скелет. Получено общее аналитическое решение начальной задачи Коши для нелинейной системы, описывающей одномерные (с плоскими волнами) течения. Указан ряд решений, выражающихся в элементарных функциях [Леонтьев Н.Е., Татаренкова Д.А. Точные решения нелинейных уравнений течения суспензии в пористой среде // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2015, № 3, с. 49–54]. Кроме этого, в докладе обсуждаются некоторые вопросы, связанные с численным решением задачи с учетом образования скачка концентрации. Описываются вариант конечно-разностной схемы для расчета одномерных течений и результаты ее тестирования (численная оценка порядка сходимости, тестирование на точных решениях).

## О точных решениях уравнений термодиффузии при различных зависимостях плотности

**И. В. Степанова**
*Институт вычислительного моделирования, Красноярск*
stepiv@icm.krasn.ru

Работа посвящена построению и анализу точных решений уравнений термодиффузионной конвекции, описывающих однонаправленные стационарные течения бинарных смесей. Течения такого типа могут быть реализованы в достаточно протяженных вертикальных и горизонтальных слоях, границы которых поддерживаются при разных постоянных или меняющихся по заданному закону температурах.

**Математическая модель.** Рассматривается бинарная смесь с уравнением состояния

$$\rho = \rho_0 F(T,\ C),$$

где $\rho_0$ — плотность смеси при средних значениях температуры $T_0$ и концентрации $C_0$, $T$ и $C$ — отклонения от средних значений. Предполагается, что $C$ — концентрация легкой компоненты. Уравнения движения при заданном уравнении состояния имеют вид

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\rho_0^{-1}\nabla p + \nu\triangle\boldsymbol{u} + F(T,\ C)\,\mathbf{g}, \\ &T_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla T = \chi\triangle T, \quad C_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla C = D\triangle C + D_T\triangle T, \qquad (1) \\ &\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0. \end{aligned}$$

В системе (1) все обозначения стандартны, $\nu$, $\chi$, $D$, $D_T$ – коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, диффузии и термодиффузии соответственно. При нормальной (аномальной) термодиффузии легкий компонент накапливается в более нагретой (более холодной) области, что соответствует $D_T < 0$ ($D_T > 0$).

**Точные решения системы (1).** Поскольку в уравнениях (1) содержится произвольная функция $F(T, C)$, система становится незамкнутой. Для конкретных расчетов можно использовать экспериментальные зависимости или, следуя работам Л.В. Овсянникова [1] и его учеников, искать функцию $F$ с помощью техники группового анализа. Так, в работе автора [2] посредством метода симметрий вычислены возможные представления функции $F$ допускаемые при этих зависимостях преобразования переменных в системе (1). Вычисленные преобразования позволяют уменьшить число зависимых и/или независимых переменных в системе и, сведя ее к более простому виду, построить точные решения.

В данной работе представлены два класса решений. Первый – для описания стационарного однонаправленного течения в вертикальном слое в случае линейной зависимости силы плавучести от концентрации и произвольной от температуры. Общее решение уравнений (1) построено в квадратурах. Для случая, когда зависимость $F$ от температуры квадратичная, решение поставленной краевой задачи демонстрирует конвективное течение, состоящее из трех частей разной интенсивности: вблизи стенок жидкость опускается вниз, в центре понимается вверх, что соответствует большим у стенок и малым в центре значениям функции $F$. Второй класс решений соответствует описанию горизонтальных течений при заданных законах распределения температуры на твердых стенках. Рассмотрены обобщения решения Остроумова–Бириха [3] на случай экспоненциального и квадратичного распределения температуры на стенках. Такая постановка граничных условий налагает ограничения на вид функции $F$. Для обеих зависимостей построены точные решения поставленных краевых задач, проанализированы возникающие частные случаи. Показано, что полученные режимы конвективного течения являются обобщениями известных ранее решений, описывающих течения с постоянным продольным градиентом температуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-4519.2016.1).

### Литература

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Stepanova I.V.* Group classification for equations of thermodiffusion in binary mixture// Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 18, 2013, P. 1341–1346.
3. *Бирих Р.В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости// ПМТФ, 3, 1966, С. 69–72.


## Движение области поверхностного давления в условиях неоднородного ледяного покрова


**[1]И. В. Стурова, [2]Л. А. Ткачева**

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

[1]sturova@hydro.nsc.ru

[2]tkacheva@hydro.nsc.ru


Задача о поведении ледяного покрова под действием движущейся нагрузки изучается с одной стороны с целью разрушения ледяного покрова с помощью судов на воздушной подушке [1], а с другой – использования ледяного покрова в качестве переправ и плавающих платформ различного назначения. В последнем случае необходимо знать несущую способность ледяного покрова. В настоящее время наиболее полно изучена задача о движении внешней нагрузки по безграничному однородному ледяному покрову [2]. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной, плавающей на поверхности воды. Однако в реальных условиях ледяной покров не является однородным, так как может покрывать не всю верхнюю границу жидкости, а только ее часть, а также в нем могут существовать трещины и разводья. Влияние таких сложных граничных условий на поведение волнового движения находится в начальной стадии изучения.

Ранее в двумерной постановке исследованы волновые движения, возникающие при колебаниях погруженного горизонтального цилиндра в случаях ледяного покрова как конечной, так и