Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия (Integrable variable dissipation systems on the tangent bundle of a two-dimensional manifold)*

М. В. Шамолин (M. V. Shamolin)

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Во многих задачах динамики возникают механические системы с пространствами положений — двумерными многообразиями. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к ним. Так, например, изучение пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке среды приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1]. В данном случае динамические системы обладают переменной диссипацией и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [1, 2]. Известен также класс задач о движении точки по двумерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к двумерным многообразиям. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией [1, 3] и обобщают ранее рассмотренные.

Уравнения геодезических и их первые интегралы. Как известно, в случае двумерного риманова многообразия M^2 с координатами (α, β) и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^2\{\dot\alpha, \dot\beta; \alpha, \beta\}$ примут следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0,$$

$$\ddot\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta + \Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-00848-а).

Рассмотрим замену координат касательного пространства $\dot\alpha = R_1 z_1 + R_2 z_2$, $\dot\beta = R_3 z_1 + R_4 z_2$, которую можно обратить: $z_1 = T_1\dot\alpha + T_2\dot\beta$, $z_2 = T_3\dot\alpha + T_4\dot\beta$, при этом R_k, T_k, $k = 1, \ldots, 4$, — функции от α, β. Назовем эти уравнения *новыми кинематическими соотношениями.* Справедливы тождества

$$\dot z_1 = \dot\alpha^2\{T_{1\alpha} - T_1\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} - T_2\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha}\} + \dot\alpha\dot\beta\{T_{1\beta} + T_{2\alpha} - 2T_1\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} - 2T_2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\} + \\ + \dot\beta^2\{T_{2\beta} - T_1\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} - T_2\Gamma^{\beta}_{\beta\beta}\},$$

$$\dot z_2 = \dot\alpha^2\{T_{3\alpha} - T_3\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} - T_4\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha}\} + \dot\alpha\dot\beta\{T_{3\beta} + T_{4\alpha} - 2T_3\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} - 2T_4\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\} + \\ + \dot\beta^2\{T_{4\beta} - T_3\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} - T_4\Gamma^{\beta}_{\beta\beta}\},$$

где $T_{k\alpha} = \partial T_k/\partial\alpha$, $T_{k\beta} = \partial T_k/\partial\beta$, $k = 1, \ldots, 4$.

Рассмотрим достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде: $\dot\alpha = -z_2$, $\dot\beta = z_1 f(\alpha)$, где $f(\alpha)$ — гладкая функция. Если выполнены свойства $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^{\beta}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) \equiv 0$, то система, эквивалентная уравнениям геодезических, может быть приведена к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_2, \\ \dot z_2 = \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2, \\ \dot\beta = z_1 f(\alpha). \end{cases} \tag{1}$$

Предложение 1. *Если всюду справедливо равенство*

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) + 2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \tag{2}$$

то система (1) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 = C_1^2 = \mathrm{const}\,. \tag{3}$$

Предложение 2. *Если функция* $\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$ *является функцией лишь* α:

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) = \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha), \tag{4}$$

то система (1) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_2(z_1;\alpha) = z_1\Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{5}$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\biggl\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(b)\,db\biggr\}.$$

Если выполнено свойство (4) и функция $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)$ также является функцией лишь α: $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) = \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)$, то в системе (1) появляется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трех уравнений (уравнение на $\dot\beta$ отделяется). В частности, если выполнены свойства (2), (4), то такая независимая подсистема появляется.

Предложение 3. *Если выполнены условия* (2), (4), *то система* (1) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_2,z_1;\alpha,\beta) = \beta \pm \int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{C_2 f(a)}{\sqrt{C_1^2\Phi_0^2(a) - C_2^2}}\,da = C_3 = \mathrm{const}, \tag{6}$$

где после взятия интеграла (6) *вместо постоянных* C_1, C_2 *нужно подставить левые части равенств* (3), (5) *соответственно.*

Динамика на касательном расслоении к двумерному многообразию в силовом поле с диссипацией. Несколько модифицируем систему (1), получив систему с диссипацией. Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент $bg(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (7). Добавляется также потенциальное поле сил в виде коэффициента $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (7). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^2\{z_2,z_1;\alpha,\beta\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_2 + bg(\alpha), \\ \dot z_2 = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2, \\ \dot\beta = z_1 f(\alpha). \end{cases} \tag{7}$$

Система (7) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha - bg'(\alpha)\dot\alpha + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0, \\ \ddot\beta - bg(\alpha)f(\alpha)\dot\beta + 2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta = 0. \end{cases}$$

Перейдем теперь к интегрированию системы (7) при выполнении свойств (2), (4).

Теорема. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ *выполняются равенства*

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|g(\alpha)|, \qquad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{g^2(\alpha)}{2}.$$

Тогда система (7) *обладает тремя независимыми трансцендентными первыми интегралами* (*см. также* [3, 4]).

Список литературы

1. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007.
2. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. математика. 2010. Т. 16, №4. С. 3–229.
3. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ, 2013. Т. 125. С. 4–254. (Итоги науки и техники).
4. *Шамолин М.В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фунд. и прикл. математика. 2015. Т. 20, №4. С. 3–231.

Псевдогиперболические уравнения с разрывными коэффициентами четвертого порядка (Fourth-order pseudohyperbolic equations with discontinuous coefficients)

Г. Д. Шукюрова (G. D. Shukurova)

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

shukurova-gulnara@rambler.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей Γ. В цилиндре $Q_T = (0, T) \times \Omega$ рассмотрим смешанную задачу

$$u_{tt} - a(t)\Delta u_{tt} + b(t)\Delta^2 u = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} D^{\alpha} f_{\alpha}(t, x), \qquad (t, x) \in Q_T, \qquad (1)$$