Оценки интегралов от производных рациональных функций в многосвязных областях на плоскости

@ Баранов А.Д., Каюмов И.Р.
Санкт-Петербургский государственный университет, Казанский федеральный университет

Из работ С.Н. Мергеляна (1951), У. Рудина (1955) и Дж. Пиранья-на (1968) хорошо известно, что существуют бесконечные произведения Бляшке B в единичном круге $\mathbb{D}$, для которых $I(B) := \int_{\mathbb{D}} |B'(z)|\, dxdy = \infty$. Возникает естественный вопрос о поведении величины $I(B)$, если B – конечное произведение Бляшке фиксированного порядка n. Нами получен точный порядок роста таких интегралов. А именно, имеет место

Теорема 1. Пусть B –конечное произведение Бляшке порядка n. Тогда

$$I(B) \le \pi(1 + \sqrt{\log n}).$$

С другой стороны, существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует конечное произведение Бляшке степени n, для которого $I(B) \ge c(1 + \sqrt{\log n})$.

Доказательство точности этого неравенства основано на тонких результатах Н.Г. Макарова (1989) и Р. Ьануэлоса и Ч.Н. Мура (1991) о граничном поведении функций из пространства Блоха.

Рассмотрим более общий вопрос об оценках производных ограниченных рациональных функций, впервые исследованный Е.П. Долженко (1966) для достаточно гладких областей. Получено следующее неравенство типа Долженко, в котором удалось почти полностью освободиться от условий регулярности области.

Теорема 2. Пусть G – конечносвязная область класса Джона со спрямляемой границей, $1 < p \le 2$. Тогда найдется такая константа $C > 0$, зависящая от области G и от p, что для произвольной рациональной функции R степени не выше n выполнены неравенства

$$\int\int_G |R'(z)|^p\, dxdy \le Cn^{p-1} \sup_{z \in G} |R(z)|^p, \quad p \in (1, 2],$$

$$\int\int_G |R'(z)|\, dA(z) \le C \ln(n+1) \sup_{z \in G} |R(w)|. \tag{1}$$

Показано также, что при дополнительных условиях регулярности области правую часть в (1) можно заменить на $C\sqrt{\ln(n+1)}\sup_{z\in G} |R(z)|$.