# **Ейлер,** ***De fractionibus continuis dissertatio*, § 11 (1737) :**

Omnis autem fractio finita, cuius numerator et denominator sunt numeri integri finiti, in huiusmodi fractionem continuam transformatur, quae alicubi abrumpitur; fractio autem, cuius numerator et denominator sunt numeri infinite magni, cuiusmodi dantur pro quantitatibus irrationalibus et transcendentibus, in fractionem vero continuam et in infinitum excurrentem transibit.

$\alpha$ положительное, не целое, число.

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{\alpha_1} \qquad 0 < \frac{1}{\alpha_1} < 1$$

$$\alpha_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}$$

$$\alpha_2 = q_2 + \frac{1}{\alpha_3}$$

$$\ldots$$

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \ddots}} = (q_0; q_1, q_2, \ldots)$$

1) $\alpha$ рациональное число: $\alpha_i$ тоже рациональные числа, последовательность величин $q_i$ конечна.

2) $\alpha$ иррациональное число: $\alpha_i$ иррациональные числа, последовательность величин $q_i$ бесконечна.

Ейлер (1707-1783); Лагранж (1736-1813)

Галуа (1811-1832)

## **Ейлер,** ***De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo*****, § 8 (1765) :**

Quo ergo hoc argumentum luculentius et ordine pertractem, primum radicem quadratam ex quovis numero in fractionem continuam evolvere docebo, idque methodo quam minime molesta. Deinde ostendam, quomodo inde fractiones $\frac{p}{q}$ valorem irrationalem $\sqrt{l}$ proxime experimentes formari debeant in subsidium vocato Algorithmo novo supra explicato. Tum vero facile patebit, quomodo hinc numeros $p$ et $q$ definiri oporteat, ut fiat $pp = lqq + 1$. Denique tabulam subiungam, in qua pro omnibus numeris $l$ centenarium non superantibus numeri bini $p$ et $q$ exhibentur.

1) Разложение $\sqrt{N}$ в непрерывную дробь.
2) Как иметь рациональные приближения величины $\sqrt{N}$.
3) Как иметь от них решение неопределённого уравнения $x^2 - Ny^2 = 1$.
4) Таблица разложений иррациональных $\sqrt{N}$ от $N = 2$ до $N = 120$.

# Эйлер: Разложение величины $\sqrt{N}$

*De evolutione radicum quadratarum per fractiones continuas*
*De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo*, 1765

$$\sqrt{N} = q_0 + \frac{1}{\alpha_1} \qquad 0 < \frac{1}{\alpha_1} < 1 \qquad \alpha_1 > 1$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{N} - q_0} = \frac{\sqrt{N} + q_0}{N - q_0^2} = q_1 + \frac{1}{\alpha_2} \qquad 0 < \frac{1}{\alpha_2} < 1$$

$$\dots$$

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{\alpha_1}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} = 1 + \frac{1}{\alpha_2}$$

$$\alpha_2 = \frac{4}{\sqrt{13} - 1} = \frac{\sqrt{13} + 1}{3} = 1 + \frac{1}{\alpha_3}$$

$$\dots$$

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ddots}}}}}}}}}}}}}}}$$

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{10},\ \sqrt{11},$$

$$\sqrt{12},\ \sqrt{13},\ \sqrt{14}, \ldots, \sqrt{118},\ \sqrt{119},\ \sqrt{120}.$$

# Квадратические иррациональности в виде $\sqrt{N}$

In omnibus his indicum seriebus periodi deprehenduntur modo strictiores modo largiores, quae indicibus iis, qui primo duplo sunt maiores, includuntur, atque hae periodi eo clarius in oculos incidunt, si primi indices cuiusque seriei duplicantur. Deinde in qualibet periodo idem indicum ordo sive antrorsum sive retrorsum observatur ; ex quo in qualibet periodo vel unus datur index medius vel duo prout terminorum numerus fuerit par vel impar.

I. Разложение периодическее, а период начинается после целой части: $\sqrt{N} = (q_0; \overline{q_1, q_2, \ldots, q_n})$.

$$\sqrt{N} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

II. Период симметричный для $n-1$ членов, а последний член вдвое больше целой части: $\sqrt{N} = (q_0; \overline{q_1, q_2, \ldots, q_2, q_1, 2q_0})$.

$$\sqrt{N} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{2q_0 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

$$\sqrt{N} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{2q_0 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

$$= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_0 + \sqrt{N}}}}}}}$$

$$\sqrt{2} = (1; \overline{2}), \qquad \sqrt{37} = (6; \overline{12})$$

$$\sqrt{29} = (5; \overline{2, 1, 1, 2, 10}), \qquad \sqrt{53} = (7; \overline{3, 1, 1, 3, 14})$$

$$\sqrt{31} = (5; \overline{1, 1, 3, \underline{\mathbf{5}}, 3, 1, 1, 10}), \quad \sqrt{54} = (7; \overline{2, 1, \underline{\mathbf{6}}, 1, 2, 14})$$

*De evolutione radicum quadratarum per fractiones continuas*
*De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo*, 1765

$x^2 - N \cdot y^2 = 1$, где $N$ натуральный $\neq 1$ не квадратный; $x$, $y$ натуральные числа

---

Замечания:

1) John Pell (1611-1685)

2) « неопределённое (диофантого) уравнение »

$$N \cdot y^2 + 1 = x^2 = \square \equiv (my+1)^2 = m^2y^2 + 2my + 1$$

откуда $y(m) = \frac{2m}{N - m^2}$ рациональное число.

---

Архимед: ?

Brouncker, Wallis (XVII в.): первые попытки

Fermat, Wallis (XVII в.): есть всегда решение

Fermat : есть бесконечное количество решений

Euler : « usus novi algorithmi » : решение с помощью разложения $\sqrt{N}$ в непрерывную дробь, а вычисление приближений (1765).

$$\boxed{x^2 - N\cdot y^2 = 1}$$

$$n = 2k: \qquad x = P_{n-1},\ y = Q_{n-1}$$

$$n = 2k+1: \quad x = P_{2n-1},\ y = Q_{2n-1}$$

$$\sqrt{31} = (5; \overline{1, 1, 3, \underline{5}, 3, 1, 1, 10})$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & 5 & 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \left(\frac{0}{1}\right) & \left(\frac{1}{0}\right) & \frac{5}{1} & \frac{6}{1} & \frac{11}{2} & \frac{39}{7} & \dots & \frac{1520}{273} \end{array}$$

$$x = 1520,\ y = 273$$

$$\sqrt{29} = (5; \overline{2, 1, 1, 2, 10})$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 5 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ \left(\frac{0}{1}\right) & \left(\frac{1}{0}\right) & \frac{5}{1} & \frac{11}{2} & \frac{16}{3} & \frac{27}{5} & \frac{70}{13} \end{array}$$

$$70^2 - 29\cdot 13^2 = -1$$

$$\begin{array}{ccccc} 10 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ \frac{727}{35} & \frac{1524}{283} & \frac{2251}{418} & \frac{3775}{701} & \frac{9801}{1820} \end{array}$$

$$9801^2 - 29\cdot 1820^2 = 1$$

$$x_k + \sqrt{N}\cdot y_k = (x_1 + \sqrt{N}\cdot y_1)^k$$

# Лагранж, 1767

(*Mémoire sur la résolution des équations numériques*)

$$\sum a_i x^i = 0$$

$$r < x < r + 1 \quad \longrightarrow \quad x = r + \frac{1}{y}$$

$$\sum a'_i y^i = 0$$

$$s < y < s + 1 \quad \longrightarrow \quad y = s + \frac{1}{z}$$

и т. д.

# Лагранж, 1770

(*Additions au Mémoire sur la résolution des équations numériques*)

Ейлер: Разложение $\sqrt{N}$

— периодическо

— имеет только один член до периода

— имеет симметрический период для $n-1$ членов

— последний член периода вдвое больше целой части.

Лагранж: Разложение квадратического иррациональности, т.е.

$$\frac{a+\sqrt{b}}{c},$$

периодическо; 0, 1, многие члены до периода.

On avait remarqué depuis longtemps que toute fraction continue périodique pouvait toujours se ramener à une équation du second degré, mais personne que je sache n'avait encore démontré l'inverse de cette proposition ; savoir que toute racine d'une équation du second degré se réduit toujours nécessairement en une fraction continue périodique.

# Evariste Galois, 1829

$\big($*Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques*$\big)$

Пусть чистая периодичность

$$x = (\overline{q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n}), \quad x > 1,$$

одно решение квадратическово уравнения; так другое в виде

$$x' = -\frac{1}{(\overline{q_n; q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots, q_0})}, \quad -1 < x' < 0$$

$$\left( x = \frac{1}{(\overline{q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n})}, \quad x' = -(\overline{q_n; q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots, q_0}) \right)$$

*THÉORÈME. Si une des racines d'une équation de degré quelconque est une fraction continue immédiatement périodique, cette équation aura nécessairement une autre racine également périodique que l'on obtiendra en divisant l'unité négative par cette même fraction continue périodique, écrite dans un ordre inverse.*

т.е.: Si une des racines d'une équation quadratique est une fraction continue immédiatement périodique, l'autre racine égalera moins 1 divisé par la même fraction continue, mais écrite à l'envers.

$$x = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_0 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

$$x = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \frac{1}{x}}}}, \qquad q_0 - x = -\cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \frac{1}{x}}}}$$

$$\frac{1}{q_0 - x} = -\left(q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \frac{1}{x}}}\right), \qquad q_1 + \frac{1}{q_0 - x} = -\cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \frac{1}{x}}}$$

$$\cfrac{1}{q_1 + \frac{1}{q_0 - x}} = -\left(q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \frac{1}{x}}\right), \qquad q_2 + \cfrac{1}{q_1 + \frac{1}{q_0 - x}} = -\cfrac{1}{q_3 + \frac{1}{x}}$$

$$\cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_1 + \frac{1}{q_0 - x}}} = -\left(q_3 + \frac{1}{x}\right), \qquad q_3 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_1 + \frac{1}{q_0 - x}}} = -\frac{1}{x}$$

$$x = -\cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_1 + \frac{1}{q_0 - x}}}}, \qquad x = -\cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_0 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Если $x > 1$ ($q_0 \neq 0$), а

$x' > 0$: $x$ один или многие члены до периода

$-1 < x' < 0$: $x$ никакой член до периода

$x' < -1$: $x$ один член до периода.

Всегда: периоды величин $x$ и $x'$ обратные.

( *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 19 (1828-1829), p. 294-301 )

# *Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques ;*

Par M. Evariste Galois, élève au Collége de Louis-le-Grand.

On sait que si, par la méthode de Lagrange, on développe en fraction continue une des racines d'une équation du second degré, cette fraction continue sera périodique, et qu'il en sera encore de même de l'une des racines d'une équation de degré quelconque, si cette racine est racine d'un facteur rationnel du second degré du premier membre de la proposée, auquel cas cette équation aura, tout au moins, une autre racine qui sera également périodique. Dans l'un et dans l'autre cas, la fraction continue pourra d'ailleurs être immédiatement périodique ou ne l'être pas immédiatement, mais, lorsque cette dernière circonstance aura lieu, il y aura du moins une des transformées dont une des racines sera immédiatement périodique.

Or, lorsqu'une équation a deux racines périodiques, répondant à un même facteur rationnel du second degré, et que l'une d'elles est immédiatement périodique, il existe entre ces deux racines une relation assez singulière qui paraît n'avoir pas encore été remarquée, et qui peut être exprimée par le théorème suivant :

*THÉORÈME. Si une des racines d'une équation de degré quelconque est une fraction continue immédiatement périodique, cette équation aura nécessairement une autre racine également périodique que l'on obtiendra en divisant l'unité négative par cette même fraction continue périodique, écrite dans un ordre inverse.*

(1828-1829)

## Первый квартал

Математика: Этот ученик имеет явное превосходство перед своими товарищами.

Химия: рассеянный, слабая работа.

Физика: рассеянность; работа: ничто.

## Второй квартал

Математика: Этот ученик интересовается исключительно верхними частями математики.

Химия: поведение: сносное; работа: ничтожная.

Физика: поведение: сносное; работа: ничтожная.

## Третий квартал

Математика: доброе поведение; удовлетворительный.

Химия: очень рассеянный, ничтожная работа.

Физика: очень рассеянный, ничтожная работа.

1) $x = (\overline{q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n})$

$$x = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \frac{1}{x}}}}}$$

$$x = \frac{P_n \cdot x + P_{n-1}}{Q_n \cdot x + Q_{n-1}}$$

$$Q_n x^2 + (Q_{n-1} - P_n)x - P_{n-1} = 0$$

$$x = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$$

2) $x = (\alpha, \beta, \gamma, \overline{q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n})$

$$z = (\overline{q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n})$$

$$x = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \frac{1}{z}}} = \frac{A + \sqrt{B}}{C}$$