Последняя геометрическая теорема Пуанкаре: *история и драма идей*

А.Н. Кириллов

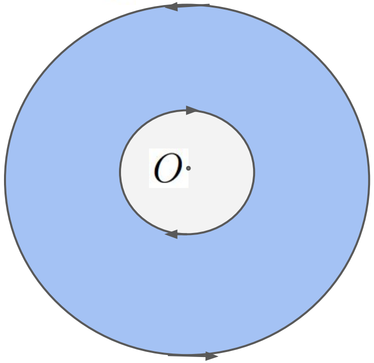
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

Геометрическая теорема Пуанкаре, 1912

29.04.1854 – 17.07.1912

$$f : A_0 \to A_0$$

A_0



f удовлетворяет условиям

- **гомеоморфизм**
- **сохранение площади**
- **инвариантность граничных окружностей**
- **вращение**

Тогда $\sharp Fix f \geq 2$

Poincaré H. Sur un théorème de geométrie.
Rend. Circ. Mat. Palermo. 1912. 33, 375-407

Геометрическая теорема Пуанкаре

Круговое кольцо $A_0 = \{z \in \mathbb{R}^2 : a \leq |z| \leq b,\ 0 < a < b\}$

Граничные компоненты

$$C_1 = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = a\}$$

$$C_2 = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = b\}$$

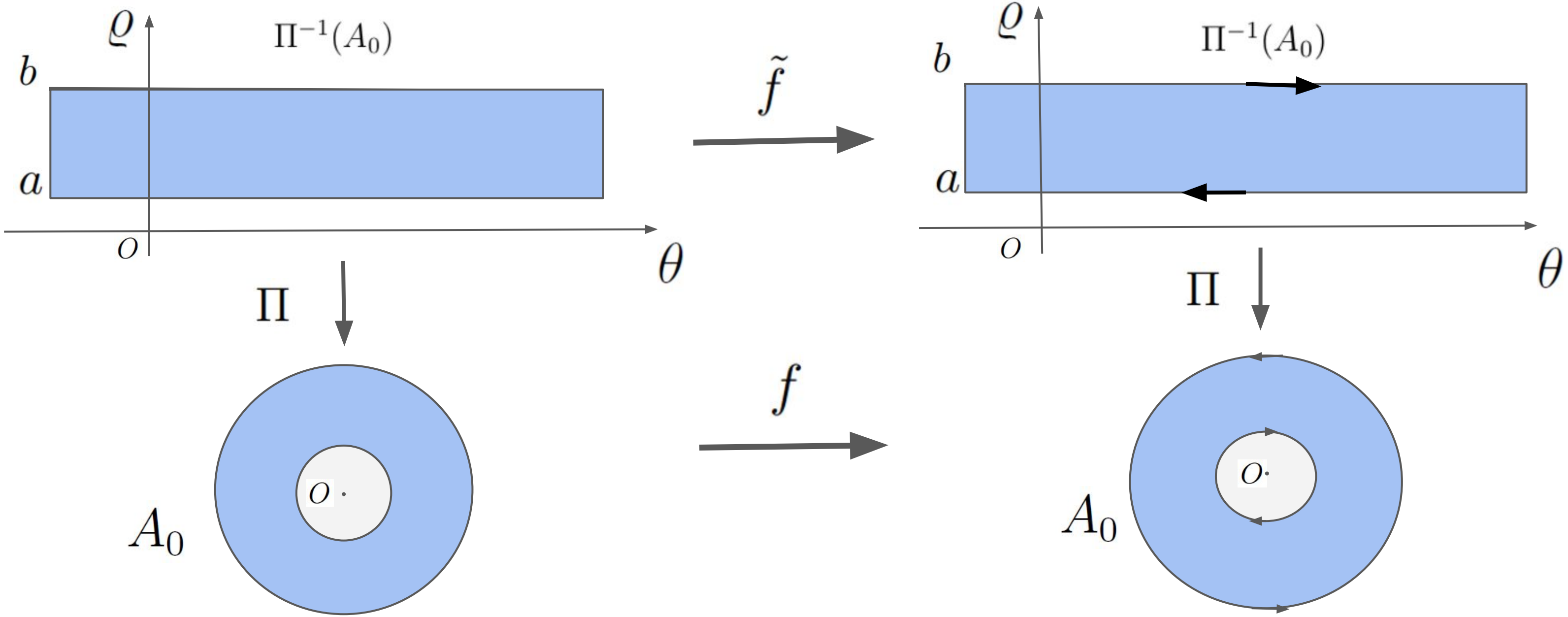
$f : A_0 \to A_0$ $\quad$ $\mathbb{R}^2 \backslash \{O\}$

$\tilde{f}$ поднятие f в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

накрывающее отображение $\Pi(\theta, \varrho) = (\varrho \cos\theta, \varrho \sin\theta)$

$\tilde{f} : \Pi^{-1}(A_0) \to \Pi^{-1}(A_0)$ $\quad$ $\Pi \circ \tilde{f} = f \circ \Pi$

Накрывающие пространство и отображение



Поднятие

$$\tilde f \,:\, \Pi^{-1}(A_0) \to \Pi^{-1}(A_0) \qquad \tilde f(\theta, \varrho) = (\theta + \Phi(\theta, \varrho), r(\theta, \varrho))$$

$$\Pi \circ \tilde f = f \circ \Pi \qquad \Pi(\theta, \varrho) = (\varrho \cos\theta, \varrho \sin\theta)$$

Геометрическая теорема Пуанкаре

Пусть $f : A_0 \to A_0$ $\boxed{\text{гомеоморфизм}}$

$\boxed{f(C_1) = C_1 \quad f(C_2) = C_2}$

$\boxed{f \text{ сохраняет площадь}}$

$\boxed{\Phi(\theta, a) \cdot \Phi(\theta, b) < 0}$

$$\tilde{f}(\theta, \varrho) = (\theta + \Phi(\theta, \varrho), r(\theta, \varrho))$$

$$\Phi(\theta + 2\pi, \varrho) = \Phi(\theta, \varrho) + (2\pi, 0)$$

$$r(\theta + 2\pi, \varrho) = r(\theta, \varrho)$$

Тогда

$$\sharp Fix(f) \geq 2$$

Контрпример (F.Dalbono, C.Rebelo, 2002):
без сохранения площади нет неподвижных точек

$$\tilde{f} : \Pi^{-1}(A_0) \to \Pi^{-1}(A_0)$$

$$\tilde{f}(\theta, \varrho) = (\theta + \Phi(\varrho), r(\varrho)) \qquad \Phi, r \text{ непрерывны}$$

$$-2\pi < \Phi(b) < 0 < \Phi(a) < 2\pi$$

$$r(a) = a, \ r(b) = b$$

$$\varrho \in (a, b) \quad r(\varrho) < \varrho \quad r \uparrow$$

$$\Phi(\varrho) = a + b - 2\varrho \qquad\qquad |a-b| < 2\pi$$

$$r(\varrho) = \tfrac{1}{b-a}(\varrho^2 - 2a\varrho + ab)$$

$$\Downarrow$$

$$-2\pi < \Phi(b) < 0 < \Phi(a) < 2\pi$$

$$r(a) = a,\ r(b) = b \quad r(\varrho) < \varrho \quad \varrho \in (a,b) \qquad r\uparrow$$

Научное руководство

Луи Башелье, 1870 - 1946, ТВ

Димитрие Помпей, 1873 - 1954, ТФКП

Jean Bosler, 1878 - 1973, астрономия

Mihailo Petrovic, 1868 - 1943, ДУ, отошел от математики

Дж. Биркгоф, 1913, неполное доказательство

G. D. Birkhoff, *Proof of Poincaré's geometric theorem*. Trans. Amer. Math. Soc. **14** (1913), 14–22

G.D.Birkhoff. ***Dynamical systems with two degrees of freedom.*** Trans. AMS, **1917**, 18, pp.199 - 300.

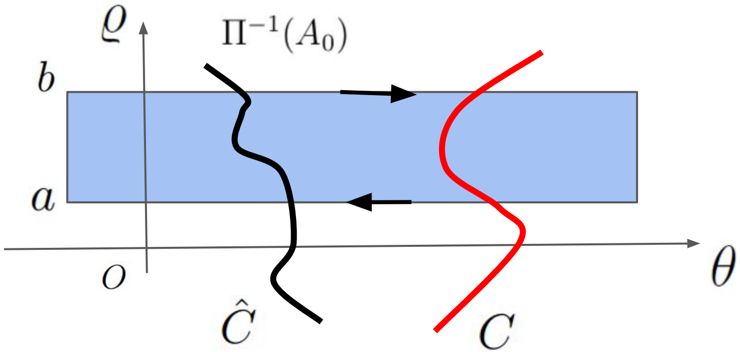
21.03.1884 – 12.11.1944

Дж. Биркгоф, 1926, обобщение теоремы Пуанкаре

G. D. Birkhoff, *An extension of Poincaré's last geometric theorem*. Acta Math. **47** (1926), 297–311

M. Brown, W. D. Neumann, 1977, полное доказательство

M. Brown and W. D. Neumann, *Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem*. Michigan Math. J. **24** (1977), 21–31



$$ind_C f = \frac{1}{2}$$
$$ind_{\hat{C}} f^{-1} = -\frac{1}{2}$$
$$\Downarrow$$

Противоречие

$$ind_C \tilde{f} = \frac{1}{2\pi} \int_C d\varphi \qquad \varphi(P) = arg \frac{\tilde{f}(P)-P}{||\tilde{f}(P)-P||}$$

P. Le Calvez и J.Wang вводят понятие ***положительного пути***

P. Le Calvez

Положительный путь $\gamma : I \to X$

гомеоморфизма $g : X \to X$

$X-$ связное,

локально линейно связное,

пространство Урысона

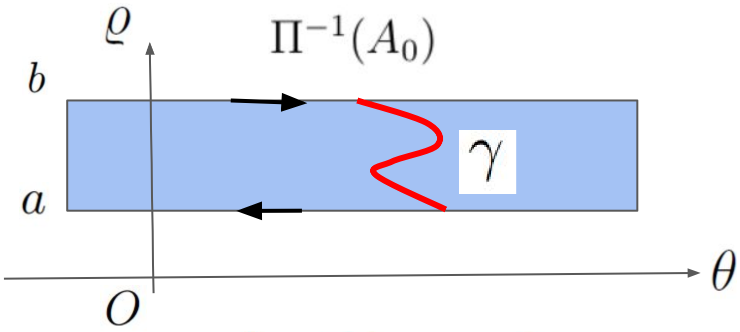
$$\forall t, t' \in I$$

$$t' \geq t \Rightarrow g(\gamma(t')) \neq \gamma(t)$$

P. Le Calvez and J. Wang, *Some remarks on the Poincaré–Birkhoff theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 703–715.

Утверждение 1. γ – положительный путь $\Rightarrow ind_\gamma f = -\frac{1}{2}$

$f : A_0 \to A_0$



Утверждение 2. $f : X \to X$

f – гомеоморфизм, $\sharp Fix f = 0$, f без блуждающих точек

$Z \subset X,\ f(Z) \subset Z \Rightarrow$

$\forall z \in X$ $\exists$ положительный путь гомеоморфизма f, соединяющий Z и z

$$f : A_0 \to A_0$$

Пусть f удовлетворяет условиям теоремы Пуанкаре.

Тогда заключение теоремы Пуанкаре следует из утверждений 1 и 2.

P. Le Calvez and J. Wang, *Some remarks on the Poincaré–Birkhoff theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 703–715.

Теорема Дж.Френкса (J.Franks), 1988

J. Franks, *Generalizations of the Poincaré–Birkhoff theorem*, Ann. Math. **128** (1988), 139–151.

Обобщение условия вращения:

$U \subset \Pi^{-1}(A_0)$–положительно возвращающийся диск для $\tilde{f}$:

$$f(U) \cap U = \emptyset$$

$$\exists n, k > 0 \ \tilde{f}^n(U) \cap (U + k) \neq \emptyset$$

(при $k < 0$ – отрицательно возвращаюшийся диск)

Обобщение условия сохранения площади:

все точки кольца неблуждающие

Теорема Дж.Френкса для открытого кольца, 1988

A–окрытое кольцо

$f : A \to A$–гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию,
гомотопный тождественному отображению

– любая точка кольца A неблуждающая;

– $\sharp Fixf < \infty$;

– $\exists$ поднятие $\tilde{f} : \Pi^{-1}(A) \to \Pi^{-1}(A)$,
обладающее как положительно возвращающимся диском,
так и отрицательно возвращающимся диском.

Тогда f имеет неподвижную точку
с положительным индексом.

Теорема Дж.Френкса для замкнутого кольца, 1988

$$A\text{–замкнутое кольцо}$$

$f : A \to A$–гомеоморфизм,

гомотопный тождественному отображению;

– f удовлетворяет условию вращения;

– любая точка кольца A неблуждающая.

Тогда

$$\sharp Fix f \geq 2$$

В 2007 Дж.Френкс опубликовал исправление найденной им ошибки в теореме о неподвижной точке в открытом кольце. В новой формулировке условие

"$\exists$ поднятие $\tilde{f} : \Pi^{-1}(A) \to \Pi^{-1}(A)$,
обладающее как положительно возвращающимся диском,
так и отрицательно возвращающимся диском"

заменено на условие (при этом неизвестно, верна ли первоначальная теорема)

"$\exists$ поднятие $\tilde{f} : \Pi^{-1}(A) \to \Pi^{-1}(A)$,
обладающее как положительно возвращающимся диском,
который является поднятием диска из A,
так и отрицательно возвращающимся диском,
который является поднятием диска из A"

Ослабление условия вращения в работе

Margheri A., Rebelo C., Zanolin F. Maslov index, Poincare-Birkhoff theorem and periodic solutions of asymptotically linear planar hamiltonian systems - Journal of differential equations, 183, 2002, p.342 - 367.

Условие вращения заменено на следующее:

на одной граничной компоненте кольца угловое смещение $\Phi(\theta, \varrho)$ ***положительно, а на другой - существует точка с отрицательным угловым смещением.***

Тогда

$$\sharp Fix f \geq 1$$

Неинвариантные кольца, сохранение площади

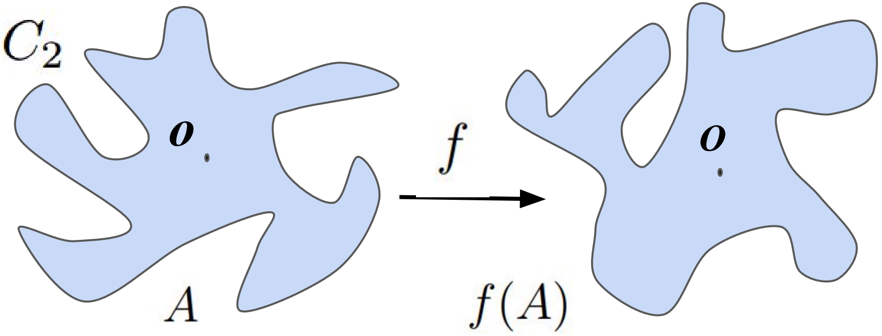
Необходимость развития в данном направлении:

исследование существования периодических решений неавтономных гамильтоновых систем с периодической по времени правой частью

Теорема Якобовица (H. Jacobowitz, 1976)

$f : A \to f(A)$ гомеоморфизм, сохраняющий площадь

$$\tilde{f}(\theta, \varrho) = (\theta + \Phi(\theta, \varrho), r(\theta, \varrho)) \qquad \Phi(\theta, \varrho) < 0 \qquad (\theta, \varrho) \in \Pi^{-1}(C_2)$$



$$\liminf_{\varrho \to 0} \Phi(\theta, \varrho) > 0$$

Тогда $\sharp Fix f \geq 2$

H. Jacobowitz, *Periodic solutions of $x'' + f(x,t) = 0$ via the Poincaré-Birkhoff Theorem*, J. Differential Equations **20** (1976), 37–52

Исправление ошибки

H.Jacobowitz. The existence of the second fixed point: a correction to

H. Jacobowitz, *Periodic solutions of $x'' + f(x,t) = 0$ via the Poincaré-Birkhoff Theorem*, J. Differential Equations **20** (1976), 37–52;

Journal of differential equations, 1977, 25, p.148-149.

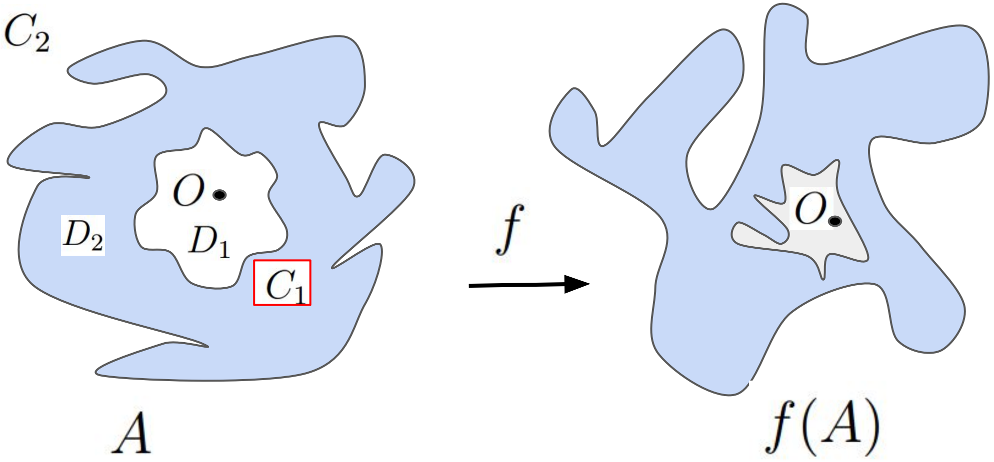
Но результат опровергается дальнейшими контрпримерами

Теорема Динга (W.-Y. Ding, 1983)

$$f : A \to f(A)$$

$$\tilde{f}(\theta, \varrho) = (\theta + \Phi(\theta, \varrho), r(\theta, \varrho))$$

гомеоморфизм, сохраняющий площадь



$$\Phi(\theta, \varrho) < 0 \quad (\theta, \varrho) \in \Pi^{-1}(C_2)$$

$$\Phi(\theta, \varrho) > 0 \quad (\theta, \varrho) \in \Pi^{-1}(C_1)$$

$$\exists\ f_0 : \bar{D}_2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f_0|_A = f \qquad O \in f_0(D_1)$$

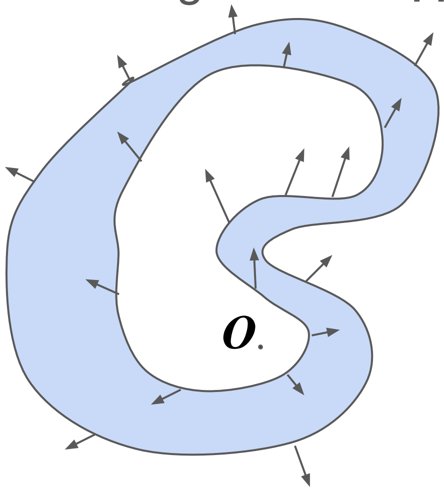
$\boxed{C_1 \text{ звездообразна}}$

Тогда $\quad \sharp Fix f \geq 2$

Ding W.–Y. A generalization of the Poincaré - Birkhoff theorem // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V.83. Pp. 341–346

Контрпримеры

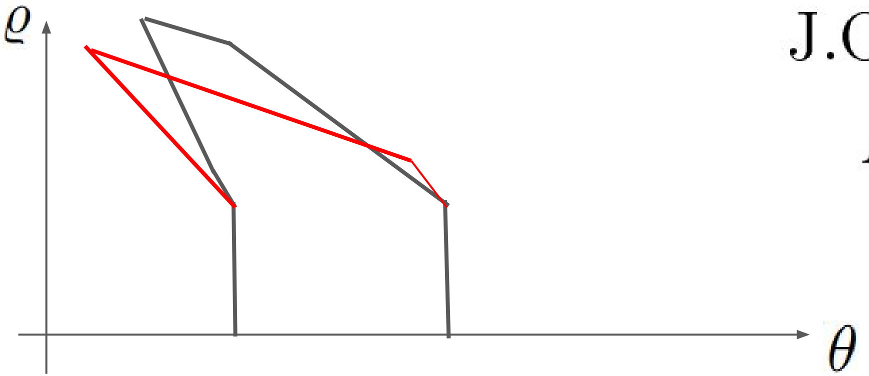
1. R. Martins, A.J. Urena, 2007: ***обе граничные компоненты незвездообразны,*** гомеоморфизм вращения, сохраняющий площадь, продолжение из теоремы Ding'a.   **Неподвижных точек нет**



R. MARTINS AND A.J. UREÑA, *The star-shaped condition on Ding's version of the Poincaré–Birkhoff theorem*, Bull. London Math. Soc. **39** (2007), 803–810.

Контрпримеры

2. Le Calvez, J. Wang, 2010: ***внешняя граничная компонента незвездообразна*.**



J.Oxtoby, S.Ulam, 1941

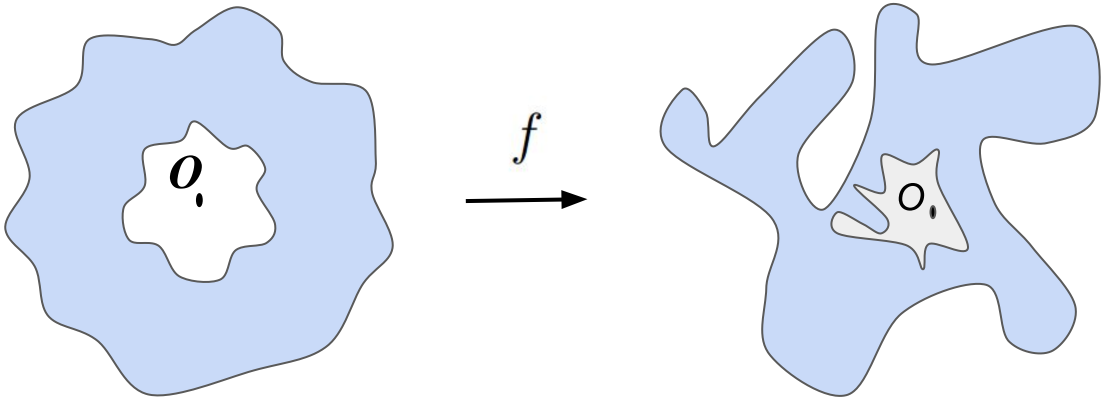
А.Шенфлис, 1906

P. Le Calvez and J. Wang, *Some remarks on the Poincaré–Birkhoff theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 703–715.

Теорема (C. Rebelo, 1997)

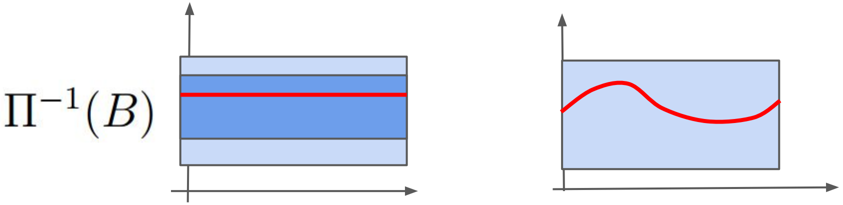
Выполнены условия теоремы Ding'а и дополнительно: ***внешняя граничная компонента звездообразны***. Тогда

$$\sharp Fix f \geq 2$$



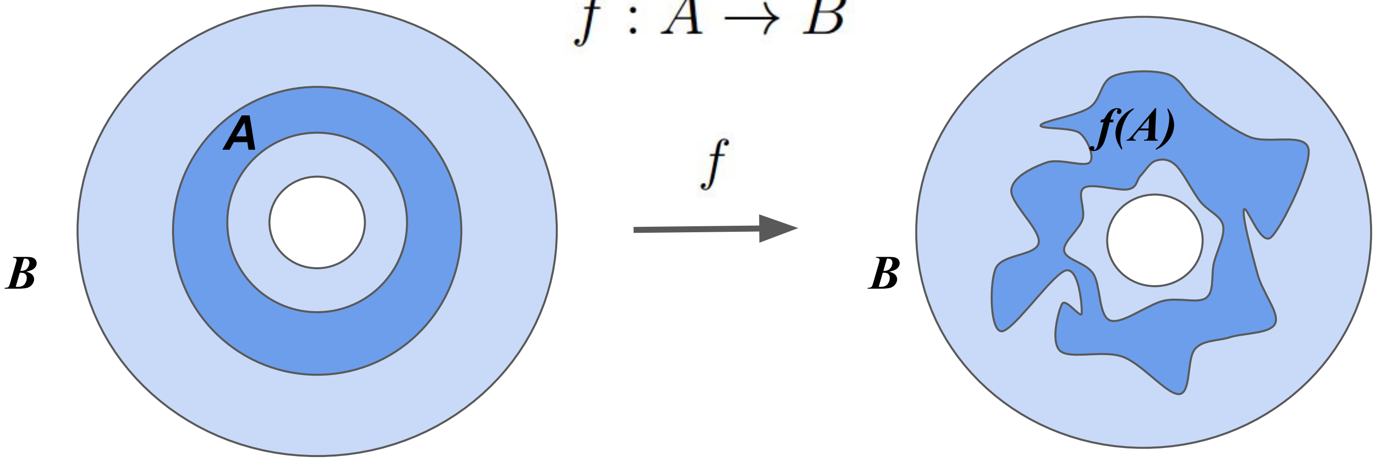
C. Rebelo, *A note on the Poincaré–Birkhoff fixed point theorem and periodic solutions of planar systems*, Nonlinear Anal. **29** (1997), 291–311.

Теорема (J. Franks, 1988)



гомеоморфизм вращения и точное симплектическое вложение (exact symplectic embedding)

$$f : A \to B$$



J. Franks, *Generalizations of the Poincaré–Birkhoff theorem*, Ann. Math. **128** (1988), 139–151.

В работе

Fonda A., Sabatini M., Zanolin F. Periodic solutions of perturbed Hamiltonian systems in the plane by the use of the Poincare-Birkhoff theorem - Topological methods in nonlinear analysis. Journal of the Juliusz Schauder University Centre, 2012, v. 40, pp. 29 - 52

Для периодического неизохронного кольца, т.е. кольца, состоящего из периодических траекторий с различными периодами стационарной гамильтоновой системы, доказывается результат о существовании не менее двух субгармонических траекторий нестационарной периодической (возмущенной) гамильтоновой системы

Комбинаторное доказательство на основе Леммы Шпернера дано в работе
John C. Cloutier.
A combinatorial analogue of the Poincare-Birkhoff fixed point theorem. 2003, Harvey Mudd College, 27 p.

Кольцо $\longrightarrow$ Прямоугольник $\longrightarrow$ Триангуляция $\longrightarrow$

Специальное   раскрашивание вершин и условие согласования с ним отображения, удовлетворяющего условиям теоремы Пуанкаре (регулярное отображение)

Конструктивное доказательство в работе

Li Young, Lin Zhenghua.
A constructive proof of the Poincare-Birkhoff theorem.
Transactions of the AMS, 1995, v. 347, № 6, pp. 211 - 226

Дается аналитическое доказательство теорем Якобовица и Динга. При этом, в отличие от условия Т.Динга, ***не требуется звездность внутренней граничной компоненты***.

Результат опровергается приведенными выше контрпримерами.