

Научно-образовательный центр при МИАН, осень 2021
ДЕТСКИЕ РИСУНКИ И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Задачи к лекции 4 (27 сентября 2021)

- 4.1. Составьте таблицу морфизмов плоских деревьев с ≤ 4 рёбрами.
- 4.2. Приведите примеры нетривиальных морфизмов торических рисунков с ≤ 4 рёбрами.

- 4.3. Пусть \mathcal{X}' – кривая, аффинная модель которой задаётся уравнением

$$y^2 = x^3 - x$$

и задана функция $\beta' = x^2$ на ней. Проверьте, что (\mathcal{X}', β') – пара Белого, и постройте морфизм $(\mathcal{X}, \beta) \rightarrow (\mathcal{X}', \beta')$ степени 2.

- 4.4. Проверьте, что если β – функция Белого, то $4\beta(1 - \beta)$ – чистая функция Белого.

В наших обозначениях:

$$[(\mathcal{X}, \beta) \in \mathcal{BEL}(\mathbb{k})] \implies [(\mathcal{X}, 4\beta(1 - \beta)) \in \mathcal{BEL}_2(\mathbb{k})]$$

- 4.5. Пользуясь каким-либо определением *ориентированности* поверхности, обоснуйте возможность чёрно-белой раскраски треугольников трёхцветной триангуляции, при которой любые два треугольник имеющие общее ребро, будут раскрашены по-разному.

- 4.6. Примените функтор **paint** к кривой с аффинной моделью $x^3 + y^3 = 1$ и функцией Белого $\beta = x^3$ на ней.

- 4.7. Примените функтор **clean** к кривой с аффинной моделью $x^3 + y^3 = 1$ и функцией Белого $\beta = x^3$ на ней.

- 4.8. Примените степени функтора **clean**, то есть рассмотрите пары

$$\text{clean}((\mathcal{X}, \beta)), \text{clean}(\text{clean}((\mathcal{X}, \beta))), \text{clean}(\text{clean}(\text{clean}((\mathcal{X}, \beta)))), \dots$$

с какой-нибудь простой начальной парой (\mathcal{X}, β) – подойдёт даже $\mathcal{X} = \mathbf{P}_1(\mathbb{C})$ и $\beta : z \mapsto z$. Нарисуйте получающиеся пары Белого.

- 4.9* (для владеющих основами комбинаторной топологии). Сопоставьте применение функтора **clean** с оператором *барицентрического подразделения*.

- 4.10. Возьмите в качестве пар Белого несколько первых *многочленов Чебышёва* $(\mathbf{P}_1(\mathbb{C}), \mathbf{T}_n^2)$, где $\mathbf{T}_n(z) = \cos(n \arccos z)$ и примените к ним функторы **decol** **paint** и **draw** \circ **clean**. Сравните результаты.

Г.Б. Шабат