Лакунарные рекуррентные соотношения для многочленов Бернулли и Эйлера

Мирзоев К.А.

Доклад основан на совместных работах с Сафоновой Т.А.

Семинар по комплексному анализу (семинар Гончара),
Москва, МИАН, 28 ноября 2022 г.

План доклада

Доклад будет состоять из следующих этапов:

I. Введение. Формулировка основных результатов.

II. О функции Грина некоторых самосопряжённых задач. Спектральное разложение функции Грина.

III. Спектральная теорема для случая многочлена $P_1(x) = x - a$.

IV. Спектральная теорема для случая многочлена $P_2(x) = x^2 - a^2$. Лакунарные рекуррентные соотношения с пропусками длины 2.

V. Спектральная теорема для случая многочлена $P_4(x) = x^4 - a^4$. Лакунарные рекуррентные соотношения с пропусками длины 4.

VI. О других приложениях метода.

I. Введение. Формулировка основных результатов

Символами $B_n(x)$ и $E_n(x)$ принято обозначать многочлены Бернулли и Эйлера, определяемые соответственно из разложений

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad \frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

первое из которых справедливо при $|t| < 2\pi$, а второе - при $|t| < \pi$, а символами B_n и E_n - числа Бернулли и Эйлера, определяемые равенствами

$$B_n = B_n(0), \quad E_n = 2^n E_n(1/2), \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Классические линейные рекуррентные соотношения для многочленов $B_n(x)$ и $E_n(x)$

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k(x) = nx^{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k E_k(x) + E_n(x) = 2x^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Эти формулы хорошо известны и следуют из определения этих многочленов.

Полагая $x = 0$ в первой из них и $x = 1/2$ - во второй, получим рекуррентные соотношения для чисел Бернулли и Эйлера

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k E_{n-k} + E_n = 2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Отметим, что $B_{2k+1} = E_{2k+1} = 0$ при $k = 1, 2, \ldots$ и $B_1 = 1$, $E_1 = 0$.

Кроме того, для многочленов Бернулли и Эйлера при $n = 0, 1, \ldots$ справедливы следующие представления

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k},$$

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k},$$

из которых следует, что B_{2k} - рациональные, а E_{2k} - целые числа.

Приведём также формулы дифференцирования для этих многочленов

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \quad E_n'(x) = nE_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Многочлены и числа Бернулли и Эйлера играют важную роль во многих вопросах анализа, например, значения дзета-функции Римана и бета-функции Дирихле в натуральных точках задаются следующими формулами

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\beta(2n+1) = \frac{(-1)^{n}\left(\pi/2\right)^{2n+1}}{2(2n)!} E_{2n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$\zeta(2n+1)=\frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n+1}}{2(2n+1)!}\int\limits_0^1 B_{2n+1}(x)\operatorname{ctg}(\pi x)dx=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}(2\pi)^{2n+1}}{(2^{2n}-1)(2n+1)!}\int\limits_0^1 B_{2n+1}(x)\operatorname{tg}(\pi x)dx=$$

$$=\frac{(-1)^{n}(2\pi)^{2n+1}}{4(2^{2n+1}-1)(2n)!}\int\limits_0^1 \frac{E_{2n}(x)}{\sin(\pi x)}dx, \quad n=1,2,\ldots$$

$$\beta(2n)=\frac{(-1)^{n}\pi^{2n}}{4(2n-1)!}\int\limits_0^1 \frac{E_{2n-1}(x)}{\sin(\pi x)}dx, \quad n=1,2,\ldots$$

В известных нам справочниках лакунарные рекуррентные соотношения для многочленов Бернулли и Эйлера мы не нашли. А для соответствующих чисел известны лакунарные рекуррентные соотношения с пропусками длины 4, 6, 8 и т.д. С увеличением длины пропуска соответствующие формулы становятся громоздкими.

Перейдём к формулировке основных результатов.

Theorem (1)

При $m = 0, 1, \ldots$ *справедливы следующие равенства*

$$\sum_{k=0}^{m} 4^k C_{2m+1}^{2k} B_{2k}(z) = (2m+1)\,(2z-1)^{2m}\,,$$

$$\sum_{k=0}^{m} 4^k C_{2m+2}^{2k+1} B_{2k+1}(z) = (m+1)\,(2z-1)^{2m+1}\,,$$

$$\sum_{k=0}^{m} 4^k C_{2m}^{2k} E_{2k}(z) = (2z-1)^{2m}\,,$$

$$2\sum_{k=0}^{m} 4^k C_{2m+1}^{2k+1} E_{2k+1}(z) = (2z-1)^{2m+1}\,.$$

Theorem (2)

При $n = 0, 1, \dots$ справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 4^{n-k} C_{2n+2}^{4k+2} B_{2n-4k}(z) = (n+1) \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m+n} C_{2n+1}^{2m} (2z-1)^{2m},$$

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 4^{n-k+1} C_{2n+3}^{4k+2} B_{2n-4k+1}(z) =$$

$$= (2n+3) \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m+n} C_{2n+2}^{2m+1} (2z-1)^{2m+1}.$$

Theorem (3)

При $n = 0, 1, \ldots$ *справедливы равенства*

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 4^{n-k} C_{2n}^{4k} E_{2n-4k}(z) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m+n} C_{2n}^{2m} (2z-1)^{2m},$$

$$2\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 4^{n-k} C_{2n+1}^{4k} E_{2n-4k+1}(z) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m+n} C_{2n+1}^{2m+1} (2z-1)^{2m+1}.$$

Corollary (1)

При $m = 1, 2, \ldots$ *справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{m} 4^k C_{2m+1}^{2k} B_{2k} = 2m,$$

$$\sum_{k=0}^{m} (2^{2k-1} - 1) C_{2m+1}^{2k} B_{2k} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{m} C_{2m}^{2k} E_{2k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{m} 4^k (4^k - 1) C_{2m}^{2k} B_{2k} = 2m.$$

Отметим, что все равенства из этого следствия, кроме последнего, известны и приведены в различных справочниках и статьях.

Corollary (2)

При $n = 0, 1, \ldots$ *справедливы равенства*

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 2^{n-2k} C_{2n+2}^{4k+2} B_{2n-4k} = (-1)^{[n/2]}(n+1),$$

(S. Ramanujan 1911, D. H. Lehmer 1935)

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \left(2^{2n-2k} - 2^{2k+1}\right) C_{2n+2}^{4k+2} B_{2n-4k} = (-1)^{n+1}(n+1),$$

(D. H. Lehmer 1935, M. Merca 2019)

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 2^{n-2k+1} (2^{2n-4k+2} - 1) C_{2n+2}^{4k} B_{2n-4k+2} = (-1)^{[n/2]}(n+1),$$

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 2^{2k} C_{2n}^{4k} E_{2n-4k} = (-1)^n.$$

(D. H. Lehmer 1935)

Цель настоящего доклада - это не столько доказательство приведённых выше теорем, сколько привлечение вашего внимания к методу, с помощью которого устанавливается их справедливость.

Теоремы 1 - 3 можно использовать не только для установления справедливости лакунарных рекуррентных соотношений для чисел Бернулли и Эйлера (см. следствия 1 и 2), но и, например, для представления конечных линейных комбинаций для чисел $\zeta(2n+1)$ и $\beta(2n)$ в виде интегралов, рядов и др.

II. О функции Грина некоторых самосопряжённых задач

Пусть $\alpha \in [0,2)$. Символом S_α обозначим оператор, порождённый выражением

$$l_1[y] := iy'$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[0,\pi]$ и граничным условием

$$U_1(y) := y(0) - e^{\pi i\alpha}y(\pi) = 0.$$

Хорошо известно, что S_α является самосопряжённым оператором с дискретным, простым спектром. Известно также, что числа $\lambda_{1k} := 2k+\alpha$ являются собственными значениями, а функции

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-i(2k+\alpha)x}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

– соответствующими им ортонормированными собственными функциями оператора S_α.

Пусть $P_n(x)$ - многочлен степени n с вещественными коэффициентами. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l_n[y](:= P_n(i\frac{d}{dx})y)$$

и оператор $P_n(S_\alpha)$, порождённый этим выражением. Область определения $\mathcal{D}_\alpha$ этого оператора, очевидно, определяется равенством

$$\mathcal{D}_\alpha = \{y|\ y^{(j-1)} \in AC[0,\pi];\ U_j(y) = 0, j = 1, \ldots, n\},$$

где

$$U_{j+1}(y) := y^{(j)}(0) - e^{\pi i\alpha} y^{(j)}(\pi), \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

и если $y \in \mathcal{D}_\alpha$, то

$$P_n(S_\alpha)y = l_n[y].$$

Спектр σ этого оператора является дискретным и имеет вид

$$\sigma = \{\lambda|\ \lambda = \lambda_{nk} := P_n(2k+\alpha),\ k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots\},$$

а собственному значению λ_{nk} оператора $P_n(S_\alpha)$ соответствует собственная функция φ_k, соответствующая собственному значению λ_{1k} оператора S_α.

Предположим теперь, что число $\lambda = 0$ является регулярной точкой оператора $P_n(S_\alpha)$ (т.е. $0 \notin \sigma$), и рассмотрим его резольвенту R. Хорошо известно, что оператор R является интегральным оператором с ядром $G((x,t); P_n(S_\alpha))(=: G_\alpha(x,t))$ - функцией Грина задачи

$$\begin{cases} l_n[y] = f \\ U_j(y) = 0, \, j = 1, \dots, n \end{cases}. \tag{1}$$

Также хорошо известна процедура построения функции Грина по фундаментальной системе решений уравнения $l_n[y] = 0$ и, как правило, приводится в учебниках и справочниках по теории дифференциальных уравнений. В рассматриваемой ситуации эта функция строится явно по корням многочлена $P_n(x)$ и является элементарной функцией специального вида.

С другой стороны, применив спектральную теорему к самосопряжённому оператору $P_n(S_\alpha)$, заключаем, что справедлива следующая теорема.

Theorem (4)

Пусть $\alpha \in [0, 2)$ и $P_n(x)$ - некоторый многочлен степени n с вещественными коэффициентами и такой, что $P_n(2k + \alpha) \neq 0$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тогда для функции Грина $G_\alpha(x, t)$ задачи (1) справедливо тождество

$$G_\alpha(x, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(2k+\alpha)(x-t)}}{P_n(2k + \alpha)}. \tag{2}$$

Из этого равенства видно, что функции Грина рассматриваемых задач зависят только от разности $x - t$.

Corollary (3)

Функция $G_\alpha(x, x)$ *не зависит от* x*, т.е.* $G_\alpha(x, x) = G_\alpha(0, 0)$ *при любом* $x \in [0, \pi]$*, и выполняется равенство*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{P_n(2k+\alpha)} = \pi G_\alpha(0, 0). \tag{3}$$

Corollary (4)

Справедливы равенства

$$G_0(x,t) = \frac{1}{\pi P_n(0)} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{P_n(2k)} + \frac{1}{P_n(-2k)}\right)\cos 2k(x-t) + \right.$$

$$\left. +i\left(\frac{1}{P_n(-2k)} - \frac{1}{P_n(2k)}\right)\sin 2k(x-t)\right) \tag{4}$$

и, соответственно,

$$G_1(x,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{P_n(-2k-1)} + \frac{1}{P_n(2k+1)}\right)\cos(2k+1)(x-t) + \right.$$

$$\left. +i\left(\frac{1}{P_n(-2k-1)} - \frac{1}{P_n(2k+1)}\right)\sin(2k+1)(x-t)\right). \tag{5}$$

III. Применение теоремы 4 в случае многочлена $P_1(x) = x - a$

Пусть $0 < a < 1$. Простые вычисления показывают, что в случае многочлена $P_1(x) = x - a$ функция Грина имеет вид

$$G((x,t), S_0 - a) = \begin{cases} \dfrac{-ie^{-ai(x-t)}}{e^{ai\pi} - 1} & \text{при } x < t \\ \dfrac{ie^{-ai(x-t)}}{e^{-ai\pi} - 1} & \text{при } x > t \end{cases}$$

и

$$G((x,t), S_1 - a) = \begin{cases} \dfrac{ie^{-ai(x-t)}}{e^{ai\pi} + 1} & \text{при } x < t \\ \dfrac{-ie^{-ai(x-t)}}{e^{-ai\pi} + 1} & \text{при } x > t \end{cases}$$

Зафиксировав числа $x \neq t$, применим формулы из следствия 4 и разложим в ряды Тейлора по степеням a обе части полученных равенств, используя определения многочленов Бернулли и Эйлера. Приравнивая далее коэффициенты при одинаковых степенях, получим известные разложение многочленов $B_n(x)$ и $E_n(x)$ в ряды Фурье

$$B_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n-1}2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^{2n}}, \tag{6}$$

$$E_{2n-1}(x) = \frac{(-1)^{n}4(2n-1)!}{\pi^{2n}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^{2n}}, \tag{7}$$

$(0 \leq x \leq 1$ и $n = 1, 2, \ldots)$ и

$$B_{2n-1}(x) = \frac{(-1)^{n}2(2n-1)!}{(2\pi)^{2n-1}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k^{2n-1}}, \tag{8}$$

$$E_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n}4(2n)!}{\pi^{2n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^{2n+1}} \tag{9}$$

$(0 < x < 1,\ n = 2, 3, \ldots$ и $n = 1,\ 0 < x < 1)$.

IV. Применение теоремы 4 в случае многочлена $P_2(x) = x^2 - a^2$

Пусть $0 < a < 1$. Вычисления показывают, что в случае многочлена $P_2(x) = x^2 - a^2$ функция Грина имеет вид

$$G((x,t), S_0^2 - a^2) = -\frac{\cos a\left(\frac{\pi}{2} - |x-t|\right)}{2a\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)}$$

и

$$G((x,t), S_1^2 - a^2) = \frac{\sin a\left(\frac{\pi}{2} - |x-t|\right)}{2a\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)}.$$

Формулы (4) и (5) в этом случаем запишутся так

$$-\frac{1}{\pi a^2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-a^2}\cos 2ku=-\frac{\cos a\left(\frac{\pi}{2}-|u|\right)}{2a\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)} \tag{10}$$

и

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2-a^2}\cos(2k+1)u=\frac{\sin a\left(\frac{\pi}{2}-|u|\right)}{2a\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)}, \tag{11}$$

где $u=x-t$.
Полагая $u=0$ и $u=\pi/2$ в этих формулах, получим разложения функций $\pi\operatorname{ctg} a\pi$, $\pi\operatorname{tg} a\pi$ и $\pi/\sin a\pi$ на простые дроби. Таким образом, формула из теоремы 4 является далеко идущим обобщением этих разложений.
Кроме того, из равенств (10) и (11), используя разложения (6) - (9), легко получить рекуррентные соотношения для многочленов $B_n(x)$ и $E_n(x)$, приведённые в теореме 1.

V. Применение теоремы 4 в случае многочлена $P_4(x) = x^4 - a^4$

Пусть $0 < a < 1$. В этом случае легко показать, что функция Грина будет иметь вид

$$G((x,t), S_0^4 - a^4) = \int_0^{\pi} G((x,\tau), S_0^2 - a^2) \cdot G((\tau,t), S_0^2 + a^2) d\tau,$$

$$G((x,t), S_1^4 - a^4) = \int_0^{\pi} G((x,\tau), S_1^2 - a^2) \cdot G((\tau,t), S_1^2 + a^2) d\tau,$$

где

$$G((x,t), S_0^2 + a^2) = \frac{\operatorname{ch} a\left(\frac{\pi}{2} - |x-t|\right)}{2a \operatorname{sh}\left(\frac{a\pi}{2}\right)}$$

и

$$G((x,t), S_1^2 + a^2) = \frac{\operatorname{sh} a\left(\frac{\pi}{2} - |x-t|\right)}{2a \operatorname{ch}\left(\frac{a\pi}{2}\right)}.$$

Далее рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, приходим к справедливости равенств из теорем 2 и 3.

Применяя аналогичные рассуждения в случае многочлена

$$P_{2n}(x) = x^{2n} - a^{2n},$$

можно получить лакунарные рекуррентные соотношения для многочленов Бернулли и Эйлера с пропусками длины 4, 6, 8 и т.д. Однако при этом при возрастании n возникают серьёзные технические сложности.

Любопытно отметить, что, исходя из рекуррентного соотношения с пропусками длины 4, например из равенства

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 4^{2n-k} C_{4n+2}^{4k+2} B_{4n-4k}(z) = (2n+1)\sum_{m=0}^{2n}(-1)^m C_{4n+1}^{2m}(2z-1)^{2m},$$

(см. теорему 2), можно получить рекуррентные соотношения для многочленов $B_{4k+1}(z)$, $B_{4k+2}(z)$ и $B_{4k+3}(z)$ дифференцированием достаточное число раз обе части этого равенства, а для соответствующих рекуррентных соотношений для чисел Бернулли и Эйлера аналогичная задача не совсем тривиальна.

VI. О других приложениях метода

Предложенный нами метод позволяет получить новые интегральные представления для некоторых специальных функций. В частности, для дигамма-функции Эйлера, определяемой равенством

$$\psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)},$$

и связанной с ней функции

$$G(a) = \psi\left(\frac{1+a}{2}\right) - \psi\left(\frac{a}{2}\right),$$

справедливы следующие интегральные представления.

Theorem (5)

При $0 < a < 1$ *справедливы равенства*

$$\psi(a) = -\gamma - 2\ln 2 - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg} a\pi + \frac{1}{\sin a\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin a\pi - \cos(2a-1)x}{\cos x}\,dx =$$

$$= -\gamma - \ln 2 - \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}(a\pi) + \frac{1}{\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2} (\sin(a\pi) - \sin(2ax))\operatorname{tg} x\,dx,$$

$$G(a) = \frac{\pi}{2\sin(a\pi)} - \frac{1}{\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin(2a-1)x}{\sin x}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2\sin(a\pi)} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{a\sin(a\pi)}\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin ax}{\sin x}\right)^2 dx,$$

где γ - постоянная Эйлера.

Отметим, что приведённые здесь формулы для $G(a)$ встречаются в математической литературе, а формулы для $\psi(a)$ мы нигде не нашли.

Кроме того, из полученных нами результатов можно извлечь следующие новые аппроксимации для $\ln 2$, постоянных Каталана (G) и Апери ($\zeta(3)$):

$$\ln 2 = \lim_{n\to+\infty}\left(n + \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}\ln\left(1-\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}\right)\right),$$

$$G = 2\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sin(2k-1)\frac{\pi}{4n}\ln\operatorname{tg}(2k-1)\frac{\pi}{8n},$$

$$\zeta(3) = 4\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\ln(2n) - 2n - \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}\ln\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{32}{7}\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\ln(2n) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\frac{k\pi}{2n}\ln\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{4n}\right) =$$

$$= \frac{16}{3}\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\ln 2 - n - \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}\ln\left(1-\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}\right)\right).$$

и равенства

$$e^{\frac{G}{\pi}} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{e}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(e^{-1}\left(1+\frac{2}{4k+1}\right)^{2k+1}\right),$$

$$e^{\frac{4G}{\pi}-\frac{35\zeta(3)}{4\pi^2}} = \sqrt{e/2}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(e\left(1-\frac{1}{(4k)^2}\right)^{(4k)^2}\right),$$

$$\sqrt{2/e} = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(e^{-1}\left(1+\frac{2}{2k-1}\right)^{k}\right),$$

$$e^{-\frac{27\zeta(3)}{4\pi^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{e/2}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(e^{1+12k^2}\left(1-\frac{2}{2k+1}\right)^{12k^3}\right),$$

$$e^{-\frac{7\zeta(3)}{2\pi^2}} = \sqrt{e}/2\prod_{k=1}^{\infty}\left(e\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right)^{(2k)^2}\right).$$

$$e^{\frac{2G}{\pi}+\frac{1}{2}} = 3\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{2}{4k+1}\right)\left(1-\frac{4}{(4k+1)^2}\right)^{2k}.$$

Часть результатов, изложенных выше, опубликована в следующих работах Мирзоева К.А. и Сафоновой Т.А.:

1. Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов// Доклады АН. 2018. 482(5). С. 500–503.

2. Об интегральном представлении сумм некоторых степенных рядов// Математические заметки. 2019. 106(3). С.470-475.

3. Обыкновенные дифференциальные операторы и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов// Труды ММО. 2019. 80(2). С. 157-177.

4. Интегральное представление сумм некоторых рядов, связанных со специальными функциями// Математические заметки. 2020. 108(4). С. 632-637.

5. Представления $\zeta(2n+1)$ и связанных с ними чисел в виде определённых интегралов и быстро сходящихся рядов // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. 494(5). С. 45-49.

6. Многочлены от оператора дифференцирования и формулы для сумм некоторых сходящихся рядов // Функциональный анализ и его приложения. 2022. 56(1). С. 81-93.

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!