Для $q = p_1 \ldots p_J$ мы имеем $\underset{\text{непр}}{\rho(q)} = \rho(p_1) \otimes \ldots \underset{\text{непр}}{\otimes \rho(p_J)}$ и $\rho(p) \geq \frac{p-1}{2}$ по т. Фробениуса

Л. $\exists\, S = S^{-1} \subseteq G$ и $\lambda_0 = |S| \geq \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{|S|-1}$ — спектр $\mathrm{Cay}(S, G)$. Тогда
$\{\lambda_j\} \subseteq \bigcup_\rho \mathrm{Spec}(\widehat{S}(\rho))$ и $\lambda_1 = \|\widehat{S}\|'_{op}$ $\sum S(s) f(s^{-1}x) \leftarrow (g, sg)$ — тоже ребра

◀ $\exists f$ — с. функция матр. см. $\mathrm{Cay}(S,G) \Rightarrow (S * \bar{f})(x) = \mu f(x) \Rightarrow \widehat{S}(\rho)\widehat{f}(\rho) = \mu \widehat{f}(\rho)$
$\Rightarrow (\widehat{S}_\rho - I\mu)\widehat{f}(\rho) = 0$ и т.к. $f \neq 0$, то $\exists \rho$ $\widehat{f}(\rho) \neq 0 \Rightarrow \widehat{S}(\rho) - I_\mu$ вырожд. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mu \in \mathrm{Spec}(\widehat{S}(\rho))$. Ясно, что $\lambda_1 \leq \|\widehat{S}\|'_{op} = \max\limits_{\rho \neq 1} \|\widehat{S}(\rho)\|_{op}$
Обратно, $\exists$ $\|\widehat{S}\|'_{op} = \langle \widehat{S}(\rho)\varphi, \varphi\rangle = \sum_g S(g) \underbrace{\langle \rho(g)\varphi, \varphi\rangle}_{F(g)}$, где $\varphi \in \mathbb{C}^{d_\rho}$, $\|\varphi\|_2 = 1$
$\widehat{F}(\pi) = \sum_{i,j} \varphi(i)\overline{\varphi(j)} \sum_g \rho(g)_{ij} \overline{\pi(g)} = \frac{|G|}{d_\rho} \left|\sum_i \varphi(i)\ldots\right|^2 \geq 0$ из соотн. ортог.
$\Rightarrow F = f' * f$, $f'(x) = \overline{f(x^{-1})}$ и $\sum_g F(g) = 0$, ибо $\rho \neq 1 \Rightarrow \|S'\|_{op} = \sum S(g)(f' * f)(g) =$
$= \sum f(g)(S * f)(g) \leq \lambda_1 \|f\|_2^2$ и $F(e) = \|f\|_2^2 = \langle\varphi,\varphi\rangle = 1$ ■ у нас $S = S^{-1}$ [illegible]

$T_n(S) = \#\{s_1 s_2^{-1} \ldots s_n^{-1} = \tilde{s}_1 \tilde{s}_2^{-1} \ldots \tilde{s}_n^{-1} \mid s_j, \tilde{s}_j \in S\} = \frac{1}{|G|} \sum d_\rho \langle \widehat{S}(\rho)^{n}, \widehat{S}^{n}(\rho) \rangle_F$ $\widehat{S}(\rho)^*$
$(T_n(f_1, \ldots, f_{2n}) = \frac{1}{|G|}\sum d_\rho \langle \widehat{f}_1(\rho) \ldots \widehat{f}_n(\rho), \widehat{f}_{n+1}(\rho) \ldots \widehat{f}_{2n}(\rho)\rangle \leq \prod_{j=1}^{2n} T_n(f_j)^{1/2n}$; $= \frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{|S|} \lambda_j^{2n}(\mathrm{Cay}(S,G))$

По-др. $S(yx^{-1}) = S(x,y)$ — м. смежности $\mathrm{Cay}(S,G)$ $S(x,y) = \sum \lambda_j u_j(x)\overline{u_j(y)}$
$Sf = \mu f$ т.е. $\sum S(s) f(s^{-1}x) = \mu f(x) \Rightarrow$ для $f_g(x) = f(xg)$ тоже будет с. функц.
$\Rightarrow f \to f_g$ — предст., фикс. с. подпр-ва $\Rightarrow$ кр-ть с. числа $\geq$ мин. кратн. предст. ρ

Т. $\forall \eta > 0$ $T_n(S) \leq \frac{|S|^{2n}}{q^3} q^\eta$, $q = \prod p_j$ и $n = n(\eta, S) \log q$ ← на самом деле
$(|S| > q^\delta \Rightarrow n$ — из кол-ва множ.) здесь ос. функ.
Из Т. Вып. оц. на λ_1. Для $q = p \Rightarrow$ по т. Фробениуса $\frac{p-1}{2}\frac{\lambda_1^{2n}}{|SL_2(\mathbb{F}_p)|} \leq \frac{|S|^{2n}}{p^3}p^\eta$
$\Rightarrow$ всё. Далее инд. по # простых J. Если все $\rho(p_j)$ — непр. $\Rightarrow \prod \frac{p_j-1}{2} \gg q \cdot 2^{-J}$

Т' $T_{2n}(f_g) \leq T_n(f_S)|S|^{2n-\varepsilon}$, $|S| \geq q^\delta$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ J — много.
$T_{2n} = \#\{s_1 \ldots s_n s_{n+1} \ldots s_{2n} = (\cdot)'\} \sim \Delta^4$, $E(P) \geq |S|^{4n}\frac{\Delta^2 P}{K} \geq (\Delta P)^2 \frac{\Delta^2 |P|}{K} \Rightarrow E(\ldots) \geq \frac{|P|^3}{K}$
Т (в $S \subseteq G$ неком.) $E(P) \geq \frac{|P|^3}{K} \Rightarrow \exists g \in P$ и $\overset{= P_*^{-1}}{P_*} \subseteq g^{-1}P$ т, что $|P_*^3| \ll K^C|P_*|$ и $|P_*| \gg \frac{|P|}{K^C}$.

Л. G — кон. гр. $\dim G \geq |G|^\varepsilon \Rightarrow \forall A \subseteq G$ им. $A^3 = G$, если $|A| \geq |G|^{1-\varepsilon/3}$
◀ $g = p_1p_2p_3 \Rightarrow 0 = \frac{1}{|G|}\sum d_\rho \langle \widehat{P}^2(\rho), (gP)^\frown(\rho)\rangle = \frac{|P|^3}{|G|} + \|P\|_{op}\,|P|$ и $\|P\|_{op}^2 \dim \leq |G||P|$
$|P|^4 > |G|^2|G||P|/\dim \Rightarrow$ всё. ■ Отсюда след., что $\overset{=S}{A}$ не оч. большие

Кроме того, $\Delta^4 P^3 \geq \Delta^4 E(P) \geq \frac{|S|^{4n}\Delta^2 P}{K} \Rightarrow \Delta P \geq \frac{|S|^{n}}{K^{1/2}} \Rightarrow \sum r_{S^n}(x) P_*(x) \gg \frac{|S|^n}{K^{1/2}K^C}$ тоже P_*
$\Rightarrow \exists z$ $|S \cap zP_*| \gg \frac{|S|}{K^C}$ $\Rightarrow$ для $z^{-1}S \cap P_*$ пол. (Δ) с K^C Т. о росте в $SL_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$,
если вып. все усл. Т (не размер — вып.)

Проверим теперь, что $\forall q_1 | q$, $q_1 > q^{\varkappa_0/10}$ имеем $|\pi_{q_1}(z^{-1}S)| > q_1^{\varkappa_1}$
Пусть $D = \max\|s_j\|$ — матр. норма в $\mathbb{C}$, нор. $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и $D^{l_0} < q_1 < D^{2l_0} \Rightarrow$ пр-е инъект. и по Kesten'у $|z^{-1} S \cap P_*|^2 \leq \left|\sum_x P_*(x) S^{(l_0)}(x)\right|^2 \leq T_{l_0}(S)|wP_* \cap S^{(l_0)}| \Rightarrow$
$|wP_* \cap S^{(l_0)}| \geq |S|^{l_0}/K^{2C} \Rightarrow$ и с $|S|^{l-l_0}$ противоречие усл. вып. $(C|S|)^{l_0 d}$ [illegible]

Для проверки посл. усл. дост. д-ть, что $\forall f \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, $\forall b \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ с $\mathrm{Tr}_p(b) \neq \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\forall p|q$ имеем $\#\{x \in P_* \mid \mathrm{Tr}(bx) \equiv f \pmod{q_1}\} < q^{-\varepsilon}|P_*|$ (# ден-ним)
$\mathrm{Tr}(ab) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$ — ск. пр-е на $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$. —
Имеем $\mathrm{Tr}\, b(x^{(j)} - x) \equiv 0 (q_1)$, $\forall x, x_1, \ldots, x_4 \in$ реш. выше $(:= T)$. Отсюда
$\det(x_1 - x, x_2 - x, x_3 - x, x_4 - x) \equiv 0 (p)$, $\forall p | q_1$ (т.к. у матр. $\underset{\neq 0}{b}$ — нетр. реш.)
$\Rightarrow \det \equiv 0 (q_1)$ и $\exists$ $D^{6l_1} < q_1$ — такой выбор $q_1 \Rightarrow$ эл-тов матр. $< D^{l_1}$
$\Rightarrow |\det| < 5^6 D_1^{6l_1} < q_1 \Rightarrow \det = 0$ $\exists P$ — простое т, что [illegible]
[illegible] $0 \notin P$ и тем все тоже самое [illegible]