

Лекция 4 (27 сентября 2021)
Категории рисунков и пар Белого

4.0. Категорный взгляд на предмет курса	1
...4.0.0. Категорные обозначения	1
...4.0.1. Трёхязычный словарь	1
4.1. Основные категории	2
...4.1.0. Категория чёрно-белых рисунков $DESS$	2
...4.1.1. Пары Белого	2
...4.1.2. Чистые пары Белого	2
...4.1.3. Категория трёхцветных триангуляций $DESS_3$	3
4.2. Основные функторы	4
...4.2.0. Функтор $draw :: BELP(\mathbb{C}) \rightarrow DESS$	4
...4.2.1. Функтор $paint :: BELP(\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} DESS_3$	4
...4.2.2. Функтор $clean :: BELP(\mathbb{C}) \rightarrow BELP_2(\mathbb{C})$	5
...4.2.3. Функтор $decol :: DESS_3 \rightarrow BELP_2(\mathbb{C})$	6
...4.2.4. Квадратная диаграмма	6
Литература	7

4.0. Категорный взгляд на предмет курса

4.0.0. Категорные обозначения. Мы не особо вникаем в теорию категорий, отсылая читателя за изложением её основ к стандартному учебнику [Маклейн2004] или к краткому приложению в [Манин2020]. Наша система обозначений, однако, нестандартна – по возможности мы дублируем теоретико-множественные знаки: фраза "X – объект категории \mathcal{C} " отражается формулой

$$X \in \mathcal{C},$$

фраза "f – функтор из категории \mathcal{C} в категорию \mathcal{D} " – формулой

$$f :: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

и т.д.

Все рассматриваемые нами категории будут *небольшими*¹, то есть классы изоморфизма их объектов будут образовывать *множества* (обычно они будут эквивалентны малым категориям. На традиционном языке это означает, что они обладают *скелетами* (см. [Маклейн2004]), то есть малыми подкатегориями, содержащими ровно по одному объекту из каждого класса изоморфных.

4.0.1. Трёхязычный словарь. В теории детских рисунков развивается три точки зрения на один и тот же класс объектов и (иногда) связывающих их морфизмов:

- комбинаторно-топологическая (графы на поверхностях);

¹*essentially small* – термин, предложенный П. Делинем

- алгебро-геометрическая (пары Белого);
- групповая (пары перестановок, порождающие транзитивную группу).

Преимущества разных взглядов на одно и то же (в этом контексте) обсуждались в [Shabat2016].

4.1. Основные категории

4.1.0. Категория чёрно-белых рисунков \mathcal{DESS} . Наивное понятие детского рисунка мало располагает к рассмотрению всех рисунков исторически более естественной представлялся вопрос о классификации графов, дополненный классификацией вложений данного графа в поверхности (именно такого рода вопросы ставил Гротендик своим ученикам в начале работы в Монпелье).

Нам, однако, категория рисунков \mathcal{DESS} нужна. Её объекты, тройки

$$\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}_1 \subset \mathbf{X}_2,$$

были определены в лекции 1. Мы будем также пользоваться обозначениями

$$(\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}_1 \subset \mathbf{X}_2) =: D \in \mathcal{DESS}$$

вместе с $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0(D)$, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1(D)$, $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2(D)$. (Неочевидное) определение множества морфизмов

$$\text{Mor}_{\mathcal{DESS}}(D, D') := \frac{\{\text{допустимые } \mathbf{X}_2(D) \rightarrow \mathbf{X}_2(D')\}}{\approx},$$

где, введя $\mathbf{X}_{-1}(D) = \mathbf{X}_{-1}(D) = \emptyset$, мы определяем *допустимость* отображения $f : \mathbf{X}_2(D) \rightarrow \mathbf{X}_2(D')$ означает уважение всех разностей, то есть включение

$$f(\mathbf{X}_i(D) \setminus \mathbf{X}_j(D)) \subseteq \mathbf{X}_i(D') \setminus \mathbf{X}_j(D')$$

должно выполняться для всех $i, j \in \{-1, 0, 1, 2\}$, а отношение \approx означает *гомотопность в классе допустимых отображений*.

Мы не вдаёмся в детали, так как морфизмы в других, эквивалентных этой, категориях будут определяться менее громоздко.

Рекомендуются задачи 4.1 и 4.2.

4.1.1. Пары Белого. Снова объекты (\mathcal{X}, β) категории $\mathcal{BELP}(\mathbb{k})$ для произвольного алгебраически замкнутого поля $\mathbb{k} = \bar{\mathbb{k}}$ были определены в предыдущих лекциях. Но морфизмы на этот раз определяются естественным образом, с помощью диаграмм

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X}' \\ & \searrow \beta & \swarrow \beta' \\ & \mathbf{P}_1(\mathbb{k}) & \end{array}$$

Рекомендуется задача 4.3.

4.1.2. Чистые пары Белого. В дальнейшем существенно предположение

$$\boxed{\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2}$$

Функция Белого $\beta : \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{P}_1(\mathbb{k})$ называется *чистой*, если все её ветвления над $1 \in \mathbf{P}_1(\mathbb{k})$ (ровно!) двукратны, то есть для $P \in \mathcal{X}$

$$[\beta(P) = 1] \implies [\beta \in \langle \mathfrak{m}_P^2 \rangle \setminus \langle \mathfrak{m}_P^3 \rangle].$$

Разумеется, пара Белого (\mathcal{X}, β) называется *чистой*, если чиста функция β .

Через $\mathcal{BELP}_2(\mathbb{k})$ обозначается полная подкатегория категории $\mathcal{BELP}(\mathbb{k})$, объекты которой – чистые пары.

Настоятельно рекомендуется выполнить простое, но важное упражнение 4.4.

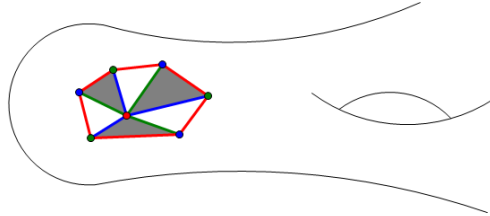
Как мы вскоре увидим, чёрно-белые рисунки изображают именно чистые пары Белого. Для общих пар Белого нужны чуть более сложные, *цветные* рисунки.

4.1.3. Категория трёхцветных триангуляций \mathcal{DESS}_3 . Объектами категории \mathcal{DESS}_3 являются *трёхцветные* рисунки, то есть рисунки $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}_1 \subset \mathbf{X}_2$, снабжённые *раскраской*

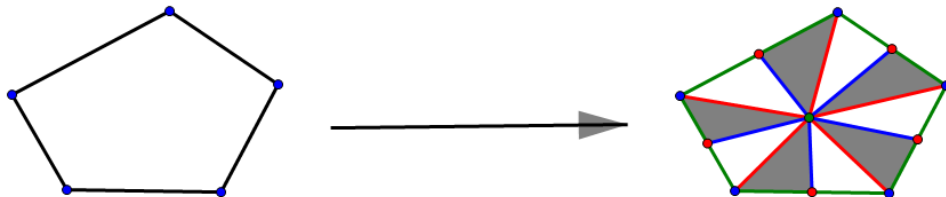
$$\text{col}_3 : \mathbf{X}_1 \longrightarrow \{\text{blue, green, red}\},$$

постоянной на рёбрах. Требуется, чтобы

- (0) каждая вершина была инцидентна рёбрам только двух цветов;
- (1) в замыкании каждого ребра лежат две вершины ;
- (2) в замыкании каждой грани лежат три ребра, покрашенные в попарно различные цвета.



В силу предположения (0) красим каждую вершину в (единственный оставшийся) цвет, отличный от цветов инцидентных ей рёбер. В силу предположения (2) связные компоненты дополнения $\mathbf{X}_2 \setminus \mathbf{X}_1$ будут называться (топологическими) *треугольниками*. Из *ориентированности* of \mathbf{X}_2 можно вывести (см. задачу 4.5), что эти треугольники тоже могут быть покрашены, на этот раз в *чёрный и белый* цвета, таким образом, что *соседние* треугольники – то есть имеющие общее ребро – будут покрашены по-разному.



Таким образом, наша раскраска col_3 может быть продолжена на

$$\text{col}_5 : X_2 \longrightarrow \{\text{black}, \text{blue}, \text{green}, \text{red}, \text{white}\},$$

ровно с двумя возможностями выбора чёрного/белого, соответствующими двум ориентациям поверхности X_2 .

Объекты категории \mathcal{DESS}_3 будут называться *цветными триангуляциям*; отметим, однако, чир имеется ровно один объект этой категории, не являющийся триангуляцией поверхности в обычном смысле – объект, образованный одним белым и одним чёрным треугольником, стороны которых отождествлены в соответствии с цветами.

Морфизмы в \mathcal{DESS}_3 определяются так же, как в аге \mathcal{DESS} , с дополнительным требованием *уважения цветов*².

Излагаемая теория фундаментально симметрична относительно ипёх фигурирующих в ней цветов; именно поэтому более традиционный подход, развиваемый в монографиях [ЛанЗво2010] и [GirGon2012], в которых два цвета выделены, не вполне нас удовлетворяет.

4.2. Основные функторы

4.2.0. Функтор $\mathbf{draw} :: \mathcal{BELP}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{DESS}$. Чистой паре Белого (\mathcal{X}, β) этот функтор сопоставляет рисунок $\mathbf{X}_2 \supset \mathbf{X}_1 \supset \mathbf{X}_0$, в котором

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_2 &:= \mathbf{top}(\mathcal{X}), \\ \mathbf{X}_1 &:= \beta^{-1\circ}([0, 1]), \\ \mathbf{X}_0 &:= \beta^{-1\circ}(0). \end{aligned}$$

Читателю предоставляется проверка корректности этого определения. Чтобы убедиться в том, что функтор \mathbf{draw} определяет *эквивалентность категорий*, надо построить обратный функтор

$$\mathcal{DESS} :: \longrightarrow \longrightarrow \mathcal{BELP}_2(\mathbb{C}),$$

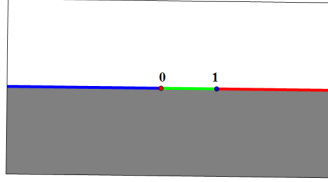
определение которого можно найти в [ShVo1990] и многих последующих публикациях. Детали предоставляются читателю.

4.2.1. Функтор $\mathbf{paint} :: \mathcal{BELP}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{DESS}_3$. Для определения этого функтора введём *сферу Белого* $\mathbf{P}_1(\mathbb{C})^{\text{Bel}}$, представляющую *раскрашенную сферу Римана* $\mathbf{P}_1(\mathbb{C})$. Пользуясь представлением $\mathbf{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \amalg \{\infty\}$, введём функцию

$$\begin{aligned} \text{col}_5^{\text{Bel}} : \mathbf{P}_1(\mathbb{C}) &\longrightarrow \{\text{black}, \text{blue}, \text{green}, \text{red}, \text{white}\} : \\ z \mapsto &\begin{cases} \text{black} & \text{при } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ и } \Im z < 0, \\ \text{white} & \text{при } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ и } \Im z > 0, \\ \text{blue} & \text{при } z \in \mathbb{R}_{<0} \text{ или } z = 1, \\ \text{green} & \text{при } z \in (0, 1) \text{ или } z = \infty, \\ \text{red} & \text{при } z \in \mathbb{R}_{>1} \text{ или } z = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

²Та же категория рассматривалась в [JonSin2012] gjl под именем *oriented hypermaps*; наши вершины трёх цветов назывались *hypervertices*, *hyperedges* и *hyperfaces*.

Это выглядит так:



Выбор цветов объясняется следующим образом.

Чёрный и белый цвета для нижней и верхней полуплоскостей традиционны (Б. Окуджава: *Белый аист московский на белое небо взлетел, Чёрный аист московский на чёрную землю спустился*). Вещественная прямая раскрашена так, что *синий* (символизирующий *холод*) соответствует отрицательным числам, а *красный* (символизирующий *тепло*) соответствует положительным. *Зелёный* просто находится посередине; ему не приписывается никаких смысловых ассоциаций. Цвет вершин раскрашенного топологического "треугольника" $\mathbf{P}_1(\mathbb{R})$ совпадает с цветом *противолежащих* им сторон.

Кроме того, цвета на вещественной прямой располагаются в *алфавитном* (b,g,r) порядке.

Мы готовы определить функтор **paint**: для пары Белого (\mathcal{X}, β) поверхность $\mathbf{X}_2 := \mathbf{top}(\mathcal{X})$ раскрашивается функцией $\text{col}_5 := \beta^* \text{col}_5^{\text{Bel}}$, то есть точки поверхности красятся в соответствии с цветом их образов при отображении Белого: for any $P \in \mathbf{X}_2$

$$\text{col}_5(P) := \text{col}_5^{\text{Bel}}(\beta(P)).$$

Очевидно, множество \mathbf{X}_1 превращается в замыкание множества зелёных вершин, а \mathbf{X}_0 – во множество изолированных красных точек.

Теорема. *Функтор paint определяет эквивалентность категорий $\mathcal{BELP}(\mathbb{C})$ и \mathcal{DESS}_3 .*

Построение обратного функтора будет намечено ниже. Доказательство эквивалентности снова предоставится читателю.

4.2.2. Функтор clean $:: \mathcal{BELP}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{BELP}_2(\mathbb{C})$. Этот функтор определяется просто:

$$\mathbf{clean} :: \mathcal{BELP}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{BELP}_2(\mathbb{C}) :: (\mathcal{X}, \beta) \mapsto (\mathcal{X}, 4\beta(1 - \beta))$$

С ним предлагалось поработать в задаче 4.4. Теперь добавляются задачи 4.7, 4.8 и 4.9*.

4.2.3. Функтор $\text{decol} :: \mathcal{DESS}_3 \rightarrow \mathcal{BELP}_2(\mathbb{C})$. Название функтора происходит от слова *decolorize* (обесцветить).

Деколоризация поверхности \mathbf{X} , раскрашенной с помощью функции col_5 , осуществляется так. Синие и красные (холодные и горячие) рёбра стираются, зелёные (умеренной температуры) перекрашиваются в чёрные; зелёные вершины стираются, а синие и красные становятся чёрными.

Для формального определения этой процедуры нам придётся отделить цветные вершины от цветных рёбер. Введём подмножества поверхности \mathbf{X}

$$\text{BLUE} := \text{col}_5^{-1\circ}(\text{blue}),$$

$$\text{GREEN} := \text{col}_5^{-1\circ}(\text{green}),$$

$$\text{RED} := \text{col}_5^{-1\circ}(\text{red})$$

и выделим в этих множествах вершины как *изолированные* точки

$$\text{BLUE}_0 \subset \text{BLUE}, \text{GREEN}_0 \subset \text{GREEN}, \text{RED}_0 \subset \text{RED}.$$

Остаётся обозначить

$$\text{BLUE}_1 := \text{BLUE} \setminus \text{BLUE}_0,$$

$$\text{GREEN}_1 := \text{GREEN} \setminus \text{GREEN}_0,$$

$$\text{RED}_1 := \text{RED} \setminus \text{RED}_0,$$

и пара $(\mathbf{X}, \text{col}_5)$ превращается в тройку $\mathbf{X}_2 \supset \mathbf{X}_1 \supset \mathbf{X}_0$ по формулам

$$\mathbf{X}_2 := \mathbf{X};$$

$$\mathbf{X}_1 := \text{GREEN} \cup \text{BLUE}_0 \cup \text{RED}_0,$$

$$\mathbf{X}_0 := \text{BLUE}_0 \cup \text{RED}_0.$$

Так и определяется требуемый функтор.

4.2.4. Квадратная диаграмма. Соберём все введённые диаграммы и функторы вместе:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{BELP}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{paint}} & \mathcal{DESS}_3 \\ \downarrow \text{clean} & & \downarrow \text{decol} \\ \mathcal{BELP}_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{draw}} & \mathcal{DESS} \end{array}$$

Как уже отмечалось, горизонтальные функторы осуществляют эквивалентности категорий.

Вертикальные стрелки не сюръективны на *классах изоморфности* объектов (напомним, что рассматриваемые категории – *небольшие*). Чтобы чистая пара Белого $(\mathcal{X}, \beta) \in \mathcal{BELP}_2(\mathbb{C})$ была *очищением* пары $(\mathcal{X}, \alpha) \in \mathcal{BELP}(\mathbb{C})$ – в наших обозначениях

$$(\mathcal{X}, \beta) \simeq \text{clean}(\mathcal{X}, \alpha).$$

Иначе говоря, квадратное уравнение

$$4\alpha(1 - \alpha) = \beta,$$

или

$$1 - \beta = (2\alpha - 1)^2, \quad (*)$$

должно быть разрешимо относительно неизвестной $\alpha \in \mathbb{C}(\mathcal{X})$.

Одно необходимое условие очевидно выполнено, $\deg \beta \in 2\mathbb{N}$ для всякой чистой β . Чуть менее очевидное – *все полюса β имеют чётный порядок* – выполняются не для всех чистых β ; как показывают примеры, оно недостаточно.

Пусть последнее условие выполнено, то есть

$$\operatorname{div}(1 - \beta) = 2(B_1 + \dots + B_n) - 2(C_1 + \dots + C_n).$$

Тогда в группе Пикара $\operatorname{Pic}_0(\mathcal{X})$ выполнено соотношение

$$2(B_1 + \dots + B_n) - 2(C_1 + \dots + C_n) \equiv 0,$$

и, следовательно,

$$B_1 + \dots + B_n - C_1 - \dots - C_n \in \operatorname{tors}_2(\operatorname{Pic}(\mathcal{X})).$$

Является ли элемент группы порядка 2^{2g} нейтральным – нетривиальный алгебро-геометрический вопрос.

Из коммутативности квадратной диаграммы следует топологический критерий:

Уравнение () относительно α на пару Белого (\mathcal{X}, β) разрешимо тогда и только тогда, когда рисунок*

$$\mathbf{decol} \circ \mathbf{paint}(\mathcal{X}, \beta)$$

является (чёрно-белым) изображением некоторого очищенного рисунка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [GirGon2012] Ernesto Gironde, Gabino Gonzalez-Diez, *Introduction to Compact Riemann Surfaces and Dessins d'Enfants*. London Mathematical Society Student Texts, 2012.
- [JonSin2012] Gareth Jones, David Singerman, *Maps, hypermaps and triangle groups*. The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfant London Math. Soc. Lecture Notes 200, pp. 115 - 146, Cambridge Univ. Press, 1994.
- [Shabat2016] G. Shabat, *Calculating and drawing Belyi pairs*. Записки научных семинаров ПОМИ, том 446 (2016), стр. 181-219.
- [ShVo1990] Shabat G.B., Voevodsky V.A., *Drawing Curves Over Number Fields*. In: Cartier P., Illusie L., Katz N.M., Laumon G., Manin Y.I., Ribet K.A. (eds) The Grothendieck Festschrift. Progress in Mathematics, vol 88(1990), Birkhäuser, Boston, MA.
- [ЛанЗво2010] А.К. Звонкин, С.К.Ландо, *Графы на поверхностях и их приложения*, МЦНМО, 2010.
- [Маклейн2004] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2004.
- [Манин2020] Ю.И. Манин, *Введение в теорию схем и квантовые группы*. МЦНМО, 2020.