Усреднение операторов с произвольным возмущением в младших коэффициентах

Д.И. Борисов

Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр РАН

Вторая конференция математических центров России

Задачи усреднения

Возмущённый оператор:

$$\mathcal{H}_\varepsilon := -\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} A_j\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} + A_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ с подходящим краевым условием, $\varepsilon \to +0$.
Зависимость коэффициентов $A_{ij} = A_{ij}(x, \xi)$, $A_j = A_j(x, \xi)$, $A_0 = A_0(x, \xi)$ от ξ – периодичность / почти-периодичность / анизотропная периодичность и т.д.

Задачи усреднения

Возмущённый оператор:

$$\mathcal{H}_\varepsilon := -\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} A_j\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} + A_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ с подходящим краевым условием, $\varepsilon \to +0$.
Зависимость коэффициентов $A_{ij} = A_{ij}(x, \xi)$, $A_j = A_j(x, \xi)$, $A_0 = A_0(x, \xi)$ от ξ – периодичность / почти-периодичность / анизотропная периодичность и т.д.
Усреднённый оператор:

$$\mathcal{H}_0 := -\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^{(0)}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(0)}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + A_0^{(0)}(x)$$

в той же области с подходящим краевым условием.

Типы сходимостей

Резольвенты $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ и $(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}$ можно рассматривать как операторы в $L_2(\Omega)$ или как операторы из $L_2(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$.

Типы сходимостей

Резольвенты $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ и $(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}$ можно рассматривать как операторы в $L_2(\Omega)$ или как операторы из $L_2(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$.

1. Слабая резольвентная сходимость: $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f \to (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f$ слабо в $L_2(\Omega)$ или $W_2^1(\Omega)$ для каждой f.

Типы сходимостей

Резольвенты $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ и $(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}$ можно рассматривать как операторы в $L_2(\Omega)$ или как операторы из $L_2(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$.

1. Слабая резольвентная сходимость: $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f \to (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f$ слабо в $L_2(\Omega)$ или $W_2^1(\Omega)$ для каждой f.

2. Сильная резольвентная сходимость: $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f \to (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f$ сильно в $L_2(\Omega)$ или $W_2^1(\Omega)$ для каждой f.

Типы сходимостей

Резольвенты $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ и $(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}$ можно рассматривать как операторы в $L_2(\Omega)$ или как операторы из $L_2(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$.

1. Слабая резольвентная сходимость: $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f \to (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f$ слабо в $L_2(\Omega)$ или $W_2^1(\Omega)$ для каждой f.

2. Сильная резольвентная сходимость: $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f \to (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f$ сильно в $L_2(\Omega)$ или $W_2^1(\Omega)$ для каждой f.

3. Равномерная резольвентная сходимость: $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} \to (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ в операторной норме $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}$ или $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)\to W_2^1(\Omega)}$.

Постановка задачи

Возмущённый оператор:

$$\mathcal{H}_\varepsilon := -\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^{(\varepsilon)}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(\varepsilon)}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + A_0^{(\varepsilon)}(x)$$

в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ с подходящим краевым условием, $\varepsilon \to +0$.
Зависимость коэффициентов от ε – произвольная.

Постановка задачи

Возмущённый оператор:

$$\mathcal{H}_\varepsilon := -\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^{(\varepsilon)}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(\varepsilon)}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + A_0^{(\varepsilon)}(x)$$

в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ с подходящим краевым условием, $\varepsilon \to +0$.
Зависимость коэффициентов от ε – произвольная.

Каковы должны быть условия на зависимость коэффициентов от ε, чтобы обеспечить наличие равномерной резольвентной сходимости?

Постановка задачи: вспомогательный оператор

Вспомогательный оператор:

$$\mathcal{H} = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} A_j^+ \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} A_j^- + A_0, \quad \mathcal{B}u = 0$$

$$\mathcal{B}u = u \quad \text{или} \quad \mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + Ku,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} := \sum_{i,j=1}^{d} \nu_i A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{d} \nu_j A_j^- u$$

на области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Гладкость матричнозначных коэффициентов:

$$A_{ij}, A_j, A_0 \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n), \qquad K \in L_\infty(\partial\Omega; \mathbb{M}_n)$$

Постановка задачи: полуторалинейные формы

Если $\mathcal{B}u = u$, то

$$\mathfrak{h}(u,v) := \sum_{i,j=1}^{d} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} + \sum_{j=1}^{d} \left(A_j^{+} \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}$$
$$- \sum_{j=1}^{d} \left(A_j^{-} u, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} + (A_0 u, v)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} \quad \text{в} \quad L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$$

на области определения $\mathfrak{V} := \mathring{W}_2^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ и

$$\mathfrak{h}(u,v) := \sum_{i,j=1}^{d} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} + \sum_{j=1}^{d} \left(A_j^{+} \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}$$
$$- \sum_{j=1}^{d} \left(A_j^{-} u, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} + (A_0 u, v)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} + (Ku, v)_{L_2(\partial\Omega;\mathbb{C}^n)}$$

на области определения $\mathfrak{V} := W_2^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ если $\mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + Ku$.

Постановка задачи: действие оператора

1. Оператор $\mathcal{H}$ вводится как неограниченный в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ m-секториальный оператор, соответствующий форме $\mathfrak{h}$, то есть, $\mathfrak{h}(u,v) = (\mathcal{H}u, v)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}$; его область определения – подмножество в $\mathfrak{V}$

Постановка задачи: действие оператора

1. Оператор $\mathcal{H}$ вводится как неограниченный в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ m-секториальный оператор, соответствующий форме $\mathfrak{h}$, то есть, $\mathfrak{h}(u, v) = (\mathcal{H}u, v)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}$; его область определения – подмножество в $\mathfrak{V}$

2. Расширение оператора на все $\mathfrak{V}$. Оператор $\mathcal{H}$ рассматривается как действующий из $\mathfrak{V}$ в сопряжённое пространство $\mathfrak{V}^*$ по правилу $\mathcal{H}u$ – это антилинейный функционал из $\mathfrak{V}^*$, переводящий каждый элемент v из $\mathfrak{V}$ в число $\mathfrak{h}(u, v)$, то есть, $u \mapsto \mathcal{H}u$, $\langle \mathcal{H}u, v\rangle := \mathfrak{h}(u, v)$.

Постановка задачи: возмущение

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, $m \geqslant 1$, $V^\varepsilon = V^\varepsilon(x)$, $Q_j^\varepsilon = Q_j^\varepsilon(x)$, $P_j^\varepsilon = P_j^\varepsilon(x)$, $j = 1, \dots, d$, $V^\varepsilon, Q_j^\varepsilon, P_j^\varepsilon \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n)$ – ограничены равномерно по ε,

$$\mathfrak{r}^\varepsilon(u, v) := \sum_{j=1}^{d} \left(Q_j^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)} - \sum_{j=1}^{d} \left(P_j^\varepsilon u, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)} + (V^\varepsilon u, v)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)}$$

на области определения $\mathcal{D}(\mathfrak{r}^\varepsilon) := \mathfrak{V}$;

Постановка задачи: возмущение

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, $m \geqslant 1$, $V^\varepsilon = V^\varepsilon(x)$, $Q_j^\varepsilon = Q_j^\varepsilon(x)$, $P_j^\varepsilon = P_j^\varepsilon(x)$,
$j = 1, \ldots, d$, $V^\varepsilon, Q_j^\varepsilon, P_j^\varepsilon \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n)$ – ограничены равномерно по ε,

$$\mathfrak{x}^\varepsilon(u, v) := \sum_{j=1}^{d} \left(Q_j^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} - \sum_{j=1}^{d} \left(P_j^\varepsilon u, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} + (V^\varepsilon u, v)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}$$

на области определения $\mathcal{D}(\mathfrak{x}^\varepsilon) := \mathfrak{V}$;
оператор $\mathcal{X}^\varepsilon : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}^*$, $\langle \mathcal{X}^\varepsilon u, v \rangle := \mathfrak{x}^\varepsilon(u, v)$.

Постановка задачи: возмущение

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, $m \geqslant 1$, $V^\varepsilon = V^\varepsilon(x)$, $Q_j^\varepsilon = Q_j^\varepsilon(x)$, $P_j^\varepsilon = P_j^\varepsilon(x)$, $j = 1, \dots, d$, $V^\varepsilon, Q_j^\varepsilon, P_j^\varepsilon \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n)$ – ограничены равномерно по ε,

$$\mathfrak{x}^\varepsilon(u, v) := \sum_{j=1}^{d} \left(Q_j^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} - \sum_{j=1}^{d} \left(P_j^\varepsilon u, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} + (V^\varepsilon u, v)_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}$$

на области определения $\mathcal{D}(\mathfrak{x}^\varepsilon) := \mathfrak{V}$;
оператор $\mathcal{X}^\varepsilon : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}^*$, $\langle \mathcal{X}^\varepsilon u, v \rangle := \mathfrak{x}^\varepsilon(u, v)$.
Формальное дифференциальное выражение для $\mathcal{X}^\varepsilon$:

$$\mathcal{X}^\varepsilon := \sum_{j=1}^{d} Q_j^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} P_j^\varepsilon + V^\varepsilon.$$

Возмущённый оператор

Возмущённый оператор $\mathcal{H}^\varepsilon := \mathcal{H} + \mathcal{X}^\varepsilon : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}^*$,

$$\mathcal{H}^\varepsilon := \mathcal{H} + \sum_{j=1}^{d} Q_j^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} P_j^\varepsilon + V^\varepsilon, \qquad \mathcal{B}^\varepsilon u = 0,$$

$$\mathcal{B}^\varepsilon u = u \quad \text{если} \quad \mathcal{B}u = u$$

$$\mathcal{B}^\varepsilon u = \mathcal{B} - \sum_{j=1}^{d} P_j^\varepsilon \nu_j \quad \text{если} \quad \mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + Ku.$$

Возмущённый оператор

Возмущённый оператор $\mathcal{H}^\varepsilon := \mathcal{H} + \mathcal{X}^\varepsilon : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}^*$,

$$\mathcal{H}^\varepsilon := \mathcal{H} + \sum_{j=1}^{d} Q_j^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} P_j^\varepsilon + V^\varepsilon, \qquad \mathcal{B}^\varepsilon u = 0,$$

$$\mathcal{B}^\varepsilon u = u \quad \text{если} \quad \mathcal{B} u = u$$

$$\mathcal{B}^\varepsilon u = \mathcal{B} - \sum_{j=1}^{d} P_j^\varepsilon \nu_j \quad \text{если} \quad \mathcal{B} u = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + K u.$$

$\langle \mathcal{H}^\varepsilon u, v \rangle = \mathfrak{h}^\varepsilon(u, v) := \mathfrak{h}(u, v) + \mathfrak{x}^\varepsilon(u, v)$;

Возмущённый оператор

Возмущённый оператор $\mathcal{H}^\varepsilon := \mathcal{H} + \mathcal{X}^\varepsilon : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}^*$,

$$\mathcal{H}^\varepsilon := \mathcal{H} + \sum_{j=1}^{d} Q_j^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} P_j^\varepsilon + V^\varepsilon, \qquad \mathcal{B}^\varepsilon u = 0,$$

$$\mathcal{B}^\varepsilon u = u \quad \text{если} \quad \mathcal{B}u = u$$

$$\mathcal{B}^\varepsilon u = \mathcal{B} - \sum_{j=1}^{d} P_j^\varepsilon \nu_j \quad \text{если} \quad \mathcal{B}u = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + Ku.$$

$\langle \mathcal{H}^\varepsilon u, v\rangle = \mathfrak{h}^\varepsilon(u, v) := \mathfrak{h}(u, v) + \mathfrak{x}^\varepsilon(u, v)$;
оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ – расширение на $\mathfrak{V}$ неограниченного m-секториального оператора в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, соответствующего $\mathfrak{h}^\varepsilon$.

Резольвентная сходимость и разложение

Пусть Q_j^ε, P_j^ε, V^ε ограничены в $L_\infty(\Omega;\mathbb{M}_n)$ равномерно по ε и $\|\mathcal{X}^\varepsilon - \mathcal{X}^0\|_{\mathfrak{V}\to\mathfrak{V}^*} \to 0$. Тогда $\exists$ Q_j^0, P_j^0, $V^0 \in L_\infty(\Omega;\mathbb{C}^n)$, порождающие $\mathcal{X}^0$ с помощью формы $\mathfrak{x}^0$, аналогичной $\mathfrak{x}^\varepsilon$, и $\exists\ \lambda_0 \in \mathbb{R}$: все точки $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$, содержатся в резольвентных множествах $\mathcal{H}^0$ и $\mathcal{H}^\varepsilon$. Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$ выполнено $\|(\mathcal{H}^\varepsilon-\lambda)^{-1} - (\mathcal{H}^0-\lambda)^{-1}\|_{\mathfrak{V}^*\to\mathfrak{V}}$ и

$$(\mathcal{H}^\varepsilon-\lambda)^{-1} = (\mathcal{H}^0-\lambda)^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\big(\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}^0-\lambda)^{-1}\big)^j, \qquad \mathcal{L}_\varepsilon := \mathcal{X}^\varepsilon - \mathcal{X}^0,$$

$$\Big\|(\mathcal{H}^\varepsilon-\lambda)^{-1} - (\mathcal{H}^0-\lambda)^{-1}\sum_{j=0}^{N}\big(-\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}^0-\lambda)^{-1}\big)^j\Big\|_{\mathfrak{V}^*\to\mathfrak{V}} \leqslant c_2^{N+2}(\lambda)\|\mathcal{L}_\varepsilon\|_{\mathfrak{V}\to\mathfrak{V}^*}^{N+1}$$

для всех $N \in \mathbb{Z}_+$, где $c_2 = c_2(\lambda)$ – некоторая константа, не зависящая от ε и N.

Пространства мультипликаторов

$\mathfrak{M}_{1,-1}$ – пространство мультипликаторов из $\mathfrak{V}$ в $\mathfrak{V}^*$, состоящее из матричных функций V, определённых на Ω и таких что $Vu \in \mathfrak{V}^*$ для каждого $u \in \mathfrak{V}$. Аналогично вводятся пространства $\mathfrak{M}_{1,0}$ и $\mathfrak{M}_{2,0}$ мультипликаторов из $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{V} \cap W_2^2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Нормы:

$$\|V\|_{\mathfrak{M}_{1,-1}} := \sup_{\substack{u\in\mathfrak{V}\\ u\neq 0}} \frac{\|Vu\|_{\mathfrak{V}^*}}{\|u\|_{\mathfrak{V}}}, \qquad \|V\|_{\mathfrak{M}_{1,0}} := \sup_{\substack{u\in\mathfrak{V}\\ u\neq 0}} \frac{\|Vu\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}}{\|u\|_{\mathfrak{V}}},$$

$$\|V\|_{\mathfrak{M}_{2,0}} := \sup_{\substack{u\in\mathfrak{V}\cap W_2^2(\Omega;\mathbb{C}^n)\\ u\neq 0}} \frac{\|Vu\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}}{\|u\|_{\mathfrak{V}}}.$$

Пространства мультипликаторов

$\mathfrak{M}_{1,-1}$ – пространство мультипликаторов из $\mathfrak{V}$ в $\mathfrak{V}^*$, состоящее из матричных функций V, определённых на Ω и таких что $Vu \in \mathfrak{V}^*$ для каждого $u \in \mathfrak{V}$. Аналогично вводятся пространства $\mathfrak{M}_{1,0}$ и $\mathfrak{M}_{2,0}$ мультипликаторов из $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{V} \cap W_2^2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Нормы:

$$\|V\|_{\mathfrak{M}_{1,-1}} := \sup_{\substack{u\in\mathfrak{V}\\ u\neq 0}} \frac{\|Vu\|_{\mathfrak{V}^*}}{\|u\|_{\mathfrak{V}}}, \qquad \|V\|_{\mathfrak{M}_{1,0}} := \sup_{\substack{u\in\mathfrak{V}\\ u\neq 0}} \frac{\|Vu\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}}{\|u\|_{\mathfrak{V}}},$$

$$\|V\|_{\mathfrak{M}_{2,0}} := \sup_{\substack{u\in\mathfrak{V}\cap W_2^2(\Omega;\mathbb{C}^n)\\ u\neq 0}} \frac{\|Vu\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}}{\|u\|_{\mathfrak{V}}}.$$

$$\|\mathcal{X}^\varepsilon - \mathcal{X}^0\|_{\mathfrak{V}\to\mathfrak{V}^*} \leqslant \sum_{j=1}^{d} \left(\sqrt{n}\|Q_j^\varepsilon - Q_j^0\|_{\mathfrak{M}_{1,0}} + \|P_j^\varepsilon - P_j^0\|_{\mathfrak{M}_{1,0}}\right) + \|V^\varepsilon - V^0\|_{\mathfrak{M}_{1,-1}}.$$

Критерий резольвентной сходимости

Пусть

$$\sup_{f \in \mathfrak{V}^*,\, f \neq 0} \frac{\|(\mathcal{H}^\varepsilon - \lambda)^{-1} f - (\mathcal{H}^0 - \lambda)^{-1} f\|_{\mathfrak{V}^* \to \mathfrak{V}}}{\|f\|_{\mathfrak{V}^*}} \to 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Тогда $\|\mathcal{L}_\varepsilon\|_{\mathfrak{V} \to \mathfrak{V}^*} \to 0$, $\varepsilon \to 0$, где $\mathcal{L}_\varepsilon := \mathcal{X}^\varepsilon - \mathcal{X}^0$.

Критерий резольвентной сходимости

Пусть

$$\sup_{f \in \mathfrak{V}^*,\, f \neq 0} \frac{\|(\mathcal{H}^\varepsilon - \lambda)^{-1} f - (\mathcal{H}^0 - \lambda)^{-1} f\|_{\mathfrak{V}^* \to \mathfrak{V}}}{\|f\|_{\mathfrak{V}^*}} \to 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Тогда $\|\mathcal{L}_\varepsilon\|_{\mathfrak{V} \to \mathfrak{V}^*} \to 0$, $\varepsilon \to 0$, где $\mathcal{L}_\varepsilon := \mathcal{X}^\varepsilon - \mathcal{X}^0$.
Если $Q_j^\varepsilon \equiv 0$, $P_j^\varepsilon \equiv 0$, $j = 1, \ldots, d$, то семейство V^ε сходится к V^0 в пространстве $\mathfrak{M}_{1,-1}$ и $\|V^\varepsilon - V^0\|_{\mathfrak{M}_{1,-1}} \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Сходимость в пространстве $\mathfrak{M}_{1,-1}$

Пусть $V^\varepsilon \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n)$ ограничено равномерно по ε и существуют матричная функция $V^0 \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n)$ и положительная скалярная функция $\eta = \eta(\varepsilon)$:

$$\left| \int\limits_{\square_\gamma^\eta} \eta^{-d} \big(V^\varepsilon(x) - V^0(x) \big)\, dx \right| \leqslant \rho_1(\varepsilon) \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \Gamma_\eta, \qquad (1)$$

$$\square_\gamma^\eta := \eta\gamma + \eta\square, \qquad \Gamma_\eta := \{\gamma \in \Gamma : \square_\gamma^\eta \subset \Omega\},$$

$\rho_1(\varepsilon) \to 0$, $\eta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда V^ε сходится к V^0 в $\mathfrak{M}_{1,-1}$,

$$\|V^\varepsilon - V^0\|_{\mathfrak{M}_{1,-1}} \leqslant C\big(\rho_1(\varepsilon) + \eta(\varepsilon)\big).$$

Если равномерно ограниченное семейство $V^\varepsilon \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n)$ сходится к $V^0 \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n)$ в $\mathfrak{M}_{1,-1}$, то условие (1) выполнено с $\eta(\varepsilon) = \|V^\varepsilon - V^0\|_{\mathfrak{M}_{1,-1}}^{\frac{1}{2}}$, $\rho_1(\varepsilon) = C\|V^\varepsilon - V^0\|_{\mathfrak{M}_{1,-1}}^{\frac{1}{4}}$.

Предел в пространстве $\mathfrak{M}_{1,-1}$

Пусть с $V^\varepsilon \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n)$ ограничены равномерно по ε и для каждого $x \in \Omega$ существует конечный предел

$$V^0(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mu^d(\varepsilon) \operatorname{mes} \omega} \int\limits_{x+\mu(\varepsilon)\omega} V^\varepsilon(y)\, dy, \qquad \mu(\varepsilon) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0,$$

где ω – некоторая фиксированная область, функция μ не зависит от x,

$$\left| V^0(x) - \frac{1}{\mu^d(\varepsilon) \operatorname{mes} \omega} \int\limits_{x+\mu(\varepsilon)\omega} V^\varepsilon(y)\, dy \right| \leqslant \rho_2(\varepsilon), \qquad \rho_2(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

для всех $x \in \Omega$ таких что $x + \mu(\varepsilon)\omega \subset \Omega$. Тогда $V^0 \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n)$, V^ε сходится к V^0 в $\mathfrak{M}_{1,-1}$ и верна оценка:

$$\|V^\varepsilon - V^0\|_{\mathfrak{M}_{1,-1}} \leqslant C\big(\rho_2(\varepsilon) + \mu^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)\big),$$

где константа C не зависит от ε, μ, ρ_2.

Сходимость в пространстве $\mathfrak{M}_{1,0}$

Пусть $Q^\varepsilon \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n)$ ограничены равномерно по ε и существует матричная функция $Q^0 \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n)$ и положительная скалярная функция $\eta = \eta(\varepsilon)$:

$$\int\limits_{\square_\gamma^\eta} \eta^{-d} \left| Q^\varepsilon(x) - Q^0(x) \right|^2 dx \leqslant \rho_3(\varepsilon) \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \Gamma_\eta, \tag{2}$$

где $\eta(\varepsilon) \to 0$, $\rho_3(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда Q^ε сходится к Q^0 в $\mathfrak{M}_{1,0}$ при $\varepsilon \to 0$,

$$\|Q^\varepsilon - Q^0\|_{\mathfrak{M}_{1,0}} \leqslant C\left(\rho_3^{\frac{1}{2}}(\varepsilon) + \eta^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)\right).$$

Сходимость в пространстве $\mathfrak{M}_{1,0}$

Пусть $Q^\varepsilon \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n)$ ограничены равномерно по ε и существует матричная функция $Q^0 \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n)$ и положительная скалярная функция $\eta = \eta(\varepsilon)$:

$$\int\limits_{\square_\gamma^\eta} \eta^{-d} \left| Q^\varepsilon(x) - Q^0(x) \right|^2 dx \leqslant \rho_3(\varepsilon) \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \Gamma_\eta, \tag{2}$$

где $\eta(\varepsilon) \to 0$, $\rho_3(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда Q^ε сходится к Q^0 в $\mathfrak{M}_{1,0}$ при $\varepsilon \to 0$,

$$\|Q^\varepsilon - Q^0\|_{\mathfrak{M}_{1,0}} \leqslant C\left(\rho_3^{\frac{1}{2}}(\varepsilon) + \eta^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)\right).$$

Если равномерно ограниченное семейство $Q^\varepsilon \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n)$ сходится к $Q^0 \in L_\infty(\Omega; \mathbb{M}_n)$ в $\mathfrak{M}_{1,0}$ при $\varepsilon \to 0$, тогда условие (2) выполнено с $\eta(\varepsilon) = \|Q^\varepsilon - Q^0\|_{\mathfrak{M}_{1,0}}^{\frac{1}{2}}$, $\rho_3(\varepsilon) = C\|Q^\varepsilon - Q^0\|_{\mathfrak{M}_{1,0}}^{\frac{1}{2}}$.

Повышенная гладкость у усреднённого оператора

Пусть V^ε, Q_j^ε сходятся к V^0, Q_j^0 в $\mathfrak{M}_{1,-1}$, семейство P_j^ε сходится к P_j^0 в $\mathfrak{M}_{2,0}$, область определения оператора $\mathcal{H}^0$, рассматриваемого в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, есть подмножество пространства $W_2^2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ и резольвента $\mathcal{H}^0$ ограничена как оператор из $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ в $W_2^2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Тогда оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$, рассматриваемый в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, сходится к $\mathcal{H}^0$ в смысле равномерной резольвентной сходимости и для всех λ с условием $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$ верна оценка:

$$\begin{aligned}\big\|(\mathcal{H}^\varepsilon-\lambda)^{-1}-(\mathcal{H}^0-\lambda)^{-1}\big\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\to W_2^1(\Omega;\mathbb{C}^n)}\\ \leqslant c_3(\lambda)\bigg(\|V^\varepsilon-V^0\|_{\mathfrak{M}_{1,-1}}+\sum_{j=1}^{d}\|Q_j^\varepsilon-Q_j^0\|_{\mathfrak{M}_{1,-1}}\\ +\sum_{j=1}^{d}\|P_j^\varepsilon-P_j^0\|_{\mathfrak{M}_{2,0}}\bigg).\end{aligned}$$