Аффинные гомеоморфизмы пространства слабоаддитивных функционалов и их приложения

Бегжанова Камила Уснатдиновна
Каракалпакский государственный университет

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор К.К. Кудайбергенов

21.12.2020

Введение

В настоящее время теория нелинейных функционалов играет важную роль в различных областях математики и её приложениях. Одним из важных классов нелинейных функционалов является пространство всех слабо аддитивных сохраняющих порядок нормированных функционалов определенных на пространстве всех действительнозначных непрерывных функций заданных на некотором компакте.

- Albeverio S., Ayupov Sh.A., Zaitov A.A., On certain properties of the spaces of order-preserving functionals // Topology and its Applications, – 2008.
- Beshimov R.B., Mamadaliev N.K., On the functor of semiadditive τ-smooth functional // Topology and its Applications, –2017.
- Zaitov A.A., On categorical properties of order-preserving functionals // Methods of Functional Analysis and Topology, – 2003.
- Radul T., On the functor of order-preserving functionals, Comment. Math. Univ. Carolin., –1998.

Степень изученности проблемы

В 1992 году Л.Б.Шапиро установил, что пространство всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, полуаддитивных, полумультипликативных, положительно-однородных функционалов на конусе $C(X)_+$ – всех действительных неотрицательных непрерывных функций на компакте X, гомеоморфно пространству $\exp(X)$ – всех непустых замкнутых подмножеств компакта X.

В 1998 году Т. Радул начал исследование пространство $O(X)$ всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов на пространстве всех непрерывных функций на компакте X.

- Джаббаров Г.Ф., Описание экстремальных точек пространства слабо аддитивных положительно-однородных функционалов двухточечного множество // Узб.матем.журн., – 2005.
- Choquet G., Theory of Capacity // Ann. l'Institute Fourier, – 1953-1954
- Zhou L., Integral representation of continuous comonotonically additive functionals // Trans. Amer. Math. Soc. – 1998.
- Zarichnyi M.M., Nykyforchyn O.R., Capacity functor in the category of compacta // Sb. Math., – 2008.

Задачи исследования:

- описание пространства слабо аддитивных сохраняющий порядок нормированных функционалов на плоскости;
- нахождение общего вида аффинных гомеоморфизмов пространства полуаддитивных функционалов и пространства емкостей;
- приложения аффинных гомеоморфизмов к метризации пространств слабо аддитивных сохраняющий порядок нормированных функционалов и полуаддитивных функционалов заданных на метрическом компакте.

Пространство $C(X)$

Пусть X – компакт. Через $C(X)$ обозначим пространство всех непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}$ с поточечными алгебраическими операциями и sup-нормой, т.е. с нормой $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in X\}$.

Для каждого $c \in \mathbb{R}$ через c_X обозначим постоянную функцию, определяемую по формуле $c_X(x) = c, \quad x \in X$.

Пусть $\phi,\ \psi \in C(X)$. Неравенство $\phi \leq \psi$ означает, что $\phi(x) \leq \psi(x)$ для всех $x \in X$.

Слабо аддитивные функционалы

[a]Функционал $\nu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется:

- слабо аддитивным, если для всех $\phi \in C(X)$ и $c \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\nu\left(\phi + c_X\right) = \nu\left(\phi\right) + c \cdot \nu\left(1_X\right);$
- сохраняющим порядок, если для всех $\phi, \psi \in C(X)$ из $\phi \leq \psi$ вытекает $\nu(\phi) \leq \nu(\psi)$;
- нормированным, если $\nu\left(1_X\right) = 1$;
- положительно-однородным, если $\nu\left(t\phi\right) = t\nu\left(\phi\right)$ при всех $\phi \in C\left(X\right)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$;
- полуаддитивным, если $\nu\left(\phi + \psi\right) \leq \nu\left(\phi\right) + \nu\left(\psi\right)$ при всех $\phi,\ \psi \in C\left(X\right)$.

[a]Radul T., On the functor of order-preserving functionals // Comment. Math. Univ. Carol., –1998

Обозначения

Для компакта X вводим следующие обозначения:

- $O\left(X\right)$ – множество всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок и нормированных функционалов на $C(X)$;
- $OH\left(X\right)$ – множество всех положительно-однородных функционалов из $O\left(X\right)$;
- $OS\left(X\right)$ – множество всех полуаддитивных функционалов из $OH\left(X\right)$;
- $P\left(X\right)$ – множество всех нормированных положительных линейных функционалов на $C\left(X\right)$.

База топологии

Рассмотрим на множестве $F(X)$, где $F = O,\ OH,\ OS$, топологию поточечной сходимости, в частности, предбазу окрестностей функционала $\nu \in F(X)$ образуют множества вида

$$\langle \nu;\ \varphi,\ \varepsilon\rangle = \left\{\nu' \in F(X) \quad : \ \left|\nu'(\varphi) - \nu(\varphi)\right| < \varepsilon \right\},$$

где $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C(X)$.

Отметим, что для n – точечного компакта $\mathbf{n} = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$, пространство $C(\mathbf{n})$ изоморфно пространству $\mathbb{R}^n$, при этом изоморфизм задается по правилу

$$f \in C(\mathbf{n}) \to (f(0),\ f(1),\ \ldots,\ f(n-1)) \in \mathbb{R}^n.$$

Операции $\vee$ и $\wedge$

Определим операции $\vee$ и $\wedge$ на пространстве $O(X)$. Для функционалов $\mu, \nu \in O(X)$ положим

$$(\mu \vee \nu)(\phi) = \max\{\mu(\phi),\ \nu(\phi)\}, \quad \phi \in C(X);$$
$$(\mu \wedge \nu)(\phi) = \min\{\mu(\phi),\ \nu(\phi)\}, \quad \phi \in C(X).$$

Также для непустого замкнутого подмножества $F \subset X$ положим

$$\mu_F(\phi) = \max\{\phi(x) :\ x \in F\};$$
$$\nu_F(\phi) = \min\{\phi(x) :\ x \in F\}.$$

Имеет место следующие свойства

- $\mu \vee \nu,\ \mu \wedge \nu, \mu_F,\ \nu_F \ \in O(X)$;
- $\mu \vee \nu, \mu_F \ \in OS(X)$.

Если компакт X содержит более одной точки, то существуют $\mu, \nu \in OS(X)$ и $F \subset X$ такие, что $\mu \wedge \nu,\ \nu_F \ \notin OS(X)$.

Аффинный гомеоморфизм

Пусть A и B – выпуклые подмножества линейного топологического пространства E. Отображение $T : A \to B$ называется аффинным, если

$$T(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha T(x) + (1-\alpha)T(y)$$

для всех $x, y \in A$ и $\alpha \in [0, 1]$.

При этом, если $T : A \to B$ является взаимно однозначным и взаимно непрерывным отображением, то оно называется аффинным гомеоморфизмом.

Пространство $OH(\mathbf{2})$ и $OS(\mathbf{2})$

Для фиксированного $a \in X$ через δ_a обозначим функционал Дирака определенной по правилу

$$\delta_a(\phi) = \phi(a), \quad \phi \in C(X).$$

Тогда

$$\delta_a \in P(X).$$

Отметим, что для $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ имеют место

- пространство $OH(\mathbf{2})$ аффинно гомеоморфно квадрату с вершинами $\delta_0, \delta_1, \delta_0 \vee \delta_1, \delta_0 \wedge \delta_1$;[1]
- пространство $OS(\mathbf{2})$ аффинно гомеоморфно треугольнику с вершинами $\delta_0, \delta_1, \delta_0 \vee \delta_1$.[2]

[1] Джаббаров Г.Ф., Описание экстремальных точек пространства слабо аддитивных положительно-однородных функционалов двухточечного множество // Узб.матем.журн., – 2005.

[2] Davletov D.E., Djabbarov G. F., Functor of semiadditive functionals // Methods of functional analysis and topology, –2008.

Пример 1.

Рассмотрим функционал $\mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, определенный по правилу[a]

$$\mu(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x = y = z \\ \dfrac{1}{3}\left(x + y + z + \dfrac{1}{4} \dfrac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{|x-y| + |y-z| + |z-x|} \right), & \text{в против. сл.} \end{cases}$$

Тогда функционал μ принадлежит пространству $OH(\mathbf{3})$, при этом, μ не является аддитивным.

[a] А.А.Заитов, Теорема об открытом отображении пространств слабо аддитивных однородных функционалов. Матем. заметки, 88:5 (2010).

Описание пространства $O(\mathbf{2})$

Пусть $L_\infty(\mathbb{R})$ и $L_1(\mathbb{R})$ – банахово пространство классов действительных существенно ограниченных измеримых и классов действительных интегрируемых функций на $\mathbb{R}$, соответственно. Поскольку пространство $L_\infty(\mathbb{R})$ изометрически изоморфно сопряженному пространству пространства $L_1(\mathbb{R})$, то

$$L_\infty(\mathbb{R})_1^+ = \{f \in L_\infty(\mathbb{R}) :\ 0 \le f \le \mathbf{1}\},$$

где $\mathbf{1}$ – единица в $L_\infty(\mathbb{R})$, является *-слабо компактным множеством.

Теорема 1.

Пространство $O(\mathbf{2})$ аффинно гомеомофно пространству $L_\infty(\mathbb{R})_1^+$, при этом гомеоморфизм $L_\infty(\mathbb{R})_1^+ \to O(\mathbf{2})$ задается по правилу

$$\mu(x,y) = \int\limits_0^{x-y} \varphi(t)\,dt + y, \qquad \varphi \in L_\infty(\mathbb{R})_1^+. \tag{1}$$

Описание множества $O_2(X)$

Пусть A – замкнутое пространство компакта X. Скажем, что функционал $\nu \in O(X)$ сосредоточен на A, если $\nu(f) = \nu(g)$ для всех $f, g \in C(X)$ с $f|_A = g|_A$. Наименьшее по включению замкнутое множество $A \subset X$ на котором функционал ν сосредоточен, называется носителем функционала $\nu \in O(X)$ и обозначается $\operatorname{supp}\nu$, т.е.,

$$\operatorname{supp}\nu = \bigcap \{A : \quad \nu \ - \ \text{сосредоточен} \ A\}.$$

Через $O_2(X)$ обозначим множество всех функционалов $\mu \in O(X)$, носители которых состоят не более чем из двух точек.

Предложение 1.

Пусть X – компакт. Тогда всякий функционал $\mu \in O_2(X)$ имеет вид

$$\mu(f) = \int\limits_0^{f(x_1)-f(x_2)} \varphi(t)\,dt + f(x_2)\,, \tag{2}$$

где $\operatorname{supp}\mu = \{x_1, x_2\}\,, \quad \varphi \in L_\infty(\mathbb{R})_1^+$.

Аффинные гомеоморфизмы пространства полуаддитивных функционалов

Для выпуклого компакта K через $cc\,(K)$ обозначим пространство всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств K. Напомним, что для каждого $A \in cc\,(P\,(X))$ функционал ν_A определенный по правилу

$$\nu_A\,(\varphi) = \sup\left\{\mu\,(\varphi)\ :\ \mu \in A\right\}, \quad \varphi \in C\,(X)$$

принадлежит пространству $OS\,(X)$, при этом соответствие[3]

$$A \in cc\,(P\,(X)) \mapsto \nu_A \in OS\,(X) \tag{3}$$

задает аффинный гомеоморфизм между пространствами $cc\,(P\,(X))$ и $OS\,(X)$.

[3] Davletov D.E., Djabbarov G. F., Functor of semiadditive functionals // Methods of functional analysis and topology, –2008.

Отображение $F(f)$

Пусть X и Y – компактные пространства, а $f : X \to Y$ – непрерывное отображение между ними. Отображение $F(f) : F(X) \to F(Y)$, где $F = P,\ OS,\ OH,\ O$, определим как

$$F(f)(\mu)(\phi) = \mu(\phi \circ f), \quad \mu \in F(X),\ \phi \in C(X).$$

Отображение $T : OS(X) \to OS(Y)$ назовем сохраняющим верхние грани, если для $\nu_1, \nu_2 \in OS(X)$ имеет место

$$T(\nu_1 \vee \nu_2) = T(\nu_1) \vee T(\nu_2).$$

Пусть $f : X \to Y$ – непрерывное отображение. Тогда отображение

$$OS(f) : OS(X) \to OS(Y)$$

является сохраняющим верхние грани аффинным отображением.

Теорема 2.

Если $T : OS(X) \to OS(Y)$ сохраняющее верхние грани аффинный гомеоморфизм, то существует гомеоморфизм $g : X \to Y$ такой, что $T = OS(g)$.

Пример 2.

Пусть $X = \mathbf{2}$. Известно, что $OS(\mathbf{2})$ аффинно гомеоморфно Δ[a]:

$$\Delta = \{(\alpha,\ \beta)\ :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ 0 \le \alpha \le \beta \le 1\},$$

при этом гомеоморфизм задается по правилу

$$(\alpha,\ \beta) \mapsto \lambda = \alpha\delta_0 + (1-\beta)\,\delta_1 + (\beta-\alpha)\,\delta_0 \vee \delta_1,$$

где δ_a – функционал Дирака, а функционал $\delta_0 \vee \delta_1 \in OS(\mathbf{2})$:

$$(\delta_0 \vee \delta_1)(f) = \max\{\delta_0(f),\ \delta_1(f)\}, \quad f \in C(\mathbf{2}).$$

$$T\ :\ OS(\mathbf{2}) \to OS(\mathbf{2}),\quad \delta_0 \mapsto \delta_0 \vee \delta_1, \quad \delta_0 \vee \delta_1 \mapsto \delta_1, \quad \delta_1 \mapsto \delta_0,$$

т.е., $\alpha\delta_0 + (1-\beta)\,\delta_1 + (\beta-\alpha)\,\delta_0 \vee \delta_1 \mapsto \alpha\delta_0 \vee \delta_1 + (1-\ \beta)\,\delta_0 + (\beta-\alpha)\,\delta_1$.

Если $g\ :\ \mathbf{2} \to \mathbf{2}$ гомеоморфизм, то аффинный гомеоморфизм $OS(g)\ :\ OS(\mathbf{2}) \to OS(\mathbf{2})$ переводит множество $\{\delta_0,\ \delta_1\}$ в себя. Следовательно, T не может быть представлен в виде $OS(g)$.

[a] Davletov D.E., Djabbarov G. F., Functor of semiadditive functionals // Methods of functional analysis and topology, –2008

Интеграл Шоке

Действительнозначные функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ называем комонотонными, если для любых $x_1, x_2 \in X$ имеет место

$$(f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0.$$

Отметим, что в частности постоянная функция комонотонна любой функции.

Если $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим пяти свойствам:

1. $\mu(\varphi) \geq 0$ для всех $\varphi \geq 0$;
2. $\mu(1_X) = 1$;
3. $\mu(k\varphi) = k\mu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X)$ и $k \in \mathbb{R}_+$;
4. $\mu(\varphi + \psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$ для каждой пары комонотонных функций $\varphi, \psi \in C(X)$;
5. $\mu(\varphi) \leq \mu(\psi)$ для каждой пары $\varphi, \psi \in C(X)$ с условием $\varphi \leq \psi$,

то μ называются интегралом Шоке.

Через $M(X)$ обозначим множество всех интегралов Шоке на X.

Для каждого компакта X обозначаем через $exp(X)$ пространство всех непустых замкнутых подмножеств X.

Функция $c : exp(X) \cup \{\varnothing\} \to [0,1]$ называется емкостью[4] на компакте X, если для всех замкнутых подмножеств $F, G \in exp(X)$ выполняются следующие три свойства

1) $c(\varnothing) = 0, \quad c(X) = 1;$
2) если $F \subseteq G$, тогда $c(F) \leq c(G)$ (монотонность);
3) если $c(F) < a$,тогда существует открытое множество $U \supset F$ такое, что длялюбого $G \subset U$мы имеем $c(G) < a$ (полунепрерывность сверху).

Каждый функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ со свойствами 1)–5) является интегралом Шоке для емкости $c \in M(X)$ определяемой по формуле

$$c(F) = \inf\left\{\mu(\varphi) : \ \varphi \in C_+(X), \quad \varphi(x) \geq 1, \ \forall x \in F\right\}.$$

[4] Zarichnyi M.M., Nykyforchyn O.R., Capacity functor in the category of compacta // Sb. Math., –2008

Решетка $(M(X), \vee, \wedge)$

Отметим, что

$$M(X) \subset OH(X) \subset O(X).$$

Для $c_1, c_2 \in M(X)$ имеем $c_1 \vee c_2, \quad c_1 \wedge c_2 \in M(X)$. Тройка $(M(X), \vee, \wedge)$ является решеткой.

Пусть $f: \ X \to Y$ – непрерывное отображение.

Тогда

$$OH(f)(M(X)) \subseteq M(Y).$$

Поэтому корректно определено отображение

$$M(f) = OH(f)|_{M(X)}: \quad M(X) \to M(Y).$$

Решеточный гомеоморфизм

Отображение $T : M(X) \to M(Y)$ назовем решеточным, если для $\nu_1, \nu_2 \in M(X)$ имеет место

$$T(\nu_1 \vee \nu_2) = T(\nu_1) \vee T(\nu_2) \text{ и } T(\nu_1 \wedge \nu_2) = T(\nu_1) \wedge T(\nu_2).$$

Теорема 3.

Пусть X – компакт и $\Phi : M(X) \to M(X)$ является аффинным гомеоморфизмом. Следующие утверждения эквивалентны:

- Φ является решеточным гомеоморфизмом;
- существует гомеоморфизм $f : X \to X$ такой, что $\Phi = M(f)$.

Замечание 1.

Как и в Примере 2 существует аффинный гомеоморфизм $T : M(2) \to M(2)$ который не может быть представлен в виде $M(g)$.

Метризация пространства слабо аддитивных функционалов

- Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах // Докл. АН СССР. – 1957.
- Канторович Л.М., Рубинштейн Г.Ш. Об одном функциональном пространстве вполне аддитивных функций // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия, – 1958.
- Федорчук В.В., Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Изв.АН СССР. Сер. матем. – 1990.

Метризация пространства полуаддитивных функционалов

Пусть $P(X)$ – пространство всех вероятностных мер на компактном метрическом пространстве $(X,\,\rho)$. Соответствие

$$A \in cc\,(P\,(X)) \mapsto \nu_A \in OS\,(X) \tag{4}$$

задает аффинный гомеоморфизм между пространствами $cc\,(P\,(X))$ и $OS\,(X)$.

Пусть X и Y – компактные метрические пространства, а $f : X \to Y$ – непрерывное отображение между ними. Напомним, что отображение $OS\,(f) : OS\,(X) \to OS\,(Y)$ определяется по правилу

$$OS\,(f)\,(\mu)(\phi) = \mu(\phi \circ f), \quad \mu \in OS(X),\ \phi \in C(X).$$

Мы также часто будем использовать следующее соотношение[5]

$$OS\,(f)\,(\nu_A) = \nu_{P(f)(A)}. \tag{5}$$

[5] Davletov D.E., Djabbarov G. F., Functor of semiadditive functionals // Methods of functional analysis and topology, –2008.

$(\nu_1,\ \nu_2)$-допустимый функционал

Теперь зададим метризацию пространства $OS\,(X)$, в случае когда X метрический компакт. Пусть $X_1,\ X_2,\ X_3$ – экземпляры одного и того же компакта X. Положим

$$X_{123} = X_1 \times\ X_2 \times\ X_3, \quad X_{ij} = X_i \times X_j,$$

и пусть

$$p_{ij}\ :\ X_{123} \to X_{ij}, \quad p_k^{ij}\ :\ X_{ij} \to X_k$$

равны естественным проектированиям, где предполагается, что $k \in \{i,\ j\}$, $i < j$.

Пусть $\nu_1,\ \nu_2 \in OS\,(X)$. Функционал $\nu \in OS\,(X_{12})$ назовем $(\nu_1,\ \nu_2)$-допустимым, если

$$OS\left(p_i^{12}\right)(\nu) = \nu_i, \quad i = 1,\ 2.$$

Обозначим через $\Lambda\,(\nu_1, \nu_2)$ множества всех (ν_1, ν_2)-допустимых функционалов.

Метрика на множестве $OS\,(X)$

Для компакта X с метрикой $\rho = \rho_X$ определим функцию расстояния $\rho_{OS} = \rho_{OS(X)}$ на компакте $OS\,(X)$ следующим образом:

$$\rho_{OS}\,(\nu_1,\ \nu_2) = \inf\left\{\nu\,(\rho\,(x_1,\ x_2))\ :\ \nu \in \Lambda\,(\nu_1,\ \nu_2)\right\}. \tag{6}$$

Теорема 4.

Функция ρ_{OS} является метрикой на множестве $OS\,(X)$, продолжающей метрику ρ, т.е., $\rho(x, y) = \rho_{OS}(\delta_x, \delta_y)$ для всех $x, y \in X$. Более того, $diamOS\,(X) = diamX$.

Замечание 2.

Определение метрики ρ_P для пространства $P\,(X)$ предложено Л.В.Канторовичом. Другую метрику ρ_1 на $P\,(X)$ предложили Л.В.Канторович и Г.Ш.Рубинштейн. Эта метрика определяется аналогичным образом:

$$\rho_1\,(\nu_1,\ \nu_2) = \inf\left\{\nu\,(\rho\,(x_1,\ x_2))\ :\ \nu \in \Lambda_1\,(\nu_1,\ \nu_2)\right\},$$

где $\Lambda_1 = \left\{\nu \in P\left(X^2\right)\ :\ P\left(p_1^{12}\right)(\nu) - P\left(p_2^{12}\right)(\nu) = \nu_1 -\ \nu_2\right\}.$

Пример 3.

Покажем, что в пространстве $OH(X)$ функция ρ_{OH} определенная аналогично формуле (6) не является даже псевдометрикой. Пусть $a,\ b,\ c,\ d \in X$ различные точки. Положим

$$\nu_1 = \delta_a \wedge \delta_b, \quad \nu_2 = \delta_b \wedge \delta_c, \quad \nu_3 = \delta_c \wedge \delta_d.$$

Тогда,

- $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in OH(X)$;
- $\rho_{OH}(\nu_1,\ \nu_2) = \rho_{OH}(\nu_2,\ \nu_3) = 0$;
- $\rho_{OH}(\nu_1,\ \nu_3) = \nu(\rho) \geq \alpha \neq 0$,

где $\alpha = \min\{\rho(a,\ c),\ \rho(a,\ d),\ \rho(b,\ c),\ \rho(b,\ d)\} > 0$.

Это означает, что не имеет место неравенство треугольника.

Рассмотрим метрику Хаусдорфа на пространстве $cc\,(P\,(X))$ определяемое по правилу

$$\rho_H\,(A,\ B) = \max\left\{\max_{\mu\in A}\rho_P\,(\mu,\ B)\,,\ \max_{\lambda\in B}\rho_P\,(\lambda,\ A)\right\},\ \ A, B \in cc(P(X)).$$

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 5.

Отображение определенное по правилу (4) является аффинной изометрией между $(cc(P(X)), \rho_H)$ и $(OS(X),\ \rho_{OS})$.

Следствие 1.

Метрика ρ_{OS} порождает на $OS\,(X)$ топологию поточечной сходимости.

Метризация пространства слабо аддитивных функционалов

Пусть $(X,\ \rho)$ – метрический компакт. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathrm{Lip}_k(X) = \{\varphi\ :\ X \to \mathbb{R}| \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \le k\rho(x,\ y),\quad \forall x, y \in X\}$$

и $\mathrm{Lip}(X) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{Lip}_k(X)$. Определим функцию $\rho_k\ :\ O(X) \times O(X) \to \mathbb{R}$ по правилу

$$\rho_k(\mu,\ \nu) = \sup\{|\mu(\phi) - \nu(\phi)|\ :\ \phi \in \mathrm{Lip}_k(X)\},\quad \mu,\ \nu \in O(X). \tag{7}$$

Для всех $\mu,\ \nu \in O(X)$,

$$\rho_k(\mu,\ \nu) \le k\, diam(X). \tag{8}$$

Метрика на $O(X)$

Определим функцию $\rho_O \ : \ O(X) \times O(X) \to \mathbb{R}$ по правилу

$$\rho_O(\mu, \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1} \rho_k(\mu, \nu), \qquad \mu, \nu \in O(X) \tag{9}$$

Функция ρ_O определенная по правилу (9), является метрикой на $O(X)$.

Теорема 6.

Метрика ρ_O порождает топологию поточечной сходимости на $O(X)$.

Замечание 3.

- Zarichnyi M.M., Nykyforchyn O.R., Capacity functor in the category of compacta // Sb. Math., – 2008.
- Djabbarov G. F., A Triple of infinite iterates of the functor of positively homogeneous functionals // Siberian Advances in Mathematics, – 2019.
- Zaitov A.A., On a metric on the space of idempotent probability measures // Applied General Topology, – 2020.

Спасибо за внимание!

Список опубликованных работ

I часть

1. Кудайбергенов К.К., Бегжанова К.У. Метризация пространства полуаддитивных функционалов // Узбекский математический журнал. – 2010. – 4. – С. 82–92. (01.00.00; №6).

2. Бегжанова К.У. Решеточные гомеоморфизмы пространства полуаддитивных функционалов // Узбекский математический журнал. – 2011. – 4. – С. 52–58. (01.00.00; №6).

3. Кудайбергенов К.К., Бегжанова К.У. Описание слабо аддитивных функционалов на плоскости, сохраняющих порядок // Владикавказский математический журнал. – 2011. – Том 13. – Выпуск 1. – С. 31-37.
(3. Scopus IF=0.431).

4. Бегжанова К.У. Метризация пространства слабо аддитивных функционалов // Известия ВУЗов. Математика. – 2018. – №3. – С. 3–8.
(3. Scopus IF=0.619).

5. Kudaybergenov K., Begjanova K. Lattice affine homeomorphisms of the pace of capacities // Science and Education in Karakalpakstan. – 2019. – №4. – C. 28-34. (01.00.00; №11).

6. Begjanova K. Extreme boundary of the space of weakly additive order preserving Functionals on the p lane // Science and Education in Karakalpakstan. – 2019. – №4. – C. 25-27. (01.00.00; №11).

II часть

7. Бегжанова К.У. Метризация пространства слабо аддитивных функционалов // Вестник Каракалпакского государственного университета имени Бердаха. – 2016. – №2. – С. 5-7.

8. Бегжанова К.У. Решеточные гомеоморфизмы пространства полуаддитивных функционалов // Материалы Республиканской конференции "Современные проблемы комплексного и функционального анализа" . – Нукус. – 2012. – С.41-43.

9. Бегжанова К.У. Гомеоморфизмы пространства слабо аддитивных функционалов с конечными носителями // Международная конференция прикладной и геометрический анализ. – Самарканд. –2014. – С. 38.

10. Бегжанова К.У. Гомеоморфизмы пространства слабо аддитивных функционалов с конечными носителями // Материалы научной конференции "Актуальные вопросы геометрии и её приложения" . – Ташкент. –2014. – С. 66-69.

11. Бегжанова К.У. Экстремальная граница пространства слабо аддитивных сохраняющих порядок функционалов на плоскости // "Ёш олимлар" Республика илмий-амалий конференцияси. – Термиз. – 2016. – 117-118 б.

12. Бегжанова К.У. Метризация пространства слабо аддитивных функционалов // Материалы межвузовской конференции "Актуальные проблемы и решение естественных и точных наук" . – Нукус. – 2017. – С.15-17.

13. Begjanova K.U. Lattice affine homeomorphisms of the space of capacities // Сборник тезисов научной онлайн - конференции "Современные проблемы математики" . – Нукус. – 2020. – С.26-27.

14. Бегжанова К.У. Решеточные аффинные гомеоморфизмы пространства емкостей // Abstracts of the international online conference "Frontier in mathematics and computer science" – Tashkent. – 2020. – 176 p.

15. Бегжанова К.У. Метризация пространства слабо аддитивных функционалов // Материалы международной научно-практической онлайн-конференции "Теории функций одного и многих комплексных переменных" – Нукус. – 2020. – С.45-46.