

План

1. Основное афф. пространство
2. Подход Винберга
3. Применение к заданн ветвлению
4. Примеры

Пусть G св. одн. простая группа A_n над $\mathbb{C}$

$\text{Lie } G = \mathfrak{sl}_n$ - кас. алг. A_n

$$G \curvearrowright \mathbb{C}[G] \quad \begin{array}{l} 1) (e_g f)(x) = f(\check{g} \cdot x) \\ 2) (f g)(x) = f(x \check{g}) \end{array} \quad \text{коммутируют}$$

$$G \times G \text{ - модуль} \quad \mathbb{C}[G] = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V(\lambda)^* \otimes V(\lambda) \quad , \text{ где } \Lambda \text{ - полур. дин. весов} \\ V(\lambda) \text{ - неприв. предст. } \mathfrak{sl}_n \text{ веса } \lambda$$

U - макс. ункл. подгруппа в G

$$A = \mathbb{C}[G]^U = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V(\lambda)^* \otimes \langle v_\lambda \rangle = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V(\lambda)^* \stackrel{=}{=} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V(\lambda)$$

$\uparrow$
старший вектор

Умножение в A :

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) = V(\lambda + \mu) \oplus \dots \quad \begin{array}{l} v \in V(\lambda) \\ w \in V(\mu) \end{array} \quad v \cdot w = \text{pr}_{V(\lambda+\mu)}(vw) \text{ - } G\text{-инв. проекция}$$

Фиксируем нумерацию положительных корней $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

e_α - корневой вектор $\mathfrak{sl}_n$, отв. корню α

Сигнатура старшего веса λ - это набор $\sigma = (\lambda; p_1, \dots, p_n)$, $p_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Сигнатурный вектор $v(\sigma) = e_{-\alpha_1}^{p_1} \dots e_{-\alpha_n}^{p_n} v_\lambda$

Векторы $\{v(\sigma) | \sigma \text{ - сигн. ст. веса } \lambda\}$ линейно порождают $V(\lambda)$, но завися

Вторым максимальный порядок на $\mathbb{Z}^n$

Опр: Сигнатура σ наз. существенной, если $v(\sigma) \notin \langle v(\tau) | \tau < \sigma \rangle$

Мн-во всех сум. сигнатур со ст. весом λ обозн. $\Sigma(\lambda)$

$$\Sigma(\lambda) \longleftrightarrow \text{базис } V(\lambda) \\ \sigma \longleftrightarrow v(\sigma)$$

Утв: (Винберг) Мн-во существ. сигнатур образует коммутатив. отн. сложение

$$\Sigma = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Sigma(\lambda) \text{ - коммутатив. сум. сигнатур}$$

$$\begin{array}{l} \sigma \in \Sigma(\lambda) \quad \sigma = (\lambda; p_1, \dots, p_n) \\ \tau \in \Sigma(\mu) \quad \tau = (\mu; q_1, \dots, q_n) \end{array} \Rightarrow \sigma + \tau = (\lambda + \mu; p_1 + q_1, \dots, p_n + q_n) \in \Sigma(\lambda + \mu)$$

Базис $\{v(\sigma) | \sigma \text{ - сум. ст. веса } \lambda^*\} \subset V(\lambda^*) \rightsquigarrow$ двойственный базис в $V(\lambda)$

$$A = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V(\lambda) \quad v \neq 0 \in V(\lambda) \text{ - произв. вектор}$$

$\text{sign}(v)$ - мин. сум. сигнатура σ со ст. весом λ^* , т.е. $\langle v, v(\sigma) \rangle \neq 0$

$$\text{Утв: } \text{sign}(v \cdot w) = \text{sign } v + \text{sign } w$$

Если коммутатив. Σ кон. порожд. $\Rightarrow$ конечную систему порождающих A со св-вом порождения и с в-вом базиса Грёбнера

Для алгебр A, B, C, D, G_2 есть описание Σ

A, C Feigin - Fourier - Littelmann

B И. Машкин

Применение к заданн ветвлению

$$\mathfrak{sl}_n \supset \mathfrak{h} \quad \begin{array}{cc} \lambda & \sigma \\ \lambda' & h \end{array}$$

$$V(\lambda)|_{\mathfrak{h}} = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k)$$

$$V(\lambda') \rightsquigarrow \text{sign (младший вектор)} = (\lambda'^*, p_1, \dots, p_n) \\ (\lambda'^*, \lambda', p_1, \dots, p_n)$$

$$\underbrace{V(\lambda) \oplus \dots \oplus V(\lambda)}_S \rightsquigarrow S \text{ различных сигнатур ст. веса } \lambda^*$$

$$\Sigma'(\lambda) \text{ - все сигнатуры, отвечающие младшим векторам } V(\lambda_i) \quad i=1, \dots, k$$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Sigma'(\lambda) = \Sigma' \text{ - коммутатив.}$$

Если Σ' конечно порожд. Тогда описание её структура даёт решение задачи ветвления

Алгоритм

1. Находим $\Sigma'(\lambda_i)$ для нек. мн-ва $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ дан. веса (включая сум. веса)
2. Порождаем коммутатив. $\Sigma'(\lambda_i)$
3. Учим эти-то из $\Sigma'(\lambda_i + \lambda_j)$, которые не лежат в коммутатив. и добавляем $\lambda_i + \lambda_j \in \lambda_1, \dots, \lambda_s$
4. Если $\forall \lambda \quad \sum_{\lambda'} \dim V(\lambda)$, где сумма по всем сигнатурам λ' ст. веса λ^* , не лежит в коммутатив. порожд. $\Sigma'(\lambda_i)$, являясь линейной от $t_1, \dots, t_n$ и совпадает с $\dim V(\lambda)$ где составлено большое число $t_1, \dots, t_n$, то мы нашли порождающие Σ'

$$\lambda = t_1 \pi_1 + \dots + t_n \pi_n$$

$\uparrow$
фунд. веса

Теорема: Пусть Σ конечно порожд. и выполнено "условие согласования"

$$\text{sign pr}(v_i) \geq \text{sign } v_i, \text{ где } v_i \in V(\lambda) \text{ - векторы двойственного базиса } V(\lambda^*)$$

$$V(\lambda) = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k), \text{ тогда алгоритм закончится за конечное число шагов}$$

Пример: $B_3 \supset G_2 \quad \dim V_{G_2}(\pi_1) = 7$

$$\begin{array}{l} \text{Нерегулярное} \\ V_{B_3}(\pi_1)|_{G_2} = V_{G_2}(\pi_1) \rightsquigarrow \sigma_1 = (\pi_1^*, \pi_1, 0) \\ V_{B_3}(\pi_2)|_{G_2} = \Lambda^2 \mathbb{C}^7 = V_{G_2}(\pi_1) \oplus V_{G_2}(\pi_2) \quad \begin{array}{l} \sigma_2 = (\pi_2^*, \pi_1, \dots) \\ \sigma_3 = (\pi_2^*, \pi_2, \dots) \end{array} \\ V_{B_3}(\pi_3)|_{G_2} = V_{G_2}(0) \oplus V_{G_2}(\pi_1) \quad \begin{array}{l} \sigma_4 = (\pi_3^*, 0, \dots) \\ \sigma_5 = (\pi_3^*, \pi_1, \dots) \end{array} \\ V_{B_3}(\pi_1 + \pi_2)|_{G_2} = V_{G_2}(\pi_1) \oplus V_{G_2}(2\pi_1) \oplus V_{G_2}(\pi_2) \quad \begin{array}{l} \sigma_6 = (\pi_1^* \pi_2^*, \pi_2, \dots) \end{array} \end{array}$$

$$\Sigma' \text{ порождается } \sigma_i, i=1, \dots, 7 \text{ с одним соотношением } \sigma_5 + \sigma_7 = \sigma_6 + \sigma_2$$

Правильно ветвление:

$$\lambda = k \pi_1 + \ell \pi_2 + m \pi_3$$

$$V_{B_3}(\lambda)|_{G_2} = \sum_{S=0}^{\min(k,n)} \sum_{s_1=1}^{\min(\ell, k-s)} \sum_{i=0}^{\ell-s-s_1} V_{G_2}((k+\ell-i-s-s_1)\pi_1 + (i+s+s_1)\pi_2) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\min(k,n)} \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{m-s} V_{G_2}((k+\ell-i-j-s)\pi_1 + (i+s)\pi_2)$$