Графы Горески–Коттвица–Макферсона и кольца Чжоу орисферических многообразий с числом Пикара 1

§ Орисферические многообразия ($k=\bar{k}$ и $\mathrm{char}(k)=0$)

Опр. Пусть G – связная редуктивная группа и $B\subset G$ – борелевская подгруппа. G-многообразие X – сферическое, если в X есть плотная B-орбита.

Опр: Пусть X – G-сферическое многообразие и H – стабилизатор точки из плотной G-орбиты в X. Тогда X – орисферическое, если H содержит подгруппу, сопряжённую с унипотентным радикалом подгрупп B.

Теорема (Pasquier, 2009)

Пусть X – гладкое проективное G-орисферическое многообразие с группой Пикара ранга 1.
Тогда либо
(0) X – однородное
либо X может быть однозначно построено из тройки $(\text{тип } G, \omega_Y, \omega_Z)$, находящейся в следующем списке

(1) $(B_n, \omega_{n-1}, \omega_n)$ с $n\geq 3$
(2) $(B_3, \omega_1, \omega_3)$
(3) $(C_n, \omega_m, \omega_{m-1})$ с $n\geq 2$ и $2\leq m\leq n$
(4) $(F_4, \omega_2, \omega_3)$
(5) $(G_2, \omega_1, \omega_2)$

, где ω_Y, ω_Z – фундамент. веса

Конструкция: $\exists$ $V_Y = V(\omega_Y)$ и $V_Z = V(\omega_Z)$ — неприв. представления G со старшими весами ω_Y и ω_Z.

$\exists$ v_Y и v_Z — соответ. вектора старшего веса

Теорема (Pasquier, 2009)

Пусть X — одно из многообразий типа (1)–(5), тогда

$$X = \overline{G[v_Y + v_Z]} \subset \mathbb{P}(V_Y \oplus V_Z)$$

Теорема (Pasquier, 2009)

Пусть X — одно из многообразий типа (1)–(5), тогда его группа автоморфизмов является соответственно

(1) $(SO(2m+1) \times \mathbb{C}^*) \ltimes V(\omega_m)$

(2) $(SO(7) \times \mathbb{C}^*) \ltimes V(\omega_3)$

(3) $(Sp(2m) \times \mathbb{C}^*)/\{\pm 1\} \ltimes V(\omega_1)$

(4) $(F_4 \times \mathbb{C}^*) \ltimes V(\omega_4)$

(5) $(G_2 \times \mathbb{C}^*) \ltimes V(\omega_1)$

Значит на X действует максимальный тор ранга на 1 больше, чем в соответствующей группе G.

(Обозначим t — образующую группы характеров дополнительного сомножителя)

§ GKM – многообразия и графы

Пусть X – гладкое проективное многообразие с действием тора T.
Пусть выполнено:

(1) $T \curvearrowright X$ с конечным числом неподвижных точек

(2) $T \curvearrowright X$ с конечным числом инвариантных $\mathbb{P}^1$

(3) строим граф: вершины – неподвижные точки, ребра – инвариантные кривые $\left(\lim\limits_{t\to 0} tx\right) \xrightarrow{x} \left(\lim\limits_{t\to\infty} tx\right)$

На каждом ребре метка: характер тора такой, что прямая неподвижна относительно действия ядра этого характера.

Требуем, чтобы все метки на ребрах, исходящие из фиксир. вершины, были попарно различные

Теорема (Белынцкий – Бирула)

Для многообр. X с услов. выше $CH_T^*(X)$ – свободный модуль над $CH_T^*(pt)$

Локализация Ботта: $\xi \in CH_T^*(X) \rightsquigarrow i_x^*(\xi) \in CH_T^*(pt)$

где $i_x : pt \to X$ $\quad i_x : pt \to X$

l_{xy} – метка на ребре xy, то $l_{xy} \mid i_x^*(\xi) - i_y^*(\xi)$

Теорема (Горески – Коттвиц – Макферсон)

Образ локализации Ботта с $\mathbb{Q}$ коэфф. в точности описывается условиями делимости.

Для $\mathbb{Z}$ коэфф. есть инъективность и образ – целочисленная подрешетка в кольце правильных расстановок

$\{ (P_x) \in \bigoplus_{x \in X^T} CH_T^*(pt) \mid l_{xy} \mid (P_x - P_y) \ \forall \text{ребер} \}$ — мн-во правильных расстановок

flow-up базис расстановок

$f: X \to Y$ — T-эквивар $\rightsquigarrow$ $f: GKM(X) \to GKM(Y)$

$$i_x^*(f^*(\xi)) = i_{f(x)}^*(\xi)$$ пулбэк

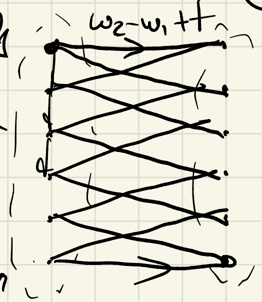
$$i_y^*(f_*(\xi)) = \sum_{f(x)=y} i_x^*(\xi) \frac{c(y)}{c(x)}$$ пушфорвард

$c(x)$ — пр-ие всех меток на ребрах вкор и исх из x

GKM-граф для мн-ия $(G_2, \omega_1, \omega_2)$

G_2/P_1 $\quad \omega_2 - \omega_1 ++$ $\quad G_2/P_2$ $\quad W(G_2)/W(P_1)$

$\alpha_1 \alpha_2$ $\quad \alpha_1 \alpha_2$



5

$s_i(\omega_2 - \omega_1 + t)$

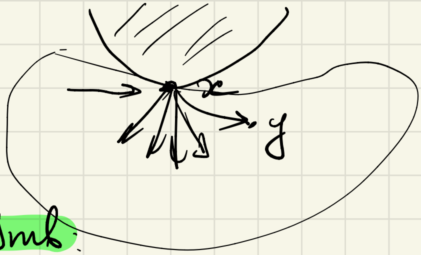
$(f_4, \omega_2, \omega_3)$: 192, 23

$w \geq v$ если $\exists$ ориент. путь от w к верш v

Flow-up базис $\{F^{(x)}\}_{x \in X^T}$

1) $F_y^{(x)}$ однород. одинаков степени или 0

2) $\forall x \in X^T$ $\quad F_x^{(x)}$ = пр-ие меток на ребрах xy где $y < x$. Если $F_y^{(x)} \neq 0$, то $y \geq x$



$P_x - 0 : \ell_{xy}$

$y \geq x$

Утв.:

Произвольная расстановка раскрас. $\subset CH^*_T(pt)$

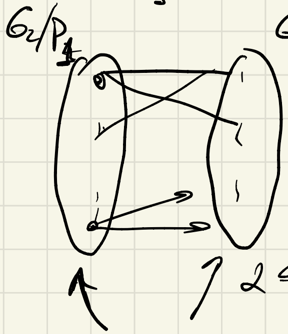
по flow-up базису: (Расстановка P)

1) $\{x \mid \forall y : x \geq y \quad P_y = 0\}$ $\qquad x_1 \dots x_n$ $\quad 0 \quad d\alpha$

2) $\{P\} \rightsquigarrow \{P - cF^{(x)}\}$

$c = \dfrac{P_{x_1}}{e(x_1)}$

G_2/P_1 — имеет flow-up базис $\quad [pt]$



Flow-up базис для однороф. многоб.

$\{b_j\} \qquad \{f_j\}$

$2 \leq j \leq 7$ пушфорвард G_2/P_1

flow-up базис G_2/P_2

$(p_1)_*(p_2^*(P^{(v)} \cdot \xi^k))$

$p_1 : G_2/P_1 \cap P_2 \to G_2/P_1$

$p_2 : G_2/P_1 \cap P_2 \to G_2/P_2$

Gonzales, Pech, Perrin, Samokhin "Geometry of horospherical varieties of Picard number 1"

ξ^k — k-ая степ. первого класса Черна расс. $\mathcal{O}(1)$ G_2/P_2

$k = |U(P_1) \setminus U(P_2)|$

$$Q_w = \sum_{v \in W(P_1)/W(P_1 \cap P_2)} \frac{(P^{(v)})_{[wv]}\, wv(\zeta^k)}{wv\left(\prod_{\alpha \in \mathcal{V}(P_1)\setminus \mathcal{V}(P_2)} \alpha\right)}$$

G_2 : $k=1$, $\zeta = -\alpha_1 - t$

$$Q_w = \frac{P^{(v)}_{[w]}\, w(-\alpha_1 - t) - P^{(v)}_{[ws_2]}\, w(-\alpha_1 - \alpha_2 - t)}{w(\alpha_2)}$$