой максимального страта $K_{b^2,t}$ определим морфизм $F^{(0)}$ следующей формулой:

$$F^{(0)} : ((x,y),t_+) \mapsto ((x,y),-\theta t). \tag{12}$$

$$F^{(0)} : ((x,y),t_-) \mapsto ((x,y),\bar{\theta} t). \tag{13}$$

Удобно считать, что первая формула (12) определяет образ вектора $-1 \in t_+$ значением θ, поэтому в правой части первой формулы стоит знак минус. Вторая формула определяет образ базисного вектора значением сопряженного вычета $\bar{\theta}$.

Над точкой максимального страта $K_{b^2,s}$ определим морфизм $F^{(0)}$ следующей формулой:

$$F^{(0)} : ((x,y),t_+) \mapsto ((x,y),\bar{\theta} t). \tag{14}$$

$$F^{(0)} : ((x,y),t_-) \mapsto ((x,y),-\theta t). \tag{15}$$

Можно считать, что первая формула (12) определяет образ вектора $+1 \in t_+$ значением $\theta' = \bar{\theta}$. Поэтому значение базисного вектора $-1 \in t_+$ определяется значением $-\theta' = -\bar{\theta}$. Вторая формула определяет образ базисного вектора $-1 \in t_-$ значением вычета θ. Значение базисного вектора $+1 \in t_-$ определяется значением $-\theta$.

Формулы (12), (13), (14), (15) определяют значение морфизма на максимальных стратах и мы проверим, что морфизм является эквивариантным. Сформулируем общее правило интерполяции морфизма на отрезок, который соединяет максимальные страты разного типа.

Рассмотрим максимальный t-страт α_1 и соединим этот страт с соседним s-стратом α_2 по страту глубины 1 в $K^{(1)}$. Полный вычет θ_1 страта α_1 корректно определен и принимает значение $+\mathbf{i}$.

Под продолжением полного вычета мы подразумеваем деформацию вычета Θ_1^R (10) в вычет $-\Theta_2^R$ (11) вдоль отрезка, соединяющего два максимальных страта в разных компонентах (3). Имеет место следующее соотношение:

$$\theta_1 = \bar{\theta}_2; \quad \Theta_1^R = \Theta_2^R. \tag{16}$$

Для вычисления θ_2 рассмотрим предписанный набор вычетов в t-страте α_1. Обозначим этот набор через $\{\delta_j\}_{\alpha_1}$. Когда мы переходим в соседний s-страт α_2, можно рассмотреть продолженный набор: $\{\delta'_j\}_{\alpha_2}$, который совпадает с сопряжением исходного $\{\bar{\delta}_j\}_{\alpha_1}$ для всех вычетов, за исключением единственного, который деформируется. Произведение $\theta_2 = \prod_{j=1}^{r} \bar{\delta}'_j$ в α_2 совпадает с $\bar{\theta}_1 = \prod_{j=1}^{r} \bar{\delta}_j$ в α_1.

Набор вычетов $\{\delta'_j\}_{\alpha_2}$ не является предписанным набором в α_2. Чтобы получить предписанный набор $\{\bar{\delta}'_j\}_{\alpha_2}$, нужно сопряжение. Поэтому справедлива формула (16). Вторая формула следует из (11): сумма $\sum_{j=1}^{r}(\delta'_j)$ в α_2 совпадает с суммой $\sum_{j=1}^{r}\delta_j$ в α_1.

Definition 4. Пусть

$$\beta \subset K^{(1)}_{b^2,t} \cap K^{(1)}_{b^2,s}$$

произвольный страт глубины 1 в указанном пересечении, причем предполагается, что на угловых координатах определен полный порядок. Такой страт имеет ровно нечетное число $\frac{r-1}{2}$ угловых координат с вычетами $+\mathbf{i}$ и ровно такое же нечетное число $\frac{r-1}{2}$ угловых координат с вычетами $-\mathbf{i}$. Положительно кооритентированный страт $\beta^{\uparrow}$ определяет направление движения с t-страта на s-страт. Обращение коориентации $\beta^{\uparrow} \mapsto \beta^{\downarrow}$ меняет направление движения по β. Определим β-коориентированный беспорядок $\omega(\beta^{\uparrow}) \in \{0,1\}$ как число $\pmod 2$ перестановок координат с разными вычетами, которое требуется для полной сортировки координат, сначала все координаты с вычетами $-\mathbf{i}$, затем все координаты с вычетами $+\mathbf{i}$. При изменении коориентации страта β беспорядок $\omega(\beta^{\downarrow}) \in \{0,1\}$ определим как число $\pmod 2$ перестановок координат с разными вычетами, которое требуется для полной сортировки координат, сначала все координаты с вычетами $+\mathbf{i}$, затем все координаты с вычетами $-\mathbf{i}$. Понятно, что $\omega(\beta^{\uparrow}) + \omega(\beta^{\downarrow}) = 1$.

Пусть пара стратов α_1, α_2 примыкают друг к другу по страту β глубины 2, который имеет беспорядок $\omega(\beta^{\uparrow}) = 0$. Определим деформацию вычета Θ_1^R для t-страта α_1 в вычет $-\Theta_2^R$ для s-страта α_2 вдоль отрезка страта глубины 1, которая определяет положение образа прямой t_+ в координате на $E_{\mathbb{C}}$. Деформацию вычета определим как результат линейной интерполяции суммы (10) в обратную сумму (11) по отрезку мнимой оси. Геометрически над точкой страта глубины 1 получится вращение по часовой стрелки базисного вектора $-1 \in t_+$ на угол $\frac{\pi}{2}$ (алгебраически, на угол $-\frac{\pi}{2}$).

Когда мы деформируем тот же базисный вектор с s-страта α_2 над точкой страта глубины 2 получится вращение против часовой стрелки на сопряженный угол. Тем самым, гомотопия базисного вектора не зависит от выбора коориентации страта $\beta^{(1)}$. Действительно, $\omega(\beta^{\downarrow}) = 1$, это сигнализирует об изменении направления вращения на сопряженное. Определим деформацию вычета $-\Theta_2^R$ для s-страта α_2 в вычет Θ_1^R для t-страта α_1 вдоль отрезка страта глубины 1, Деформация определяет положение образа базисного вектора $+1 \in t_+$ в координате на $E_{\mathbb{C}}$.

Таким образом, при построении деформации условие интерполяции с t-страта на s-страт или с s-страта на t-страт несущественно, а существенно лишь значение коориентированного беспорядка, которое определит вид интерполяции.

С алгебраической точки зрения, формула экстраполяции для прямой t_+ определяется интерполяцией без сопряжения целочисленного вычета. Деформация вектора $+1 \in t_-$ со страта α_1 на страт α_2 определяется как сопряженная интерполяция вычета $\overline{\Theta}_1^R$ в вычет $-\overline{\Theta}_2^R$, если $\omega(\beta^{\uparrow}) = 0$, и интерполяция вычета $-\overline{\Theta}_1^R$ в вычет $\overline{\Theta}_2^R$, если $\omega(\beta^{\uparrow}) = 1$.

Ключевым замечанием, которое требуется для проверки построенной интерполяции, является следующее. Инволюция τ_a переводит построенную интерполяцию между компонентами в комплексе (3) инвариантно в себя. Действительно, инволюция τ_a сохраняет коориентированный беспорядок $\omega(\beta^{\uparrow}) = \omega(\tau_a(\beta)^{\downarrow})$ и одновременно меняет прямые t_+ и t_-. Поэтому τ_a меняет направление вращения прямой по координате z в $E_{\mathbb{C}}$. В образе τ_a сопрягает z-координату. Поскольку граничные условия над соответствующими парами точек над стратами глубины 1 соответствуют друг другу, интерполяции окажутся τ_a-инвариантными, если направления вращения пары соответствующих базисных векторов окажутся противоположными. Последнее свойство не зависит от выбора знака базисного вектора, а зависит лишь от номера прямой.

Доказательство Леммы 3

Проверим, что отображения (12), (13) являются (τ_a, τ_b, τ_i)-эквивариантными.

Применим формулы для указанного в правой части формулы базисного вектора на прямой t_+, предположив, что в левой части формулы указанный вектор лежит над точкой (x, y) над t-стратом, обозначим через θ-полный вычет:

$$F^{(0)}\tau_i((x,y),t_+) = F^{(0)}((x,y),-t_-) = ((x,y),-\overline{\theta})$$
$$\tau_i F^{(0)}((x,y),t_+) = \tau_i((x,y),-\theta t) = ((x,y),-\overline{\theta})$$

$$F^{(0)}\tau_a((x,y),-t_+) = F^{(0)}((y,x),-t_-) = ((y,x),\bar{\theta}t)$$
$$\tau_a F^{(0)}((x,y),-t_+) = \tau_a((x,y),\theta t) = ((y,x),\bar{\theta}t)$$

$$F^{(0)}\tau_b((x,y),t_+) = F^{(0)}((-y,x),t_+) = ((-y,x),-\theta)$$
$$\tau_b F^{(0)}((x,y),t_+) = \tau_b((x,y),-\theta t) = ((-y,x),-\theta)$$

Третья пара формул для τ_b меняет лишь точку внутри заданного максимального страта и не требует вычислений. Во второй паре формул в правой части равенства слои берутся над максимальным s-стратом. Поэтому предположение о том, что в левой части формулы слои берутся над t-стратом не ограничивает общности. В первой паре формул точка слои как справа, так и слева рассматриваются над t-стратом. Случай, когда слои выбираются над s-стратом полностью аналогичен. Лемма 3 доказана. $\square$

Выпишем формулу для интерполяции морфизма $F^{(0)}$ расслоения $E_{\mathbb{R}}$ над K_{b^2}, предположив, что обе граничные точки выбираются над $K_{b^2,t}$, или $K_{b^2,s}$ одновременно (Случай I).

Рассмотрим два максимальных страта в $K_{b^2,+t}$, которые являются соседними, т.е. различаются вычетом лишь одной угловой координаты с общим номером j. Обозначим через Θ_1 целочисленный τ_a-симметрический) вычет для первого страта α_1, обозначим через Θ_2 целочисленный вычет для второго t-страта α_2. Тогда для t-страта получим: $\theta_1 = \exp(\pi\Theta_1/2)$, $\theta_2 = \exp(\pi\Theta_2/2)$.

Рассмотрим отрезок гомотолпии, который целиком лежит внутри $K_{b^2,t}$ (случай двух стратов внутри $K_{b^2,s}$ аналогичен), подслучай Случая I. Отрезок соединяет слои над точками $((x',y'),(y',x'))$, $((x'',y''),(y'',x''))$, обозначим через $F^{(1)}$ результат гомотопии прямой t_+ в образе, по значению базисного вектора:

$$\begin{aligned} F^{(1)}:&((1-r)(x',y')+r(x'',y''),t_+)\mapsto \\ &\mapsto((1-r)(x',y')+r(x'',y''),-\exp(((1-r)\Theta_1+r\Theta_2)\pi/2)t) \end{aligned} \tag{17}$$

Для t_- формула выглядит так:

$$\begin{aligned} F^{(1)}:&((1-r)(x',y')+r(x'',y''),t_-)\mapsto \\ &\mapsto((1-r)(x',y')+r(x'',y''),\overline{\exp(((1-r)\Theta_1+r\Theta_2)\pi/2)}t) \end{aligned} \tag{18}$$

Рассмотрим случай, когда концы отрезка гомотопии лежат на максимальных стратах компонент $K_{b^2,t}$ и $K_{b^2,s}$ (Случай II). В этом случае формула гомотопии $F^{(1)}$ была выше определена с использованием формулы связи вычетов (16).

Над t-стратом α_1 целый вычет Θ^R это поднятие на мнимую ось значения вычета θ, последний определяет значение морфизма на векторе $-1\in t_+$ (подсучай $II;-t_+$). Для интерполяции над отрезоком $[\alpha_1,\alpha_2]$ используется отрезок мнимой оси $[\Theta = +\mathbf{i}, -\Theta=-\mathbf{i}]$, если $\omega(\beta^{\uparrow})=0$. Направление вращения прямой определяется значением дифференциала $dF(-t_+) = -\mathbf{i}(-1)^{\omega(\beta^{\uparrow})}$.

Образ второй прямой t_- определяется значением вектора $+1\in t_-$, который над граничными точками $\alpha_1\subset K_{b^2,t}$, $\alpha_2\subset K_{t^2,s}$ отрезка $[\alpha_1,\alpha_2]$ отображается по сопряженным формулам, для дифференциала интерполяции получим: $dF(t_+) = +\mathbf{i}(-1)^{\omega(\beta^{\uparrow})}$ (подслучай $II;t_-$).

Докажнем, что формулы определяют (τ_a,τ_b,τ_i)-эквивариантный морфизм. Наиболее сложная проверка возникает для τ_a. Предположим, что пара соседних максимальных t-страта переходят при τ_a в пару соседних максимальных s-стратов (Случай I)

А именно, предположим, что t-базисный вектор $-1 \in t_+$ переходит при τ_a в соответствующий s-базисный вектор $-1 \in t_-$:

$$F^{(1)}\tau_a : ((1-r)(x',y')+r(x'',y''),-t_+) = F^{(1)}((1-r)(y',x')+r(y'',x''),-t_-) \mapsto$$
$$\mapsto ((1-r)(y',x')+r(y'',x''),\exp(((1-r)\overline{\Theta}_1+r\overline{\Theta}_2)\pi/2)).$$

С другой стороны,

$$\tau_a F^{(1)} : ((1-r)(x',y')+r(x'',y''),-t_+) \mapsto$$
$$\mapsto \tau_a((1-r)(x',y')+r(x'',y''),\exp(((1-r)\Theta_1+r\Theta_2)\pi/2)) =$$
$$= ((1-r)(y',x')+r(y'',x''),\overline{\exp(((1-r)\Theta_1+r\Theta_2)}\pi/2)).$$

Поскольку $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$, τ_a-эквивариантность с случае I доказана.

В случае $II; -t_+$ прямая t_+ деформируется с $\alpha_1 \subset K_{b^2,t}$ до $\alpha_2 \subset K_{b^2,s}$) деформация определена гомотопией вектора $-1 \in t_+$ при условии $d(F(-t_+)) = -\mathbf{i}(-1)^{\omega(\beta^{\uparrow})}$ на $[\alpha_1,\alpha_2]$. Эта гомотопия задана интерполяцией $+\mathbf{i} = \Theta_1^R$ в $-\mathbf{i} = -\Theta_2^R$, если $\omega(\beta^{\uparrow}) = 0$.

Сопряженная при τ_a гомотопия $\tau_a(F(-t_+))$ прямой t_- начинается со страта $\tau_a(\alpha_2) \subset K_{b^2,t}$ и заканчивается стратом $\tau_a(\alpha_1) \subset K_{b^2,s}$. Эта сопряженная гомотопия задана над отрезком $[\tau_a(\alpha_2),\tau_a(\alpha_1)]$ с началом на t-страте, а концом на s-страте, задана интерполяцией образа вектора $+1 \in t_-$ по значениям $\overline{\Theta}_1^R$ в $-\overline{\Theta}_2^R$. Для этой сопряженной интерполяции получится $d(F(t_-)) = +\mathbf{i}$, при этом $d(\tau_a(F(-t_+))) = +\mathbf{i}(-1)^{\omega(\beta^{\uparrow})}$, поскольку $\omega(\beta^{\uparrow}) = \omega(\tau_a(\beta)^{\downarrow})$.

Гомотопия базисного вектора $F(\tau_a(-t_+))$ совпадает с $F(-t_-)$; поскольку $F(-t_-)$ антиподален гомотопии базисного вектора $+1 \in t_-$, для которой справедливо равенство: $dF(+t_-) = +\mathbf{i}$; получится $dF(-t_-) = +\mathbf{i}$ и $d(F(\tau_a(-t_+))) = +\mathbf{i}$.

Наконец, мы рассмотрим случай $-1 \in t_+$:

$$F^{(1)}\tau_i : ((1-r)(x',y')+r(x'',y''),-t_+) = F^{(1)}((1-r)(x',y')+r(x'',y''),t_-) \mapsto$$
$$\mapsto ((1-r)(x',y')+r(x'',y''),\overline{\exp(((1-r)\Theta_1+r\Theta_2)\pi/2)}).$$

С другой стороны,

$$\tau_i F^{(1)} : ((1-r)(x',y')+r(x'',y''),-t_+) \mapsto$$
$$\mapsto \tau_i((1-r)(x',y')+r(x'',y''),\exp(((1-r)\Theta_1+r\Theta_2)\pi/2)t) =$$
$$= ((1-r)(x',y')+r(x'',y''),\overline{\exp(((1-r)\Theta_1+r\Theta_2)\pi/2)}) =$$

Деформация в случае $+1 \in t_-$ двух прямых является сопряженной относительно мнимой оси и начальные образы двух прямых совпадают. Это доказывает τ_i-эквивариантность.

Доказательство τ_b-эквивариантности очевидно. Лемма 3 доказана. $\square$

Наметим доказательство Теоремы 2. Препятствие к расширению морфизма, который построен в лемме 3, на страты глубины не менее 3 тривиально. Препятствие к расширению морфизма на страты глубины 2 явно вычислено в Разделе . Этим Теорема 2 доказана. $\square$

Морфизм линейного эквивариантного расслоения $\tilde{\tau}_a$-косоинвариантного и $\tilde{\tau}_b$-инвариантного в тривиальное $\mathbb{C}$-расслоение над K_{b^2}

Рассмотрим (τ_a, τ_b, τ_i)-эквивариантный морфизм F расслоения $E_{\mathbb{R}}$ в расслоение $E_{\mathbb{C}}$, который был построен в Теореме 2. Расширим этот эквивариантный морфизм посредством тензорного произведения, используя дополнительную координату w: $(\tau_a, \tau_b, \tau_i) \mapsto (\tilde{\tau}_a, \tilde{\tau}_b, \tilde{\tau}_i)$.

Определим (τ_a, τ_b, τ_i)-эквивариантное S^0-накрытие над K_{b^2} (двулистное накрытие), которое рассматривается как расслоение E_S над K_{b^2} со слоем $S^0 = \{\pm 1\}$. Без эквивариантной структуры получится: $E_S = K_{b^2} \times S^0$. Инволюции в этом тензорном расслоении определены по формулам:

$$\tau_a : ((x,y),w) \mapsto ((-x,y),-w) \tag{19}$$

$$\tau_b : ((x,y),w) \mapsto ((-y,x),w) \tag{20}$$

$$\tau_i : ((x,y),w) \mapsto ((x,y),-w). \tag{21}$$

Инволюции τ_b, τ_i определены в расширенном расслоении $E_{\mathbb{R}} \otimes E_S$, обозначим эти инволюции через $\tilde{\tau}_b$, $\tilde{\tau}_i$ соответственно. Инволюция τ_a также определена в расширенном расслоении, обозначим $\tilde{\tau}_a = \tau_i \circ \tau_b \circ \tau_a$. Более подробно, определим $\tilde{\tau}_a$ по формулам:

$$\tilde{\tau}_a : ((x,y),t_{\pm}) \mapsto ((-x,y),-t_{\pm})$$

$$\tilde{\tau}_a : ((x,y),z) \mapsto ((-x,y),z)$$

и по формуле:

$$\tilde{\tau}_a : ((x,y),w) \mapsto ((x,y),w),$$

которая вытекает из (19),(79) и из нижеследующей формулы and from (4). Заметим, при переобозначении, если $(x, y) \in K_{b^2,t}$, тогда $(-x, y) \in K_{b^2,s}$.

Инволюции $(\tilde{\tau}_b, \tilde{\tau}_a, \tilde{\tau}_i)$ определены в расслоении $E_{\mathbb{C}}$ естественным способом. Инволюции $\tilde{\tau}_b$, $\tilde{\tau}_a$ на $\mathbb{C}$–расслоении тривиальны, инволюция $\tilde{\tau}_i$ действует на каждом слое сопряжением. Инволюция τ_a инвариантно преобразует каждый ориентированный слой подрасслоения t_+ в расслоении $E_{\mathbb{R}}$ в ориентированный слой другого линейного подрасслоения t_- над соответствующей точкой базы, посредством сохраняющего ориентацию преобразования. В то же время, инволюция $\tilde{\tau}_a$ сохраняет ориентированные слои расслоения $E_{\mathbb{R}}$ и меняет ориентацию базисных векторов. Инволюция в расширенном расслоении позволяет определить эквивариантный $\tilde{F}$, как результат естественного расширения эквивариантного морфизма F. Таким образом, мы определим $(\tilde{\tau}_a, \tilde{\tau}_b, \tilde{\tau}_i)$-эквивариантный морфизм $\tilde{F}$.

В наборе инволюций только инволюция $\tilde{\tau}_i$ оказывается нетривиальной на E_S, это инволюция комплексного сопряжения слоя. $E_{\mathbb{C}}$. Инволюция $\tilde{\tau}_i$ исключительная, поскольку эта инволюция меняет w-координату (координату в накрытии).

Сформулируем результат в виде двух лемм.

Lemma 5. *Рассмотрим $(\tilde{\tau}_a, \tilde{\tau}_b, \tilde{\tau}_i)$-эквивариантные тензорные произведения $E_{\mathbb{R}} \otimes E_S$, $E_{\mathbb{C}} \otimes E_S$.*

1. Формула морфизма F определяет $(\tilde{\tau}_a, \tilde{\tau}_b, \tilde{\tau}_i)$-эквивариантный морфизм

$$\tilde{F} : E_{\mathbb{R}} \otimes E_S \mapsto E_{\mathbb{C}} \otimes E_S.$$

2. Свертка по паре инволюций $(\tilde{\tau}_a, \tilde{\tau}_b)$ определяет $\tilde{\tau}_i$-эквивариантный факторморфизм

$$F^{\downarrow} : E_{\mathbb{R}} \otimes_{\tilde{\tau}_a, \tilde{\tau}_b} E_S \mapsto E_{\mathbb{C}} \otimes_{\tilde{\tau}_a, \tilde{\tau}_b} E_S.$$

Доказательство Леммы 5

Это известный факт из линейной алгебры. □

Вычисление расслоения-свертки по инволюциям

Lemma 6. *Расслоение $S(E_{\mathbb{C}}) \otimes_{(\tilde{\tau}_a, \tilde{\tau}_b)} E_S$ изоморфно тривиальному $\tilde{\tau}_i$-эквивариантному расслоению $K \times S^1 \to K$, инволюция $\tilde{\tau}_i$ действует в слоях эрмитовым сопряжением.*

Lemma 7. *Расслоение* $S(E_{\mathbb{R}}) \otimes_{(\tilde{\tau}_a,\tilde{\tau}_b,\tilde{\tau}_i)} E_S$ *изоморфно букету линейных расслоений, каждое ассоциировано с накрытием* $K_b \to K$.

Доказательство. Расслоение $S(E_{\mathbb{R}}) \otimes_{(\tau_a,\tau_b,\tau_i)} E_S$ после преобразования набора инволюций $(\tau_a, \tau_b, \tau_i) \mapsto (\tilde{\tau}_a, \tilde{\tau}_b, \tilde{\tau}_i)$ расщепляется в букет двух нетривиальных $\tilde{\tau}_a$-эквивариантных тривиальных линейных $(\tilde{\tau}_b, \tilde{\tau}_i)$-эквивариантных расслоений. □

Свертка тензорного произведения

По Лемме 7 и Лемме 5 утверждение 2, получится пара $F^{\downarrow}$ факторморфизмов линейных расслоений:

$$F_{+1} : \hat{K}^1_b \otimes E_S \to S^1 \otimes E_S, \tag{22}$$

$$F_{-1} : \hat{K}^1_b \otimes E_S \to S^1 \otimes E_S. \tag{23}$$

Морфизм (22), ограниченный на подрасслоение $\hat{K}^1_b \otimes \{+1\} \subset \hat{K}^1_b \otimes E_S$, принимает значения в $E_S \otimes \{+1\}$. Этот морфизм определен на подполиэдре стратов глубины 1 и 0. Морфизм (23), ограниченный на подрасслоение $\hat{K}^1_b \otimes \{-1\} \subset \hat{K}^1_b \otimes E_S$ является второй (сопряженной) копией (22) и принимает значения в $E_S \otimes \{-1\}$.

Продолжение морфизма (22) над $K^{(1)}$ до морфизма над $K^{(2)}$ и над K

Мы построим расширение морфизма на пространство K с присоединенными стратами глубины 2. Поскольку над $K^{(1)}_b$ граница страта глубины 1 расположена внутри соседней четверки максимальных стратов, проблема продолжения морфизма является локальной.

Рассмотрим формулу F и докажем, что этот морфизм имеет тривиальную монодромию вдоль замкнутого пути вблизи границы страта глубины 2. Рассмотрим страт $\gamma^{(2)}$ глубины 2, на котором угловые координаты с номерами j_1, j_2, $j_1 < j_2$ отсутствуют. Соседние максимальные страты $\alpha^{(0)}_0$, $\alpha^{(0)}_1$, $\alpha^{(0)}_2$, $\alpha^{(0)}_3$ различаются между собой значениями вычетов угловых координат с номерами j_1, j_2.

Предположим, что на страте $\gamma^{(2)}$ число угловых координат со значением вычета $+\mathbf{i}$ на одну больше, чем число угловых координат со значением вычета $-\mathbf{i}$. Этот случай не единственно возможный, но рассуждения в оставшихся либо очевидны (когда число вычетов одного из типов превышает число вычетов другого типа не менее, чем на 3), либо аналогичны.

Тип t, s максимальных стратов вблизи $\gamma^{(2)}$ определен значением вычетов в особых координатах. Предположим, что страт $\alpha_0^{(0)}$ является s-стратом, т.е. вычеты угловых координат j_1, j_2 оказались равными $-\mathbf{i}$ и число координат с вычетом $-\mathbf{i}$ на одну больше числа координат с вычетом $-\mathbf{i}$. Страты $\alpha_3^{(0)}, \alpha_1^{(0)}$ оказались t-стратами, у которых число координат с вычетом $+\mathbf{i}$ превышает число координат с вычетом $-\mathbf{i}$ на 1. Тогда страт $\alpha_2^{(0)}$ оказался t-стратом, у которого число координат с вычетом $+\mathbf{i}$ превышает число координат с вычетом $-\mathbf{i}$ на три.

Обозначим через $\beta_{1,0}^{(1)}$, $\beta_{0,3}^{(1)}$ два соответствующих страта глубины 1, которые расположены на границе двух соседних максимальных стратов различных типов. Предположим, что особые страты имеют соседние индексы: $j_1 = j$, $j_2 = j+1$. Предположили выше, что на α_0 вычеты распределены так: $\delta(j) = -\mathbf{i}$, $\delta(j+1) = -\mathbf{i}$. Предположим, что на α_1 вычеты распределены так: $\delta(j) = +\mathbf{i}$, $\delta(j+1) = -\mathbf{i}$; на α_3 вычеты распределены так: $\delta(j) = -\mathbf{i}$, $\delta(j+1) = +\mathbf{i}$.

Справедливо соотношение:

$$\omega(\beta_{1,0}^{\uparrow}) = \omega(\beta_{0,3}^{\downarrow}) + 1. \tag{24}$$

Действительно, поскольку особые номера соседние, вполне упорядоченные наборы вычетов на α_1 и α_0 совпадают. Поскольку $\beta_{1,0}$ коориентирован с $t \mapsto s$, а $\beta_{0,3}$ коориентирован $s \mapsto t$, вычисления беспорядков вычетов в формуле (24) приведут к разным значениям.

В случае, если особые координаты не являются соседними, формула (24) останется справедливой, поскольку если какой-то вычет с номером j_3, $j_1 < j_3 < j_2$ окажется равным $-\mathbf{i}$, то это не повлияет на значение $\omega(\beta_{1,0}^{\uparrow})$. Поскольку на t-страте α_1 координата j_2 мнимая отрицательная (обе координаты j_3, j_2 при вычислении переставляются влево) и вычеты с номерами j_3 и j_2 при вычислении беспорядка переставлять не придется. Поскольку на s-страте α_0 координата j_1 окажется мнимой отрицательной, вычеты с номерами j_1 и j_3 при вычислении беспорядка (обе координаты переставляются вправо) переставлять не придется.

Если если какой-то вычет с номером j_3, $j_1 < j_3 < j_2$ окажется равным $+\mathbf{i}$, то это повлияет как на значение $\omega(\beta^{\uparrow}_{1,0})$, так и на значение $\omega(\beta^{\downarrow}_{0,3})$ одновременно. Поскольку на t-страте α_1 координата j_2 мнимая отрицательная (координата j_2 при вычислении переставляются влево, а координата j_3 переставляется вправо), то вычеты с номерами j_3 и j_2 при вычислении беспорядка переставлять придется. Поскольку на s-страте α_0 координата j_1 окажется мнимой отрицательной, вычеты с номерами j_1 и j_3 при вычислении беспорядка (координата j_1 переставляется на s-страте вправо, а координата j_3 переставляются влево) также переставлять придется.

Итак, формула (24) остается верной для произвольных двух номеров особых стратов.

Формула для морфизма F вдоль $\beta_{1,0}$, $\beta_{0,3}$ выписана в терминах целочисленных вычетов Θ. В частности, вычеты Θ_1, Θ_3 на t-стратах α_1, α_3 совпадают между собойц и с вычетом Θ_0 на s-страте α_0. Предположим для определенности формул, что $\omega(\beta^{\uparrow}_{1,0}) = 0$, тогда $\omega(\beta^{\downarrow}_{0,3}) = 1$.

Формула для F на отрезке $[\alpha_0, \alpha_3]$ определена линейной интерполяцией $[-\Theta_0, \Theta_3 = \Theta_0]$. Формула для F на отрезке $[\alpha_1, \alpha_0]$ определена линейной интерполяцией $[\Theta_1 = \Theta_0, -\Theta_0]$. Видим, что это противоположные интерполяции. На отрезках $[\alpha_0, \alpha_2]$, $[\alpha_2, \alpha_0]$ интерполяции также противоположны. Монодромия в окрестности $\gamma^{(2)}$ тривиальная.

Если все страты в окрестности $\gamma^{(2)}$ имеют одинаковый тип, монодромия в окрестности $\gamma^{(2)}$ тривиальна.

Обозначим через

$$\hat{\pi} : K \to S^1 \tag{25}$$

отображение, которое построено по морфизму (22), (который пока определен лишь на подполиэдре стратов глубины не большей 2). Продолжение морфизма (25) с $K^{(2)}$ до морфизма на K, очевидно, существует и однозначно, поскольку препятствия лежат в $\pi_i(S^1)$, $i \geq 2$. Сформулируем доказанное утверждение в виде теоремы.

Theorem 8. *Существует морфизм (25).*