Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 14.

Теретёнков Александр Евгеньевич

14 декабря 2021 г.

Ситуация общего положения

Если спектр ненулевых боровских частот невырожден, а нулевые частоты не вносят вклада, то спектр H_S тем более невырожден, переходя его собственный базис

$$H_S = \sum \varepsilon_j |j\rangle\langle j|$$

Получаем, что

$$A_\alpha(\varepsilon_j - \varepsilon_i) \sim |i\rangle\langle j|$$

Таким образом, ГКСЛ генератор в пределе слабой связи общего положения определяется

$$\mathcal{D}(\rho) = \sum_{ij} \gamma_{ij} \left(|i\rangle\langle j|\rho|j\rangle\langle i| - \frac{1}{2}|j\rangle\langle j|\rho - \frac{1}{2}\rho|j\rangle\langle j| \right)$$

$$H_{LS} = \sum_j \Delta\omega_j |j\rangle\langle j|$$

Равновесный резервуар

В Гиббсовском равновесии:

$$\rho_B = \frac{e^{-\beta H_B}}{\operatorname{Tr} e^{-\beta H_B}}$$

Равновесный резервуар

В Гиббсовском равновесии:

$$\rho_B = \frac{e^{-\beta H_B}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_B}}$$

Условия Кубо-Мартина-Швингера (КМШ)

$$\mathrm{Tr}_B\, B_k^\dagger(s) B_j(0) \rho_B = \mathrm{Tr}_B\, B_j(0) B_k^\dagger(s + i\beta)\rho_B$$

$$\mathrm{Tr}_B\, B_k^\dagger(s) B_j(0) \rho_B = \frac{\mathrm{Tr}_B\, e^{iH_B s} B_k^\dagger(0) e^{-iH_B s} B_j(0) e^{-\beta H_B}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_B}} =$$

$$= \frac{\mathrm{Tr}_B\, B_j(0) e^{-\beta H_B} e^{iH_B s} B_k^\dagger(0) e^{-iH_B s}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_B}} =$$

$$= \frac{\mathrm{Tr}_B\, B_j(0) e^{iH_B (s+i\beta)} B_k^\dagger(0) e^{-iH_B (s+i\beta)} e^{-\beta H_B}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_B}} =$$

$$= \mathrm{Tr}_B\, B_j(0) B_k^\dagger(s + i\beta)\rho_B$$

Равновесный резервуар

Напомним

$$\gamma_{jk}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dse^{i\omega s} \operatorname{Tr}_B B_j^\dagger(s) B_k(0) \rho_B$$

Упражнение. Показать, что $\gamma_{jk}(-\omega) = e^{-\beta\omega}\gamma_{kj}(\omega)$ в случае, если выбрать $B_j^\dagger = B_j$.

Равновесный резервуар

Получили:

$$\mathcal{D}(\rho_S) = \sum_{\omega>0}\sum_{j,k}\gamma_{jk}(\omega)\left(A_k(\omega)\rho_S A_j^\dagger(\omega) - \frac{1}{2}\{A_j^\dagger(\omega)A_k(\omega),\rho_S\}\right) +$$

$$+\sum_{\omega>0}\sum_{j,k}e^{-\beta\omega}\gamma_{jk}(\omega)\left(A_k^\dagger(\omega)\rho_S A_j(\omega) - \frac{1}{2}\{A_j(\omega)A_k^\dagger(\omega),\rho_S\}\right) +$$

$$+\sum_{j,k}\gamma_{jk}(0)\left(A_k(0)\rho_S A_j(0) - \frac{1}{2}\{A_j(0)A_k(0),\rho_S\}\right)$$

$(A_k(0) = A_k^\dagger(0))$

Пример

Для 2-уровневой системы имеем:

$$\mathcal{D}(\rho) = \gamma(\omega_0)\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_+\sigma_-\right) +$$
$$+ e^{-\beta\omega_0}\gamma(\omega_0)\left(\sigma_+\rho\sigma_- - \frac{1}{2}\sigma_-\sigma_+\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_-\sigma_+\right) +$$
$$+ \gamma(0)(\sigma_z\rho\sigma_z - \rho)$$

$$H_{LS} = \Delta\omega\sigma_+\sigma_-$$

Классический детальный баланс

Классическая марковская цепь с дискретным временем

$$p(n) = P^n p$$

Стационарное состояние

$$p = Pp$$

или

$$p_j = \sum_k P_{jk} p_k$$

$$\sum_k P_{kj} p_j = \sum_k P_{jk} p_k, \qquad (P_{jk} p_k = p(i_0 = k, i_1 = j))$$

— глобальный баланс.

$$P_{kj} p_j = P_{jk} p_k$$

детальный баланс.

Классический детальный баланс

Если $p_j > 0$, то можно ввести скалярное произведение

$$(x,y)_p = \sum_j p_j x_j y_j$$

то

$$(x,P^T y)_p = (P^T x,y)_p$$

— P^T самосопряжено относительно такого скалярного произведения:

$$\sum_{jk} p_j x_j P_{kj} y_k = \sum_{jk} p_k P_{jk} x_j y_k.$$

Квантовый детальный баланс

Пусть задано состояние $\rho > 0$ введём скалярное произведение

$$\langle\langle A|B\rangle\rangle_\rho = \operatorname{Tr} \rho A^\dagger B$$

Условие ρ — самосопряжённости $\simeq$ квантовый детальный баланс (но есть вариации)

$$\langle\langle \Phi^*(A)|B\rangle\rangle_\rho = \langle\langle A|\Phi^*(B)\rangle\rangle_\rho$$

Квантовый детальный баланс

Утверждение. Условие ρ — самосопряжённости для канала Φ эквивлентно

$$\Phi(B\rho) = \Phi^*(B)\rho$$

Из него следует

$$[\Phi, \rho \cdot \rho^{-1}] = 0$$

и

$$\Phi(\rho) = \rho$$

Квантовый детальный баланс

Доказательство:

$$\underbrace{\operatorname{Tr} \rho(\Phi^*(A))^\dagger B}_{=\operatorname{Tr}(\Phi^*(A))^\dagger B\rho = \operatorname{Tr} A^\dagger \Phi(B\rho)} = \underbrace{\operatorname{Tr} \rho A^\dagger \Phi^*(B)}_{=\operatorname{Tr} A^\dagger \Phi^*(B)\rho}$$

$$\Phi(B\rho) = \Phi^*(B)\rho$$

Сопрягая, получим

$$\Phi(\rho B^\dagger) = \rho\Phi^*(B^\dagger)$$

Переобозначив

$$\Phi(\rho B) = \rho\Phi^*(B)$$

$$\Phi(\rho B \rho^{-1}) = \rho\Phi^*(B\rho^{-1})\rho\rho^{-1} = \rho\Phi(B)\rho^{-1}$$

$$[\Phi, \rho \cdot \rho^{-1}] = 0 \qquad \square$$

Квантовый детальный баланс

Утверждение. Пусть $\mathcal{L}(B)$ — генератор вполне положительной сохраняющей след полугруппы, коммутирующей с $\rho \cdot \rho^{-1}$, λ — собственные числа, тогда в

$$\mathcal{L}(B) = -i[H, B] - \frac{1}{2}\{\Psi^*(I), B\} + \Psi(B),$$

$[H, \rho] = 0$ и существует такой базис $\mathrm{Tr}\, F_{i,\lambda}^\dagger F_{j,\mu} = \delta_{\lambda\mu}\delta_{ij}$,

$$F_{i,1}^\dagger = F_{i,1},$$

что

$$\Psi(B) = \sum_{\lambda > 1} \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\lambda} (a_{ij}(\lambda) F_{i,\lambda} B F_{j,\lambda}^\dagger + \tilde{a}_{ij}(\lambda) F_{i,\lambda}^\dagger B F_{j,\lambda}) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}1} \tilde{a}_{ij}(1) F_{i,1} B F_{j,1}$$

Квантовый детальный баланс

До этого мы получили однозначное представление

$$\mathcal{L}(B) = -i[H, B] + \{G, B\} + \Psi(B)$$

Тогда условие $\rho^{-1}\mathcal{L}(\rho B \rho^{-1})\rho = \mathcal{L}(B)$ примет вид

$$-i\rho^{-1}[H, \rho B \rho^{-1}]\rho + \rho^{-1}\{G, \rho B \rho^{-1}\}\rho + \rho^{-1}\Psi(\rho B \rho^{-1})\rho = \\ = -i[H, B] + \{G, B\} + \Psi(B)$$

В силу однозначности

$$\rho^{-1} H \rho = H, \qquad \rho^{-1} G \rho = G, \qquad \rho^{-1}\Psi(\rho B \rho^{-1})\rho = \Psi(B)$$

Квантовый детальный баланс

Отметим, что

$$(\rho^{-1} \cdot \rho)^* = \rho^{-1} \cdot \rho$$

Причём

$$\rho^{-1} I \rho = I$$

Таким образом, существует ортонормированный базис F_k такой, что $F_{n^2} = \frac{1}{n} I$ и

$$\rho^{-1} F_k \rho = \lambda_k F_k,$$

где $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Кроме того, $\lambda_k \neq 0$ так как матрица $\rho^{-1} \cdot \rho$ обратима.

Квантовый детальный баланс

Сопрягая

$$\rho F_k^\dagger \rho^{-1} = \lambda_k F_k^\dagger$$

$$\rho^{-1} F_k^\dagger \rho = \frac{1}{\lambda_k} F_k^\dagger$$

Выберем именно этот базис в представлении Коссаковского

$$\Psi(B) = \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i B F_j^\dagger = \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} \rho^{-1} F_i \rho B \rho^{-1} F_j^\dagger \rho = \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} F_i B F_j^\dagger$$

Таким образом,

$$a_{ij} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} = a_{ij}$$

то есть либо $a_{ij} = 0$, либо $\lambda_i = \lambda_j$.

Квантовый детальный баланс

Приводя матрицу a_{ij} к диагональному виду в каждом блоке, получим

$$\Psi(B) = \sum_{\lambda} \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\lambda} a_{ij}(\lambda) F_{i,\lambda} B F_{j,\lambda}^{\dagger},$$

где

$$\rho^{-1} F_{i,\lambda} \rho = \lambda F_{i,\lambda}$$

Так как

$$\rho^{-1} F_{i,\lambda}^{\dagger} \rho = \frac{1}{\lambda} F_{i,\lambda}^{\dagger}$$

то

$$F_{i,\lambda}^{\dagger} \in \mathrm{span}\{F_{j,\lambda}\}$$

Квантовый детальный баланс

$$\Psi(B) = \sum_{\lambda > 1} \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\lambda} (a_{ij}(\lambda) F_{i,\lambda} B F_{j,\lambda}^\dagger + \tilde{a}_{ij}(\lambda) F_{i,\lambda}^\dagger B F_{j,\lambda}) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}1} \tilde{a}_{ij}(1) F_{i,1} B F_{j,1}$$

$$F_{i,1}^\dagger = F_{i,1}$$

Нужно строить их из с.в. с одним собственным значением λ:

$$\rho |i\rangle\langle j| \rho^{-1} = |i\rangle\langle j|$$

в виде обобщённого базиса Гелл-Мана (кроме тех, котоорые с разными с.з.).

Квантовый детальный баланс

Утверждение. В случае ρ-самосопряжённости полугруппы, её генератор определяется

$$\Psi(B) = \sum_{\lambda>1} \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\lambda} a_{ij}(\lambda)(F_{i,\lambda} B F_{j,\lambda}^{\dagger} + \lambda F_{i,\lambda}^{\dagger} B F_{j,\lambda}) + \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}1} \tilde{a}_{ij}(1) F_{i,1} B F_{j,1}$$

и

$$[H, B] = 0$$

Квантовый детальный баланс

$$\Psi(B\rho) = \Psi^*(B)\rho$$

$$\sum_{\lambda>1}\sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\lambda}(\lambda a_{ij}(\lambda)F_{i,\lambda}BF_{j,\lambda}^\dagger + \frac{1}{\lambda}\tilde{a}_{ij}(\lambda)F_{i,\lambda}^\dagger BF_{j,\lambda}) + \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}1} a_{ij}(1)F_{i,1}BF_{j,1} =$$

$$= \sum_{\lambda>1}\sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\lambda}(a_{ij}^*(\lambda)F_{i,\lambda}^\dagger BF_{j,\lambda} + \tilde{a}_{ij}^*(\lambda)F_{i,\lambda}BF_{j,\lambda}^\dagger) + \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}1} a_{ij}^*(1)F_{i,1}BF_{j,1}$$

$$\tilde{a}_{ij}^*(\lambda) = \lambda a_{ij}(\lambda)$$

$$\Psi(B) = \sum_{\lambda>1}\sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\lambda} a_{ij}(\lambda)(F_{i,\lambda}BF_{j,\lambda}^\dagger + \lambda F_{i,\lambda}^\dagger BF_{j,\lambda}) + \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}1} \tilde{a}_{ij}(1)F_{i,1}BF_{j,1}$$

Квантовый детальный баланс

$$
\begin{aligned}
i[H,B\rho] &= -i[H,B]\rho \\
i[H,B]\rho + iB\underbrace{[H,\rho]}_{=0} &= -i[H,B]\rho
\end{aligned}
$$

Таким образом, $[H,B] = 0$. $\square$

Квантовый детальный баланс

Определение. ГКСЛ генератор $\mathcal{L} = -i[H, \cdot] + \mathcal{D}$ удовлетворяет условию детального баланса относительно $\rho > 0$ если

$$[H, \rho] = 0, \qquad \langle\langle \mathcal{D}^* A | B \rangle\rangle_\rho = \langle\langle A | \mathcal{D}^* B \rangle\rangle_\rho$$

Утверждение. Если $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию детального баланса относительно $\rho > 0$, то $\mathcal{L}\rho = 0$.

Квантовый детальный баланс

Аналогично, можно было бы взять $\lambda < 1$

$$\Psi(B) = \sum_{\lambda<1} \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\lambda} b_{ij}(\lambda)(F_{i,\lambda} B F_{j,\lambda}^\dagger + \lambda F_{i,\lambda}^\dagger B F_{j,\lambda}) + \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}1} \tilde{a}_{ij}(1) F_{i,1} B F_{j,1}$$

Если матрицу представить в виде распределения Гиббса

$$\rho = \frac{e^{-\beta H_0}}{Z}, \qquad \beta > 0, H_0 \geqslant 0$$

$$\operatorname{spec} \rho \cdot \rho^{-1} = e^{-\beta\omega}, \qquad \omega \in \operatorname{spec}[H_0, \cdot]$$

$$\Psi(B) = \sum_{\omega>0} \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\,\omega} \gamma_{ij}(\omega)(A_i(\omega) B A_j^\dagger(\omega) + e^{-\beta\omega} A_i^\dagger(\omega) B A_j(\omega)) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{\mathrm{mul}\,0} \gamma_{ij}(0) A_i(0) B A_j(0)$$

Квантовый детальный баланс

Утверждение. Если $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию детального баланса относительно $\rho = \frac{e^{-\beta H_S}}{Z}$, то

$$\mathcal{D} = \sum_{\alpha} \mathcal{D}^{\alpha}$$

где

$$\mathcal{D}^{\alpha}\rho = \sum_{\omega>0}\Bigg(C_{\alpha,\omega}\rho C_{\alpha,\omega}^{\dagger} - \frac{1}{2}C_{\alpha,\omega}^{\dagger}C_{\alpha,\omega}\rho - \frac{1}{2}\rho C_{\alpha,\omega}^{\dagger}C_{\alpha,\omega} +$$

$$+ e^{-\beta\omega}(C_{\alpha,\omega}^{\dagger}\rho C_{\alpha,\omega} - \frac{1}{2}C_{\alpha,\omega}C_{\alpha,\omega}^{\dagger}\rho - \frac{1}{2}\rho C_{\alpha,\omega}C_{\alpha,\omega}^{\dagger})\Bigg)$$

Квантовый детальный баланс

$$\langle\langle A|B\rangle\rangle_{\rho,s} = \operatorname{Tr} \rho^s A^\dagger \rho^{1-s} B, \qquad s \in [0,1]$$

Семейство условий детального баланса

$$\langle\langle \Phi^*(A)|B\rangle\rangle_{\rho,s} = \langle\langle A|\Phi^*(B)\rangle\rangle_{\rho,s}$$

Утверждение. $(\rho, 1)$— детальный баланс $\Rightarrow$ (ρ, s)— детальный баланс.