К мультипликативной эргодической теореме (On multiplicative ergodic theorem)

М. Е. Липатов (M. E. Lipatov),
А. М. Степин (A. M. Stepin)

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

maxim.lipatov@gmail.com, anmist@inbox.ru

Коцикл над измеримым потоком $T = \{T^t\colon X \to X\}_{t\in\mathbb{R}}$ со значениями в топологической группе G — это измеримое отображение $A\colon \mathbb{R}\times X \to G$, удовлетворяющее условию $A(t+s,x) = A(s,T^t x)A(t,x)$ при всех $t,s \in \mathbb{R}$ и $x \in X$. Далее будем предполагать, что поток T сохраняет конечную меру μ на X.

Теорема 1. *Пусть коцикл A над T со значениями в $GL(m,\mathbb{R})$ при каждом t удовлетворяет условию $\ln\|A(t,\cdot)\| \in L_1(\mu)$. Тогда существует измеримая функция $x \mapsto \tau(x)$ со значениями в борелевских подмножествах $\mathbb{R}$ плотности 1 такая, что для всех x из некоторого T-инвариантного множества полной меры*

(i) *существует предел*

$$\lim_{\tau(x)\ni t\to+\infty} (A^*(t,x)A(t,x))^{\frac{1}{2t}} =: \Lambda(x);$$

(ii) *$\mathbb{R}^m$ представимо в виде прямой суммы $\bigoplus_{i=1}^{k(x)} U_i(x)$, где $U_i(T^t x) = A(t,x)U_i(x)$ и*

$$\lim_{\tau(x)\ni t\to\pm\infty} \frac{1}{|t|}\ln\|A(t,x)v\| = \pm\chi_i(x) \tag{1}$$

равномерно по $v \in U_i(x)\setminus\{0\}$, причем функции $x \mapsto k(x)$, $x \mapsto \chi_i(x)$ и $x \mapsto d_i(x) := \dim U_i(x)$ T-инварианты, а $\{(e^{\chi_i(x)}, d_i(x)\}$ есть спектр матрицы $\Lambda(x)$ с учетом кратностей.

Ранее в мультипликативной эргодической теореме для операторных коциклов над потоками предполагалось выполненным условие

$$\sup_{0\le t\le 1} \ln^+\|A(t,\cdot)^{\pm1}\| \in L_1(\mu). \tag{2}$$

Предложенная выше формулировка утверждает, в частности, блочную диагонализуемость коциклов в общем случае их log-интегрируемости при всех $t \in \mathbb{R}$.

Все это достигается за счет замены пределов при $t \to \infty$ (в определении показателей Ляпунова) пределами при $t \to \infty$ по множествам плотности 1. Неизбежность этого следует из существования log-интегрируемых операторных коциклов, для которых показатели Ляпунова χ_i не существуют в прежнем смысле. С другой стороны, оказывается, что существование (точных) пределов при $t \to \infty$ в формуле (1) *возможно* для коциклов, не удовлетворяющих условию (2).

Утверждение о диагонализуемости log-интегрируемых коциклов можно усилить — каждый подкоцикл на диагонали когомологичен коциклу блочно-треугольного вида с неприводимыми блочно-конформными подкоциклами на диагонали, что получается использованием результата [1].

Доказательство теоремы 1 можно провести по схеме, предложенной в оригинальном доказательстве Оселедца [2] с использованием понятия правильности, основанного на переходе к пределу по множеству плотности 1. Другой подход к доказательству МЭТ, предложенный Рагунатаном [3], использующий субаддитивную эргодическую теорему Кингмана–Рюэлля [4, 5], также может быть применен к доказательству теоремы 1. Для этого требуется соответствующий вариант субаддитивной эргодической теоремы.

Теорема 2. *Пусть для измеримой функции* $\alpha\colon \mathbb{R}_+ \times X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *выполняется* $\alpha^+(t,\cdot) \in L_1(\mu)$ *при каждом* t *и для всех* $t, s \in \mathbb{R}_+$, $x \in X$

$$\alpha(t+s,x) \le \alpha(t,x) + \alpha(s, T^t x).$$

Тогда существуют измеримая функция $x \mapsto \tau(x)$ *со значениями в борелевских подмножествах* $\mathbb{R}$ *плотности 1 и измеримая* T*-инвариантная функция* $\beta\colon X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *такие, что* $\beta^+ \in L_1(\mu)$,

$$\lim_{\tau(x) \ni t \to \infty} \frac{\alpha(t,x)}{t} = \beta(x) \ \mu\text{-п.в.},$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int \alpha(t,x) d\mu(x) = \inf_t \frac{1}{t} \int \alpha(t,x) d\mu(x) = \int \beta(x) d\mu(x).$$

Приведем две конструкции, содержащие объяснение утверждений, упомянутых в тексте.

Пусть аддитивный коцикл $\alpha\colon \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ ассоциирован с эргодическим потоком $\{T^t\}$. Можно считать, что $X = \{(y,\tau) \in Y \times \mathbb{R} \colon 0 \le \tau \le$ $\le f(y)\}$, где S — эргодический автоморфизм пространства с конечной мерой (Y,ν), $f\colon Y\to[a,\infty)$ $(a>0)$, $f\in L_1(\nu)$, $d\mu=d\nu\cdot d\tau$, динамика — вертикальное движение, а точки $(y,f(y))$ и $(Sy,0)$ отождествляются. В таком представлении потока каждый ассоциированный с ним аддитивный коцикл однозначно восстанавливается по его ограничению на множество $\{(t,(y,0)),\ y\in Y,\ 0\le t\le f(y)\}$; более того, можно считать, что функция f ограничена, и тогда любая суммируемая функция α_0 на этом множестве продолжается до аддитивного коцикла над $\{T^t\}$ со значениями в $L_1(\mu)$. Если при этом для каждого y функция α_0 неограничена по t, то для ее продолжения до коцикла α не верно заключение теоремы Биркгофа.

Пусть поток $\{T_t\}$ построен по эргодическому автоморфизму $S\colon[0,1]\to\to[0,1]$ с инвариантной мерой Лебега в качестве ν и функции $f(y)==y^{-2/3}$. Полагая значения α_0 равными 0 всюду, кроме точек $(n,(y,0))$, $n\in\mathbb{N}\cap[0,f(y))$, а для них — равными $\sqrt{n}$, получаем коцикл над эргодическим потоком, для которого $\sup_{0\le t\le 1}|\alpha(t,\cdot)|\notin L_1(\mu)$, а временные средние сходятся.

Список литературы

1. *Arnold L., Nguyen Dinh Cong, Oseledets V.I.* Jordan normal form for linear cocycles // Random Op. Stoch. Eq. 1999. V. 7, N 4. P. 303–358.
2. *Оселедец В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. ММО. 1968. Т. 19. С. 179–210.
3. *Raghunathan M.S.* A proof of Oseledec's multiplicative ergodic theorem // Israel J. Math. 1979. V. 32, N 4. P. 356–362.
4. *Kingman J.F.C.* The ergodic theory of subadditive stochastic processes // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. 1968. V. 30., N 3. P. 499–510.
5. *Ruelle D.* Ergodic theory of differentiable dynamical systems // IHES Publ. Math. 1979. Vol. 50, N 1. P. 27–58.