Скорость сходимости линейных функционалов в детерминантном точечном процессе с ядром Бесселя

Горбунов Сергей

1. Введение

Здесь и далее положим b — чётная функция из пространства Шварца. Для $R > 0$ обозначим проекцию из $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}_+)$ на $\mathbb{L}_2[0, R]$ как P_R и положим $Q_R = I - P_R$. Для $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+)$, $g \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ положим $B(f)$, $W(g)$ операторами на $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}_+)$ со следующими интегральными ядрами

$$K_B(x,y) = \int_0^\infty \sqrt{xyt} J_\nu(xt) J_\nu(yt) f(t) dt, \qquad K_W(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i(x-y)t} g(t) dt$$

где J_ν — функция Бесселя порядка $\nu > -1$. Положим также $W(1) = B(1) = I$. Обозначим $b = b_+ + b_-$ — разложение b на функции с носителями преобразования фурье на $[0, \infty)$ и $(-\infty, 0)$ соответственно. Введём следующие обозначения

$$\|a\|_{\dot{\mathcal{S}}} = \|a\|_{\dot{H}_1} + \|a\|_{\dot{H}_2} + \|a''\|_{\mathbb{L}_1} + \|xa'''(x)\|_{\mathbb{L}_1} \qquad G(b) = W(e^{b_-}) B(e^{-b}) W(e^{b_+}) \qquad L(b) = \|e^{b_-}\|_{\mathbb{L}_\infty} \|e^{b_+}\|_{\mathbb{L}_\infty} \|e^{-b}\|_{\dot{\mathcal{S}}}$$

Мой результат формулируется так.

Теорема 1

Верна следующая формула для $c(b) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty b(x) dx$ и оценка скорости сходимости для некоторой константы C

$$\det(P_R B(e^b) P_R) = \exp\left(Rc(b) - \frac{\nu}{2} b(0) + \frac{1}{2}\|b\|_{\dot{H}_{1/2}} \right) \det(Q_R G(b) Q_R), \qquad |\det(Q_R G(b) Q_R) - 1| \le C \frac{L(b)}{\sqrt{R}} \exp\left(C \frac{L(b)}{\sqrt{R}} \right). \tag{1}$$

Басор вместо точной формулы (1) доказывает асимптотическую при $R \to \infty$ [2]. Мы будем опираться на её результат. Формула, аналогичная (1), существует и для синус-ядра. Эта формула — непрерывный аналог формулы Бородина-Окунькова. Её вывод для Тёплицевых матриц можно найти, например, в [3], гл. 6.2. Для операторов Винера-Хопфа — в [1]. Доказательство во многом приведённым в ссылках выше. Я представлю его некоторые шаги.

2. Набросок доказательства

2.1. Факторизация Винера-Хопфа

Вывод точного выражения (1) опирается на разложение функции в сумму положительных и отрицательных частот. Положим $\mathcal{W}_0 = \mathrm{Im}\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье на $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$. На данном пространстве введём норму $\|a\|_{\mathcal{W}_0} = \|\mathcal{F}a\|_{\mathbb{L}_1}$. Разложим данное пространство $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}_0^+ \oplus \mathcal{W}_0^-$ на функции с носителями преобразования Фурье на $[0, \infty)$ и $(-\infty, 0)$ соответственно. Тогда $\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_0^\pm$ — Банаховы алгебры с поточечным умножением. За $\mathcal{W}, \mathcal{W}^\pm$ обозначим соответствующие Банаховы алгебры с присоединёнными единицами. Данное разложение даёт следующие полезные свойства.

Утверждение 1.
- *$W : \mathcal{W}^\pm \to \mathcal{L}(\mathbb{L}_2(\mathbb{R}))$ — непрерывный гомоморфизм Банаховых алгебр.*
- *Для P_R оператор $W(f_+), f_+ \in \mathcal{W}^+$ нижнетреугольный, т. е. $P_R W(f_+) = P_R W(f_+) P_R$. Аналогично $W(f_-)$ — верхнетреугольный.*
- *Для Q_R оператор $W(f_+)$ — верхнетреугольный, $W(f_-)$ — нижнетреугольный.*
- *$W(f_-)W(f_+) = W(f_- f_+)$.*

Используя эти свойства получается утверждение ниже.

Утверждение 2. *Выполнена следующая формула*

$$\det(P_R B(e^b) P_R) = e^{Rc(b)} \det(P_R G(b)^{-1} P_R). \tag{2}$$

2.2. Получение формулы Бородина-Окунькова при помощи тождества Якоби

Утверждение 3 (Тождество Якоби). *Для любых ортопроекторов P, $Q = I - P$ в сепарабельном гильбертовом пространстве и для любого оператора K верна следующая формула, если все выражения в ней корректно определены.*

$$\frac{\det(P(I+K)P)}{\det(Q(I+K)^{-1}Q)} = \det(I+K).$$

Я пользуюсь его простым следствием.

Утверждение 4. *Пусть P_1, P_2 — коммутирующие ортопроекторы. Положим $Q_i = I - P_i$. Формула ниже выполняется если все выражения корректно определены.*

$$\frac{\det(P_1(I+K)P_1)}{\det(Q_1(I+K)^{-1}Q_1)} = \frac{\det(P_2(I+K)P_2)}{\det(Q_2(I+K)^{-1}Q_2)}$$

Его применение к остатку в выражении (2) даёт следующее соотношение.

$$\frac{\det(P_R G(b)^{-1} P_R)}{\det(Q_R G(b) Q_R)} = Const(b), \tag{3}$$

где константа не зависит от R. Её значение следует из результата Басор и сразу же даёт формулу (1). Остаётся вопрос с корректностью определителей и оценкой.

2.3. Корректность определителей и скорость сходимости

Применение утверждения 4 обосновывает следующий факт

Утверждение 5. *$P_R B(e^b - 1) P_R$, $Q_R(B(e^b) - W(e^b)) Q_R$ — операторы со следом. Более того, верна следующая оценка на норму следа для некоторой константы C.*

$$\|Q_R(B(e^{-b}) - W(e^{-b})) Q_R\|_{\mathcal{J}_1} \le C \frac{\|e^{-b}\|_{\dot{\mathcal{S}}}}{\sqrt{R}}$$

Его доказательство чисто техническое. Выкладки основаны на доказательстве леммы 2.7 в [2]. Искомая оценка получается из свойств нормы $\mathcal{J}_1$, неравенства

$$|\det(I+A) - 1| \le \|A\|_{\mathcal{J}_1} \exp(\|A\|_{\mathcal{J}_1}),$$

и тождества, следующего из свойств факторизации Винера-Хопфа

$$Q_R G(b) Q_R = Q_R + Q_R W(e^{b_-}) Q_R (B(e^{-b}) - W(e^{-b})) Q_R W(e^{b_+}) Q_R.$$

3. Применение к ДТП с ядром Бесселя

Напомним, что детепрминантным точечным процессом (ДТП) называется мера на конфигурациях (не более чем счётных подмножествах $\mathbb{R}_+$ без предельных точек), k-е корреляционные функции которой порождаются определителем $\rho_k(x_1, ..., x_k) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j \in 1,...k}$. В случае ДТП с ядром Бесселя

$$K(x,y) = \int_0^1 \sqrt{xyt} J_\nu(xt) J_\nu(yt) dt.$$

Для конфигурации X и некоторой функции $f_R = f(x/R)$ можно определить $S[f_R](X) = \sum_{x \in X} f_R(x)$. Индуцированная ДТП случайная величина $S[f]$ называется линейным функционалом. Теорема 1 позволяет найти её характеристическую функцию, используя следующее выражение

$$\mathbb{E}_K e^{ikS[f_R]} = \det(P_R B(e^{ikf}) P_R).$$

В частности, при $R \to \infty$ распределение стремится к Гауссовому. Полученный нами определитель в правой части выражения (1) позволяет оценить скорость этой сходимости.

Список литературы

[1] Estelle Basor и Yang Chen. *A Note on Wiener-Hopf Determinants and the Borodin-Okounkov Identity*. 2002. arXiv: `math/0202062 [math.CA]`.

[2] Estelle L. Basor и Torsten Ehrhardt. “Asymptotics of Determinants of Bessel Operators”. В: *Communications in Mathematical Physics* 234.3 (март 2003), с. 491—516. DOI: `10.1007/s00220-002-0769-1`. URL: `https://doi.org/10.1007%2Fs00220-002-0769-1`.

[3] Barry Simon. “Orthogonal polynomials on the unit circle. Part 1: Classical theory”. В: ISBN: 0-8218-3446-0.