О некоторых арифметических свойствах дробей Фарея

М.А. Королёв*

*Математический институт им. В.А. Стеклова (Москва)

Вторая конференция Математических центров России

Москва, 7-11 ноября 2022 года

Классический **ряд Фарея**:

$$\Phi_Q = \left\{ \frac{a}{b} \, : \, 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant Q, (a, b) = 1 \right\}$$

Индуктивное построение:

$$\Phi_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$$

Пусть ряд Φ_{Q-1} уже построен, и $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$ - произвольная пара соседних дробей в Φ_{Q-1}. Медианта:

$$\frac{c+a}{d+b}$$

Для неё всегда имеем

$$\frac{c}{d} < \frac{c+a}{d+b} < \frac{a}{b}.$$

Если $d + b \leqslant Q$, то медианта включается в ряд Φ_Q. В противном случае дроби $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$ остаются соседними и в Φ_Q.

$$\Phi_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2} = \frac{0+1}{1+1}, \frac{1}{1}\right\}$$

$$\Phi_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$$

$$\Phi_4 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}$$

$$\Phi_5 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right\}$$

$$\Phi_6 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\right\}$$

$$\Phi_7 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}\right\}$$

Дж. Фарей (1816), «**On a curious Property of vulgar Fractions**», *The Philosophical magazine; a journal of theoretical, experimental and applied physics*, 1816, vol. 47, pp. 385–386.

Наблюдение (на частных случаях): в ряде несократимых дробей $\mathbf{0} < \boldsymbol{a/b} \leqslant \mathbf{1}$ со знаменателями $\leqslant \boldsymbol{Q}$ всякая дробь (кроме двух крайних) есть медианта двух соседних дробей:

$$\boldsymbol{\Phi_5} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\},$$

$$\frac{1}{5} = \frac{0+1}{1+4}, \quad \frac{1}{4} = \frac{1+1}{5+3}, \quad \frac{1}{3} = \frac{1+2}{4+5}, \quad \frac{2}{5} = \frac{1+1}{3+2}, \quad \text{и т.д.}$$

О.Л. Коши (1816), «**Démonstration d'un Théorème Curieux sur Les Nombres**», Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique de Paris, Vol. 3, No. 3 (1816), pp. 133–135. - Доказательство.

Ч. Харос (1801), при составлении таблиц перевода обыкновенных дробей (со знаменателями $\leqslant 99$) в десятичные (опубликованы в: «**Instruction Abrégée sur les nouvelles Mesures qui dovient étre introduites dans toute république, au vendémiaire an 10; avec tables de rapports et reductions**» - «**Краткая инструкция о новых мерах, которые должны быть введены во всей республике с вандемьера X года**») для контроля за полнотой ряда несократимых дробей a/b, $b < 100$, пользовался процедурой построения медиант, отправляясь от ряда вида

$$\left\{\frac{1}{99}, \frac{1}{98}, \frac{1}{97}, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{96}{97}, \frac{97}{98}, \frac{98}{99}\right\}.$$

Н. Шюке (Nicolas Chuquet), ок. 1445 — ок. 1488: процедура взятия медианты двух дробей («правило средних чисел»): трактат «**Le triparty en la science des nombres**» - «**Наука о числах в трёх частях**» (опубл. в 1520).

Определение и свойства ряда Фарея

LXXIX. *On a curious Property of vulgar Fractions.* By *Mr.* J. Farey, *Sen.*

To Mr. Tilloch.

Sir, — On examining lately, some very curious and elaborate Tables of "Complete decimal Quotients," calculated by Henry Goodwyn, Esq. of Blackheath, of which he has printed a copious specimen, for private circulation among curious and practical calculators, preparatory to the printing of the whole of these useful Tables, if sufficient encouragement, either public or individual, should appear to warrant such a step: I was fortunate while so doing, to deduce from them the following general property; viz.

If all the possible vulgar fractions of different values, whose greatest denominator (when in their lowest terms) does not exceed any given number, be arranged in the order of their values, or quotients; then if both the numerator and the denominator of any fraction therein, be added to the numerator and the denominator, respectively, of the fraction next but one to it (on either side), the sums will give the fraction next to it; although, perhaps, not in its lowest terms.

For example, if 5 be the greatest denominator given; then are all the possible fractions, when arranged, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, and $\frac{4}{5}$; taking $\frac{1}{3}$ as the given fraction, we have $\frac{1+1}{5+3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ the next smaller fraction then $\frac{1}{3}$; or, $\frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$, the next larger fraction to $\frac{1}{3}$. Again, if 99 be

the largest denominator, then, in a part of the arranged Table, we should have $\frac{15}{52}$, $\frac{28}{97}$, $\frac{13}{45}$, $\frac{24}{83}$, $\frac{11}{38}$, &c.; and if the third of these fractions be given, we have $\frac{15+13}{52+45} = \frac{28}{97}$ the second: or $\frac{13+11}{45+38} = \frac{24}{83}$ the fourth of them: and so in all the other cases.

I am not acquainted, whether this curious property of vulgar fractions has been before pointed out?; or whether it may admit of any easy or general demonstration?; which are points on which I should be glad to learn the sentiments of some of your mathematical readers; and am

Sir,

Your obedient humble servant,

Howland-street. J. Farey.

Заметка Дж. Фарея "***On a curious Property of vulgar Fractions***" в журнале «The Philosophical magazine; a journal of theoretical, experimental and applied physics» (1816, vol. 47, pp. 385-386).

$$N = N(Q) = |\Phi_Q| \quad \text{- число дробей в } \Phi_Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(Q) = 1 + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \ldots + \varphi(Q) = \frac{3}{\pi^2} Q^2 + O(Q \ln Q)$$

Если $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ - соседние дроби в ряде Φ_Q, то $ad - bc = 1$:

$$\Phi_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\},$$

$$\frac{1}{3} < \frac{2}{5} \Rightarrow 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1; \quad \frac{3}{5} < \frac{2}{3} \Rightarrow 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1$$

(достаточно проверить для ряда Φ_1 и убедиться, что если свойство выполнялось для пары $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$, то оно сохранится и при замене соответствующей дроби медиантой).

Дроби Фарея - полезный инструмент в аналитической теории чисел.

Г.Ф. Вороной: новая оценка остаточного члена в **проблеме делителей Дирихле**.

Пусть $D(Q)$ - число целых точек в гиперболической области $xy \leqslant Q$, $x, y > 0$. Тогда

$$D(Q) = Q(\ln Q + 2\gamma - 1) + R(Q), \quad \gamma = 0.577\ldots - \quad \text{постоянная Эйлера},$$

где при $Q \to +\infty$ имеют место оценки:

$$\begin{cases} R(Q) \ll \sqrt{Q}, & \text{П.Г.Л. Дирихле, 1849} \\ R(Q) \ll \sqrt[3]{Q}(\ln Q)^{5/3}, & \text{Г.Ф. Вороной, ,1903.} \end{cases}$$

Вороной использовал ряд, подобный ряду Фарея Φ_Q:

$$\frac{a}{q}, \quad 1 \leqslant a \leqslant q \leqslant Q, \quad a \cdot q \leqslant Q.$$

Как и в Φ_Q, любые две соседние дроби этого ряда удовлетворяют равенству $a'q - aq' = 1$. Оно сыграло ключевую роль в доказательстве Вороного.

Г.Х. Харди, С. Рамануджан (G.H. Hardy, S. Ramanujan, 1918): асимптотический ряд для функции $p(n)$, равной числу разбиений целого $n \geqslant 1$ на слагаемые:

Заложены основы т.н. «кругового метода»: искомая величина - $p(n)$ - выражается в виде интеграла Коши по окружности почти единичного радиуса. Основной вклад (главный член) дают окрестности точек вида $\exp\left(2\pi i\cdot a/q\right)$, a/q - дроби Фарея с «не очень большими» знаменателями:

$$n \to +\infty,$$

$$p(n) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\sum_{q=1}^{Q} A_q(n)\sqrt{q}\,\frac{d}{dn}\left\{\frac{1}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\exp\left(\frac{\pi}{q}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right)\right\} \sim$$

$$\sim \frac{1}{4n\sqrt{3}}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

(здесь $A_k(n)$ - некоторые тригонометрические суммы, Q имеет порядок $\sqrt{n}$).

Г.Д. Клоостерман (H.D. Kloosterman, 1926): решение задачи о формуле для числа $I(n)$ представлений целого $n \geqslant 1$ в виде суммы

$$n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2,$$

где $a, b, c, d > 0$ - фиксированные целые числа, x, y, z, t - целочисленные переменные.
Представление $I(n)$ в виде тригонометрического интеграла

$$I(n) = \int_0^1 S_{a,n} \cdot S_{b,n} \cdot S_{c,n} \cdot S_{d,n} \cdot e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha,$$

$$S_{\xi,n} = S_{\xi,n}(\alpha) = \sum_{0 \leqslant m \leqslant \sqrt{n/\xi}} \exp\left(2\pi i \alpha \xi m^2\right)$$

и разбиение отрезка интегрирования на «дуги Фарея», т.е. промежутки вида

$$\left(\frac{a}{q} - \frac{a+a''}{q+q''}, \frac{a}{q} + \frac{a+a'}{q+q'}\right), \quad \text{где} \quad \frac{a''}{q''} < \frac{a}{q} < \frac{a'}{q'}$$

- соседние дроби Фарея ряда Φ_Q, $Q \asymp \sqrt{n}$.
Существенным образом используется соотношение $a'q - aq' = 1$ (суммы Клоостермана и пр.)

Ключевое соотношение - связь дробей Фарея и функции Мёбиуса $\mu(q)$:

$$\mu(q) = \begin{cases} 1, & q = 1, \\ 0, & q = m^2\ell,\ m > 1, \\ (-1)^k, & q = p_1 \ldots p_k \end{cases} = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \exp\left(2\pi i \frac{a}{q}\right).$$

Пусть $\gamma_j = \dfrac{a_j}{q_j}$, $j = 1, 2, \ldots, N = N(Q)$ - упорядоченные по возрастанию дроби ряда Φ_Q. Тогда для сумматорной функции находим:

$$M(Q) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \ldots + \mu(Q) = \sum_{q \leqslant Q} \mu(q) =$$

$$= \sum_{q \leqslant Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \exp\left(2\pi i \frac{a}{q}\right) = \sum_{j=1}^{N} \exp\left(2\pi i \gamma_j\right)$$

Известно:

$$\text{RH} \Leftrightarrow M(Q) \ll Q^{1/2+\varepsilon}.$$

Ряды Фарея: связь с гипотезой Римана

$$\Delta_r = \gamma_r - \frac{r}{N}$$ - «отклонение» r-й дроби от точки равномерной сетки.

Дж. Франель (J. Franel), 1924:

$$\sum_{r=1}^{N} |\Delta_r| \ll O(Q^{1/2+\varepsilon}) \Leftrightarrow M(Q) \ll O(Q^{1/2+\varepsilon}) \Leftrightarrow \mathbf{RH}.$$

Э. Ландау (E. Landau), 1924:

$$\sum_{r=1}^{N} \Delta_r^2 \ll O(Q^{-1+\varepsilon}) \Leftrightarrow \mathbf{RH}.$$

M. Mikolás (1949, 1951), J. Kopřiva (1955), A. Zulauf (1977), S. Kanemitsu и M. Yoshimoto (1996), M. Yoshimoto (1998) утверждения вида:

$$\sum_{j=1}^{Q} f(\gamma_j) = O(Q^{1/2+\varepsilon}) \Leftrightarrow \mathbf{RH}.$$

С.Б. Стечкин, 1995: Связь оценок сумм вида

$$\sum_{j=1}^{N} |\Delta_j|^p \quad \text{с величиной} \quad \Theta = \sup\{\mathrm{Re}\,\varrho \mid \zeta(\varrho) = 0\}, \quad p \geqslant 1.$$

Положим

$$S_m(Q) = \sum_{j=1}^{N} (\gamma_j - \gamma_{j-1})^m$$

R.R. Hall, 1970 (а также S. Kanemitsu, R. Sita Rama Chandra Rao, A. Siva Rama Sarva, 1982):

$$S_2(Q) = \frac{12}{\pi^2}\,\frac{1}{Q^2}\left(\ln Q + \frac{1}{2} + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + O\left(\frac{\ln^2 Q}{Q^3}\right)$$

$$S_m(Q) = \frac{C(m)}{Q^m} + O\left(\frac{(\ln Q)^c}{Q^{m+1}}\right), \quad C(m) = 2\,\frac{\zeta(m-1)}{\zeta(m)} \quad (m \geqslant 3).$$

Положим для фиксированного целого $h \geqslant 2$

$$S_m(Q;h) = \sum_{j=1}^{N} (\gamma_{j+h} - \gamma_j)^m$$

R.R. Hall, 1994

$$S_2(Q;2) = \frac{36}{\pi^2}\,\frac{\ln Q}{Q^2}\,(1 + o(1)).$$

Гипотеза (R.R. Hall, 1994): при любом фиксированном $h \geqslant 2$ выполнено равенство

$$S_2(Q;h) = \frac{12}{\pi^2}\left(\frac{C_h \ln Q}{Q^2} + \frac{D_h}{Q^2}\right) + o_h(Q^{-2}).$$

Доказательство гипотезы Холла: F.P. Boca, C.Cobeli, A.Zaharescu, 2001:

$$C_h = 2h - 1,$$

$$D_h = (2h-1)\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + \frac{h}{2} + \sum_{r=1}^{h-1}(h-r)I_r.$$

Постоянные I_r могут быть выражены в терминах некоторого геометрического преобразования T, введённого авторами (BCZ-преобразование).

Свойства BCZ-преобразования

$$\text{Пусть} \quad \frac{a}{q} < \frac{a'}{q'} < \frac{a''}{q''} \quad \text{соседние дроби ряда } \Phi_Q.$$

Тогда

$$\begin{cases} a'q - aq' = 1 & \times \; q'' \\ a''q' - a'q'' = 1 & \times \; q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a'qq'' - aq'q'' = q'', \\ a''qq' - a'qq'' = q, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad a''qq' - aq'q'' = q'(a''q - aq'') = q + q'',$$

откуда

$$q + q'' = kq', \quad k = \frac{q + q''}{q'} \quad \text{- целое число.}$$

Можно показать, что

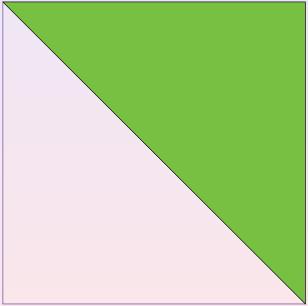
$$k = \left[\frac{q + Q}{q'}\right] = \left[\frac{1 + q/Q}{q'/Q}\right].$$

Свойства BCZ-преобразования

Идея: рассмотреть точку с координатами $\left(\frac{q}{Q}, \frac{q'}{Q}\right)$. В силу неравенств $0 < q, q' \leqslant Q$, $q + q' > Q$ для неё имеем

$$0 < \frac{q}{Q} \leqslant 1, \quad 0 < \frac{q'}{Q} \leqslant 1, \quad \frac{q}{Q} + \frac{q'}{Q} > 1$$

- она лежит в «**треугольнике Фарея**» $\mathcal{T}$ – области $0 < x, y \leqslant 1$, $x + y > 1$.



Кроме того, $\quad q'' = kq' - q \quad \Rightarrow \quad \frac{q''}{Q} = k \cdot \frac{q'}{Q} - \frac{q}{Q}$

Определим для произвольной точки $(x, y) \in \mathcal{T}$ **преобразование BCZ** (Boca-Cobeli-Zaharescu) $T = T(x, y)$ следующим образом:

$$T(x, y) = (y, ky - x), \quad k = \left[\frac{1 + x}{y}\right].$$

Несложно проверить, что точка $(q/Q, q'/Q)$ лежит в $\mathcal{T}$ и при этом

$$T\left(\frac{q}{Q}, \frac{q'}{Q}\right) = \left(\frac{q'}{Q}, \frac{q''}{Q}\right).$$

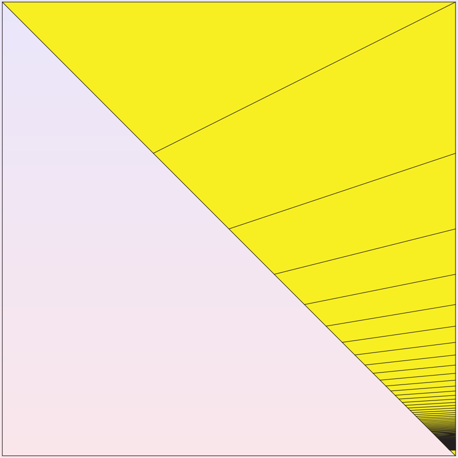
Пусть $\mathcal{T}_k$ - область в $\mathcal{T}$, определяемая условием

$$\left[\frac{1 + x}{y}\right] = k.$$

Тогда внутри $\mathcal{T}_k$ будем иметь:

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}, \quad \det \frac{\partial T(x, y)}{\partial(x, y)} = 1.$$

Следовательно, отображение $T|_{\mathcal{T}_k}$ сохраняет площади.



Области $\mathcal{T}_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Преобразование $\boldsymbol{T}$ позволяет изучать поведение кортежей из последовательных знаменателей соседних дробей Фарея: если

$$\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1} < \frac{a_2}{q_2} < \ldots < \frac{a_r}{q_r} < \frac{a_{r+1}}{q_{r+1}}$$

- соседние дроби, то при некоторых натуральных $k_1, k_2, \ldots k_r$ будем иметь

$$\begin{cases} q_0 + q_2 = k_1 q_1, \\ q_1 + q_3 = k_2 q_2, \\ \ldots \\ q_{r-1} + q_{r+1} = k_r q_r. \end{cases}$$

Задавая заранее свойства набора $k_1, k_2, \ldots, k_r$ (принадлежность к какой-либо арифметической прогрессии, взаимную простоту с заданным числом и пр.), можно решать задачи о количестве появлений серии последовательных дробей в Φ_Q, знаменатели которых обладают заданными арифметическим свойствами. Преобразование $\boldsymbol{T}$ позволяет перевести задачу на язык геометрии и сводит ее к подсчету площадей некоторой серии выпуклых многоугольников.

BCZ-преобразование и арифметические свойства дробей Фарея

Пример: найти асимптотику числа троек соседних дробей

$$\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1} < \frac{a_2}{q_2}, \quad \text{где} \quad q_0 \equiv q_2 \equiv 0 \pmod 3, \quad (q_1, 3) = 1.$$

Здесь имеем единственное соотношение:

$$k_1 q_1 = q_0 + q_2 \equiv 0 \pmod 3, \quad \text{откуда необходимо} \quad k_1 \equiv 0 \pmod 3.$$

Если $q_0 \equiv 0 \mod 3$, то последнее условие является и достаточным для делимости q_2 на 3.

Перевод задачи на язык геометрии: зафиксируем числа Q, q_0 и k_1. Тогда q_1 должно быть таким, чтобы выполнялось равенство

$$\left[\frac{q_0 + Q}{q_1}\right] = \left[\frac{1 + q_0/Q}{q_1/Q}\right] = k_1$$

Но это то же, что потребовать:

$$\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) \in \mathcal{T}_{k_1}.$$

Значит, каждая точка области $\mathcal{T}_{k_1}$ вида $\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right)$ породит точку $\left(\frac{q_1}{Q}, \frac{q_2}{Q}\right)$ области $\mathcal{T}$, где q_2 удовлетворяет требуемому свойству делимости.

То же самое: каждая целая точка области $Q \cdot \mathcal{T}_{k_1}$ вида

$$(q_0, q_1), \quad \text{где} \quad q_0 \equiv 0 \pmod 3, \quad \text{Н.О.Д.}(q_0, q_1) = 1,$$

породит целую точку области $Q\mathcal{T}$ вида

$$(q_1, q_2), \quad \text{где} \quad q_2 \equiv 0 \pmod 3, \quad \text{Н.О.Д.}(q_2, q_1) = 1.$$

Каждая пара знаменателей дробей Фарея однозначно восстанавливает их числители.

Так задача свелась к подсчёту **примитивных целых точек** (q_0, q_1) с указанными свойствами в каждой из областей $Q \cdot \mathcal{T}_{k_1}$, $k_1 = 3, 6, 9, 12, \ldots$

Число таких точек прямо пропорционально суммарной площади фигур $\mathcal{T}_{k_1}$. Отсюда для доли искомых троек в общем числе троек с условием $q_0 \equiv 0 \pmod 3$ в пределе при $Q \to +\infty$ получим выражение:

$$2 \sum_{k_1 \equiv 0 \pmod 3} |\mathcal{T}_{k_1}| = 2 \sum_{k_1 \equiv 0 \pmod 3} \frac{4}{k_1(k_1+1)(k_1+2)}.$$

В более сложных задачах типа

$$q_0 \equiv q_{r+1} \equiv 0 \pmod D, \quad q_j \equiv c_j \pmod D, \quad j = 1, 2, \ldots, r$$

нужно рассматривать итерации преобразования T:

$$T\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = \left(\frac{q_1}{Q}, \frac{q_2}{Q}\right), \quad T^2\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = T\left(\frac{q_1}{Q}, \frac{q_2}{Q}\right) = \left(\frac{q_2}{Q}, \frac{q_3}{Q}\right),$$
$$T^3\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = T\left(\frac{q_2}{Q}, \frac{q_3}{Q}\right) = \left(\frac{q_3}{Q}, \frac{q_4}{Q}\right), \quad \ldots$$

BCZ-преобразование и арифметические свойства дробей Фарея

При этом возникают ограничения типа

$$T^{s-1}\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) \in \mathcal{T}_{k_s}, \quad s = 1, 2, \ldots, r$$

или, что то же, условия вида

$$\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) \in T^{-(s-1)}(\mathcal{T}_{k_s}), \quad s = 1, 2, \ldots, r$$

Одновременное выполнение всех условий означает принадлежность исходной точки к области вида

$$\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r) = \mathcal{T}_{k_1} \cap \mathcal{T}^{-1}(T_{k_2}) \cap \mathcal{T}^{-2}(T_{k_3}) \cap \cdots \cap \mathcal{T}^{-(r-1)}(T_{k_r})$$

Ответ в задачах такого типа выражается суммой (конечной или бесконечной) вида

$$2 \sum_{(k_1, \ldots, k_r)} |\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)|,$$

где набор натуральных чисел $(k_1, \ldots, k_r)$ удовлетворяет некоторым арифметическим условиям (системе сравнений по модулю D и пр.)

BCZ-преобразование и арифметические свойства дробей Фарея

Решение самой общей задачи такого типа было получено C. Cobeli и A. Zaharescu (2005; опубликовано C. Cobeli, M. Vâjâitu и A. Zaharescu в 2012).

В частных случаях наборов $D, \mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_r)$ для таких сумм были найдены явные выражения; именно, такие формулы были получены для случаев

$$D = 2, \quad \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_r) \quad \text{- любой с условием} \quad r \leqslant 5;$$

$$D = 3, \quad \mathbf{c} \quad \text{имеет вид} \quad (1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2), (1, 2, 2, 2, \ldots, 2, 2, 1);$$

$$D \geqslant 2 \quad \text{- любое,} \quad \mathbf{c} = (c, c, c, \ldots, c).$$

Метод C. Cobeli, M. Vâjâitu и A. Zaharescu был применён к следующей задаче:

Пусть $r \geqslant 2$, и пусть $\nu_r(Q)$ - доля тех наборов длины $r+1$, состоящих из последовательных дробей Фарея ряда Φ_Q с условиями:

$$q_0 \equiv q_{r+1} \equiv 0 \pmod 3, \quad q_1, \ldots, q_r \not\equiv 0 \pmod 3$$

(в общем числе наборов с единственным условием $q_0 \equiv 0 \pmod 3$).

Промежутки между дробями a/q с условием $q \equiv 0 \pmod 3$

Уже при небольших значениях Q ряды Φ_Q доставляют примеры, когда между числами $\dfrac{a}{q}$ и $\dfrac{a'}{q'}$ имеется две, три, четыре, пять и более дробей со знаменателями, не делящимися на 3. Наименьшим Q, при котором в Φ_Q существует промежуток $\left(\dfrac{a}{q}, \dfrac{a'}{q'}\right)$, содержащий $r = 10$ дробей, отвечает $Q = 31$. Один из соответствующих фрагментов ряда Φ_{31} имеет вид:

$$\frac{8}{27} < \frac{3}{10} < \frac{7}{23} < \frac{4}{13} < \frac{9}{29} < \frac{5}{16} < \frac{6}{19} < \frac{7}{22} < \frac{8}{25} < \frac{9}{28} < \frac{10}{31} < \frac{1}{3}.$$

Аналогичные подсчёты дают для $r = 20, 30, 40, 50$ значения $Q = 67, 103, 139$ и 175 соответственно.

Описание возникающих при этом непустых областей и явное вычисление их площадей даёт возможность написать явные формулы для предельных величин ν_r,

$$\nu_r(Q) \to \nu_r.$$

Теорема 1. *Имеют место равенства*

$$\nu_1 = 6 - 2\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3\right) = 0.175176694195345\ldots,$$

$$\nu_2 = 4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3\right) - \frac{87}{35} = 0.375034016550147\ldots,$$

$$\nu_3 = 12\ln 3 - \frac{53\,132}{4095} = 0.208500089169941\ldots,$$

$$\nu_4 = \frac{528\,904}{45\,045} - 4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3\right) = 0.092033930071231 5\ldots,$$

$$\nu_5 = 2\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3\right) - \frac{4\,164\,383}{3\,063\,060} = 0.0708242239352303\ldots,$$

$$\nu_6 = \frac{3\,089}{85\,085} = 0.0363048715989892\ldots,$$

$$\nu_7 = \frac{54\,097}{3\,879\,876} = 0.0139429713733119\ldots\ .$$

Теорема 2. *Пусть* $m \geqslant 1$, $0 \leqslant i \leqslant 4$ - *целые числа,* $r = 5m + i \geqslant 8$. *Тогда справедливы равенства*

$$\nu_r = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(m), \quad \text{в которых} \quad n = n(i) = \begin{cases} 3, & \text{если } i = 3, \\ 2, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

а $P_{ij}(m)$ - *рациональные функции из следующего списка:*

$$P_{01}(m) = \frac{6(8m-1)}{(3m-1)(6m-1)(12m-1)(12m+1)},$$

$$P_{02}(m) = \frac{2}{(6m-1)(6m+1)(12m-1)},$$

$$P_{11}(m) = \frac{6(8m+1)}{(3m+1)(6m+1)(12m-1)(12m+1)},$$

$$P_{12}(m) = \frac{2}{(6m-1)(6m+1)(12m+1)},$$

$$P_{21}(m) = \frac{6(4m+1)}{(3m+1)(6m+1)(12m+1)(12m+5)},$$

и т.д.

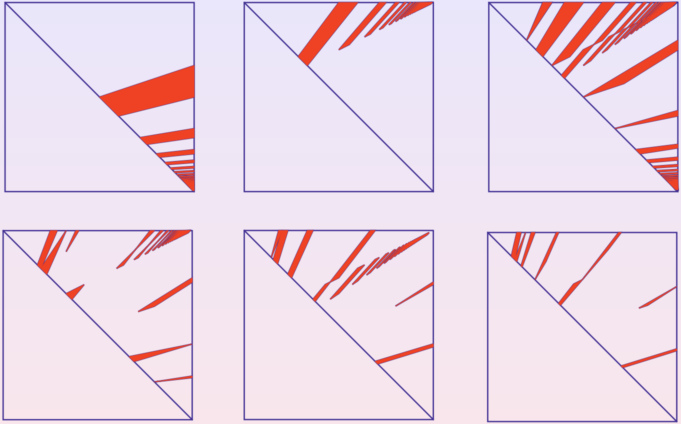
В частности, имеют место равенства:

$$\nu_8 = \frac{12\,797}{2\,238\,390} = 0.00571\,70555\,62256\ldots$$
$$\nu_9 = \frac{18\,662}{3\,677\,355} = 0.00507\,48431\,95720\ldots$$
$$\nu_{10} = \frac{284}{82\,225} = 0.00345\,39373\,66980\ldots$$
$$\nu_{11} = \frac{1\,444}{575\,575} = 0.00250\,87955\,52273\ldots$$
$$\nu_{12} = \frac{11\,402}{6\,135\,675} = 0.00185\,83122\,47633\ldots$$
$$\nu_{13} = \frac{100\,349}{83\,445\,180} = 0.00120\,25739\,53342\ldots$$
$$\nu_{14} = \frac{3\,931}{3\,209\,430} = 0.00122\,48280\,84737\ldots$$

Обнаруживаются любопытные эффекты: (а) все числа $\nu_r, r \geqslant 6$ - рациональные, и (б) последовательность ν_r - не монотонна:

$$\nu_{14} > \nu_{13}, \quad \nu_{19} > \nu_{18}, \quad \nu_{29} > \nu_{30} > \nu_{28}, \quad \text{и т.д.}$$

Области $\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$ и континуанты



Области, площади которых входят в формулы для долей $\boldsymbol{\nu_r}$, $\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{r} \leqslant \mathbf{6}$.

По определению,

$$\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r) = \mathcal{T}_{k_1} \cap \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}_{k_2}) \cap T^{-2}(\mathcal{T}_{k_3}) \cap \cdots \cap T^{-(r-1)}(\mathcal{T}_{k_r})$$

Следовательно, точка (x, y) треугольника $\mathcal{T}$ принадлежит области $\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$ тогда, и только тогда, когда выполнены условия:

$$(x, y) \in \mathcal{T}_{k_1}, \quad T(x, y) \in \mathcal{T}_{k_2}, \quad T^2(x, y) \in \mathcal{T}_{k_3}, \quad \ldots, T^{(r-1)}(x, y) \in \mathcal{T}_{k_r}$$

Прежде всего, имеем:

$$(x, y) \in \mathcal{T}_{k_1} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1+x}{y}\right] = k_1 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 \leqslant \frac{1+x}{y} < k_1 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad k_1 y \leqslant 1 + x < (k_1 + 1)y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+x}{k_1+1} < y \leqslant \frac{1+x}{k_1}.$$

Что теперь означает условие $T(x, y) \in \mathcal{T}_{k_2}$? Прежде всего,

$$T(x, y) = (x_1, y_1) = (y, k_1 y - x), \quad \begin{cases} x_1 = y, \\ y_1 = k_1 y - x, \end{cases}$$

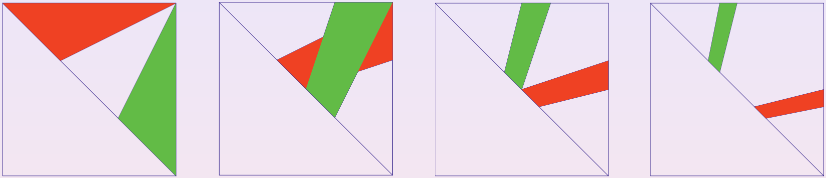
откуда условие $(x_1, y_1) \in \mathcal{T}_{k_2}$ примет вид:

$$k_2 y_1 \leqslant 1 + x_1 < (k_2 + 1) y_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(k_2+1)x + 1}{(k_2+1)k_1 - 1} < y \leqslant \frac{k_2 x + 1}{k_2 k_1 - 1}.$$

Следовательно, условие $(x, y) \in \mathcal{T}(k_1, k_2)$ равносильно системе линейных неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{1 + x}{k_1 + 1} < y \leqslant \dfrac{1 + x}{k_1}, \\[2ex] \dfrac{(k_2+1)x + 1}{(k_2+1)k_1 - 1} < y \leqslant \dfrac{k_2 x + 1}{k_2 k_1 - 1}. \end{cases}$$

Значит, область $\mathcal{T}(k_1, k_2)$ - либо пустое множество, либо выпуклый многоугольник (как пересечение конечного числа полуплоскостей).



Области $\mathcal{T}_k$ и $T(\mathcal{T}_k)$ для $k = 1, 2, 3, 4$.

В общем случае область $\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$ задаётся системой линейных неравенств типа

$$\frac{C_s x + 1}{D_s} < y \leqslant \frac{A_s x + 1}{B_s}, \quad s = 1, 2, \ldots, r,$$

где

$$A_s = \delta_{s-1}(k_2, \ldots, k_{s-1}, k_s), \quad B_s = \delta_s(k_1, \ldots, k_{s-1}, k_s),$$
$$C_s = \delta_{s-1}(k_2, \ldots, k_{s-1}, k_s + 1), \quad D_s = \delta_s(k_1, \ldots, k_{s-1}, k_s + 1),$$

$\delta_s(\cdot)$ - континуанты, т.е. полиномы, определяемые рекуррентным соотношением

$$\delta_s(n_1, \ldots, n_s) = n_s \delta_{s-1}(n_1, \ldots, n_{s-1}) - \delta_{s-2}(n_1, \ldots, n_{s-2})$$

с начальными условиями $\delta_0(\ ) = 1$, $\delta_1(n_1) = n_1$.

Множество $\mathcal{A}_r$ наборов $(k_1,\ldots,k_r)$, участвующих в подсчёте доли ν_r, полностью описывается условиями:

$$\begin{cases} \text{область} \quad \mathcal{T}(k_1,\ldots,k_r) \quad \text{непуста}, \\ \delta_s(k_1,\ldots,k_s) \not\equiv 0 \pmod 3, \quad s = 1,2,\ldots,r-1, \\ \delta_r(k_1,\ldots,k_s) \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Построение $\mathcal{A}_r$:

Для каждого r строим множество $\mathcal{A}_r^*$ наборов, у которых последнее условие заменено на:

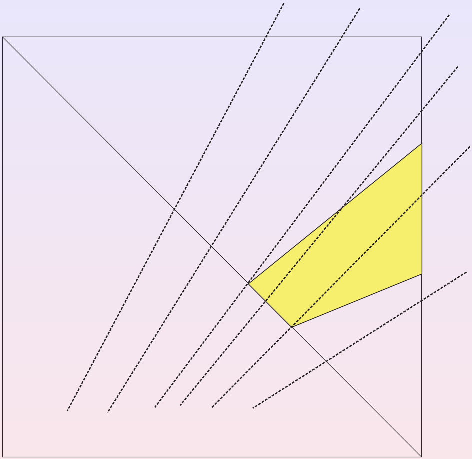
$$\delta_r(k_1,\ldots,k_r) \not\equiv 0 \pmod 3.$$

Очевидно, $\mathcal{A}_1^*$ состоит из всех $k_1 \not\equiv 0 \pmod 3$. Если $\mathcal{A}_{r-1}^*$ построено, то фиксируем произвольный набор $(k_1,\ldots,k_{r-1}) \in \mathcal{A}_{r-1}^*$ и перебираем все наборы вида

$$(k_1,\ldots,k_{r-1},k), \quad k = 1,2,3,\ldots$$

(непустым областям отвечает лишь конечное число наборов). Если для некоторого k континуант $\delta_r \equiv 0 \pmod 3$, то помещаем набор в $\mathcal{A}_r$; в противном случае помещаем его в $\mathcal{A}_r^*$.

Области $\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$ и континуанты



Дробление области $\boldsymbol{\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_{r-1})}$ на подобласти $\boldsymbol{\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_{r-1}, k)}$,
$\boldsymbol{k = 1, 2, 3, \ldots}$

Области $\mathcal{T}(k_1,\ldots,k_r)$ и континуанты

$$\cdots \to \mathcal{T}(k_1,\ldots,k_{r-1})^* \to
\begin{cases}
\mathcal{T}(k_1,\ldots,k_{r-1},k')^* \to \cdots \\
\mathcal{T}(k_1,\ldots,k_{r-1},k'+1)^* \to \cdots \\
\cdots \\
\mathcal{T}(k_1,\ldots,k_{r-1},k'')^0 \\
\cdots \\
\mathcal{T}(k_1,\ldots,k_{r-1},k''')^* \to \cdots
\end{cases}$$

«Генеалогическое» дерево непустых областей. Набор длины $\boldsymbol{r}$, помеченный символом «**0**», входит в расчёт доли $\boldsymbol{\nu_r}$, но в дальнейшем дроблении не участвует («умирает»)

Области $\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$ и континуанты

Три типа бесконечных деревьев:

1) дерево $\mathbb{A}_n$, порождаемое набором вида $(\mathbf{2}, (\mathbf{4}, \mathbf{1})^n) = (\mathbf{2}, \underbrace{\mathbf{4}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{4}, \mathbf{1}}_{n})$.

2) дерево $\mathbb{B}_n$, порождаемое набором вида $(\mathbf{5}, (\mathbf{1}, \mathbf{4})^n) = (\mathbf{5}, \underbrace{\mathbf{1}, \mathbf{4}, \ldots, \mathbf{1}, \mathbf{4}}_{n})$.

3) дерево $\mathbb{C}_n$, порождаемое набором вида $(\mathbf{1}, \mathbf{2}^n) = (\mathbf{1}, \underbrace{\mathbf{2}, \ldots, \mathbf{2}}_{n})$.

Дерево $\mathbb{C}_n$ относится к одному из трёх подтипов - в зависимости от остатка $n \pmod{3}$.

Преимущества случая $D = 3$: ветви деревьев недолговечны - рано пресекаются; ветвлений сравнительно мало - как правило, не более двух.

$$\mathbb{A}_n \quad (2,(4,1)^n)^* \nearrow (2,(4,1)^n,4)^* \longrightarrow \mathbb{A}_{n+1}$$

$$(2,(4,1)^n)^* \searrow (2,(4,1)^n,3)^* \longrightarrow (2,(4,1)^n,3,2)^* \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (2,(4,1)^n,3,2^2)^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow (2,(4,1)^n,3,2^{3n-2})^* \longrightarrow$$

$$\nearrow (2,(4,1)^n,3,2^{3n-2},1)^0 \qquad (2,(4,1)^n,3,2^{3n-1},1)^0$$

$$\searrow (2,(4,1)^n,3,2^{3n-1})^* \nearrow\!\!\searrow (2,(4,1)^n,3,2^{3n})^* \longrightarrow$$

$$\nearrow (2,(4,1)^n,3,2^{3n},1)^0 \qquad (2,(4,1)^n,3,2^{3n+1},1)^0$$

$$\searrow (2,(4,1)^n,3,2^{3n+1})^* \nearrow\!\!\searrow (2,(4,1)^n,3,2^{3n+2})^* \longrightarrow (2,(4,1)^n,3,2^{3n+2},1)^0$$

Дерево $\mathbb{A}_n$, порождаемое набором вида $(2,(4,1)^n) = (2,\underbrace{4,1,\ldots,4,1}_{n})$.

Области $\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$ и континуанты

В случае аналогичной задачи с делимостью на $\boldsymbol{D = 5}$ (вместо делимости на $\boldsymbol{D = 3}$) возникают гораздо более сложные деревья:

– число различных типов оказывается существенно большим,

– ветвлений больше,

– «умирание» наступает «в среднем» поздно.

Тем не менее, задача не кажется безнадёжной.

Открытый вопрос: что происходит в случае $\boldsymbol{D = p}$, $\boldsymbol{p \geqslant 7}$ - простое?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!