Аффинные гомеоморфизмы пространства слабоаддитивных функционалов

Бегжанова Камила Уснатдиновна
Каракалпакский государственный университет

03.12.2020

Введение

В настоящее время теория нелинейных функционалов играет важную роль в различных областях математики и её приложениях. Одним из важных классов нелинейных функционалов является пространство всех слабо аддитивных сохраняющих порядок нормированных функционалов определенных на пространстве всех действительнозначных непрерывных функций заданных на некотором компакте.

- Albeverio S., Ayupov Sh.A., Zaitov A.A., On certain properties of the spaces of order-preserving functionals // Topology and its Applications, – 2008.
- Beshimov R.B., Mamadaliev N.K., On the functor of semiadditive τ-smooth functional // Topology and its Applications, –2017.
- Zaitov A.A., On categorical properties of order-preserving functionals // Methods of Functional Analysis and Topology, – 2003.
- Radul T., On the functor of order-preserving functionals, Comment. Math. Univ. Carolin., –1998.

Введение

В 1992 году Л.Б.Шапиро установил, что пространство всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, полуаддитивных, полумультипликативных, положительно-однородных функционалов на конусе $C(X)_+$ – всех действительных неотрицательных непрерывных функций на компакте X, гомеоморфно пространству $\exp(X)$ – всех непустых замкнутых подмножеств компакта X.
В 1998 году Т. Радул начал исследование пространство $O(X)$ всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов на пространстве всех непрерывных функций на компакте X.

- Джаббаров Г.Ф., Описание экстремальных точек пространства слабо аддитивных положительно-однородных функционалов двухточечного множество // Узб.матем.журн., – 2005.
- Choquet G., Theory of Capacity // Ann. l'Institute Fourier, – 1953-1954
- Zhou L., Integral representation of continuous comonotonically additive functionals // Trans. Amer. Math. Soc. – 1998.
- Zarichnyi M.M., Nykyforchyn O.R., Capacity functor in the category of compacta // Sb. Math., – 2008.

Пространство $C(X)$

Пусть X – компакт. Через $C(X)$ обозначим пространство всех непрерывных функций $f : X \to R$ с поточечными алгебраическими операциями и sup-нормой, т.е. с нормой $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in X\}$.
Для каждого $c \in R$ через c_X обозначим постоянную функцию, определяемую по формуле $c_X(x) = c, \quad x \in X$.
Пусть $\phi, \ \psi \in C(X)$. Неравенство $\phi \le \psi$ означает, что $\phi(x) \le \psi(x)$ для всех $x \in X$.

Слабо аддитивные функционалы

[a]Функционал $\nu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется:

- слабо аддитивным, если для всех $\phi \in C(X)$ и $c \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\nu\left(\phi + c_X\right) = \nu\left(\phi\right) + c \cdot \nu\left(1_X\right);$
- сохраняющим порядок, если для всех $\phi, \psi \in C(X)$ из $\phi \leq \psi$ вытекает $\nu(\phi) \leq \nu(\psi)$;
- нормированным, если $\nu\left(1_X\right) = 1$;
- положительно-однородным, если $\nu\left(t\phi\right) = t\nu\left(\phi\right)$ при всех $\phi \in C\left(X\right)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$;
- полуаддитивным, если $\nu\left(\phi + \psi\right) \leq \nu\left(\phi\right) + \nu\left(\psi\right)$ при всех $\phi,\ \psi \in C\left(X\right)$.

[a]Radul T., On the functor of order-preserving functionals // Comment. Math. Univ. Carol., –1998

Обозначения

Для компакта X вводим следующие обозначения:

- $O\left(X\right)$ – множество всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок и нормированных функционалов на $C(X)$;
- $OH\left(X\right)$ – множество всех положительно-однородных функционалов из $O\left(X\right)$;
- $OS\left(X\right)$ – множество всех полуаддитивных функционалов из $OH\left(X\right)$;
- $P\left(X\right)$ – множество всех нормированных положительных линейных функционалов на $C\left(X\right)$.

База топологии

Рассмотрим на множестве $F(X)$, где $F = O,\ OH,\ OS$, топологию поточечной сходимости, в частности, предбазу окрестностей функционала $\nu \in F(X)$ образуют множества вида

$$\langle \nu\,;\ \varphi,\ \varepsilon \rangle = \left\{ \nu' \in F(X) \ \ :\ \left| \nu'(\varphi) - \nu(\varphi) \right| < \varepsilon \right\},$$

где $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C(X)$.
Отметим, что для n – точечного компакта $\mathbf{n} = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$, пространство $C(\mathbf{n})$ изоморфно пространству $\mathbb{R}^n$, при этом изоморфизм задается по правилу

$$f \in C(\mathbf{n}) \to (f(0),\ f(1),\ ...,\ f(n-1)) \in \mathbb{R}^n.$$

Операции $\vee$ и $\wedge$

Определим операции $\vee$ и $\wedge$ на пространстве $O\,(X)$. Для функционалов $\mu,\,\nu \in O\,(X)$ положим

$$(\mu \vee \nu)(\phi) = \max\{\mu(\phi),\ \nu(\phi)\}, \quad \phi \in C(X);$$
$$(\mu \wedge \nu)(\phi) = \min\{\mu(\phi),\ \nu(\phi)\}, \quad \phi \in C(X).$$

Также для непустого замкнутого подмножества $F \subset X$ положим

$$\mu_F(\phi) = \max\{\phi(x) :\ x \in F\};$$
$$\nu_F(\phi) = \min\{\phi(x) :\ x \in F\}.$$

Имеет место следующие свойства

- $\mu \vee \nu,\ \mu \wedge \nu, \mu_F,\, \nu_F\ \in O(X);$
- $\mu \vee \nu, \mu_F\ \in OS(X).$

Если компакт X содержит более одной точки, то существуют $\mu,\ \ \nu,\ \ \nu_F\ \in OS(X)$ такие, что $\mu \wedge \nu,\, \nu_F\ \notin OS(X)$.

Аффинный гомеоморфизм

Пусть A и B – выпуклые подмножества линейного топологического пространства E. Отображение $T : A \to B$ называется аффинным, если

$$T(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha T(x) + (1-\alpha)T(y)$$

для всех $x, y \in A$ и $\alpha \in [0,1]$.
При этом, если $T : A \to B$ является взаимно однозначным и взаимно непрерывным отображением, то оно называется аффинным гомеоморфизмом.

Пространство $OH(\mathbf{2})$ и $OS(\mathbf{2})$

Для фиксированного $a \in X$ через δ_a обозначим функционал Дирака определенной по правилу

$$\delta_a(\phi) = \phi(a), \quad \phi \in C(X).$$

Тогда

$$\delta_a \in P(X).$$

Отметим, что для $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ имеют место

- пространство $OH(\mathbf{2})$ аффинно гомеоморфно квадрату с вершинами $\delta_0, \delta_1, \delta_0 \vee \delta_1, \delta_0 \wedge \delta_1$;[1]
- пространство $OS(\mathbf{2})$ аффинно гомеоморфно треугольнику с вершинами $\delta_0, \delta_1, \delta_0 \vee \delta_1$.[2]

---

[1] Джаббаров Г.Ф., Описание экстремальных точек пространства слабо аддитивных положительно-однородных функционалов двухточечного множество // Узб.матем.журн., – 2005.

[2] Davletov D.E., Djabbarov G. F., Functor of semiadditive functionals // Methods of functional analysis and topology, –2008.

Пример 1.

Рассмотрим функционал $\mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, определенный по правилу[a]

$$\mu(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}(x + y + z), & \text{если} \quad x = y = z \\ \dfrac{1}{3}\left(x + y + z + \dfrac{1}{4}\dfrac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{|x-y| + |y-z| + |z-x|}\right), & \text{в против. сл.} \end{cases}$$

Тогда функционал μ принадлежит пространству $OH(\mathbf{3})$, при этом, μ не является аддитивным.

[a] А.А.Заитов, Теорема об открытом отображении пространств слабо аддитивных однородных функционалов. Матем. заметки, 88:5 (2010).

Описание пространства $O(\mathbf{2})$

Пусть $L_\infty(\mathbb{R})$ и $L_1(\mathbb{R})$ – банахово пространство классов действительных существенно ограниченных измеримых и классов действительных интегрируемых функций на $\mathbb{R}$, соответственно. Поскольку пространство $L_\infty(\mathbb{R})$ изометрически изоморфно сопряженному пространству пространства $L_1(\mathbb{R})$, то

$$L_\infty(\mathbb{R})_1^+ = \{f \in L_\infty(\mathbb{R}) : \ 0 \le f \le \mathbf{1}\},$$

где $\mathbf{1}$ – единица в $L_\infty(\mathbb{R})$, является *-слабо компактным множеством.

Теорема 1.

Пространство $O(\mathbf{2})$ аффинно гомеомофно пространству $L_\infty(\mathbb{R})_1^+$, при этом гомеоморфизм $L_\infty(\mathbb{R})_1^+ \to O(\mathbf{2})$ задается по правилу

$$\mu(x,y) = \int\limits_0^{x-y} \varphi(t)\,dt + y, \qquad \varphi \in L_\infty(\mathbb{R})_1^+. \tag{1}$$

Описание множества $O_2(X)$

Пусть A – замкнутое пространство компакта X. Скажем, что функционал $\nu \in O(X)$ сосредоточен на A, если $\nu(f) = \nu(g)$ для всех $f, g \in C(X)$ с $f|_A = g|_A$. Наименьшее по включению замкнутое множество $A \subset X$ на котором функционал ν сосредоточен, называется носителем функционала $\nu \in O(X)$ и обозначается $\operatorname{supp}\nu$, т.е.,

$$\operatorname{supp}\nu = \bigcap\{A : \quad \nu \; - \; \text{сосредоточен} \;\; A\}.$$

Через $O_2(X)$ обозначим множество всех функционалов $\mu \in O(X)$, носители которых состоят не более чем из двух точек.

Предложение 1.

Пусть X – компакт. Тогда всякий функционал $\mu \in O_2(X)$ имеет вид

$$\mu(f) = \int\limits_0^{f(x_1)-f(x_2)} \varphi(t)\,dt + f(x_2), \tag{2}$$

где $\operatorname{supp}\mu = \{x_1, x_2\}, \quad \varphi \in L_\infty(\mathbb{R})_1^+$.

Аффинные гомеоморфизмы пространства полуаддитивных функционалов

Для выпуклого компакта K через $cc(K)$ обозначим пространство всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств K. Напомним, что для каждого $A \in cc(P(X))$ функционал ν_A определенный по правилу

$$\nu_A(\varphi) = \sup\{\mu(\varphi) : \mu \in A\}, \quad \varphi \in C(X)$$

принадлежит пространству $OS(X)$, при этом соответствие[3]

$$A \in cc(P(X)) \mapsto \nu_A \in OS(X) \tag{3}$$

задает аффинный гомеоморфизм между пространствами $cc(P(X))$ и $OS(X)$.

[3] Davletov D.E., Djabbarov G. F., Functor of semiadditive functionals // Methods of functional analysis and topology, –2008.

Отображение $F(f)$

Пусть X и Y – компактные пространства, а $f : X \to Y$ – непрерывное отображение между ними. Отображение $F(f) : F(X) \to F(Y)$, где $F = P,\ OS,\ OH,\ O$, определим как

$$F(f)(\mu)(\phi) = \mu(\phi \circ f), \quad \mu \in F(X),\ \phi \in C(X).$$

Отображение $T : OS(X) \to OS(Y)$ назовем сохраняющим верхние грани, если для $\nu_1, \nu_2 \in OS(X)$ имеет место

$$T(\nu_1 \vee \nu_2) = T(\nu_1) \vee T(\nu_2).$$

Пусть $f : X \to Y$ – непрерывное отображение. Тогда отображение

$$OS(f) : OS(X) \to OS(Y)$$

является сохраняющим верхние грани аффинным отображением.

Теорема 2.

Если $T : OS(X) \to OS(Y)$ сохраняющее верхние грани аффинный гомеоморфизм, то существует гомеоморфизм $g : X \to Y$ такой, что $T = OS(g)$.

Пример 2.

Пусть $X = \mathbf{2}$. Известно, что $OS(\mathbf{2})$ аффинно гомеоморфно Δ[a]:

$$\Delta = \{(\alpha,\ \beta)\ :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ 0 \le \alpha \le \beta \le 1\},$$

при этом гомеоморфизм задается по правилу

$$(\alpha,\ \beta) \mapsto \lambda = \alpha\delta_0 + (1-\beta)\,\delta_1 + (\beta-\alpha)\,\delta_0 \vee \delta_1,$$

где δ_a – функционал Дирака, а функционал $\delta_0 \vee \delta_1 \in OS(\mathbf{2})$:

$$(\delta_0 \vee \delta_1)(f) = \max\{\delta_0(f),\ \delta_1(f)\}, \quad f \in C(\mathbf{2}).$$

$$T\ :\ OS(\mathbf{2}) \to OS(\mathbf{2}),\ \ \delta_0 \mapsto \delta_0 \vee \delta_1, \quad \delta_0 \vee \delta_1 \mapsto \delta_1, \quad \delta_1 \mapsto \delta_0,$$

т.е., $\alpha\delta_0 + (1-\beta)\,\delta_1 + (\beta-\alpha)\,\delta_0 \vee \delta_1 \mapsto \alpha\delta_0 \vee \delta_1 + (1-\ \beta)\,\delta_0 + (\beta-\alpha)\,\delta_1$.
Если $g\ :\ \mathbf{2} \to \mathbf{2}$ гомеоморфизм, то аффинный гомеоморфизм $OS(g)\ :\ OS(\mathbf{2}) \to OS(\mathbf{2})$ переводит множество $\{\delta_0,\ \delta_1\}$ в себя. Следовательно, T не может быть представлен в виде $OS(g)$.

[a] Davletov D.E., Djabbarov G. F., Functor of semiadditive functionals // Methods of functional analysis and topology, –2008

Интеграл Шоке

Действительнозначные функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ называем комонотонными, если для любых $x_1, x_2 \in X$ имеет место

$$(f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0.$$

Отметим, что в частности постоянная функция комонотонна любой функции.

Если $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим пяти свойствам:

1. $\mu(\varphi) \geq 0$ для всех $\varphi \geq 0$;
2. $\mu(1_X) = 1$;
3. $\mu(k\varphi) = k\mu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X)$ и $k \in \mathbb{R}_+$;
4. $\mu(\varphi + \psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$ для каждой пары комонотонных функций $\varphi, \psi \in C(X)$;
5. $\mu(\varphi) \leq \mu(\psi)$ для каждой пары $\varphi, \psi \in C(X)$ с условием $\varphi \leq \psi$,

то μ называются интегралом Шоке.

Через $M(X)$ обозначим множество всех интегралов Шоке на X.

Интеграл Шоке

Для каждого компакта X обозначаем через $exp(X)$ пространство всех непустых замкнутых подмножеств X.
Функция $c : exp(X) \cup \{\varnothing\} \to [0,1]$ называется емкостью[4] на компакте X, если для всех замкнутых подмножеств $F, G \in exp(X)$ выполняются следующие три свойства
1) $c(\varnothing) = 0, \quad c(X) = 1$;
2) если $F \subseteq G$, тогда $c(F) \le c(G)$ (монотонность);
3) если $c(F) < a$,тогда существует открытое множество $U \supset F$ такое, что длялюбого $G \subset U$мы имеем $c(G) < a$ (полунепрерывность сверху).
Каждый функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ со свойствами 1)–5) является интегралом Шоке для емкости $c \in M(X)$ определяемой по формуле

$$c(F) = \inf \{\mu(\varphi) : \ \varphi \in C_+(X), \ \ \varphi(x) \ge 1, \ \forall x \in F\}.$$

[4] Zarichnyi M.M., Nykyforchyn O.R., Capacity functor in the category of compacta // Sb. Math., –2008

Решетка $(M(X), \vee, \wedge)$

Отметим, что
$$M(X) \subset OH(X) \subset O(X).$$

Для $c_1, c_2 \in M(X)$ имеем $c_1 \vee c_2, \quad c_1 \wedge c_2 \in M(X)$. Тройка $(M(X), \vee, \wedge)$ является решеткой.
Пусть $f: \; X \to Y$ – непрерывное отображение.
Тогда
$$OH(f)(M(X)) \subseteq M(Y).$$

Поэтому корректно определено отображение
$$M(f) = OH(f)|_{M(X)}: \quad M(X) \to M(Y).$$

Решеточный гомеоморфизм

Отображение $T : M(X) \to M(Y)$ назовем решеточным, если для $\nu_1, \nu_2 \in M(X)$ имеет место

$$T(\nu_1 \vee \nu_2) = T(\nu_1) \vee T(\nu_2) \text{ и } T(\nu_1 \wedge \nu_2) = T(\nu_1) \wedge T(\nu_2).$$

Теорема 3.

Пусть X – компакт и $\Phi : M(X) \to M(X)$ является аффинным гомеоморфизмом. Следующие утверждения эквивалентны:

- Φ является решеточным гомеоморфизмом;
- существует гомеоморфизм $f : X \to X$ такой, что $\Phi = M(f)$.

Пример 3.

Пусть $X = \mathbf{2}$. Для каждого $c \in M\left(\mathbf{2}\right)$ определим следующие числа

$$\alpha_i = c(\{i\}), \;\; i = 1, 2.$$

Так как $c \in M\left(\mathbf{2}\right)$, то $0 \leq \alpha_i \leq 1, \;\; i = 1, 2$. Ясно, что отображение

$$c \in M\left(\mathbf{2}\right) \to (\alpha_1, \alpha_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

является аффинным гомеоморфизмом. $M\left(\mathbf{2}\right)$ аффинно гомеоморфно квадрату $[0, 1] \times [0, 1]$. Поэтому аффинное отображение:

$$(1, 0) \mapsto (1, 1), \quad (0, 1) \mapsto (0, 0), \quad (0, 0) \mapsto (0, 1), (1, 1) \mapsto (1, 0)$$

задает также аффинный гомеоморфизм $T \; : \; M\left(\mathbf{2}\right) \to M\left(\mathbf{2}\right)$.
Как и в Примере 2, для всякого гомеоморфизма $g \; : \; \mathbf{2} \to \mathbf{2}$ аффинный гомеоморфизм $M\left(g\right) \; : \; M\left(\mathbf{2}\right) \to M\left(\mathbf{2}\right)$ переводит множество $\{(1, 0), \; (0, 1)\}$ в себя. Следовательно, T не может быть представлен в виде $M\left(g\right)$.

Метризация пространства слабо аддитивных функционалов

Пусть $(X,\ \rho)$ – метрический компакт. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathrm{Lip}_k\left(X\right) = \{\varphi\ :\ X \to \mathbb{R}| \quad |\varphi\left(x\right) - \varphi\left(y\right)| \leq k\rho\left(x,\ y\right), \quad \forall x, y \in X\}$$

и $\mathrm{Lip}\left(X\right) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{Lip}_k\left(X\right)$. Определим функцию $\rho_k\ :\ O\left(X\right) \times O\left(X\right) \to \mathbb{R}$ по правилу

$$\rho_k\left(\mu,\ \nu\right) = \sup\left\{|\mu\left(\phi\right) - \nu\left(\phi\right)|\ :\ \phi \in \mathrm{Lip}_k\left(X\right)\right\}, \quad \mu,\ \nu \in O\left(X\right). \tag{4}$$

Для всех $\mu,\ \nu \in O\left(X\right)$,

$$\rho_k\left(\mu,\ \nu\right) \leq k\, diam\left(X\right). \tag{5}$$

Метрика на $O(X)$

Определим функцию $\rho_O \ : \ O(X) \times O(X) \to \mathbb{R}$ по правилу

$$\rho_O(\mu, \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1} \rho_k(\mu, \nu), \qquad \mu, \nu \in O(X) \tag{6}$$

Функция ρ_O определенная по правилу (6), является метрикой на $O(X)$.

Теорема 4.

Метрика ρ_O порождает топологию поточечной сходимости на $O(X)$.

Замечание

- Федорчук В.В., Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Изв.АН СССР. Сер. матем. – 1990.
- Zarichnyi M.M., Nykyforchyn O.R., Capacity functor in the category of compacta // Sb. Math., – 2008.
- Djabbarov G. F., A Triple of infinite iterates of the functor of positively homogeneous functionals // Siberian Advances in Mathematics, – 2019.
- Zaitov A.A., On a metric on the space of idempotent probability measures // Applied General Topology, – 2020.

Пример 4.

Покажем, что для $(X,\ \rho)$ функция $\rho_k\ \ (k \geq 1)$ определенное по (4) не является метрикой. Пусть $k \geq 1$. Возьмем $x_1, x_2 \in X$. Положим $\delta = \rho(x_1, x_2)$. Числа $a,\ b, c,\ d \in \mathbb{R}$ выберем, $k\delta < a < \ b < c < \ d$.
Пусть χ_1 и χ_2 характеристические функций отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$, соответственно. Положим

$$\mu_i(\phi) = \int\limits_0^{\phi(x_1)-\phi(x_2)} \chi_i(t)dt + \phi(x_2), \quad \phi \in C(X), \quad i = 1, 2.$$

имеем, что $\mu_i \in O(X)$, $i = 1, 2.$
Тогда,

- $\mu_1 \neq \mu_2$;
- $\rho_k(\mu_1,\ \mu_2) = 0.$

Это означает, что $\rho_k\ \ (k \geq 1)$ не является метрикой.

Спасибо за внимание!

Список опубликованных работ

I часть

1. Кудайбергенов К.К., Бегжанова К.У. Метризация пространства полуаддитивных функционалов // Узбекский математический журнал. – 2010. – 4. – С. 82–92. (01.00.00; №6).

2. Бегжанова К.У. Решеточные гомеоморфизмы пространства полуаддитивных функционалов // Узбекский математический журнал. – 2011. – 4. – С. 52–58. (01.00.00; №6).

3. Кудайбергенов К.К., Бегжанова К.У. Описание слабо аддитивных функционалов на плоскости, сохраняющих порядок // Владикавказский математический журнал. – 2011. – Том 13. – Выпуск 1. – С. 31-37. (3. Scopus IF=0.431).

4. Бегжанова К.У. Метризация пространства слабо аддитивных функционалов // Известия ВУЗов. Математика. – 2018. – №3. – С. 3–8. (3. Scopus IF=0.619).

5. Kudaybergenov K., Begjanova K. Lattice affine homeomorphisms of the pace of capacities // Science and Education in Karakalpakstan. – 2019. – №4. – C. 28-34. (01.00.00; №11).

6. Begjanova K. Extreme boundary of the space of weakly additive order preserving Functionals on the p lane // Science and Education in Karakalpakstan. – 2019. – №4. – C. 25-27. (01.00.00; №11).

II часть

7. Бегжанова К.У. Метризация пространства слабо аддитивных функционалов // Вестник Каракалпакского государственного университета имени Бердаха. – 2016. – №2. – С. 5-7.

8. Бегжанова К.У. Решеточные гомеоморфизмы пространства полуаддитивных функционалов // Материалы Республиканской конференции "Современные проблемы комплексного и функционального анализа" . – Нукус. – 2012. – С.41-43.

9. Бегжанова К.У. Гомеоморфизмы пространства слабо аддитивных функционалов с конечными носителями // Международная конференция прикладной и геометрический анализ. – Самарканд. –2014. – С. 38.

10. Бегжанова К.У. Гомеоморфизмы пространства слабо аддитивных функционалов с конечными носителями // Материалы научной конференции "Актуальные вопросы геометрии и её приложения" . – Ташкент. –2014. – С. 66-69.

11. Бегжанова К.У. Экстремальная граница пространства слабо аддитивных сохраняющих порядок функционалов на плоскости // "Ёш олимлар" Республика илмий-амалий конференцияси. – Термиз. – 2016. – 117-118 б.

12. Бегжанова К.У. Метризация пространства слабо аддитивных функционалов // Материалы межвузовской конференции "Актуальные проблемы и решение естественных и точных наук". – Нукус. – 2017. – С.15-17.

13. Begjanova K.U. Lattice affine homeomorphisms of the space of capacities // Сборник тезисов научной онлайн - конференции "Современные проблемы математики". – Нукус. – 2020. – С.26-27.

14. Бегжанова К.У. Решеточные аффинные гомеоморфизмы пространства емкостей // Abstracts of the international online conference "Frontier in mathematics and computer science" – Tashkent. – 2020. – 176 p.