

Научно-образовательный центр при МИАН, осень 2021  
ДЕТСКИЕ РИСУНКИ И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Задачи к лекции 2 (13 сентября 2021)

**2.1.** Проведите доказательство половины предложения **2.0.4**: если две последовательности положительных натуральных чисел

$$\left( a_1^+ \ a_2^+ \ \dots \ a_{m^+}^+ \ \middle| \ a_1^- \ a_2^- \ \dots \ a_{m^-}^- \right)$$

удовлетворяют условиям

$$a_1^+ + a_2^+ + \dots + a_{m^+}^+ = a_1^- + a_2^- + \dots + a_{m^-}^- =: n$$

и

$$m^+ + m^- = n + 1,$$

то они составляют паспорт некоторого дерева.

**2.2.** Приведите примеры уравнений вида  $(\star)_\Pi$ , обладающие паразитическими решениями различных видов.

**2.3.** Приведите примеры уравнений вида  $(\star)_\Pi$ , приобретающие паразитические решения при редукции по простым модулям. Желательно выйти за пределы ёжиков.

**2.4.** Подобрать подходящие критические значения, найдите вершины цепочек длины 5 и 6. Исследуйте редукции соответствующих многочленов Чебышёва по простым модулям и интерпретируйте полученные результаты в терминах поведения вершин при этих редукциях.

**2.5.** Подобрать подходящие критические значения, выпишите уравнения на вершины цепочки длины 7 и найдите их приближённые численные значения. Исследуйте редукции соответствующего многочлена Чебышёва по простым модулям и интерпретируйте полученные результаты в терминах поведения вершин при этих редукциях.

**2.6.** Перечислите реализации паспортов пропеллеров с количеством рёбер в пределах 8. Попытайтесь найти соответствующие многочлены Шабата.

**2.7.** Напишите ненулевой многочлен с целыми коэффициентами, содержащий среди корней число  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ .

**2.8.** Какова мощность множества вложений полей

$$\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}?$$

Г.Б. Шабат