Распределение значений показателя Перрона по решениям линейной системы

Барабанов Е.А.[1], Быков В.В.[2]

[1]Институт математики НАН Беларуси

[2]МГУ имени М.В. Ломоносова

Вторая конференция Математических центров России,
7–11 ноября 2022 г., МГУ, МИАН, г. Москва

Верхний и нижний показатели

Характеристическим показателем Ляпунова функции $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_*$ называется величина

$$\lambda[x] = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|.$$

Показателем Перрона функции $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_*$ называется величина

$$\pi[x] = \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|.$$

Для непрерывной функции $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_*$ имеют место равенства

$$\lambda[x] = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \exists C > 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}_+ \;\; \|x(t)\| \le Ce^{\alpha t}\},$$
$$\pi[x] = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \exists C > 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}_+ \;\; \|x(t)\| \ge Ce^{\alpha t}\}.$$

Обозначения

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{$*$}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами, а через $\mathcal{M}_n$ — его подкласс, состоящий из систем, коэффициенты которых ограничены.

Через $\mathcal{S}(A)$ обозначаем линейное пространство решений системы $(*)$, а через $\mathcal{S}_*(A)$ – множество её ненулевых решений, а через $x(\cdot\,;\xi)$ — решение системы $(*)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0;\xi) = \xi$.

Показатели Ляпунова и Перрона системы

Показателем Ляпунова системы (*) будем называть функцию $\lambda_A\colon \mathbb{R}^n_* \to \overline{\mathbb{R}}$, действующую по правилу

$$\lambda_A(\xi) = \lambda[x(\cdot\,;\xi)],$$

а её показателем Перрона — функцию $\pi_A\colon \mathbb{R}^n_* \to \overline{\mathbb{R}}$, действующую по правилу

$$\pi_A(\xi) = \pi[x(\cdot\,;\xi)].$$

Если $A \in \mathcal{M}_n$, то значения функций λ_A и π_A конечны.

Множество значений

Теорема (А.М. Ляпунов, 1892)

Для любой системы $A \in \mathcal{M}_n$ функция $\lambda_A : \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}$ принимает не более n значений.

Теорема (О. Перрон, 1930)

Существует диагональная система $A \in \mathcal{M}_2$, для которой функция $\pi_A : \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}$ принимает ровно три значения.

Теорема (Н.А. Изобов, 1965)

Для любой диагональной системы $A \in \mathcal{M}_n$ функция $\pi_A : \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}$ принимает не более $2^n - 1$ значений.

Теорема (Е.А. Барабанов, 1982)

Для любого натурального $m \in [1, 2^n - 1]$ существует диагональная система $A \in \mathcal{M}_n$ функция $\pi_A : \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}$ принимает ровно m значений.

Недиагональный случай

Теорема (Н.А. Изобов, 1968)

Существует система $A \in \mathcal{M}_2$, для которой множество значений функции π_A есть отрезок.

Теорема (Е.А. Барабанов, 1986)

Множество S является множеством значений функции π_A некоторой системы $A \in \mathcal{M}_n$ тогда и только тогда, когда S — ограниченное суслинское множество, содержащее свою точную верхнюю грань.

Теорема (Н.А. Изобов, 1965, 1988)

Для любой системы $A \in \mathcal{M}_n$ и произвольного аффинного подпространства $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ множество

$$P(\Pi) \equiv \{\xi \in \Pi_* : \pi(\xi) < \sup_{\zeta \in \Pi_*} \pi(\zeta)\}$$

имеет нулевую $\dim \Pi$-мерную меру Лебега, т.е.

$$\operatorname{mes} P(\Pi) = 0. \tag{**}$$

Другими словами, множество показателей Перрона решений с начальными векторами из аффинной плоскости Π содержит свой супремум, и для почти всех по мере Лебега начальных векторов из Π решения, из них выходящие, имеют показатель Перрона, равный этому супремуму.

Результаты А.Г. Гаргянца

Теорема (А.Г. Гаргянц, 2013)

Для всякого $n \geq 2$ существует система $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$, такая, что для любого аффинного подпространства $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, отличного от прямой, проходящей через начало координат, множество $\Pi \setminus P(\Pi)$ имеет нулевую $\dim \Pi$-мерную меру Лебега и является множеством первой категории Бэра относительно Π.

Теорема (А.Г. Гаргянц, 2018)

Свойство $(**)$ имеет место для всех систем $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$, коэффициенты которых растут медленнее всякой экспоненты: $\overline{\lim\limits_{t \to +\infty}}\, t^{-1} \ln \|A(t)\| \leq 0$.

Теорема (А.Г. Гаргянц, 2020)

Для каждого $n \geq 2$ существует система $A \in \mathcal{M}_n$, для которой множество $\mathbb{R}^n \setminus P(\mathbb{R}^n)$ имеет первую категорию.

Постановка задачи

Ставится задача теоретико-множественного описания для каждого $n \geq 2$ показателей Перрона систем из $\widetilde{\mathcal{M}}_n$, т.е. класса функций

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n = \{\pi_A : A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n\}.$$

Теорема (Е.А. Барабанов, 1990)

Для любого $n \geq 2$ справедливы утверждения:
1) для всякой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n$ функция π_A принадлежит второму классу Бэра;
2) существует система $A \in \mathcal{M}_n$, для которой функция π_A не принадлежит первому классу Бэра.

Определение: бэровские классы

Пусть M – метрическое пространство. Классы Бэра с конечными индексами определяются по индукции следующим образом:

- нулевым классом $\mathfrak{B}_0(M)$ будем называть множество всех непрерывных функций $M \to \overline{\mathbb{R}}$;
- первый класс состоит из функций $M \to \overline{\mathbb{R}}$, допускающих представление вида

$$f(\mu) = \lim_{m\to\infty} f_m(\mu), \quad \mu \in M, \tag{$\diamond$}$$

  где $f_m \in \mathfrak{B}_0(M)$, $m \in \mathbb{N}$;
- второй класс состоит из функций $M \to \overline{\mathbb{R}}$, допускающих представление вида ($\diamond$), где $f_m \in \mathfrak{B}_1(M)$, $m \in \mathbb{N}$, и так далее.

Решение задачи

Теорема (А.Г. Гаргянц, 2017)

Для каждого $n \geq 2$ класс $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ содержит все непрерывные функции $f\colon \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию

$$f(c\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n_*, \quad c \in \mathbb{R}_*. \tag{***}$$

Теорема (Фоминых Е.И., Касабуцкий А.Ф., 2018)

Для каждого $n \geq 2$ класс $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ содержит все полунепрерывные сверху функции $f\colon \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию (***).

Теорема

Функция $f\colon \mathbb{R}^n_* \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию (***) и для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\big([-\infty, r]\big)$ замкнутого луча $[-\infty, r]$ является G_δ-множеством пространства $\mathbb{R}^n_*$.

Спасибо за внимание!