Об оптимальном стартовом управлении движением жидкости Кельвина–Фойгта (On optimal starting control of flows of Kelvin–Voigt fluids)*

Е. С. Барановский (E. S. Baranovskii),
М. А. Артемов (M. A. Artemov)

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

esbaranovskii@gmail.com, artemov_m_a@mail.ru

Рассмотрим задачу оптимального управления для уравнений, моделирующих динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости типа Кельвина–Фойгта [1, 2]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} - \varkappa\frac{\partial\Delta\boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad \text{в } \Omega\times(0,T), \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{в } \Omega\times(0,T), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \qquad \text{на } \partial\Omega\times(0,T), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}(\cdot,0) = \boldsymbol{u} \qquad \text{в } \Omega, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}, \tag{5}$$

$$J(\boldsymbol{v},\nabla p,\boldsymbol{u}) = \lambda_1\|\boldsymbol{v}-\widetilde{\boldsymbol{v}}\|^2_{\boldsymbol{C}([0,T];\boldsymbol{H}^1(\Omega))} + \lambda_2\|\nabla p-\widetilde{\boldsymbol{g}}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))} + \\ + \lambda_3\|\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)} \to \inf. \tag{6}$$

Здесь Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ с границей $\partial\Omega\in C^2$, T — фиксированное положительное число, $\boldsymbol{v}$ — скорость течения жидкости, p — давление в жидкости, $\boldsymbol{f}$ — известное поле внешних сил, параметры $\nu>0$ и $\varkappa>0$ характеризуют соответственно вязкие и упругие свойства жидкости, $\boldsymbol{u}$ — параметр управления, $\boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}$ — заданное множество допустимых управлений, J — целевой функционал, $\widetilde{\boldsymbol{v}}$, $\widetilde{\boldsymbol{g}}$, $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ — заданные вектор-функции, λ_i, $i=1,2,3$, — параметры функционала J,

$$0\le\lambda_i\le 1, \qquad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1.$$

*Работа первого автора частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 16-31-00182-мол_а).

Замечание 1. В предельном случае, когда $\varkappa = 0$, уравнения (1), (2) переходят в хорошо известные уравнения Навье–Стокса, описывающие движение ньютоновской жидкости.

Будем использовать стандартные обозначения $\boldsymbol{H}^k(\Omega) = \boldsymbol{W}^{k,2}(\Omega)$ для пространств Соболева вектор-функций, определенных на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$. Через $\boldsymbol{D}(\Omega)$ обозначим множество гладких вектор-функций с носителем, содержимся в Ω. Замыкание $\boldsymbol{D}(\Omega)$ в $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ обозначим через $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. Введем также пространство

$$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \colon\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0\}.$$

Предположим, что

$$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}([0,T]; \boldsymbol{L}^2(\Omega)), \qquad \boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}} \subset [\boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{H}^2(\Omega)], \tag{7}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{C}([0,T]; \boldsymbol{H}^1(\Omega)), \qquad \widetilde{\boldsymbol{g}} \in \boldsymbol{L}^2(0,T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)), \qquad \widetilde{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega). \tag{8}$$

Определение 1. Будем говорить, что $(\boldsymbol{v}, p, \boldsymbol{u})$ — *допустимая тройка* задачи (1)–(6), если

$$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}^1([0,T]; \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{H}^2(\Omega)), \qquad p \in \boldsymbol{C}([0,T]; H^1(\Omega)/\mathbb{R}), \qquad \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}$$

и выполнены равенства

$$\boldsymbol{v}'(t) + (\boldsymbol{v}(t) \cdot \nabla)\boldsymbol{v}(t) - \nu\Delta\boldsymbol{v}(t) - \varkappa\Delta\boldsymbol{v}'(t) + \nabla p(t) = \boldsymbol{f}(t), \qquad t \in [0,T],$$
$$\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{u}.$$

Множество допустимых троек задачи (1)–(6) обозначим через $\boldsymbol{M}$.

Определение 2. *Решением* задачи оптимизации (1)–(6) назовем тройку $(\boldsymbol{v}_*, p_*, \boldsymbol{u}_*) \in \boldsymbol{M}$ такую, что

$$J(\boldsymbol{v}_*, p_*, \boldsymbol{u}_*) = \inf_{(\boldsymbol{v},\, p,\, \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{M}} J(\boldsymbol{v}, p, \boldsymbol{u}).$$

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (7), (8) *и множество* $\boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}$ *ограничено и секвенциально слабо замкнуто в пространстве* $\boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{H}^2(\Omega)$. *Тогда задача* (1)–(6) *имеет по крайней мере одно решение.*

Замечание 2. Изучение системы (1), (2) и различных ее модификаций началось с серии статей А.П. Осколкова [1–4] и было продолжено в работах ряда российских [5–9] и зарубежных [10–12] авторов. Следует также отметить, что в статье [13] рассмотрена задача оптимального управления для уравнений, моделирующих плоскопараллельную динамику вязкоупругих жидкостей Кельвина–Фойгта. В диссертации [14] получены результаты о разрешимости задачи управления посредством внешних сил $\boldsymbol{f}$ для модели (1), (2) в слабой постановке при условиях пристенного скольжения. Оптимальное управление и устойчивость решений линеаризованного одномерного уравнения (1) на геометрическом графе исследуются в [15].

Список литературы

1. *Осколков А.П.* О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 98–136.
2. *Осколков А.П.* К теории нестационарных течений жидкостей Кельвина–Фойгта // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1982. Т. 115. С. 191–202.
3. *Oskolkov A.P.* A nonstationary quasilinear system with a small parameter, regularizing a system of Navier-Stokes equations // J. Sov. Math. 1976. V. 6. P. 51–57.
4. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН. 1988. Т. 179. С. 126–164.
5. *Свиридюк Г.А.* Об одной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. вузов. Математика. 1988. № 1. С. 74–79.
6. *Свиридюк Г.А.* Об одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. вузов. Математика. 1994. № 1. С. 62–70.
7. *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.* О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 3. С. 442–450.
8. *Артемов М.А., Барановский Е.С.* Граничные задачи для уравнений движения полимерных жидкостей с нелинейным условием проскальзывания вдоль твердых стенок // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 14–24.
9. *Барановский Е.С.* Вторая начально-краевая задача для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта // ЖВМиМФ. 2016. Т. 56, № 7. С. 1371–1379.
10. *Dou Y., Yang X., Qin Y.* Remarks on uniform attractors for the 3D non-autonomous Navier–Stokes–Voight equations // Boundary Value Problems. 2011. V. 2011(49). P. 1–11.
11. *Damazio P.D., Manholi P., Silvestre A.L.* L^q-theory of the Kelvin–Voigt equations in bounded domains // J. Diff. Equat. 2016. V. 260. P. 8242–8260.
12. *Garcia-Luengo J., Marin-Rubio P., Real J.* Pullback attractors for three-dimensional non-autonomous Navier–Stokes–Voigt equations // Nonlinearity. 2012. V. 25. P. 905–930.

13. *Свиридюк Г.А., Плеханова М.В.* Задача оптимального управления для уравнения Осколкова // Диф. уравнения. 2002. Т. 38, № 7. С. 997–998.
14. *Кузьмин М.Ю.* О краевых задачах некоторых моделей гидродинамики с условиями проскальзывания на границе: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2007.
15. *Sagadeeva M.A., Sviridyuk G.A.* The nonautonomous linear Oskolkov model on a geometrical graph: the stability of solutions and the optimal control // Semigroups of operators—theory and applications: Proc. Int. Conf., Bedlewo, Poland, 2013. Heidelberg: Springer, 2015. P. 257–271.

On an existence theorem for infinite-horizon optimal control problems

K. O. Besov

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

kbesov@mi.ras.ru

One of the most general and well-known results on the existence of solutions to infinite-horizon optimal control problems was proved by Balder [1] for the problem

$$I(x,u) := \int_0^\infty f_0(t,x(t),u(t))\,dt \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)) \qquad \text{for a.e. } t \in \mathbb{R}_+ := [0,+\infty), \tag{2}$$

$$x(t) \in A(t), \qquad u(t) \in U(t,x(t)) \qquad \text{for a.e. } t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

where

(i) $A\colon \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ is a set-valued map with $(\mathcal{L}\times\mathcal{B}^n)$-measurable[1] graph $\mathcal{A}$;

(ii) $U\colon \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ is a set-valued map with $(\mathcal{L}\times\mathcal{B}^{n+m})$-measurable graph $\mathcal{U}$;

(iii) the functions $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ and $f_0\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ are $(\mathcal{L}\times\mathcal{B}^{n+m})$-measurable.[2]

[1] That is, lying in the σ-algebra generated in $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$ by the Cartesian products of Lebesgue measurable subsets in $\mathbb{R}_+$ and Borel subsets in $\mathbb{R}^n$.

[2] That is, the preimages of Borel sets are $(\mathcal{L}\times\mathcal{B}^{n+m})$-measurable.