Уравнения Гамильтона–Якоби для динамических систем нейтрального типа (Hamilton–Jacobi equations for neutral-type dynamical systems)*

Н. Ю. Лукоянов (N. Yu. Lukoyanov)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

nyul@imm.uran.ru

В рамках позиционного подхода [1–6] рассматривается дифференциальная игра для динамической системы нейтрального типа

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\big(x[\tau]-g(\tau,x_\tau[\cdot])\big)=f(\tau,x_\tau[\cdot],u[\tau],v[\tau]),\qquad t_0\le\tau\le\vartheta,$$
$$x[\tau]\in\mathbb{R}^n,\qquad u[\tau]\in\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^l,\qquad v[\tau]\in\mathbb{V}\subset\mathbb{R}^m, \tag{1}$$

начального условия

$$x[t+\xi]=w[\xi],\quad \xi\in[-h,0],\qquad t\in[t_0,\vartheta), \tag{2}$$

и показателя качества процесса управления

$$\gamma=\sigma(x_\vartheta[\cdot]). \tag{3}$$

Здесь τ — время; $x[\tau]$ — состояние системы в момент τ; $x_\tau[\cdot]$ — история движения на промежутке $[\tau-h,\tau]$, так что $x_\tau[\xi]=x[\tau+\xi]$, $\xi\in[-h,0]$, где $h>0$ — константа запаздывания; $u[\tau]$ и $v[\tau]$ — текущие управляющие воздействия первого и второго игроков; $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ — известные компакты. Цель первого игрока — минимизировать показатель γ, цель второго — максимизировать γ.

Всюду ниже символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму, $\mathrm{Lip}([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство липшицевых функций из $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Lip}=\mathrm{Lip}([-h,0],\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{G}=[t_0,\vartheta]\times\mathrm{Lip}$. Пространство Lip снабдим равномерной нормой $\|\cdot\|_\infty$. Для $\nu>0$ положим

$$D_\nu=\big\{y[\cdot]\in\mathrm{Lip}\colon\ \|y[\cdot]\|_\infty\le\nu,\ \|y[\tau]-y[\xi]\|\le\nu|\tau-\xi|,\ \tau,\xi\in[-h,0]\big\}.$$

Предполагаются выполненными следующие условия.

*Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН №01 “Фундаментальная математика и ее приложения” (грант PRAS-18-01).

- Отображение $g = g(\tau, y[\cdot]) \in \mathbb{R}^n$, $(\tau, y[\cdot]) \in \mathbb{G}$, липшицево: существуют такие $\lambda_g \in (0,1)$, $h_0 \in (0,h)$ и $\alpha_g > 0$, что
$$\|g(\tau, y[\cdot]) - g(\xi, z[\cdot])\| \leq \lambda_g \max_{\eta \in [-h, -h_0]} \|y[\eta] - z[\eta]\| +$$
$$+ \alpha_g \big(1 + \|y[\cdot]\|_\infty\big) |\tau - \xi|.$$
- Отображение $f = f(\tau, y[\cdot], u, v) \in \mathbb{R}^n$, $(\tau, y[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$, непрерывно по совокупности переменных.
- Для любого $\nu > 0$ найдется $\lambda_f > 0$, для которого справедлива оценка (условие локальной липшицевости f по $y[\cdot]$)
$$\|f(\tau, y[\cdot], u, v) - f(\tau, z[\cdot], u, v)\| \leq \lambda_f \|y[\cdot] - z[\cdot]\|_\infty, \quad y[\cdot], z[\cdot] \in D_\nu.$$
- Существует $\alpha_f > 0$, для которого имеет место оценка (условие подлинейного роста f по $y[\cdot]$)
$$\|f(\tau, y[\cdot], u, v)\| \leq \alpha_f \big(1 + \|y[\cdot]\|_\infty\big).$$
- Для любого $s \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство (условие седловой точки для маленькой игры [2, с. 79])
$$\min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(\tau, y[\cdot], u, v), s\rangle = \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(\tau, y[\cdot], u, v), s\rangle,$$
где угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают скалярное произведение.
- Начальная история движения липшицева: $x_t[\cdot] = w[\cdot] \in \mathrm{Lip}$.
- Функционал $\sigma = \sigma(y[\cdot]) \in \mathbb{R}$, $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}$, непрерывен.

Дифференциальной игре (1)–(3) ставится в соответствие функциональное уравнение Гамильтона–Якоби в коинвариантных (*ci*-) производных.

Обозначим через $X(t, w[\cdot])$ множество функций $x[\cdot] \in \mathrm{Lip}([t-h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию (2). Следуя [7, 8], функционал $\varphi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ называем *ci*-дифференцируемым в точке $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, если существуют такие $\partial_t \varphi = \partial_t \varphi(t, w[\cdot]) \in \mathbb{R}$ и $\nabla \varphi = \nabla \varphi(t, w[\cdot]) \in \mathbb{R}^n$, что для всякой функции $x[\cdot] \in X(t, w[\cdot])$ при $\tau \in [t, \vartheta]$ имеет место равенство
$$\varphi(\tau, x_\tau[\cdot]) - \varphi(t, w[\cdot]) = (\tau - t)\partial_t \varphi + \langle x_\tau[0] - w[0], \nabla \varphi\rangle + o(\tau - t),$$
где $o(\delta)$ может зависеть от t и $x[\cdot]$, $o(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \downarrow 0$. Величины $\partial_t \varphi$ и $\nabla \varphi$ называются *ci*-производной по t и *ci*-градиентом функционала φ.

Пусть $\mathbb{G}_*$ — множество таких точек $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, в которых *ci*-дифференцируемы все координаты g_i отображения $g = (g_1, \ldots, g_n)$ из (1).

Положим $\partial_t g = (\partial_t g_1, \dots, \partial_t g_n)$, $\nabla g = (\nabla g_1, \dots, \nabla g_n)$. При сделанных предположениях для любых $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$ и $x[\cdot] \in X(t, w[\cdot])$ имеем $(\tau, x_\tau[\cdot]) \in \mathbb{G}_*$, $\partial_t g(\tau, x_\tau[\cdot]) = \mathrm{d}g(\tau, x_\tau[\cdot])/\mathrm{d}\tau$ и $\nabla g(\tau, x_\tau[\cdot]) = 0$ при почти всех $\tau \in [t, \vartheta]$.

Определим гамильтониан H системы (1) равенством

$$H(t, w[\cdot], s) = \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(t, w[\cdot], u, v), s \rangle, \qquad (t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}, \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим следующее уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\partial_t \varphi(t, w[\cdot]) + \big\langle \partial_t g(t, w[\cdot]), \nabla \varphi(t, w[\cdot]) \big\rangle + H\big(t, w[\cdot], \nabla \varphi(t, w[\cdot])\big) = 0, \\ (t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}_*. \tag{4}$$

Несмотря на то, что уравнение (4) рассматривается только на $\mathbb{G}_* \subset \mathbb{G}$, искомым является функционал φ, определенный на $\mathbb{G}$. Из-за второго слагаемого, обусловленного нейтральным типом динамической системы (1), к уравнению (4) неприменимы результаты, ранее полученные в теории уравнений Гамильтона–Якоби для обыкновенных дифференциальных систем [6] и систем запаздывающего типа [7, 8].

В работе получены следующие результаты. Показано, что если существует достаточно гладкое решение уравнения (4), удовлетворяющее краевому условию

$$\varphi(\vartheta, w[\cdot]) = \sigma(w[\cdot]), \qquad w[\cdot] \in \mathrm{Lip}, \tag{5}$$

где функционал σ взят из показателя качества (3), то это решение совпадает с функционалом цены рассматриваемой дифференциальной игры (1)–(3), формализуемой в классах чистых позиционных стратегий с памятью истории движения. При этом оптимальные стратегии игроков могут быть построены экстремальным сдвигом в направлении ci-градиентов данного решения. В негладком случае липшицева функционала цены установлено, что он совпадает с обобщенным минимаксным [6] решением задачи (4), (5). При этом оптимальные стратегии игроков строятся по минимаксному решению на основе подходящей модификации [9] метода экстремального сдвига на сопутствующие точки [2, 3], использующей две вспомогательные модели [4, 5]. В общем случае показано, что при указанных условиях минимаксное решение задачи (4), (5) определяет функционал цены дифференциальной игры (1)–(3), формализуемой в классах стратегий управления с поводырем.

По аналогии с теорией динамической оптимизации обыкновенных [6] и наследственных [7, 8] систем полученные результаты позволяют трактовать уравнение (4) как уравнение Гамильтона–Якоби для функционально-дифференциальных систем нейтрального типа вида (1).

Список литературы

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
3. *Осипов Ю.С.* Дифференциальные игры систем с последействием // ДАН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 779–782.
4. *Кряжимский А.В.* Об устойчивом позиционном управлении в дифференциальных играх // ПММ. 1978. Т. 42, № 6. С. 963–968.
5. *Максимов В.И.* Дифференциальная игра наведения для систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Задачи динамического управления: сб. ст. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. С. 33–45.
6. *Subbotin A.I.* Generalized solutions of first-order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston etc.: Birkhäuser, 1995.
7. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения типа Гамильтона–Якоби и дифференциальные игры с наследственной информацией // ДАН. 2000. Т. 371, № 4. С. 457–461.
8. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: УрФУ, 2011.
9. *Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.* Существование цены и седловой точки в позиционных дифференциальных играх для систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 101–112.