Дифференциальные игры и параметрически выпуклый анализ

Г.Е. Иванов

Московский физико-технический институт

Элементы общей теории игр

Пусть I игроков $u_1, ..., u_I$ могут выбирать свои *стратегии* из заданных множеств U_i:

$$u_i \in U_i, \quad i \in \overline{1, I}.$$

Пусть для каждого игрока u_i задан *функционал выигрыша*

$$J_i = J_i(u_1, ..., u_I), \quad i \in \overline{1, I}.$$

Цель игрока u_i состоит в максимизации своего выигрыша J_i.

Элементы общей теории игр

Набор стратегий $(u_1^N, \dots, u_I^N)$ называется *равновесным по Нэшу*, если

$$J_i\Big(u_1^N, \dots, u_{i-1}^N, u_i, u_{i+1}^N, \dots, u_I^N\Big) \le J_i(u_1^N, \dots, u_I^N)$$

$$\forall u_i \in U_i \quad \forall i \in \{1, \dots, I\}.$$

Таким образом, если любой игрок u_i отклонится от равновесной по Нэшу стратегии u_i^N, а все остальные игроки будут придерживаться стратегий u_j^N из этого равновесного набора, то игрок u_i не увеличит свой выигрыш J_i.

Элементы общей теории игр

Стратегия $u_i \in U_i$ игрока u_i называется *максминной*, если u_i доставляет

$$\max_{u_i \in U_i} J_i^{\min}(u_i),$$

где

$$J_i^{\min}(u_i) = \min_{u_1 \in U_1, \ldots,\ u_{i-1} \in U_{i-1},\ u_{i+1} \in U_{i+1}, \ldots,\ u_I \in U_I} J_i(u_1, \ldots, u_I).$$

То есть,

$$J_i^{\min}(u_i) = J_i^{\max\min},$$

где величина

$$J_i^{\max\min} = \max_{u_i \in U_i} J_i^{\min}(u_i)$$

называется *оптимальным гарантированным результатом* игрока u_i.

Элементы общей теории игр

Игра называется *игрой с нулевой суммой* или *антогонистической*, если $I = 2$ и

$$J_2(u_1, u_2) = -J_1(u_1, u_2) \qquad \forall u_1 \in U_1 \quad \forall u_2 \in U_2.$$

Лемма

Пара стратегий $(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)$ в антогонистической игре является равновесной по Нэшу тогда и только тогда, когда $(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)$ — седловая точка функционала $J_1(u_1, u_2)$, т.е.

$$J_1(u_1, \widehat{u}_2) \leq J_1(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2) \leq J_1(\widehat{u}_1, u_2) \qquad \forall u_1 \in U_1 \quad \forall u_2 \in U_2.$$

Если седловая точка $(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)$ существует, то стратегии $\widehat{u}_1$ и $\widehat{u}_2$ являются максминными.

Игры с нулевой суммой ранее рассматривались в связи с военной тематикой. Затем методы этой теории стали применяться к задачам оптимального управления в условиях помех и неопределенности, когда важен гарантированный результат.

Дифференциальные игры

Пусть динамика системы определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)), \quad t \in [t_0, T],$$

где t – время, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы, $u(t)$ и $v(t)$ – управления игроков, подчиняющиеся геометрическим ограничениям:

$$u(t) \in U(t), \quad v(t) \in V(t),$$

множества допустимых управлений $U(t) \in \mathbb{R}^p$, $V(t) \in \mathbb{R}^q$ заданы и могут зависеть от времени t. Задана начальная позиция фазового вектора

$$x(t_0) = x_0.$$

Задан целевой функционал

$$J = \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u(t), v(t))\, dt + \gamma(x(T)).$$

Цель игрока u состоит в минимизации функционала J,
цель игрока v – в его максимизации.

Дифференциальные игры

Рассмотрим случай игры с *простой динамикой*

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t), \quad t \in [t_0, T]$$

с геометрическими ограничениями на управления

$$u(t) \in U(t), \quad v(t) \in V(t),$$

начальной позицией $x(t_0) = x_0$ и целевым функционалом

$$J = \gamma(x(T)).$$

Дифференциальные игры

Предположим, что сначала игрок u выбирает свою оптимальную стратегию $u(t)$ на всем отрезке $[t_0, T]$, а затем игрок v выбирает свою оптимальную стратегию $v(t)$, зная стратегию противника. Тогда результат игры будет равен

$$\widehat{J}_+ = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \gamma \left(x_0 + \int_{t_0}^{T} u(t)\, dt + \int_{t_0}^{T} v(t)\, dt \right) =$$

$$= \min_{\overline{u} \in U[t_0,T]} \max_{\overline{v} \in V[t_0,T]} \gamma(x_0 + \overline{u} + \overline{v}),$$

где

$$U[t_0, T] = \int_{t_0}^{T} U(t)\, dt = \left\{ \int_{t_0}^{T} u(t) dt \;\middle|\; \begin{array}{c} u(t) \text{ – интегрируемая функция,} \\ u(t) \in U(t) \ \forall t \in [t_0, T] \end{array} \right\}.$$

Дифференциальные игры

Если наоборот, игрок u имеет информационные преимущества, т.е. сначала игрок v выбирает свою оптимальную стратегию $v(t)$ на всем отрезке $[t_0, T]$, а затем игрок u выбирает свою оптимальную стратегию $u(t)$, зная стратегию противника. Тогда результат игры будет равен

$$\widehat{J}_{-} = \max_{v(\cdot)} \min_{u(\cdot)} \gamma \left(x_0 + \int_{t_0}^{T} u(t)\, dt + \int_{t_0}^{T} v(t)\, dt \right) =$$

$$= \max_{\overline{v} \in V[t_0,T]} \min_{\overline{u} \in U[t_0,T]} \gamma(x_0 + \overline{u} + \overline{v}).$$

Такие стратегии называются *программными*. Легко видеть, что $\widehat{J}_{-} \leq \widehat{J}_{+}$. В общем случае для дифференциальной игры не существует седловой точки в классе программных стратегий, т.е. $\widehat{J}_{-} \neq \widehat{J}_{+}$.

Дифференциальные игры

Пусть теперь игроки выбирают свои стратегии динамически в зависимости от текущего значения фазового вектора:

$$u(t) = u_{\text{pos}}(t, x(t)), \quad v(t) = v_{\text{pos}}(t, x(t)).$$

В классе позиционных стратегий седловая точка существует, т.е. неважно, какой из игроков выбирает свою позиционную стратегию первым.
Здесь возникает следующая проблема: оптимальные позиционные стратегии могут быть разрывными функциями и тогда решение дифференциального уравнения

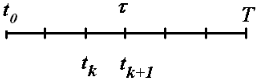
$$\dot{x}(t) = f\Big(t, x(t), u_{\text{pos}}(t, x(t)), v_{\text{pos}}(t, x(t))\Big)$$

может не существовать.

Дифференциальные игры

В реальных системах управления измерение текущего значения фазового вектора происходит в дискретные моменты времени.

Пусть задано разбиение $\tau = \{t_k\}_{k=1}^{K}$ отрезка $[t_0, T]$: $\quad t_0 < t_1 < ... < t_K = T$.



Рассмотрим игру с простой динамикой

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t).$$

Кусочно-программная стратегия игрока u состоит в том, что измеряя значение $x(t_k)$, игрок u строит свое управление $u(t)$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$. Тогда оптимальный гарантированный результат для игрока u равен

$$J_+(\tau) = \min_{\overline{u}_1 \in U[t_0,t_1]} \ \max_{\overline{v}_1 \in V[t_0,t_1]} \ \ldots$$

$$\ldots \min_{\overline{u}_K \in U[t_{K-1},t_K]} \ \max_{\overline{v}_K \in V[t_{K-1},t_K]} \ \gamma(x_0 + \overline{u}_1 + \overline{v}_1 + ... + \overline{u}_K + \overline{v}_K).$$

Дифференциальные игры

Для определения оптимальной стратегии возникает попятная конструкция

$$\gamma_K(x) = \gamma(x),$$

$$\gamma_{k-1}(x) = \min_{\overline{u}_k \in U[t_{k-1}, t_k]} \max_{\overline{v}_k \in V[t_{k-1}, t_k]} \gamma_k(x + \overline{u}_k + \overline{v}_k), \quad k \in \overline{K, 1},$$

$$J_+(\tau) = \gamma_0(x_0).$$

Смысл функции $\gamma_k(x)$ – оптимальный гарантированный результат для игры на отрезке $[t_k, T]$ с начальной позицией $x(t_k) = x$.

Дифференциальные игры

Аналогично определяется оптимальный гарантированный результат в классе кусочно-программных стратегий для игрока v:

$$J_-(\tau) = \max_{\overline{v}_1 \in V[t_0,t_1]} \min_{\overline{u}_1 \in U[t_0,t_1]} \dots$$

$$\dots \max_{\overline{v}_K \in V[t_{K-1},t_K]} \min_{\overline{u}_K \in U[t_{K-1},t_K]} \gamma(x_0 + \overline{u}_1 + \overline{v}_1 + \ldots + \overline{u}_K + \overline{v}_K).$$

Лемма

Если функция $\gamma(\cdot)$ непрерывна, то предельные оптимальные гарантированные результаты игроков u и v совпадают:

$$\lim_{|\tau|\to 0} J_+(\tau) = \lim_{|\tau|\to 0} J_-(\tau).$$

Дифференциальные игры

Вернемся к общей дифференциальной игре

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)),$$

с целевым функционалом

$$J = \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u(t), v(t))\, dt + \gamma(x(T)).$$

Функцией цены игры называется функция $\sigma(t, x)$, равная предельному гарантированному результату для игры на отрезке времени $[t, T]$ с начальной позицией $x(t) = x$.

Заметим, что $\sigma(T, x) = \gamma(x)$.

Дифференциальные игры

Теорема

Если $f, F, \gamma, \sigma \in C^1$ *и* $f(t,x,u,v) = f_1(t,x,u) + f_2(t,x,v)$ *и* $F(t,x,u,v) = F_1(t,x,u) + F_2(t,x,v)$, *то функция цены игры удовлетворяет уравнению Айзекса–Белмана (Гамильтона-Якоби)*

$$\frac{\partial\sigma(t,x)}{\partial t} + \min_{u\in U(t)} \max_{v\in V(t)} \left[\left(\frac{\partial\sigma(t,x)}{\partial x}, f(t,x,u,v)\right) + F(t,x,u,v)\right] = 0.$$

При этом

$$u_{\text{pos}}(t,x) = \operatorname*{argmin}_{u\in U(t)} \left[\left(\frac{\partial\sigma(t,x)}{\partial x}, f_1(t,x,u)\right) + F_1(t,x,u)\right],$$

$$v_{\text{pos}}(t,x) = \operatorname*{argmax}_{v\in V(t)} \left[\left(\frac{\partial\sigma(t,x)}{\partial x}, f_2(t,x,v)\right) + F_2(t,x,v)\right].$$

Проблема негладкости: из гладкости параметров задачи f, F, γ не следует гладкость цены игры.

Дифференциальные игры

Рассмотрим линейную дифференциальную игру

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_u(t)u(t) + B_v(t)v(t),$$

с квадратичным целевым функционалом

$$J = \int_{t_0}^{T} \Big((x(t), C(t)x(t)) + (u(t), D_u(t)u(t)) - (v(t), D_v(t)v(t)) \Big) dt + (x(T), Gx(T))$$

без геометрических ограничений на управления.

Здесь $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_u(t) \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_v(t) \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D_u(t) \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $D_v(t) \in \mathbb{R}^{q\times q}$ и $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — заданные матрицы.

Пусть матричные функции $A(t), B_u(t), B_v(t), C(t), D_u(t), D_v(t)$ непрерывны по t, матрицы $C(t), D_u(t), D_v(t), G$ симметричны; матрицы $D_u(t)$ и $D_v(t)$ положительно определены.

Дифференциальные игры

Теорема

Пусть матричная функция $S(t)$ *является решением матричного уравнения Риккати*

$$\dot{S}(t) = S(t)B_u(t)D_u^{-1}(t)B_u'(t)S(t) - S(t)B_v(t)D_v^{-1}(t)B_v'(t)S(t) - \\ - S(t)A(t) - A'(t)S(t) - C(t)$$

с начальным условием $S(T) = G$. *Тогда функция цены игры*

$$\sigma(t,x) = (x, S(t)x),$$

а оптимальные позиционные стратегии

$$u_{\text{pos}}(t,x) = -D_u^{-1}(t)B_u'(t)S(t)x, \qquad v_{\text{pos}}(t,x) = D_v^{-1}(t)B_v'(t)S(t)x.$$

Этот метод позволяет эффективно решать задачи высокой размерности, если нет геометрических ограничений на управления.

Дифференциальные игры

Рассмотрим дифференциальную игру с простой динамикой

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t), \quad t \in [t_0, T],$$

геометрическими ограничениями на управления

$$u(t) \in U(t), \quad v(t) \in V(t),$$

и целевым функционалом

$$J = \gamma(x(T)),$$

где

$$\gamma(x) = \psi(x, M) = \begin{cases} 0, & x \in M, \\ +\infty, & x \notin M \end{cases}$$

– индикаторная функция заданного целевого множества $M \subset \mathbb{R}^n$.

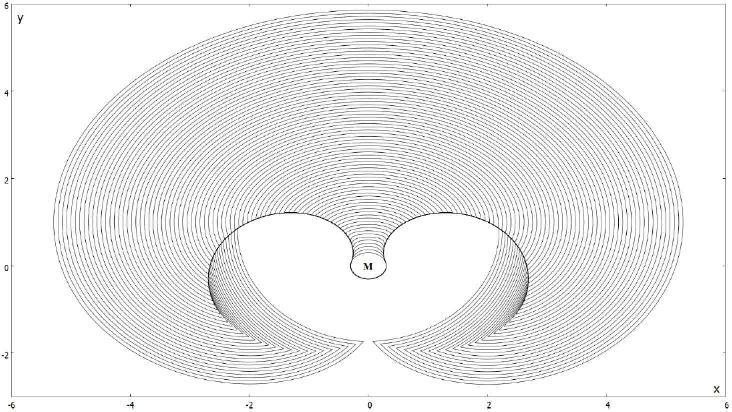
В этом случае цель игрока u состоит в приведении фазового вектора в конечный момент времени T на целевое множество M: $x(T) \in M$, т.е. поимка. Цель игрока v – уклонение: $x(T) \notin M$.

Дифференциальные игры

Задача шофер-убийца

$$\dot{x}(t) = -y(t)u(t) + v_x(t), \quad \dot{y}(t) = x(t)u(t) - 1 + v_y(t),$$
$$|u(t)| \leq 1, \quad v(t) = (v_x(t), v_y(t)), \quad |v(t)| \leq 0.3,$$

M – шар радиуса 0.3 с центром в точке $(0,0)$.



Дифференциальные игры

Рассмотрим оптимальный гарантированный результат для программных стратегий игрока u:

$$\widehat{J}_+(x_0) = \min_{u(\cdot)} \max_{v(\cdot)} \gamma\left(x_0 + \int_{t_0}^{T} u(t)\,dt + \int_{t_0}^{T} v(t)\,dt\right) =$$

$$= \min_{\overline{u}\in U[t_0,T]} \max_{\overline{v}\in V[t_0,T]} \gamma(x_0 + \overline{u} + \overline{v}).$$

Лемма

Если $J = \gamma(x) = \psi(x, M)$ *– индикаторная функция целевого множества* M, *то* $\widehat{J}_+(x_0) = \psi(x, M_0)$ *– индикаторная функция множества*

$$M_0 = M \overset{*}{-} V[t_0, T] + U[t_0, T],$$

где $+$ *и* $\overset{*}{-}$ *– операции суммы и разности множеств в смысле Минковского:*

$$X + Y = \{x + y :\ x \in X, y \in Y\}, \quad X \overset{*}{-} Y = \{z :\ z + Y \subset X\}.$$

Дифференциальные игры

Пусть $\tau = \{t_k\}_{k=1}^{K}$ – разбиение отрезка $[t_0, T]$, $\gamma_k(x)$ – оптимальный гарантированный результат для игрока u на отрезке $[t_k, T]$ с начальной позицией $x(t_k) = x$. Тогда $\gamma_k(x) = \psi(x, M_k)$ – индикаторная функция *альтернированной суммы Понтрягина* M_k, определяемой из попятной конструкции

$$M_K = M,$$

$$M_{k-1} = M_k \overset{*}{-} V[t_{k-1}, t_k] + U[t_{k-1}, t_k], \quad k \in \overline{K, 1}.$$

Набор множеств $\{M_k\}_{k=0}^{K}$ называется *мостом*.
После вычисления моста оптимальная кусочно-программная стратегия управления игрока u определяется из условий

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} u(t)\, dt = \overline{u}_k \in U[t_{k-1}, t_k] \bigcap \Big(x(t_{k-1}) - \Big(M_k \overset{*}{-} V[t_{k-1}, t_k] \Big) \Big).$$

Таким образом, задача построения оптимальных стратегий сводится к вычислению моста через суммы и разности Минковского.

Операции с множествами

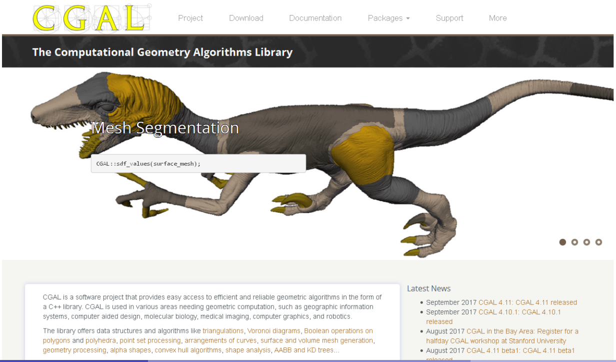
Операции с множествами (в т.ч. операции суммы и разности Минковского) необходимо реализовать численно, задавая множество конечным набором данных.

Например, множество в $\mathbb{R}^n$ можно приблизить многогранником, который задается конечным набором вершин и граней. Операции с многогранниками реализованы, например, в The Computational Geometry Algorithms Library (https://www.cgal.org)

Операции с множествами

Операции с множествами (в т.ч. операции суммы и разности Минковского) необходимо реализовать численно, задавая множество конечным набором данных.

Например, множество в $\mathbb{R}^n$ можно приблизить многогранником, который задается конечным набором вершин и граней. Операции с многогранниками реализованы, например, в
The Computational Geometry Algorithms Library (https://www.cgal.org)



Операции с множествами

При численной апроксимации множеств возникает погрешность, которую обычно измеряют с помощью *метрики Хаусдорфа*.

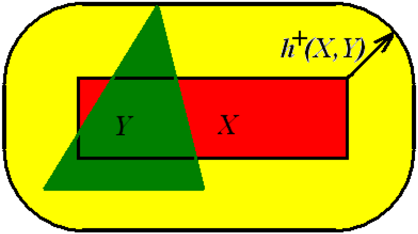
Расстоянием Хаусдорфа между множествами X и Y называется

$$h(X,Y) = \max\{h^+(X,Y), h^+(Y,X)\},$$

где

$$h^+(X,Y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \|x-y\|.$$

Иначе говоря, $h^+(X,Y)$ – это минимальный размер окрестности множества X, которая содержит множество Y.



Операции с множествами

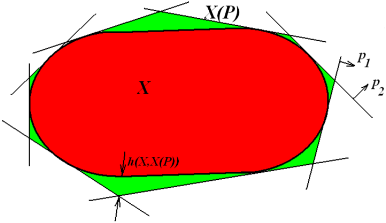
Если множество $X \subset \mathbb{R}^n$ выпуло и замкнуто, то оно однозначно определяется своей опорной функцией

$$s(p, X) = \sup_{x \in X} (p, x), \quad p \in \mathbb{R}^n$$

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (p, x) \le s(p, X) \ \forall p \in \mathbb{R}^n\}.$$

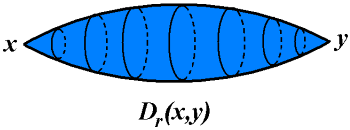
При численной реализации можно хранить в памяти компьютера значения опорной функции в конечном числе точек сетки $P = \{p_i\}_{i=1}^I$, $p_i \in \mathbb{R}^n$. В этом случае множество X можно приблизить многогранником

$$X(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (p_i, x) \le s(p_i, X), \ i \in \overline{1, I}\}.$$



Параметрически выпуклый анализ

Сильно выпуклым отрезком $D_r(x,y)$ с концами в точках $x, y \in \mathbb{R}^n$ называется пересечение всех шаров радиуса r, содержащих точки x, y:



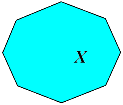
$D_r(x,y) \to [x,y]$ при $r \to +\infty$.

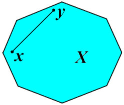
Параметрически выпуклый анализ

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется

выпуклым, если

$\forall x, y \in X \quad [x, y] \subset X$



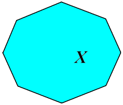


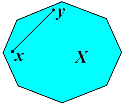
Параметрически выпуклый анализ

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется

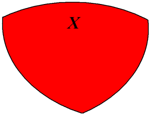
выпуклым, если

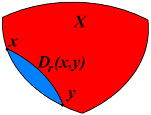
$\forall x, y \in X \quad [x, y] \subset X$





r-сильно выпуклым, если
$\forall x, y \in X$
$\|x - y\| \leq 2r$ и $D_r(x, y) \subset X$



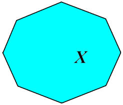


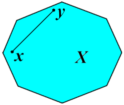
Параметрически выпуклый анализ

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется

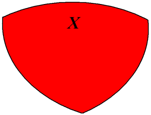
выпуклым, если

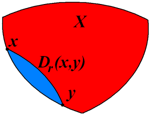
$\forall x, y \in X \quad [x, y] \subset X$



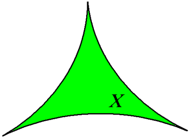


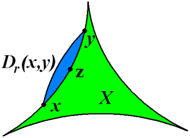
r-сильно выпуклым, если
$\forall x, y \in X$
$\|x - y\| \leq 2r$ и $D_r(x, y) \subset X$





r-слабо выпуклым, если
$\forall x, y \in X : \ \|x - y\| < 2r$
$\exists z \in D_r(x, y) \cap X : \ z \neq x, z \neq y$





Параметрически выпуклый анализ

Теорема

Для замкнутого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ *и числа* $r > 0$ *следующие условия эквивалентны:*
1) X *является* r*-сильно выпуклым;*
2) X *представимо как пересечение замкнутых шаров радиуса* r*;*
3) опорная функция $s(p, X)$ *дифференцируема на единичной сфере* $S_1 = \{p \in \mathbb{R}^n : \ \|p\| = 1\}$ *и градиент* $\operatorname{grad} s(p, X)$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* r *на* S_1*:*

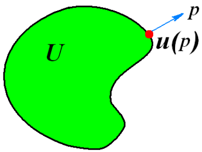
$$\| \operatorname{grad} s(p_1, X) - \operatorname{grad} s(p_2, X)\| \le r\|p_1 - p_2\| \quad \forall p_1, p_2 \in S_1.$$

Дифференциальные игры и параметрически выпуклый анализ

Геометрический смысл градиента опорной функции:

$$\operatorname{grad} s(p, U) = u(p) := \operatorname*{argmax}_{u \in U}(p, u).$$

Если множество U невыпукло, то функция $u(p)$ разрывна.
Если множество U сильно выпукла с параметром r, то функция $u(p)$ удовлетворяет условию Липшица с константой r.

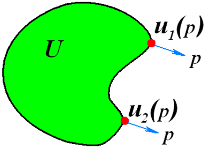


Дифференциальные игры и параметрически выпуклый анализ

Геометрический смысл градиента опорной функции:

$$\operatorname{grad} s(p, U) = u(p) := \underset{u \in U}{\operatorname{argmax}} (p, u).$$

Если множество U невыпукло, то функция $u(p)$ разрывна.
Если множество U сильно выпукла с параметром r, то функция $u(p)$ удовлетворяет условию Липшица с константой r.



Отсюда следует, что для дифференциальной игры с C^1-гладкой функцией цены $\sigma(t, x)$ и сильно выпуклыми множествами $U(t)$ и $V(t)$ позиционные стратегии

$$u_{\text{pos}}(t, x) = \underset{u \in U(t)}{\operatorname{argmin}} \left[\left(\frac{\partial \sigma(t, x)}{\partial x}, f_1(t, x, u) \right) + F_1(t, x, u) \right],$$

$$v_{\text{pos}}(t, x) = \underset{v \in V(t)}{\operatorname{argmax}} \left[\left(\frac{\partial \sigma(t, x)}{\partial x}, f_2(t, x, v) \right) + F_2(t, x, v) \right].$$

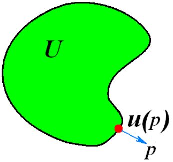
удовлетворяют условию Липшица относительно x.

Дифференциальные игры и параметрически выпуклый анализ

Геометрический смысл градиента опорной функции:

$$\operatorname{grad} s(p, U) = u(p) := \underset{u \in U}{\operatorname{argmax}} (p, u).$$

Если множество U невыпукло, то функция $u(p)$ разрывна.
Если множество U сильно выпукла с параметром r, то функция $u(p)$ удовлетворяет условию Липшица с константой r.



Отсюда следует, что для дифференциальной игры с C^1-гладкой функцией цены $\sigma(t, x)$ и сильно выпуклыми множествами $U(t)$ и $V(t)$ позиционные стратегии

$$u_{\text{pos}}(t, x) = \underset{u \in U(t)}{\operatorname{argmin}} \left[\left(\frac{\partial \sigma(t, x)}{\partial x}, f_1(t, x, u) \right) + F_1(t, x, u) \right],$$

$$v_{\text{pos}}(t, x) = \underset{v \in V(t)}{\operatorname{argmax}} \left[\left(\frac{\partial \sigma(t, x)}{\partial x}, f_2(t, x, v) \right) + F_2(t, x, v) \right].$$

удовлетворяют условию Липшица относительно x.

Параметрически выпуклый анализ

Теорема

(Об исчислении параметров выпуклости)
1) если множества X и Y соответственно r_X и r_Y-сильно выпуклы (т.е. сильно выпуклы с параметрами r_X и r_Y), то их сумма Минковского является сильно выпуклой с параметром $(r_X + r_Y)$;
2) если для любого $t \in [t_1, t_2]$ множество $U(t)$ сильно выпукло с параметром $r(t)$, то множество $\int_{t_1}^{t_2} U(t)\,dt$ сильно выпукло с параметром $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$;
3) если множества X и Y сильно выпуклы с параметрами r_X и r_Y соответственно, то их пересечение $X \cap Y$ сильно выпукло с параметром $\max\{r_X, r_Y\}$;
4) если множество X сильно выпукло парметром r_X, а множество $X \overset{*}{-} Y$ не пусто, то оно сильно выпукло с параметром r_X.

Из этой теоремы следует, что если в линейной дифференциальной игре множества допустимых управлений игрока u и целевое множество M сильно выпуклы, то альтернированные суммы M_k сильно выпуклы.

Параметрически выпуклый анализ

Пусть $P = \{p_i\}_{i=1}^{I}$ – сетка на единичной сфере S_1. *Мелкостью* сетки P называется

$$|P| = \sup_{q\in S_1} \min_{i\in\{1,I\}} \|q - p_i\|.$$

Рассмотрим погрешность сеточной аппроксимации выпуклого компакта $X \subset \mathbb{R}^n$ многогранником

$$X(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (p_i, x) \le s(p_i, X), \ i \in \overline{1, I}\}.$$

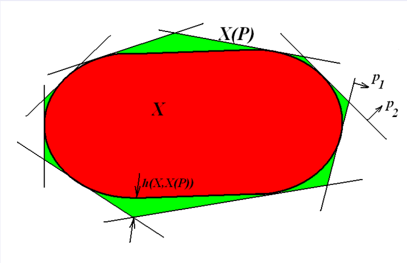
Теорема

1) В общем случае

$$h(X, X(P)) \le |P| \cdot \max_{x\in X} \|x\|.$$

2) Если множество X сильно выпукло с параметром $r > 0$, то

$$h(X, X(P)) \le r|P|^2.$$



Дифференциальные игры и параметрически выпуклый анализ

Теорема

Пусть $\tau = \{t_k\}_{k=1}^{K}$ *– разбиение отрезка* $[t_0, T]$ *мелкости* $|\tau|$. *Пусть выполнено условие непустой внутренности для моста* $\{M_k(\tau)\}_{k=0}^{K}$. *Тогда альтернированные суммы* $M_0(\tau)$ *сходятся к некоторому предельному множеству* $\widehat{M}$ *с линейной скоростью:*

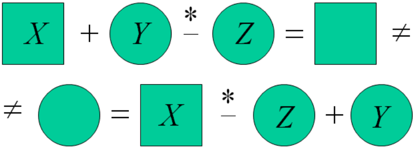
$$h(M_0(\tau), \widehat{M}) \leq C_1 |\tau|.$$

Если в линейной дифференциальной игре множества допустимых управлений игрока и сильно выпуклы, то альтернированные суммы сходятся с квадратичной скоростью:

$$h(M_0(\tau), \widehat{M}) \leq C_2 |\tau|^2.$$

Дифференциальные игры и параметрически выпуклый анализ

Не все аксиомы линейного пространства выполнены для множеств. В частности, в общем случае $X + Y \overset{*}{-} Z \neq X \overset{*}{-} Z + Y$:



Теорема

Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто, слабо выпукло с параметром r_1, а замыкание его дополнения $\overline{\mathbb{R}^n \setminus X}$ слабо выпукло с параметром r_2 (это означает, что X имеет C^1-гладкую границу). Пусть множество $Y \subset \mathbb{R}^n$ сильно выпукло с параметром $s_1 < r_1$, а множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ сильно выпукло с параметром $s_2 < r_2$. Тогда

$$X + Y \overset{*}{-} Z = X \overset{*}{-} Z + Y.$$

Теорема

Пусть в дифференциальной игре с простой динамикой целевое множество M слабо выпукло с параметром r_1, а замыкание его дополнения $\overline{\mathbb{R}^n \setminus X}$ слабо выпукло с параметром r_2. Пусть при любом $t \in [t_0, T]$ множества допустимых управлений $U(t)$ и $V(t)$ сильно выпуклы с параметрами $r_u(t)$ и $r_v(t)$ соответственно. Пусть

$$\int_{t_0}^{T} r_u(t)\,dt < r_1, \qquad \int_{t_0}^{T} r_v(t)\,dt < r_2.$$

Тогда в этой игре существует седловая точка в классе программных стратегий.

Параметрически выпуклый анализ