Relative Milnor K-grps

$x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$

(с Д. Осиповым, Д. Тюриным)

1. K-группы Милнора

$T(A) = \mathbb{Z} \oplus A \oplus (A \otimes_{\mathbb{Z}} A) \oplus A^{\otimes 3}_{\mathbb{Z}} \oplus \ldots$

R – комм. кольцо с 1

Опр $\bigoplus_{i \geq 0} K_i^M(R) = T(R^*) / \langle r \otimes (1-r) \rangle,\ r, 1-r \in R^*$

$\{r_1, \ldots, r_i\} \longleftarrow r_1 \otimes \ldots \otimes r_i$

$\{r_1 r_2, s\} = \{r_1, s\} + \{r_2, s\}$

Пр $K_2^M(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2 \ni \{-1,-1\}$; $K_2^M(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/2 \times \prod_{p \geq 3} \mathbb{F}_p^*$, $K_2^M(\mathbb{F}_q) = 0$.

Лемма Если $r, 1-r \in R^*$, то $\{r, -r\} = 0$

Д-во $0 = \{r, 1-r\} + \{r^{-1}, 1-r^{-1}\} = \{r, \underbrace{\frac{1-r}{1-r^{-1}}}_{=-r}\}$ $\square$

Пример $K_n^M(F)/m \xrightarrow{\sim} H^n(F, \mu_m^{\otimes n})$ (Voev)

$(m, \mathrm{char}(F)) = 1$

---

② **Дифф формы**

$$\Omega^1_R = \Omega_{R/\mathbb{Z}} = \langle dr, r \in R \rangle_R \Big/ \left\langle \begin{matrix} d(r \cdot s) = r \cdot ds + s\,dr \\ d(r_1 + r_2) = dr_1 + dr_2 \end{matrix} \right\rangle_R$$

$$\Omega^i_R := \Lambda^i_R \Omega^1_R \; ; \; \ldots \to \Omega^i_R \xrightarrow{d} \Omega^{i+1}_R \xrightarrow{d} \ldots \quad d^2 = 0.$$

Замеч. $R^* \longrightarrow \Omega^1_R$, $r \longmapsto \frac{dr}{r}$.

$d\log: K^M_n(R) \longrightarrow \Omega^n_R$

---

③ Относит. инв-ты

Пусть $I \subset R$ идеал т.ч. $I^N = 0$, $N \in \mathbb{N}$, $\exists$ расщ $R \underset{\longrightarrow}{\longleftarrow} R/I$

Опр. $K^M_n(R,I) := \operatorname{Ker}\left(K^M_n(R) \to K^M_n(R/I)\right)$

$\Omega^n_{R,I} = \operatorname{Ker}\left(\Omega^n_R \to \Omega^n_{R/I}\right)$ $(N-1)! \in R^*$

Пример $K^M_1(R,I) = 1+I$, $\Omega^0_{R,I} = I$. $\Downarrow$ $\log : 1+I \xrightarrow{\sim} I$.

$d\log = d\log$.

Пусть $N! \in R^*$

Утв $\exists!$ функтор. по (R, I) гом-м группы

$$B : K^M_{n+1}(R, I) \to \Omega^n_{R,I} / d\Omega^{n-1}_{R,I} \xrightarrow{d}$$

т.ч. $d \circ B = d\log : K^M_{n+1}(R, I) \to \Omega^{n+1}_{R,I}$

Теор (–, Тюрин) Пусть $\exists\, R/_I \dashrightarrow R$, $I^N = 0$, $N! \in R^*$

Пусть $\forall r_1, r_2, r_3, r_4 \in R\ \exists s \in R^* : r_1 + s, \dots, r_4 + s \in R^*$. $(*)$

Тогда B изом-м.

(e.g., $A((t)) = R$)

$r_1, s_1, \dots, r_5, s_5$

$\Downarrow$

$\exists r : r_1 + r s_1, \dots, r_5 + s_5 r \in R^*$.

Пример $R = S[\varepsilon]$, $\varepsilon^2 = 0$, $I = (\varepsilon)$.

$TK^M_{n+1}(S) = K^M_{n+1}(R, I) \xrightarrow{\sim} \Omega^n_S$

④ p-адич. вариант

p — простое, $p>2$, в R нет p-круч.

Пусть $R \xrightarrow[\text{гом-м}]{\varphi} R$ т.ч. $\varphi(x) \equiv x^p \pmod p$, $\varphi(x) = x^p + p\cdot\delta(x)$

Тогда $\exists$ канонич. $\varphi/p^n : \Omega^n_R \to \Omega^n_R$.

Пр. $\forall r \in R$ $\quad \varphi/p(dr) = r^{p-1}dr + d\,\delta(r)$.

Утв. $\exists!$ функтор. гом-м групп

$\log_\delta : R^* \to \hat{R}$ т.ч.

$d \circ \log_\delta = \left(1 - \frac{\varphi}{p}\right) d\log$.

Возникает гом-м

$$\widetilde{B}_\delta : (R^*)^{\otimes(n+1)} \longrightarrow \widehat{\Omega}^n_R / d\widehat{\Omega}^{n-1}_{R,I}$$

т. ч. $d \circ \widetilde{B}_\delta = \left(1 - \frac{\phi}{p^{n+1}}\right) \circ d\log$.

<u>Теор</u>. Блох–Стейнберг

<u>Теор</u> ${}^{D}\widehat{K}^M_2(\underset{R}{S[[t]]/t^N}, \underset{I}{(t)}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\Omega}^1_{R,I}/dI$.