References

1. *Ivanov G.E., Thibault L.* Infimal convolution and optimal time control problem. I: Fréchet and proximal subdifferentials // Set-Valued Var. Anal. 2017. DOI:10.1007/s11228-016-0398-z.
2. *Ivanov G.E., Thibault L.* Infimal convolution and optimal time control problem. II: Limiting subdifferential // Set-Valued Var. Anal. 2017. To appear.
3. *Mordukhovich B.S.* Approximation Methods in Problems of Optimization and Control. New York: J. Wiley & Sons, 2005.
4. *Nam N.M., Cuong D.V.* Generalized differentiation and characterizations for differentiability of infimal convolutions // Set-Valued Var. Anal. 2015. V. 23. P. 333–353.
5. *Thibault L.* On subdifferentials of optimal value functions // SIAM J. Control Optim. 1991. V. 29, N 5. P. 1019–1036.
6. *Van Ngai H., The Luc D., Théra M.* Extensions of Fréchet ε-subdifferential calculus and applications // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 268, N 1. P. 266–290.

Построение множества разрешимости в дифференциальных играх с простыми движениями (Construction of the solvability set for differential games with simple motion)*

Л. В. Камнева (L. V. Kamneva), В. С. Пацко (V. S. Patsko)

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

kamneva@imm.uran.ru, patsko@imm.uran.ru

Пусть движение управляемой системы на плоскости описывается динамикой простых движений [1]:

$$\dot{x} = u + v, \qquad u \in P, \quad v \in Q, \quad t \in [0, \vartheta], \quad \vartheta > 0.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-07909) и программы Президиума РАН “Математические задачи современной теории управления”.

Здесь $x \in \mathbb{R}^2$ — фазовый вектор, u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков, каждое из множеств P и Q — выпуклый замкнутый многоугольник или отрезок. Для заданного многоугольника $M \subset \mathbb{R}^2$ первый игрок стремится гарантировать включение $x(\vartheta) \in M$ при начальном условии $x(0) = x_0$, второй игрок — выполнение условия $x(\vartheta) \notin M$.

Формирование позиционной стратегии каждого из игроков может строиться на основе подмножества пространства игры $[0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$, в котором этот игрок способен удерживать траекторию системы при любых действиях противника. Такие множества называются *u- и v-стабильными мостами* [2] для первого и второго игроков соответственно. Стабильные мосты близки по смыслу к множествам уровня функции цены и множествам выживаемости.

Символом W_0 обозначим максимальный (по включению) u-стабильный мост, $W_0(0)$ — его сечение для $t = 0$. Множество $W_0(0)$ будем называть *множеством разрешимости* для первого игрока. Ставится задача разработки алгоритма, сопоставляющего множеству $M = W_0(\vartheta)$ множество разрешимости $W_0(0)$ и не требующего какого-либо дополнительного разбиения промежутка $[0, \vartheta]$.

Для выпуклого терминального множества M известна [3] явная формула, описывающая сечения $W_0(t)$ максимального u-стабильного моста:

$$W_0(t) = \big(M + (-(\vartheta - t)P)\big) \overset{*}{-} (\vartheta - t)Q =: T_{\vartheta - t}(M), \qquad t \in [0, \vartheta]. \quad (1)$$

Здесь используются операции алгебраической суммы и геометрической разности (разности Минковского) [4].

Авторы обобщают один из возможных алгоритмов построения множества $W_0(0)$ по формуле (1) для выпуклого множества M на случай невыпуклого терминального множества M. Основные этапы алгоритма состоят в следующем.

A. Пусть M — невыпуклый n-угольник, ребра которого перенумерованы от 1 до n в порядке положительного обхода границы множества M, т.е. множество остается слева при обходе границы.

Множеству M поставим в соответствие упорядоченный набор полуплоскостей $\widetilde{\mathcal{M}}_1 = \{\widetilde{\Pi}_i\}_{i=1}^n$. Полуплоскость $\widetilde{\Pi}_i$ определим как полуплоскость, содержащую ребро многоугольника M с номером i, вектор внешней нормали к которой является внешней нормалью к множеству M в точках i-го ребра. Будем рассматривать набор $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ полуплоскостей как циклический. Заметим, что любая пара последовательных полуплоскостей в наборе $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ соответствует либо вершине выпуклости, либо вершине вогнутости границы многоугольника M.

Б. Правую часть равенства (1) будем рассматривать как определение оператора T_τ, действующего на множество M при $\tau = \vartheta - t$.

Пусть Π_η — полуплоскость в $\mathbb{R}^2$ с единичным вектором внешней нормали $\eta \in \mathbb{R}^2$. Тогда непосредственно из определения оператора T_τ имеем

$$T_\tau(\Pi_\eta) = \Pi_\eta - \tau\big(u_0(\eta) + v_0(\eta)\big), \qquad \tau > 0,$$

где

$$u_0(\eta) \in \mathrm{Arg}\,\min_{u \in P}\langle u, \eta\rangle, \qquad v_0(\eta) \in \mathrm{Arg}\,\max_{v \in Q}\langle v, \eta\rangle.$$

Для произвольной полуплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ множество

$$\big\{(t, x)\colon\ t \in [0, \vartheta],\ x \in \partial T_{\vartheta - t}(\Pi)\big\}$$

является плоским в пространстве $\mathbb{R}^3 = \{t, x\}$. Здесь символ ∂ обозначает границу множества. Следовательно, любой полуплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ соответствует единственное полупространство $\mathcal{T}_\vartheta(\Pi)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, t-сечение которого для любого $t \in [0, \vartheta]$ совпадает с множеством $T_{\vartheta - t}(\Pi)$.

В. Выпуклый многоугольник M представим в виде

$$M = \bigcap\big\{\Pi_\eta[M]\colon\ \eta \in \mathcal{N}(M) \cup \mathcal{N}(-P)\big\}, \tag{2}$$

где $\Pi_\eta[M]$ — опорная к множеству M полуплоскость с вектором внешней нормали $\eta \in \mathbb{R}^2$; $\mathcal{N}(M)$ и $\mathcal{N}(-P)$ — множества единичных внешних нормалей к ребрам многоугольников M и $-P$ соответственно. Если P — отрезок, то $\mathcal{N}(-P) = \mathcal{N}(P) = \{\nu, -\nu\}$, где вектор ν ортогонален P.

Заметим, что полуплоскости $\Pi_\eta[M]$, соответствующие нормалям $\eta \in \mathcal{N}(-P)$, являются *несущественными* для пересечения (2), т.е. могут быть удалены из правой части (2) без изменения результата пересечения. Однако такие полупространства участвуют, вообще говоря, в построении максимального u-стабильного моста W_0. Поэтому мы включаем их в описание многоугольника M.

Для выпуклого многоугольника M и $t \in [0, \vartheta]$ справедливо равенство (см., например, [5])

$$W_0(t) = T_{\vartheta - t}(M) = \bigcap\big\{T_{\vartheta - t}(\Pi_\eta[M])\colon\ \eta \in \mathcal{N}(M) \cup \mathcal{N}(-P)\big\}. \tag{3}$$

В случае, если выпуклым является множество $M' = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus M}$, изменяя роли игроков, приходим к ситуации выпуклого терминального множества и формуле для $W_0(t)$, аналогичной (3).

Г. В общем случае упорядоченному списку $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ полуплоскостей соответствует упорядоченный список полупространств $\widetilde{\mathcal{L}}_1 = \{\mathcal{T}_\vartheta(\widetilde{\Pi}_i)\}_{i=1}^n$ в трехмерном пространстве времени и фазовых координат. Будем говорить о выпуклости или вогнутости произвольной пары последовательных полупространств в наборе $\widetilde{\mathcal{L}}_1$, если соответствующая пара полуплоскостей из множества $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ относится к вершине выпуклости или вогнутости многоугольника M.

Сформируем из набора $\widetilde{\mathcal{L}}_1$ расширенный набор $\mathcal{L}_1$ полупространств, вставляя между каждой выпуклой (вогнутой) парой последовательных полупространств $L_a, L_b \in \widetilde{\mathcal{L}}_1$ выпуклый (вогнутый) набор $I_\vartheta(L_a, L_b)$ *дополнительных полупространств*, построенных на основе внешних нормалей к множеству $-P$ (множеству $-Q$). Дополнительные полупространства соответствуют в обобщенном смысле существенным полуплоскостям $\Pi_\eta[M]$ из правой части (2) с нормалями $\eta \in \mathcal{N}(-P)$.

Д. Для каждого полупространства $L \in \mathcal{L}_1$ вычисляется значение обратного времени $\mu(L; \mathcal{L}_1, \vartheta) \in (0, +\infty]$ (вес), через которое полупространство L становится несущественным относительно его соседей в списке $\mathcal{L}_1$. Удалив из списка $\mathcal{L}_1$ полупространства с минимальным значением веса и пересчитав вес тех полупространств, у которых появились новые соседи, получаем новый список $\mathcal{L}_2$. Продолжая далее конечную рекурсивную обработку списка полупространств $\mathcal{L}_2$, в итоге находим список полупространств, сечения которых в момент $t = 0$ являются существенными для формирования множества $W_0(0)$.

Просчитано несколько иллюстративных примеров.

Список литературы

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. *Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. №2. С. 54–63.
4. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры. II // ДАН СССР. 1967. Т. 175, №4. С. 764–766.
5. *Kamneva L.V., Patsko V.S.* Maximal stable bridge in game with simple motions in the plane // Advances in dynamic and evolutionary games. Theory, applications, and numerical methods. Basel: Birkhäuser/Springer, 2016. P. 139–163. (Ann. ISDG; V. 14).