Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 12.

Теретёнков Александр Евгеньевич

23 ноября 2021 г.

Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам

Утверждение. Пусть $\xi_t, t \geqslant 0$ — классический случайных процесс Леви (классический резервуар), то есть

1. $\xi_0 = 0$
2. $\forall 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \xi_{t_3} - \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ (независимость приращений)
3. При $t > s$ приращения $\xi_t - \xi_s$ и $\xi_{t-s} - \xi_0$ распределены одинаково (стационарность приращений)
4. Непрерывный (по вероятности).

Тогда

$$\Phi_t \rho = \mathbb{E} e^{-iA\xi_t} \rho e^{iA\xi_t}. \qquad A = A^\dagger$$

определяет однопараметрическую неприрывную вполне положительную полугруппу сохраняющую след.

Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам

Доказательство:

$$\Phi_t \rho = \mathbb{E} e^{-iA\xi_t} \rho e^{iA\xi_t} = \mathbb{E} e^{-iA(\xi_t - \xi_s)} e^{-iA\xi_s} \rho e^{iA\xi_s} e^{iA(\xi_t - \xi_s)} =$$

с учётом независимости и стационарности

$$= \mathbb{E} e^{-iA(\xi_t - \xi_s)} (\mathbb{E} e^{-iA\xi_s} \rho e^{iA\xi_s}) e^{iA(\xi_t - \xi_s)} = \mathbb{E} e^{-iA\xi_{t-s}} \Phi_s \rho e^{iA\xi_{t-s}} =$$
$$= \Phi_{t-s} \Phi_s \rho$$

Непрерывность полугруппы следует из непрерывности (по вероятности) случайного процесса. □

Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам

Отметим, что $\Phi_t(I) = \mathbb{E}_{\xi_t} e^{-iA\xi_t} I e^{iA\xi_t} = \mathbb{E}_{\xi_t} I = I$. Таким образом, отображение Φ_t является бистахастическим, а следовательно приводит к возрастанию энтропии $S(\Phi_t(\rho)) \geqslant S(\rho)$.

Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам

Упражнение. Отметим, что двухвременная корреляционная функция ($\mathcal{U}_s = e^{-iA\xi_s} \cdot e^{iA\xi_s}$) удовлетворяет регрессионной теореме

$$\mathbb{E}\,\mathrm{Tr}(A\mathcal{U}_{t-s}(B\mathcal{U}_s\rho)) = \mathrm{Tr}(A\Phi_{t-s}(B\Phi_s\rho))$$

Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам. Примеры

1) Винеровский процесс

$$W_t, t \geqslant 0, W_0 = 0$$

$$W_{t+s} - W_t \sim N(0,s)$$

— центрированное нормальное распределение.

$$\Phi_t(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2t}} e^{-iAx} \rho e^{iAx}$$

Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам. Примеры

Вычислим генератор

$$\mathcal{L}(\rho) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t(\rho) - \rho}{t}$$

Для этого преобразуем

$$\Phi_t(\rho) = /x = u\sqrt{t}/ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-iAu\sqrt{t}} \rho e^{iAu\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-\frac{u^2}{2}} \left(1 - iAu\sqrt{t} - \frac{1}{2}A^2u^2t + o(t)\right) \rho$$

$$\left(1 + iAu\sqrt{t} - \frac{1}{2}A^2u^2t + o(t)\right) =$$

$$= \rho - i[A,\rho]\langle u\rangle\sqrt{t} + \left(A\rho A - \frac{1}{2}\{A^2,\rho\}\right)\langle u^2\rangle t + o(t),$$

где $\langle\cdot\rangle$-усреднение по $N(0,1)$, то есть $\langle u\rangle = 0$, $\langle u^2\rangle = 1$.

Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам. Примеры

Получим

$$\mathcal{L}(\rho) = A\rho A - \frac{1}{2}\{A^2, \rho\}$$

Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам. Примеры

2) ξ_t — Пуассоновский процесс

$$P(\xi_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$\Phi_t(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{-iAk} \rho e^{iAk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} U^k \rho (U^\dagger)^k,$$

где введено обозначение $U = e^{-iA}$. Отметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} U^k \rho (U^\dagger)^k$$

есть не что иное как ряд Тейлора для экспоненты от супероператора $\lambda t (U \cdot U^\dagger)$.

Таким образом

$$\Phi_t(\rho) = e^{-\lambda t} e^{\lambda t (U \cdot U^\dagger)} \rho = e^{\lambda t (U \cdot U^\dagger - \mathcal{I})} \rho$$

Получим генератор

$$\mathcal{L}(\rho) = \lambda (U \rho U^\dagger - \rho)$$

Отметим, что генератор

$$\mathcal{L}(\rho) = \lambda (\sigma_z \rho \sigma_z - \rho)$$

попадает под оба случая.

Представление Леви-Хинчина

В качестве распределений независимых приращений могут выступать не произвольные распределения, а так называемые бесконечно-делимые. В результате для характеристической функции $\mathbb{E}e^{i\xi_t\theta}$ имеется представление Леви-Хинчина

$$\mathbb{E}e^{i\xi_t\theta} = \exp\left(t\left(ai\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta x I_{|x|<1}\right)\mu(dx)\right)\right),$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geqslant 0$, μ — (положительная счётно-аддитивная) мера, называемая мерой Леви, удовлетворяющая

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1,x^2)\,\mu(dx) < \infty, \qquad \mu(\{0\}) = 0.$$

Представление Леви-Хинчина

В качестве распределений независимых приращений могут выступать не произвольные распределения, а так называемые бесконечно-делимые. В результате для характеристической функции $\mathbb{E}e^{i\xi_t\theta}$ имеется представление Леви-Хинчина

$$\mathbb{E}e^{i\xi_t\theta} = \exp\left(t\left(ai\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta x I_{|x|<1}\right)\mu(dx)\right)\right),$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geqslant 0$, μ — (положительная счётно-аддитивная) мера, называемая мерой Леви, удовлетворяющая

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1,x^2)\,\mu(dx) < \infty, \qquad \mu(\{0\}) = 0.$$

Если вместо этого рассматривать поля Леви, то можно получить суммы членов соответствующего вида.

Предел слабой связи

$$H = H_S + H_B + H_I$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_I(t), \rho(t)], \qquad H_I(t) \equiv e^{i(H_S+H_B)t} H_I e^{-i(H_S+H_B)t}$$

$$H_I = \sum_\alpha A_\alpha \otimes B_\alpha, \quad A_\alpha^\dagger = A_\alpha, \quad B_\alpha^\dagger = B_\alpha$$

$$H_S = \sum_\varepsilon \varepsilon \Pi(\varepsilon)$$

Предел слабой связи

Тогда введём

$$A_\alpha(\omega) \equiv \sum_{\varepsilon'-\varepsilon=\omega} \Pi(\varepsilon) A_\alpha \Pi(\varepsilon')$$

Разложение

$$A_\alpha = \sum_\omega A_\alpha(\omega)$$

есть ни что иное как разложение оператора A_α по собственным операторам супероператора $[H_S, \cdot]$. Действительно

$$[H_S, A_\alpha(\omega)] = -\omega A_\alpha(\omega)$$

Предел слабой связи

$$e^{iH_S t} A_\alpha(\omega) e^{-iH_S t} = e^{-i\omega t} A_\alpha(\omega)$$

$$B_\alpha(t) \equiv e^{iH_B t} B_\alpha e^{-iH_B t}$$

Предел слабой связи

Наложим условие

$$\langle B_\alpha(t)\rangle = 0$$

Введём преобразование Фурье корреляционных функций резервуара

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) \equiv \int_0^{+\infty} ds e^{i\omega s}\langle B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s)\rangle$$

и разложим

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) = \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) + iS_{\alpha\beta}(\omega, t),$$

$$S_{\alpha\beta}(\omega, t) = \frac{1}{2i}(\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) - \Gamma_{\beta\alpha}^*(\omega, t)), \quad \gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) = \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) + \Gamma_{\beta\alpha}^*(\omega, t)$$

Предел слабой связи

В представлении взаимодействия:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[H_{LS}(t), \rho_S(t)] + \mathcal{D}(\rho_S(t))$$

Гамильтониан Лэмбовского и Штарковского сдвигов:

$$H_{LS}(t) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta}(\omega,t) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega)$$

Диссипатор

$$\mathcal{D}(\rho_S) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha,\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) \left(A_{\beta}(\omega)\rho_S A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) - \frac{1}{2}\{A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega), \rho_S\} \right)$$