Нули сумм ядер Коши и их производных

А.Д. Баранов и В.В. Шемяков
Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет

Основной объект

Пусть $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ и $|t_k| \longrightarrow \infty$, не накапливаясь в $\mathbb{C}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{t_k^m} < +\infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(z-t_k)^m}, \quad m \in \mathbb{N}$$

$m = 1$ это сумма ядер Коши, $m = 2$ это производная суммы ядер Коши.

Откуда взялись суммы ядер Коши

Рассмотрим систему точек $t_1, t_2, \dots$ на комплексной плоскости с соответсвующими вещественными зарядами $c_1, c_2, \dots$, тогда для порождённого ими поля логарифмический потенциал имеет вид

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \ln(z - t_k)$$

Тогда точки покоя этой системы зарядов это в точности нули φ', то есть нули $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z-t_k}$

Что известно о нулях

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z-t_k} \qquad \text{нули}: \left[\begin{array}{l} \text{нет} \\ <\infty \\ \infty \end{array}\right.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(z-t_k)^2} \qquad \text{нули}: \left[\begin{array}{l} \text{нет} \\ <\infty \\ \infty \end{array}\right.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(z-t_k)^3} \qquad \text{нули}: \infty$$

$$\dots \qquad \text{нули}: \infty$$

Примеры

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-k^2} = \frac{\pi\cot(\pi\sqrt{z})}{\sqrt{z}} - \infty \text{ нулей}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\frac{1}{k}}{z-k} = \frac{\Psi(1-z)+\gamma}{z} - \infty \text{ нулей}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{z-k^2} = \frac{\pi}{\sqrt{z}\sin(\pi\sqrt{z})} - \text{ нет нулей}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-k)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \text{ нет нулей}$$

где $\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, $\Gamma(z)$ – Гамма функция Л. Эйлера.

Примеры хорошо иллюстрируют гипотезу Clunie, Eremenko, Rossi: если $c_k > 0$ при всех k, то всегда у суммы ядер Коши нулей будет ∞, без всяких условий на скорости роста c_k и t_k. Заметим, что для производных сумм ядер Коши такая гипотеза уже не верна в силу последнего примера.

Теорема Келдыша

Пусть $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – маленькие, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty$ и $|t_k|$ растёт на слишком медленно, т.е. $\exists \alpha > 0$ т.ч. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|t_k|^\alpha} < \infty$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z-t_k} \text{ имеет бесконечно нулей}$$

Замечание Условие в теореме $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \neq 0$ по существу, нельзя отказаться.

Теорема А.Баранов, В.Шемяков

Пусть $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – маленькие, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty$ и $|t_k|$ растёт на слишком медленно, т.е. $\exists \alpha > 0$ т.ч. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|t_k|^\alpha} < \infty$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(z-t_k)^2} \text{ имеет бесконечно нулей}$$

Как извлечь информацию о нулях?

Пусть f мероморфна в $\mathbb{C}$. Тогда по первой теореме Неванлинны:

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r,f) + O(1)$$

То есть, рост f как-то распределён между этими двумя слагаемыми, которые измеряют рост $\frac{1}{f}$. Логично научится измерять пропорции этого распределения. Оказывается, что чаще всего дефект $\delta(0,f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r,\frac{1}{f})}{T(r,f)}$ – нулевой, потому

$$\text{рост нулей } f \; = N\left(r, \frac{1}{f}\right) \approx T(r,f) - \text{ обычно знаем}$$

Важные характеристики мероморфной фунции

Пусть f мероморфна в $\mathbb{C}$, $\ln^+(x) = \max(0, \ln x)$.

1. $n(r,f)$ – количество полюсов f в $|z| \le r$.
2. $$N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t} dt + n(0,f)\ln r$$
   – среднее количество полюсов f в $|z| \le r$.
3. $$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi$$
   – среднее значение $\ln|f|$ на части окружности $|z| = r$, где $|f| \ge 1$

Характеристика Неванлинны

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f)$$

Замечание Функция $T(r,f)$ измеряет рост f, в себе она учитывает, что большое значение $|f|$ может быть вызвано изобилием полюсов и тем, что $|f|$ сам по себе большой, например в случае $f(z) = e^z$. Известно, что $T(r,f)$ возрастает, выпукла и $\lim_{r\to\infty} T(r,f) = +\infty$

Первая теорема Неванлинны

$$T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r,f) + O(1) \text{ при } r \to \infty$$