МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ РЕЗОНАНСА В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Литвинов Владислав Львович

Самарский государственный технический университет

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Линейные модели

В настоящее время вопросы надежности при проектировании технических объектов с движущимися границами требуют все более полного учета динамических явлений. Широкое распространение в технике объектов с движущимися границами обусловливает необходимость развития методов их расчета.

Колебания в передачах с гибкой связью при разгоне (предотвращение колебаний лент в лентопротяжных механизмах, ленточных пилах и т.д.)

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = 0.$$

Продольные колебания вязкоупругих канатов переменной длины (надежность работы грузоподъемных установок, безопасность движения лифтов и т.д.)

$$Z_{tt}(x,t) - a^2 [Z_{xx}(x,t) + \mu Z_{xxt}(x,t)] = f(x,t).$$

Поперечные колебания канатов переменной длины с учетом вязкоупругости, изгибной жесткости, сил сопротивления среды и жесткости основания (надежность работы железнодорожной контактной сети, безопасность движения подвесных канатных дорог и т.д.)

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) + \frac{\lambda}{\rho} U_t(x,t) + \frac{EI}{\rho} U_{xxxx}(x,t) + \frac{\mu I}{\rho} U_{xxxxt}(x,t) + \frac{k_0}{\rho} U(x,t) = f(x,t).$$

Изгибные колебаний валов, балок и стержней с подвижными закреплениями с учетом вязкоупругости, сил сопротивления среды и жесткости основания (надежность работы деталей машин, безопасность движения поездов и т.д.)

$$\frac{EI}{\rho} U_{xxxx}(x,t) + \frac{\mu I}{\rho} U_{xxxxt}(x,t) + U_{tt}(x,t) + \frac{\lambda}{\rho} U_t(x,t) + \frac{k_0}{\rho} U(x,t) = f(x,t).$$

Крутильные колебания валов и стержней переменной длины (надежность работы поршневых двигателей, турбин, генераторов, редукторов, бурильных колонн и т.д.)

$$\Phi_{tt}(x,t) - a^2 \Phi_{xx}(x,t) = 0.$$

Основные методы решений краевых задач

Аналитические методы

Классы решений	Авторы	Тип уравнений	Недостаток решений
Автомодельные решения	Самарин Ю.П.; Ястребов В.П.	Волновое уравнение, уравнение изгибных колебаний, телеграфное уравнение	Справедливы для областей, расширяющихся в автомодельном режиме из точки. Отсутствие модовой структуры в решении затрудняет его анализ.
Решения на характеристиках	Самарин Ю.П.	Волновое уравнение	Приемлемы при однократном отражении волн в полубесконечных объектах
Разложение решений по системе мгновенных собственных функций	Гринберг Г.А.	Задачи диффузионного типа для расширяющихся и сжимающихся областей	Приводит к необходимости решения бесконечной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка
Сведение задачи к решению интегро-дифференциаль-ных уравнений	Ишлинский А.Ю., Савин Г.Н., Горошко О.А., Горбань В.А.	Волновое уравнение	Позволяет получить достаточно простое решение только для волн, два-три раза провзаимодействовавших с границами.
Остановка границ введением новых переменных.	Весницкий А.И., Потапов А.И., Григорян Г.А.	Волновое уравнение	Применяется для граничных условий первого рода.
Задачи граничного управления	Ильин В. А., Моисеев Е. И. , Андреев А.А., Лексина С.В. , Козлова Е.А.	Уравнения гиперболического типа	Рассматривается класс краевых задач в системах постоянной длины.

Приближенные методы

Асимптотические методы	Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Крылов В.И., Савин Г.Н., Горошко О.А., Лежнева А.А., Столяр А.М.	Волновое уравнение, уравнение изгибных колебаний	Применимы в случае медленного движения границ по сравнению со скоростью распространения колебаний.
Метод Канторовича в совокупности с методом Галеркина	Лежнева А.А., Анисимов В.Н.	Волновое уравнение, уравнение изгибных колебаний	Применяется в случае однородных граничных условий.

Получена нелинейная математическая модель для моделирования и анализа продольно–поперечных колебаний одномерных объектов с движущимися границами, учитывающая: геометрическую нелинейность, изгибную жесткость, жесткость подложки, взаимодействие продольных и поперечных колебаний, вязкоупругость, сопротивление среды, взаимодействие между частями объекта слева и справа от движущейся границы.

Постановка задачи о продольно–поперечных колебаниях объектов с движущимися границами

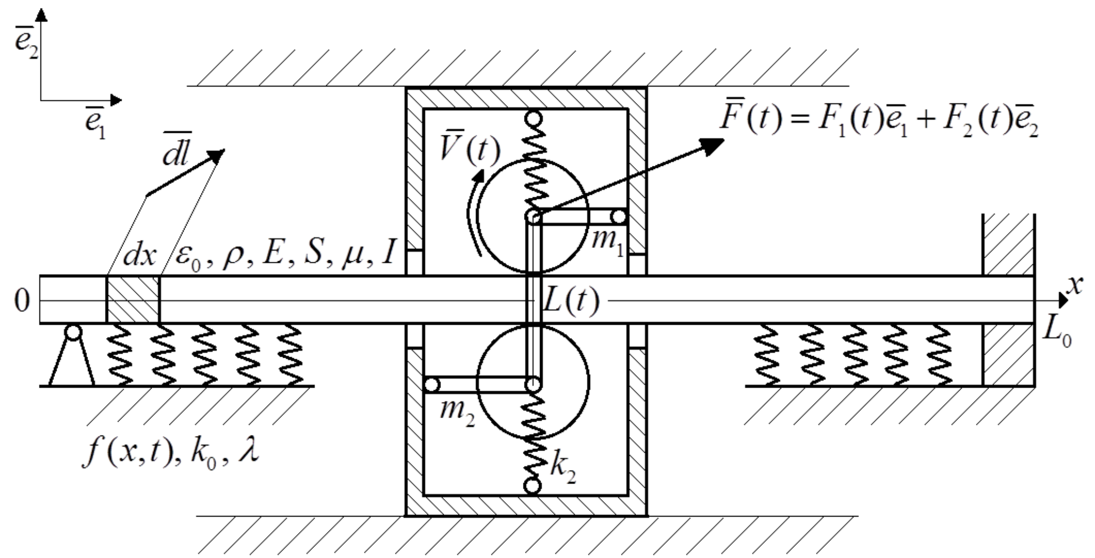


Рис.1. Обобщенная схема объекта

Обозначения:

I - осевой момент инерции поперечного сечения; *E* - модуль упругости материала;

μ - параметр, характеризующий вязкоупругость на основе структурной модели Фойгта;

ε_0 - начальная продольная деформация, создающая натяжение $T = ES\varepsilon_0$; $\bar{F}(t)$ - внешняя нагрузка;

$L(t)$ - длина недеформированного в продольном направлении объекта слева от движущейся границы;

k_0 - жесткость подложки; $V(t)$ - окружная линейная скорость роликов; k_2 - жесткость системы роликов;

λ - коэффициент, характеризующий действие сил сопротивления внешней среды;

L_0 - общая длина объекта; ρ - объемная плотность массы;

S - площадь поперечного сечения; $f(x,t)$ - распределенная нагрузка.

Нелинейная постановка задачи о продольно–поперечных колебаниях объектов с движущимися границами

Система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \rho S u_{1,tt} - S\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left(E\left(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}-1\right)+\mu\dfrac{u_{k,x}u_{k,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}}\right)\dfrac{u_{1,x}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}}\right)=0; \\ \rho S u_{2,tt} - S\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left(E\left(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}-1\right)+\mu\dfrac{u_{k,x}u_{k,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}}\right)\dfrac{u_{2,x}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}}\right)+ \\ +I\left(Eu_{2,xxxx}+\mu u_{2,xxxxt}\right)+\lambda u_{2,t}+k_0u_2-f(x,t)=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Начальные условия:

$$u_1(x,0)=\varphi_1(x); \quad u_{1,t}(x,0)=\varphi_2(x);$$
$$u_2(x,0)=\varphi_3(x); \quad u_{2,t}(x,0)=\varphi_4(x). \qquad (2)$$

Граничные условия:

$$u_1^*(0,t)=0; \quad u_2(0,t)=0; \quad u_{2,xx}(0,t)=0;$$
$$u_1^*(L_0,t)=0; \quad u_2(L_0,t)=0; \quad u_{2,x}(L_0,t)=0; \quad (3)$$

Обозначено $u_1(x,t)=u_1^*(x,t)+x+\varepsilon_0 x$

Граничные условия (на движущейся границе):

$$m_1\frac{d^2u_1\left(L(t),t\right)}{dt^2}-\rho S\left(u_{1,t}\left(L(t)+0,t\right)-u_{1,t}\left(L(t)-0,t\right)\right)L'(t)+\left(ES\left(\sqrt{u_{j,x}\left(L(t)-0,t\right)u_{j,x}\left(L(t)-0,t\right)}-1\right)+\right.$$
$$\left.+\mu S\frac{u_{k,x}\left(L(t)-0,t\right)u_{k,xt}\left(L(t)-0,t\right)}{\sqrt{u_{j,x}\left(L(t)-0,t\right)u_{j,x}\left(L(t)-0,t\right)}}\right)\frac{u_{1,x}\left(L(t)-0,t\right)}{\sqrt{u_{j,x}\left(L(t)-0,t\right)u_{j,x}\left(L(t)-0,t\right)}}-\left(ES\left(\sqrt{u_{j,x}\left(L(t)+0,t\right)u_{j,x}\left(L(t)+0,t\right)}-1\right)+\right.$$
$$\left.+\mu S\frac{u_{k,x}\left(L(t)+0,t\right)u_{k,xt}\left(L(t)+0,t\right)}{\sqrt{u_{j,x}\left(L(t)+0,t\right)u_{j,x}\left(L(t)+0,t\right)}}\right)\frac{u_{1,x}\left(L(t)+0,t\right)}{\sqrt{u_{j,x}\left(L(t)+0,t\right)u_{j,x}\left(L(t)+0,t\right)}}-F_1(t)=0;$$

$$m_2\frac{d^2u_2\left(L(t),t\right)}{dt^2}+EI\left(u_{2,xxx}\left(L(t)+0,t\right)-u_{2,xxx}\left(L(t)-0,t\right)\right)+\mu I\left(u_{2,xxxt}\left(L(t)+0,t\right)-u_{2,xxxt}\left(L(t)-0,t\right)\right)+k_2u_2\left(L(t),t\right)-F_2(t)=0;$$

$$u_1\left(L(t)-0,t\right)=u_1\left(L(t)+0,t\right); \; u_2\left(L(t)-0,t\right)=u_2\left(L(t)+0,t\right); \; u_{2,x}\left(L(t)-0,t\right)=0; \; u_{2,x}\left(L(t)+0,t\right)=0. \qquad (4)$$

Линеаризация задачи о продольно–поперечных колебаниях объектов с движущимися границами

Задача для продольных колебаний

$$\rho u^*_{1,tt} - E u^*_{1,xx} - \mu u^*_{1,xxt} = 0. \qquad (5)$$

Граничные условия:

$$u_1^*(0,t) = 0; \quad u_1^*(L_0,t) = 0; \qquad (6)$$

$$m_1 \frac{d^2 u_1\left(L(t),t\right)}{dt^2} - S\rho\left(u^*_{1,t}\left(L(t)+0,t\right) - u^*_{1,t}\left(L(t)-0,t\right)\right)L'(t) -$$

$$-ES\left(u^*_{1,x}\left(L(t)+0,t\right) - u^*_{1,x}\left(L(t)-0,t\right)\right) - S\mu\left(u^*_{1,xt}\left(L(t)+0,t\right) - u^*_{1,xt}\left(L(t)-0,t\right)\right) - F_1(t) = 0;$$

$$u_1^*\left(L(t)+0,t\right) = u_1^*\left(L(t)-0,t\right). \qquad (7)$$

Начальные условия:

$$u_1^*(x,0) = \varphi_1^*(x); \quad u^*_{1,t}(x,0) = \varphi_2^*(x). \qquad (8)$$

Задача для поперечных колебаний

$$\rho S u_{2,tt} - ES\varepsilon_0 u_{2,xx} + EI u_{2,xxxx} + \mu I u_{2,xxxxt} + \lambda u_{2,t} + k_0 u_2 - f(x,t) = 0. \qquad (9)$$

Граничные условия

$$u_2(0,t) = 0; \quad u_{2,xx}(0,t) = 0; \quad u_2(L_0,t) = 0; \quad u_{2,x}(L_0,t) = 0; \qquad (10)$$

$$m_2 \frac{d^2 u_2\left(L(t),t\right)}{dt^2} + EI\left(u_{2,xxx}\left(L(t)+0,t\right) - u_{2,xxx}\left(L(t)-0,t\right)\right) +$$

$$+\mu I\left(u_{2,xxxt}\left(L(t)+0,t\right) - u_{2,xxxt}\left(L(t)-0,t\right)\right) + k_2 u_2\left(L(t),t\right) - F_2(t) = 0;$$

$$u_2\left(L(t)+0,t\right) = u_2\left(L(t)-0,t\right); \quad u_{2,x}\left(L(t)+0,t\right) = 0; \quad u_{2,x}\left(L(t)-0,t\right) = 0. \qquad (11)$$

Начальные условия:

$$u_2(x,0) = \varphi_3(x); \quad u_{2,t}(x,0) = \varphi_4(x). \qquad (12)$$

Приближенный аналитический метод Канторовича-Галеркина

Задача 1

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau)+L[U(\xi,\tau)]+\varepsilon_0 L_1[U(\xi,\tau)]=\varphi(\xi,\tau) \qquad (13)$$

Граничные условия

$$Y_{ji}[U(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau)]+\varepsilon_{ji}Z_{ji}[U(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau)]=F_{ji}(\tau);\; i=\overline{1,m};\; j=\overline{1,2} \qquad (14)$$

Решение

$$U(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau) \qquad (15)$$

$$\mu_n(\tau)=A_{0n}(\varepsilon\tau)y_n(\tau),$$

$$y_n''(\tau)+\omega_n^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau)=M_n(\varepsilon\tau)\cos W_n(\tau) \qquad (16)$$

$$y_{1n}(\tau)=a_n(\varepsilon\tau)\cos w_n(\tau);\;\; y_{2n}(\tau)=a_n(\varepsilon\tau)\sin w_n(\tau) \qquad (17)$$

Выражение для амплитуды колебаний при $F_{ji}(\tau)=B_{ji}\cos W_{ji}(\tau)$:

$$A_n^2(\tau)=\frac{1}{4}A_{0n}^2(\varepsilon\tau)a_n^2(\varepsilon\tau)\left\{\left[\int_0^{\tau}F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_{n_1}(\zeta)d\zeta\right]^2+\left[\int_0^{\tau}F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_{n_1}(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}, \qquad (18)$$

$$F_n(\varepsilon\zeta)=\frac{M_n(\varepsilon\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta)w_n'(\zeta)};\quad \Phi_{n1}(\zeta)=w_n(\zeta)-W_n(\zeta);\quad w_n(\tau)=\int_0^{\tau}\omega_n(\varepsilon\tau)d\tau;\quad a_n(\varepsilon\tau)=\frac{1}{\sqrt{\omega_n(\varepsilon\tau)}}.$$

Исследование погрешности вычислений

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА-ГАЛЕРКИНА
на примере тестовой задачи

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau)-U_{\xi\xi}(\xi,\tau)=0; \qquad (35)$$
$$U(0,\tau)=0;\ U(1+\varepsilon\tau,\tau)=B\cos W(\tau).$$

Резонансные частоты:

$$W_{точн.}(\tau)=\frac{2\pi n\ln(1+\varepsilon\tau)}{\ln\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)};\ W_{прибл.}(\tau)=\frac{\pi n}{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2\pi^2n^2}\right)}\ln(1+\varepsilon\tau). \qquad (36)$$

Оценка погрешности, %

$$\Delta=\left|\frac{W'_{точн.}(\tau)-W'_{прибл.}(\tau)}{W'_{точн.}(\tau)}\right|\cdot 100\%, \qquad (37)$$

где $W'_{точн.}(\tau), W'_{прибл.}(\tau)$ – точная и приближенная мгновенные резонансные частоты.

Таблица 1. Оценка погрешности метода Канторовича–Галеркина (%) в зависимости от относительной скорости движения границ ε

ε	0,001	0,005	0,01	0,02	0,05	0,1	0,3	0,5
Δ, %	$3{,}33\cdot10^{-5}$	0,001	0,003	0,013	0,083	0,335	3,173	9,861

Установлено, что максимальная погрешность не превышает 5 % для величины $\varepsilon < 0{,}37$.

Аналитический метод замены переменных

Задача 2

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau)-U_{\xi\xi}(\xi,\tau)=0 \qquad (19)$$

Начальные условия

$$U(\xi,0)=\Phi_0(\xi);\, U_\tau(\xi,0)=\Phi_1(\xi) \qquad (20)$$

Граничные условия

$$L_1[U(\ell_1(\tau),\tau)]=F_1(\tau);\ \ell_1(0)=0;$$

$$L_2[U(\ell_2(\tau),\tau)]=F_2(\tau);\ \ell_2(0)=1;\ \ell_2(\tau)>\ell_1(\tau) \qquad (21)$$

Начальные условия

$$\begin{cases} g(z)=\dfrac{1}{2}[\Phi_0(z)+\int\limits_0^z \Phi_1(\zeta)d\zeta], & (0\le z\le 1); \\ G(z)=\dfrac{1}{2}[\Phi_0(-z)+\int\limits_0^z \Phi_1(-\zeta)d\zeta], & (-1\le z\le 0) \end{cases} \qquad (24)$$

Введем новые функции

$$g(z)=r(\varphi(z));\, G(z)=R(\psi(z)), \qquad (25)$$

$$\begin{cases} \varphi(\tau+\ell_1(\tau))=\psi(\tau-\ell_1(\tau)); \\ \varphi(\tau+\ell_2(\tau))=\psi(\tau-\ell_2(\tau))+1 \end{cases} \qquad (26)$$

Решение

$$U(\xi,\tau)=g(\tau+\xi)+G(\tau-\xi) \qquad (22)$$

Граничные условия

$$\begin{cases} L_{11}[g(\tau+\ell_1(\tau))]+L_{12}[G(\tau-\ell_1(\tau))]=F_1(\tau); \\ L_{21}[g(\tau+\ell_2(\tau))]+L_{22}[G(\tau-\ell_2(\tau))]=F_2(\tau) \end{cases} \qquad (23)$$

Система уравнений

$$\begin{cases} L_{11}[r(z)]+L_{12}[R(z)]=\theta_1(z); \\ L_{21}[r(z)]+L_{22}[R(z-1)]=\theta_2(z), \end{cases} \qquad (27)$$

Начальные условия

$$r(z)=\begin{cases} -R(z), -1\le z\le \varphi(0); \\ r(z), \varphi(0)\le z\le 0. \end{cases} \qquad (28)$$

Выражение для амплитуды колебаний при $\theta(z)=B\cos W(z)$:

$$A_n^2(\tau)=4B^2\left\{\left[\int\limits_0^{b(\tau)}\cos\Phi_{n1}(\zeta)d\zeta\right]^2+\left[\int\limits_0^{b(\tau)}\sin\Phi_{n1}(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}, \qquad (29)$$

$$\Phi_{n1}(\zeta)=2\pi n\zeta-W(\zeta);\ b(\tau)=\psi(\tau-\xi_0(\tau)).$$

Преимущества методов

Метод Канторовича-Галеркина позволяет получать решения дифференциальных уравнений в частных производных до второго порядка включительно по временной переменной и до четвертого порядка включительно по пространственной переменной, а также учитывать:

- вязкоупругие свойства колеблющегося объекта;
- действие сил сопротивления среды;
- изгибную жесткость;
- жесткость подложки;
- широкий класс граничных условий.

Погрешность при $\varepsilon < 0,37\ (\varepsilon = v/a)$ составляет не более 5%.

Метод замены переменных в системе функционально-разностных уравнений позволяет:

- получить точное решение волнового уравнения с более широким классом условий на подвижных границах (отличным от граничных условий первого рода):

$$U(\ell_1(\tau),\tau) = F_1(\tau), U(\ell_2(\tau),\tau) = F_2(\tau); \qquad U_\xi(\ell_1(\tau),\tau) = F_1(\tau), U_\xi(\ell_2(\tau),\tau) = F_2(\tau);$$

$$U_\tau(\ell_1(\tau),\tau) = F_1(\tau), U_\xi(\ell_2(\tau),\tau) = F_2(\tau); \qquad U_\tau(\ell_1(\tau),\tau) = F_1(\tau), U_\tau(\ell_2(\tau),\tau) = F_2(\tau);$$

$$U(\ell_1(\tau),\tau) = F_1(\tau),\ U_\xi(\ell_2(\tau),\tau) = F_2(\tau); \qquad U(\ell_1(\tau),\tau) = F_1(\tau),\ U_\tau(\ell_2(\tau),\tau) = F_2(\tau).$$

- получить решение при произвольных начальных условиях, заданных при $\tau = 0,$ в то время, как в методе замены переменных в дифференциальном уравнении (Весницкий А.И.) начальные условия должны быть заданы на линии, определяемой уравнением $\varphi(\tau+\xi)+\psi(\tau-\xi)=0.$

Методика анализа и численного исследования резонансных свойств

Выражение для амплитуды колебаний системы на *n*-ной динамической моде имеет вид:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau)\left\{\left[\int_0^{\tau} F_n(\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \left[\int_0^{\tau} F_n(\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}. \qquad (32)$$

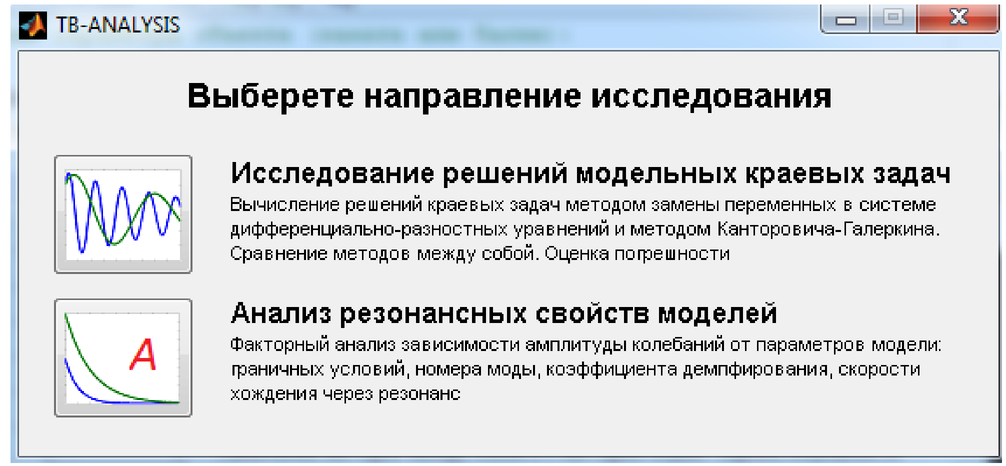
Явление установившегося резонанса будет наблюдаться, если скорость изменения функции $\Phi_n(\zeta)$ равна нулю, т.е. $\Phi_n(\zeta) = \gamma,$ где $\gamma -$ постоянная величина. В этом случае возрастание амплитуды описывается следующим выражением:

$$A_n(\tau) = E_n(\tau)\int_0^{\tau} F_n(\zeta)d\zeta. \qquad (33)$$

Явление прохождения через резонанс наблюдается во временной области, содержащей точку τ_0, где $\Phi_n'(\tau_0) = 0.$ Если принять амплитуду в начале резонансной области (точка τ_1) равной амплитуде внешнего воздействия, то амплитуда в конце резонансной области (точка τ_2) определяется выражением:

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2)\left\{\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}. \qquad (34)$$

Автоматизированный комплекс «TB-ANALISYS» в среде Matlab. Блок-схема и оконный интерфейс



ПОГРЕШНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ КВАДРАТА АМПЛИТУДЫ

$$A_n^2(\tau_1,\tau_2)=E_n^2(\tau_2)\left\{I_1{}^2+I_2{}^2\right\}, \qquad (30)$$

где $I_1=\int\limits_0^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta;\;\; I_2=\int\limits_0^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta.$

Погрешность вычислений

$$R_A=2E_n^2(\tau_2)R_{\text{int}}\left[R_{\text{int}}+I_1+I_2\right], \qquad (31)$$

где $R_{\text{int}}=\max\left\{R_{\text{int}}^1,\,R_{\text{int}}^2\right\}$ - максимальная погрешность

вычисления интегралов $I_1,\,I_2$

Примеры исследования резонансных свойств моделей с помощью программного комплекса

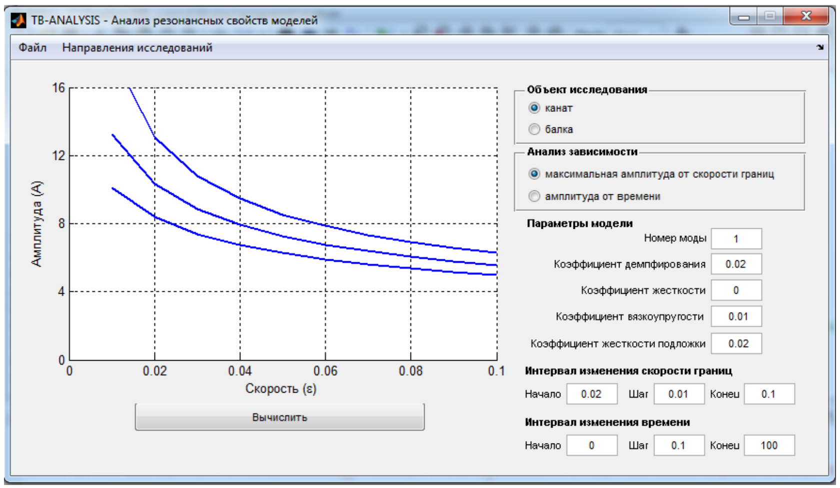


Рис.3. График зависимости максимальной амплитуды от скорости движения границ при различных значениях коэффициента демпфирования (сверху вниз: $\lambda = 0; \lambda = 0,01; \lambda = 0,02$)

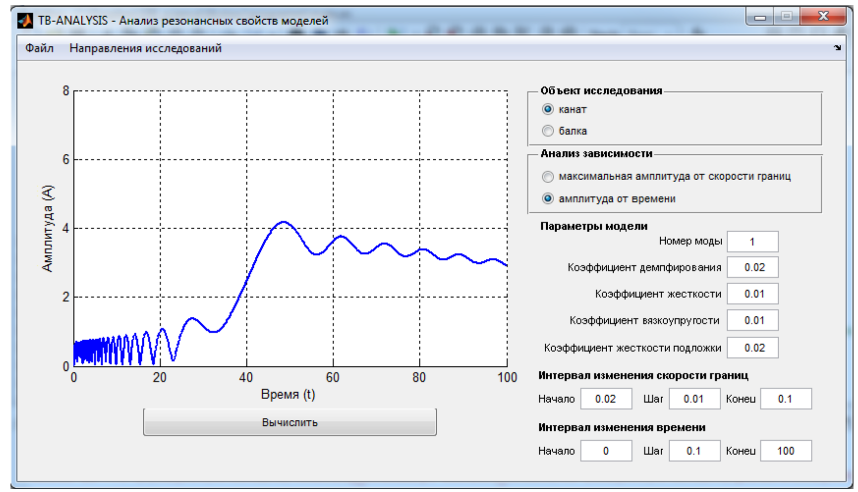


Рис.4. График зависимости амплитуды от времени при прохождении через резонанс

Модель продольных колебаний вязкоупругого каната переменной длины (решение приближенным аналитическим методом Канторовича-Галеркина)

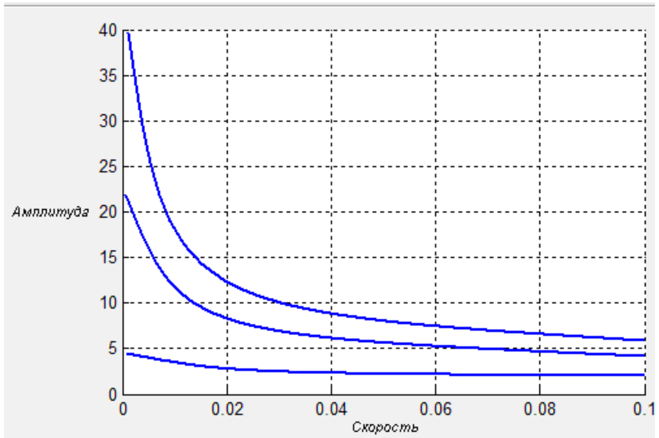


Рис.6. График амплитуды колебаний каната при различных значениях коэффициента вязкоупругости

Уравнение колебаний

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau)-U_{\xi\xi}(\xi,\tau)-\varepsilon_1 U_{\xi\xi\tau}(\xi,\tau)=0; \qquad (43)$$

Граничные условия:

$$U(0,\tau)=0;$$

$$U(l(\varepsilon_0\tau),\tau)-\varepsilon_0\int_{\gamma_0}^{\tau}U_{\xi}(l(\varepsilon_0\zeta),\zeta)l'(\varepsilon_0\zeta)d\zeta=F(\tau), \qquad (44)$$

где $\varepsilon_1=\mu\omega_0,\ \mu-$ параметр, характериз. вязкоупругость,

$l(\varepsilon_0\tau)=1+\varepsilon_0\tau-$ закон движения границы,

$F(\tau)=B\cos W(\tau)-$ внешнее возмущение.

Выражение для амплитуды колебаний при прохождении через резонанс $(W(\tau)=\tau)$:

$$\frac{1}{B^2}A_n^2(\tau_1,\tau_2)=E_n^2(\tau_2)\left\{\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2}F_n(\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2+\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2}F_n(\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}, \qquad (45)$$

где $E_n^2(\tau)=\exp\left(-\varepsilon_1\dfrac{\pi^2n^2\tau}{1+\varepsilon_0\tau}\right);\quad \Phi_n(\tau)=\dfrac{\pi n}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0\tau)-W(\tau);\quad F_n(\tau)=\dfrac{1}{1+\varepsilon_0\tau}\exp\left(\dfrac{\varepsilon_1}{2}\cdot\dfrac{\pi^2n^2\tau}{1+\varepsilon_0\tau}\right).$

Точка резонансной области $\quad \tau_0=\dfrac{1}{\varepsilon_0}(\pi n-1). \qquad (46)$

Модель поперечных колебаний вязкоупругого каната переменной длины, лежащего на упругом основании, обладающего изгибной жесткостью, с учетом влияния сил сопротивления среды

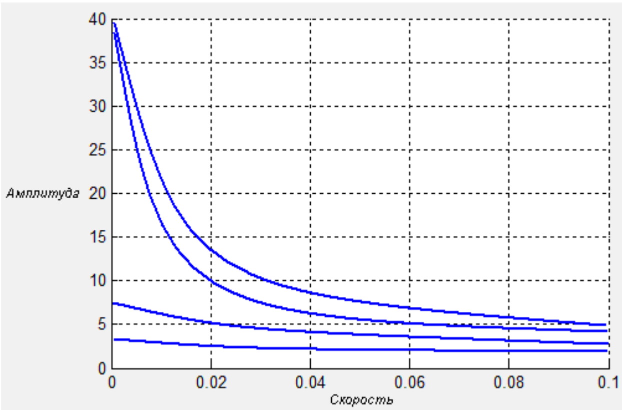


Рис.7. График амплитуды колебаний каната при различных значениях коэффициента демпфирования

Уравнение колебаний

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau)-V_{\xi\xi}(\xi,\tau)-\sigma^2V(\xi,\tau)+(\beta^2-\alpha\gamma^2)V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau)+\gamma^2V_{\xi\xi\xi\xi\tau}(\xi,\tau)=0; \quad (47)$$

Граничные условия:

$$V(0,\tau)=0;\ V_{\xi\xi}(0,\tau)=0;\ V(l(\varepsilon\tau),\tau)=e^{\alpha\tau}\cos W(\tau);\ V_{\xi}(l(\varepsilon\tau),\tau)=0, \quad (48)$$

где $\beta^2=\dfrac{EI}{\rho}\dfrac{\omega_0^2}{a^4};\ \gamma^2=\dfrac{\mu I}{\rho}\dfrac{\omega_0^3}{a^4};\ a=\sqrt{E/\rho};\ l(\varepsilon\tau)=1+\varepsilon\tau;\ \sigma^2=\alpha^2-\dfrac{k_0}{\rho\omega_0^2};$

$\alpha=\lambda/(2\omega_0\rho),\ \lambda-$ коэффициент сопротивления среды;

$\mu-$ параметр, хар. вязкоупругость; k_0- жесткость подложки.

Выражение для амплитуды колебаний при прохождении через резонанс $(W(\tau)=\tau)$:

$$A_n^2(\tau_1,\tau_2)=E_n^2(\varepsilon\tau_2)\left\{\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2}F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2+\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2}F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}, \quad (49)$$

где $E_n^2(\varepsilon\tau)=\dfrac{e^{-2\alpha\tau}}{4A_{1n}(\varepsilon\tau)\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)};\ \Phi_n(\zeta)=w_n(\zeta)-W_n(\zeta);\ F_n(\varepsilon\zeta)=\omega_{0n}^2(\varepsilon\zeta)Q_{n_{21}}(\varepsilon\zeta)e^{\alpha\varsigma}\sqrt{A_{1n}(\varepsilon\zeta)/\Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)}.$

Точка резонансной области $\tau_0=\dfrac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{\dfrac{2(\beta^2-\alpha\gamma^2)}{-1+\sqrt{1+4(\beta^2-\alpha\gamma^2)(1+\sigma^2)}}}\cdot\pi n-1\right]. \quad (50)$

Модель поперечных колебаний вязкоупругой балки переменной длины на упругом основании с учетом действия сил сопротивления среды

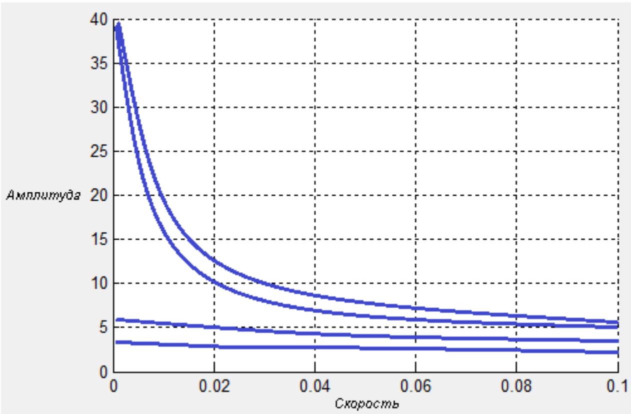


Рис.8. График амплитуды колебаний балки при различных значениях коэффициента жесткости подложки

Уравнение колебаний

$$(1-\varepsilon_1\alpha)V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau)+\varepsilon_1 V_{\xi\xi\xi\xi\tau}(\xi,\tau)+V_{\tau\tau}(\xi,\tau)-\beta^2 V(\xi,\tau)=0; \qquad (51)$$

Граничные условия:

$$V(0,\tau)=0;\ V_\xi(0,\tau)=0;\ V(l(\varepsilon_0\tau),\tau)=\cos W(\tau);\ V_\xi(l(\varepsilon_0\tau),\tau)=0, \qquad (52)$$

где $\varepsilon_1=\dfrac{\mu}{E}\omega_0;\ \beta^2=\alpha^2-\dfrac{k_0}{\rho\omega_0^2};\ l(\varepsilon_0\tau)=1+\varepsilon_0\tau;\ \varepsilon_0=-\dfrac{v_0}{\sqrt{\gamma\omega_0}};\ \gamma^2=\dfrac{EI}{\rho};$

$\alpha=\lambda/(2\omega_0\rho),\ \lambda-$ коэффициент демпфирования;

$\mu-$ коэффициент вязкоупругости; k_0- жесткость подложки.

Выражение для амплитуды колебаний при прохождении через резонанс $(W(\tau)=\tau)$:

$$A_n^2(\tau_1,\tau_2)=E_n^2(\tau_2)\left\{\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2}F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2+\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2}F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}, \qquad (53)$$

где $E_n^2(\tau)=\dfrac{2{,}59}{\Omega_{0n}(\varepsilon_0\tau)l(\varepsilon_0\tau)}\exp\left(\dfrac{\varepsilon_1 k_n^4}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{(1+\varepsilon_0\tau)^3}-1\right)-2\alpha\tau\right);\ F_n(\tau)=\dfrac{2k_n^3}{\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon_0\tau)l^7(\varepsilon_0\tau)}}\exp\left(\dfrac{\varepsilon_1 k_n^4}{6\varepsilon_0}\left(1-\dfrac{1}{(1+\varepsilon_0\tau)^3}\right)+\alpha\tau\right).$

Точка резонансной области $\tau_0=\dfrac{1}{\varepsilon}\left(k_n\sqrt[4]{\dfrac{1-\varepsilon_1\alpha}{1+\beta^2}}-1\right).$ (54)

Заключение

1. Разработаны новые математические модели для анализа продольно-поперечных колебаний одномерных объектов с движущимися границами, учитывающие геометрическую нелинейность, изгибную жесткость, взаимодействие продольных и поперечных колебаний, вязкоупругость, сопротивление среды, взаимодействие между частями объекта слева и справа от движущейся границы, в частных случаях малых колебаний совпадающие с классическими линейными моделями.

2. Для моделирования колебаний систем с подвижными границами разработан и реализован аналитический метод решения волнового уравнения, позволяющий получить решение с более широким спектром условий на подвижных границах, в отличие от известных задач аналогичного типа с граничными условиями первого рода; построен ряд решений для типовых механических объектов, позволяющих выполнить анализ их резонансных свойств.

3. Выполнено обобщение приближенного аналитического метода Канторовича - Галёркина на более широкий класс задач с условиями на движущихся границах, позволяющего учитывать действие на механическую систему сил сопротивления среды, изгибную жёсткость и жёсткость подложки, вязкоупругие свойства колеблющегося объекта и слабые возмущения на границах.

4. Исследована погрешность приближенного метода Канторовича – Галёркина применительно к оценке величины вызывающего резонанс внешнего возмущения, полученной для динамических мод различного порядка в зависимости от относительной скорости движения границ (отношение скорости границы к скорости распространения колебаний) и установлено, что максимальная погрешность не превышает 5% при относительной скорости движения границ не более 0,37.

5. Разработана методика моделирования и численного исследования резонансных эффектов для объектов с движущимися границами, позволяющая учитывать возможность возникновения явления установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс; выполнен анализ зависимости амплитуды динамических мод разного порядка и границ резонансной области от относительной скорости границ с оценкой погрешности этих параметров.

6. В среде Matlab разработан программный комплекс «TB-ANALYSIS», предназначенный для решения некоторого класса краевых задач с движущимися границами, математического моделирования и изучения резонансных свойств объектов, состояние которых описывается этими постановками задач. С помощью программного комплекса проведено численное исследование колебаний и резонансных характеристик объектов с подвижными границами, встречающихся в прикладных задачах (продольные колебания вязкоупругого каната; поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании и обладающего изгибной жесткостью, с учетом действия сил сопротивления среды; поперечные колебания вязкоупругой балки на упругом основании с учетом действия сил сопротивления среды). Проведено тестирование программного комплекса, показавшее его эффективность при выполнении указанных задач.

Перечень основных публикаций

в изданиях WoS, Scopus, ВАК

1. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ. – мат. науки. 2009. №1 (18). С. 149-158.
2. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ. – мат. науки. 2009. №2 (19). С. 147-152.
3. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Лукьянов А.Е. Обоснование граничных условий при взаимодействии струны, обладающей изгибной жесткостью, с роликовой опорой // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ. – мат. науки. 2010. №5 (21). С. 280-284.
4. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Об одном методе получения точного решения волнового уравнения, описывающего колебания механических систем с движущимися границами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ. – мат. науки. 2012. №3 (28). С. 145-151.
5. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Постановка задачи о колебаниях балки с движущейся подпружиненной опорой // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. 2013. №1(37). С. 93-98.
6. Литвинов В.Л. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении // Журнал Средневолжского математического общества. Т. 15, № 3. 2013.
7. Литвинов В.Л. Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода // Журнал Средневолжского математического общества. Т. 16, № 1. 2014.
8. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Математические модели нелинейных продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». № 2 (19) – 2015. – С. 382–397.
9. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Вычисление собственных частот каната, движущегося в продольном направлении // Журнал Средневолжского математического общества. Т. 19, № 1. 2017.– С. 130–139.
10. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19. № 4.
11. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Применение метода Канторовича-Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. Т.2, 2018. – С. 70–77.
12. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Вычисление собственных частот поперечных колебаний кабеля на участке наложения на него изоляции// Журнал Средне-Волжского математического общества. Т. 21, №1. 2019. С– 70–77.
13. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Об одном методе замены переменных для волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Журнал Средне-Волжского математического общества. Т. 26, №2. 2020.
14. V. Litvinov. Solution of model boundary value problems on oscillations of mechanical systems with moving boundaries by the Duhamel method, Journal of Physics: Conference Series, 2019, № 1392 (2019) 012015, p.2–8
15. Litvinov V.L., Tarakanov A.V. Investigations of oscillations rope of capacity plants/ Proceedings of the 6th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2020): Volume I (Lecture Notes in Mechanical Engineering)
16. В. Л. Литвинов. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений // Труды Института математики и механики УрО РАН», Т.27, №2. 2020.

монографии

1. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2009. – 131 с.: ил.
2. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография - Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. - 149 с.
3. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с изменяющейся границей - Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. - 100 с.

свидетельства о регистрации электронного ресурса

1. Литвинов В.Л., Яшагин Н.С., Анисимов В.Н. Свидетельство о регистрации электронного ресурса «Автоматизированный исследовательский комплекс «TB-ANALISYS» в ОФЭРНиО № 19517 от 26.09.2013 г. и ФГАНУ ЦИТиС № 130912114653 от 30.09.2013 г.

Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина

В работах А.А. Лежневой для решения задач о колебаниях систем с движущимися границами предлагается использовать метод Канторовича в совокупности с методом Галеркина.

Такой подход очень удобен, так как начальная задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения.

Этот метод А.А. Лежнева применяет для получения решений волнового уравнения и уравнения изгибных колебаний балки при несложных однородных граничных условиях, заданных на одной движущейся и одной неподвижной границах. В данном разделе метод Канторовича-Галеркина распространен на более широкий класс задач, которые в случае неподвижных границ могут быть решены методом разделения переменных. В общем виде произведено упрощение получаемого здесь обыкновенного дифференциального уравнения. Выполнена оценка точности метода в зависимости от скорости движения границ.

Впервые получено достаточно простое выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n-ной динамической моде, что позволяет проанализировать резонансные свойства решений. Заметим, что в отличие от работ А.А. Лежневой, особое внимание здесь уделено рассмотрению наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения действуют на границах.

Пусть требуется получить решение уравнения

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau)+L[U(\xi,\tau)]=\varphi(\xi,\tau) \qquad (2.71)$$

при граничных условиях

$$Y_{ji}\left[U\left(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau\right)\right]=F_{ji}(\tau); \qquad (2.72)$$
$$i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,2},$$

где L – линейный однородный дифференциальный оператор по ξ порядка $2m$;

Y_{ji} – линейные однородные дифференциальные операторы по ξ ;

$\varphi(\xi,\tau)$; $F_{ji}(\tau)$ – заданные функции;

ε – малый параметр (обычно величина ε соизмерима с V/a, V – скорость границы, a – скорость распространения колебаний).

Запись законов движения границ в виде $\ell_j(\varepsilon\tau)$ соответствует режиму медленного движения.

В случае неподвижности границ $(\ell_j(\varepsilon\tau)=const)$ задача (2.71), (2.72) может быть решена методом разделения переменных.

Метод Канторовича-Галеркина позволяет учесть и начальные условия. Однако они не влияют на резонансные свойства линейных систем, поэтому в задаче (2.71), (2.72) начальные условия опущены.

Для того чтобы избавиться от неоднородностей в граничных условиях, вводится новая функция

$$U(\xi,\tau)=V(\xi,\tau)+H(\xi,\tau), \tag{2.73}$$

где

$$H(\xi,\tau)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m}D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)F_{kr}(\tau),$$

а функция $D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)$ удовлетворяют уравнению

$$L\left[D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)\right]=0 \tag{2.74}$$

и условиям

$$Y_{ji}\left[D_{kr}\left(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau\right)\right]=\begin{cases}1, k=j\wedge r=i;\\0, k\neq j\vee r\neq i.\end{cases} \tag{2.75}$$

Решение задачи (2.74), (2.75) затруднений, как правило, не вызывает, и поэтому здесь оно подробно не рассматривается.

Функция $V(\xi,\tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau)+L\left[V(\xi,\tau)\right]=\varphi(\xi,\tau)-H_{\tau\tau}(\xi,\tau); \tag{2.76}$$

$$Y_{ji}\left[V\left(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau\right)\right]=0. \tag{2.77}$$

Для решения задачи используем метод Канторовича в совокупности с методом Галеркина:

$$V(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau), \qquad (2.78)$$

где $X_n(\xi,\varepsilon\tau)-$ собственные функции следующей краевой задачи:

$$L\left[X_n(\xi,\varepsilon\tau)\right]=\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau); \qquad (2.79)$$

$$Y_{ji}\left[X_n\left(\ell_j(\varepsilon\tau),\varepsilon\tau\right)\right]=0. \qquad (2.80)$$

Здесь $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)-$ собственные частоты задачи, а $\varepsilon\tau$ рассматривается как параметр.

Такой выбор координатных функций X_n обусловливает тот факт, что решение (2.78) является точным в случае, если границы неподвижны. При увеличении скорости движения границ точность метода уменьшается.

Заметим, что функции $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ удовлетворяют граничным условиям (2.77) и играют в данном случае роль динамических мод.

Функции $f_n(\tau)$ обычно находятся из того условия, чтобы частичная сумма ряда (2.78) как можно лучше удовлетворяла уравнению (2.76). Поскольку в данной работе основное внимание сосредоточено на изучении резонансных свойств колебаний, соответствующих отдельным динамическим модам, то $f_n(\tau)$ здесь целесообразнее определять из того условия, чтобы каждый член ряда (2.78) как можно лучше удовлетворял уравнению (2.76). Применим для этого метод Галеркина. Функции $f_n(\tau)$ будем определять из следующего уравнения:

$$\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} \{[X_n(\xi,\varepsilon\tau)f_n(\tau)]_{\tau\tau} + L[X_n(\xi,\varepsilon\tau)f_n(\tau)] - \varphi(\xi,\tau) + H_{\tau\tau}(\xi,\tau)\} X_n(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi = 0, \qquad (2.81)$$

где $g(\xi)-$ весовая функция.

Заметим, что функции $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ ортогональны на интервале $[\ell_1(\varepsilon\tau),\ell_2(\varepsilon\tau)]$ с весом $g(\xi)$.

Поскольку оператор L является оператором по ξ, а $X_n(\xi,\varepsilon\tau)-$ собственные функции задачи (2.79), (2.80), то

$$L[X_n(\xi,\varepsilon\tau)f_n(\tau)] = f_n(\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau), \qquad (2.82)$$

где $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)-$ собственные частоты задачи (2.79), (2.80).

Для того чтобы избавиться в уравнении (2.81) от второй производной функции F_{ji}, сделаем замену:

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) + \sum_{k=1}^{2} \sum_{r=1}^{m} Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) F_{kr}(\tau), \tag{2.83}$$

где

$$Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) = -\frac{\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau) X_n(\xi,\varepsilon\tau) g(\xi) d\xi}{\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi,\varepsilon\tau) g(\xi) d\xi}. \tag{2.84}$$

С учетом (2.82), (2.83) уравнение (2.81) примет вид

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)\mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)\mu_n'(\tau) + \varepsilon^2 A_{4n}(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \tag{2.85}$$

где

$$\begin{gathered}\theta_n(\tau) = E_n(\tau) - 2\varepsilon \sum_{k=1}^{2} \sum_{r=1}^{m} B_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) F_{kr}'(\tau) - \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{2} \sum_{r=1}^{m} C_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)\, F_{kr}(\varepsilon\tau) - \\ -\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau) \sum_{k=1}^{2} \sum_{r=1}^{m} Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) F_{kr}(\varepsilon\tau).\end{gathered} \tag{2.86}$$

Здесь и далее используются следующие обозначения:

$$A_{1n}(\varepsilon\tau) = \int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi; \tag{2.87}$$

$$\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau) = \int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_{n_\tau}(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi; \tag{2.88}$$

$$\varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau) = \int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_{n_\tau}^2(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi; \tag{2.89}$$

$$\varepsilon^2 A_{4n}(\varepsilon\tau) = \int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_{n_{\tau\tau}}(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi;$$

$$\varepsilon B_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) = \int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} [Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau) + D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)]_\tau \cdot X_n(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi; \tag{2.90}$$

$$\varepsilon^2 C_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) = \int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} [Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau) + D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)]_{\tau\tau} \cdot X_n(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi;$$

$$E_n(\tau) = \int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} \varphi(\xi,\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi.$$

С учетом равенств (2.78), (2.83) решение (2.73) примет вид

$$U(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\tau)X(\xi,\varepsilon\tau)+\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m}F_{kr}(\tau)[D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)]. \quad (2.91)$$

Поскольку величины $Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)$, определяемые выражением (2.84), представляют собой коэффициенты ряда для функции $-D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)$, разложенной по системе ортогональных функций $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ на интервале $[\ell_1(\varepsilon\tau),\ell_2(\varepsilon\tau)]$, то выражение в квадратных скобках равенства (2.91) равно нулю во всех точках отрезка $[\ell_1(\varepsilon\tau),\ell_2(\varepsilon\tau)]$, кроме, может быть, крайних точек. Поэтому вместо (2.91) можно взять

$$U(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau). \quad (2.92)$$

Данное решение показывает, что аналогично тому, как колебательные процессы для объектов с неподвижными границами выражаются суммой колебаний, соответствующих собственным функциям, в случае движения границ появляется суперпозиция колебаний, соответствующих динамическим модам $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$.

Если ввести в уравнение (2.85) новую функцию

$$\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau) y_n(\tau), \tag{2.93}$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = \exp\left[-\int_0^\tau \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} d\tau\right], \tag{2.94}$$

то это уравнение можно преобразовать так, что оно не будет содержать члена с $y'(\tau)$:

$$y_n''(\tau) + \omega_n^2(\varepsilon\tau) y_n(\tau) = \theta_n(\tau) / [A_{0n}(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau)]. \tag{2.95}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega_n^2(\varepsilon\tau) &= \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) + \frac{\varepsilon^2}{A_{1n}^2(\varepsilon\tau)} \{A_{2n}^2(\varepsilon\tau) - A_{1n}(\varepsilon\tau) A_{3n}(\varepsilon\tau) + \\ &+ A_{2n}(\varepsilon\tau)[X_n^2(\ell_2(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) g(\ell_2(\varepsilon\tau)) \ell_2'(\varepsilon\tau) - \\ &- X_n^2(\ell_1(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) g(\ell_1(\varepsilon\tau)) \ell_1'(\varepsilon\tau)] - \\ &- A_{1n}(\varepsilon\tau)[X_{n_\tau}(\ell_2(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) X_n(\ell_2(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) g(\ell_2(\varepsilon\tau)) \ell_2'(\varepsilon\tau) - \\ &- X_{n_\tau}(\ell_1(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) X_n(\ell_1(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) g(\ell_1(\varepsilon\tau)) \ell_1'(\varepsilon\tau)]\}. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Пусть внешнее воздействие на систему носит гармонический характер, т.е.:

$$\varphi(\xi,\tau) = B_0(\xi)\cos W_0(\tau); \tag{2.97}$$

$$F_{ji}(\tau) = B_{ji}\cos W_{ji}(\tau); \;\; j=\overline{1,2}; \;\; i=\overline{1,m}, \tag{2.98}$$

где B_{ji} – постоянные величины;

$W_0(\tau), W_{ji}(\tau)$ – монотонно возрастающие функции;

$B_0(\xi)$ – функция, характеризующая интенсивность распределенной нагрузки.

Заметим, что в связи с медленным движением границ при исследовании резонансных свойств функции W_0 и W_{ji} имеют вид

$$W_0(\tau) = \omega_0\tau + \psi_0(\varepsilon\tau); \tag{2.99}$$

$$W_{ji}(\tau) = \omega_{ji}\tau + \psi_{ji}(\varepsilon\tau), \tag{2.100}$$

где ω_0 и ω_{ji} – постоянные величины, а $\psi_0(\varepsilon\tau)$ и $\psi_{ji}(\varepsilon\tau)$ – функции, характеризующие медленное изменение частот возмущающих воздействий.

С учетом равенств (2.97), (2.98) выражение (2.86) примет вид

$$\frac{\theta_n(\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)} = M_{n0}(\varepsilon\tau)\cos W_0(\tau) + \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{m} M_{nji}(\varepsilon\tau)\cos\Omega_{nji}(\tau), \quad (2.101)$$

где

$$M_{n0}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} B_0(\xi)X_n(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi \,/\, [A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)];$$

$$M_{nji}(\varepsilon\tau) = \frac{-B_{ji}}{A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)} \times \sqrt{Z_{nji}^2(\varepsilon\tau) + 4\varepsilon^2[W_{ji}'(\tau)B_{nji}(\varepsilon\tau)]^2}; \quad (2.102)$$

$$Z_{nji}(\varepsilon\tau) = \omega^2{}_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)Q_{nji}(\varepsilon\tau) + \varepsilon^2 C_{nji}(\varepsilon\tau);$$

$$\Omega_{nji}(\tau) = W_{ji}(\tau) + \arcsin\left[\frac{\varepsilon B_{nji}(\varepsilon\tau)W_{ji}'(\tau)}{\sqrt{Z_{nji}^2(\varepsilon\tau) + 4\varepsilon^2[W_{ji}(\tau)B_{nji}(\varepsilon\tau)]^2}}\right]. \quad (2.103)$$

Резонансные свойства системы определяются скоростями изменения функций Ω_{n0}, Ω_{nji}. Скорости же характеризуются производными, которые с учетом равенств (2.103), (2.99), (2.100) можно записать в следующем виде:

$$\Omega'_{nji}(\tau) = W'_{ji}(\tau) + O(\varepsilon^2)..... \qquad (2.104)$$

Таким образом, второй член в правой части формулы (2.103) влияет на резонансные свойства системы как величина порядка малости ε^2. В дальнейшем под точностью порядка ε^2 будем понимать точность, имеющую место после пренебрежения членами с ε^2 и членами вида $\varepsilon F'_{ji}(\varepsilon\tau)$, которые, несмотря на малость порядка ε, на резонансные свойства влияют как члены порядка ε^2 (см. (2.86), (2.102), (2.103), (2.104)). Например, выражения (2.103), (2.102), (2.96) с точностью до величин порядка малости ε^2 будут иметь вид

$$M_{nji}(\varepsilon\tau) = \frac{-B_{ji}\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_{nji}(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)}; \qquad (2.105)$$

$$\Omega_{nji}(\tau) = W_{nji}(\tau);\ \omega_n^2(\varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau). \qquad (2.106)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда выражение (2.101) имеет вид

$$\theta_n(\tau) / \left[A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)\right] = M_n(\varepsilon\tau)\cos W_n(\tau), \qquad (2.107)$$

где $W_n(\tau)$ – монотонно возрастающая функция.

Равенство (2.101) можно заменить равенством (2.107) в следующих случаях:

1) все внешние возмущения $\varphi(\xi,\tau); F_{ji}(\tau)$ равны нулю? кроме какого-то одного;

2) производные функций $W_0(\tau), W_{ji}(\tau)$ равны между собой, т.е. сами функции отличаются на постоянную величину;

3) резонансные области нагрузок φ, F_{ji} не пересекаются, тогда при рассмотрении резонанса от одной нагрузки действием других можно пренебречь.

С учетом изложенного уравнение (2.95) примет вид

$$y_n''(\tau)+\omega_n^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau)=M_n(\varepsilon\tau)\cos W_n(\tau). \qquad (2.108)$$

Решение данного уравнения при начальных условиях $y(0)=0; y'(0)=0$ записывается следующим образом [48]:

$$y_n(\tau)=\int_0^\tau \gamma_n(\tau,\zeta)M_n(\varepsilon\zeta)\cos W_n(\zeta)d\zeta, \qquad (2.109)$$

где

$$\gamma_n(\tau,\zeta)=\frac{-y_{1n}(\tau)y_{2n}(\zeta)-y_{1n}(\zeta)y_{2n}(\tau)}{y_{1n}(\zeta)y_{2n}'(\zeta)-y_{1n}'(\zeta)y_{2n}(\zeta)}, \qquad (2.110)$$

а y_{1n}, y_{2n} – линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего (2.108), т.е.

$$y_n''(\tau)+\omega_n^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau)=0. \qquad (2.111)$$

Заметим, что если $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$ – линейно независимые решения уравнения (2.111), то из равенства

$$u_1(\tau)+iu_2(\tau)=a_n(\varepsilon\tau)e^{i\omega_n(\tau)},$$

где

$$a_n(\varepsilon\tau)=\sqrt{u_1^2(\tau)+u_2^2(\tau)}; \quad \omega_n(\tau)=\arg(u_1(\tau)+iu_2(\tau)),$$

нетрудно получить два линейно независимых решения в виде, более удобном для дальнейших исследований:

$$y_{1n}(\tau)=a_n(\varepsilon\tau)\sin w_n(\tau); \tag{2.112}$$

$$y_{2n}(\tau)=a_n(\varepsilon\tau)\cos w_n(\tau). \tag{2.113}$$

В большинстве случаев решения уравнения (2.111) сразу получаются в виде (2.112), (2.113), и указанные преобразования выполнять не нужно. Так, при использовании метода малого параметра с точностью до величин порядка ε^2 функции $a_n(\varepsilon\tau)$ и $w_n(\tau)$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dw_n(\tau)}{d\tau}=\omega_n(\varepsilon\tau); \\ \dfrac{da_n(\varepsilon\tau)}{d\tau}=-\dfrac{a_n(\varepsilon\tau)}{2\omega_n(\varepsilon\tau)}\cdot\dfrac{d\omega_n(\varepsilon\tau)}{d\tau}. \end{cases}$$

Решая систему с точностью до постоянной величины, получим:

$$w_n(\tau) = \int_0^{\tau} \omega_n(\varepsilon\tau) d\tau; \tag{2.114}$$

$$a_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{\omega_n(\varepsilon\tau)}}. \tag{2.115}$$

Так как $\omega_n(\varepsilon\tau)$ больше нуля, то из равенств (2.114), (2.115) следует, что $w_n(\tau)$ является монотонно возрастающей функцией. Подтвердилось также предположение о том, что $a_n(\varepsilon\tau)$ является функцией медленного времени $(\nu = \varepsilon\tau)$. Заметим, что пренебрежение в выражении для $\omega_n^2(\varepsilon\tau)$ (см. (2. 96)) членами порядка ε^2 приводит к погрешности в определении $w_n(\tau)$ и $a_n(\varepsilon\tau)$ также порядка ε^2. Поэтому, когда ε мало, для $\omega_n^2(\varepsilon\tau)$ можно использовать формулу (2.106).

Возвращаясь к решению (2.109), (2.110), с учетом (2.112), (2.113) получим:

$$y_n(\tau) = a_n(\varepsilon\tau)\sin w_n(\tau)\int_o^{\tau} \frac{M_n(\varepsilon\zeta)\cos W_n(\zeta)\cos w_n(\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta)w_n'(\zeta)} d\zeta -$$

$$-a_n(\varepsilon\tau)\cos w_n(\tau)\int_o^{\tau} \frac{M_n(\varepsilon\zeta)\cos W_n(\zeta)\sin w_n(\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta)w_n'(\zeta)} d\zeta.$$

Разлагая произведение тригонометрических функций в сумму и учитывая замену (2.93), можно получить следующее выражение для полной амплитуды колебаний, соответствующих n-ной динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = \frac{1}{4} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\} \quad (2.116)$$

$$F_n(\varepsilon\zeta) = \frac{M_n(\varepsilon\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w_n'(\zeta)};$$

$$\Phi_{n1}(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta);$$

$$\Phi_{n2}(\zeta) = w_n(\zeta) + W_n(\zeta). \quad (2.117)$$

Метод Канторовича-Галеркина может быть применён и в более сложных случаях. Этот метод позволяет учитывать действие на систему сил сопротивления, вязкоупругие свойства колеблющегося объекта, а также слабую нестационарность граничных условий.

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau)+L[U(\xi,\tau)]+\varepsilon_0 L_1[U(\xi,\tau)]=\varphi(\xi,\tau); \tag{2.134}$$

$$Y_{ji}[U(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau)]+\varepsilon_{ji}Z_{ji}[U(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau)]=F_{ji}(\tau); \tag{2.135}$$

$$i=\overline{1,m}; \quad j=\overline{1,2};$$

$\varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_{ji}$ – малые параметры; L_1 – линейный дифференциальный оператор (его порядок по τ равен единице, по ε не превышает $2m$); Z_{ji} – линейные операторы.

Операторы Z_{ji} – могут содержать члены следующего вида:

$$A(\varepsilon\tau)\frac{\partial^n U_\tau(\xi,\tau)}{\partial\xi^n}\bigg|_{\xi=\ell_j(\varepsilon\tau)}; \quad \int B(\varepsilon\zeta)\frac{\partial^k U(\xi,\zeta)}{\partial^k\zeta}\bigg|_{\xi=\ell_j(\varepsilon\zeta)}\cdot d\zeta$$

($n<2m, k\le 2$ – целые положительные числа; $A(\varepsilon\tau), B(\varepsilon\zeta)$ – заданные функции).

Спасибо за внимание!