Листок 2

1. Докажите, что группа $G = \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle$ имеет квадратичную функцию Дена, и стало быть, не гиперболична.

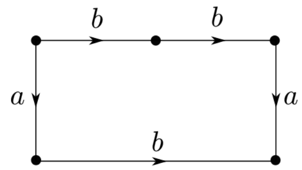
Напоминание: *площадь* $\mathrm{Area}(w)$ слова w, которое тривиально в группе $G = \langle X | R \rangle$ – это минимальное количество многоугольников среди диаграмм Дена над $\langle X | R \rangle$, граничным словом которых является w. *Функция Дена* $f(l)$, $l \in \mathbb{N}$, группы G задается формулой

$$f(l) = \max\{\mathrm{Area}(w) : w \text{ слово длины } l, w = 1 \text{ в } G\}.$$

2. Рассмотрим группу $G = \langle a, b | aba^{-1}b^{-2} \rangle$. Функция Дена $l(n)$ этой группы имеет порядок 2^n. Для каждого n, найдите диаграмму ван Кампена для слова

$$a^n b a^{-n} b a^n b^{-1} a^{-n} b^{-1}.$$

(Это слово имеет длину $4n + 4$, потому что a^n рассматривается как последовательность символов a длины n.) *Подсказка:* для построения диаграммы воспользуйтесь блоком, указанным ниже.



3. На лекции была сформулирована лемма: если слово w является граничным словом некоторой диаграммы ван Кампена над группой $G = \langle X | R \rangle$ (где X – набор образующих, а R – набор соотношений), то в свободной группе $F(X)$ имеет место равенство

$$w = \prod_{i=1}^{k} (u_i)^{-1} R_i u_i,$$

где u_i – некоторое слово, а $R_i \in R$ – одно из соотношений, и k есть количество многоугольников диаграммы. Как, глядя на диаграмму ван Кампена, определить эти слова u_i? Убедитесь на примерах, что ваш рецепт дает верный результат (в частности, для слова $a^2b^2a^{-2}b^{-2}$ в группе $\langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle$, рассмотренного на лекции.)

4*. Два слова w_1, w_2 называются сопряженными в группе G, если для какого-то слова u имеет место равенство $w_1 = u^{-1} w_2 u$ в группе G. Докажите, что для любой гиперболической группы имеется алгоритм, который для двух заданных слов w_1, w_2 определяет, сопряжены ли они в этой группе.

5. Нарисуйте граф Кэли группы $T(2, 3, 7)$ (см. первый листок). Покажите, что этот граф квазиизометричен гиперболической плоскости, стало быть, группа $T(2, 3, 7)$ гиперболическая.

Напоминание: метрические пространства (X, d) и (X', d') называются квазиизометричными, если существует отображение $f : X \to X'$ и $\lambda, k \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\frac{1}{\lambda} d(x, y) - k \le d'(f(x), f(y)) \le \lambda d(x, y) + k$$

для любых $x, y \in X$, и вдобавок f является почти сюрьекцией, то есть любой элемент X' лежит на расстоянии не более k от образа какого-то элемента из X.

6. Покажите, что квазиизометрия метрических пространств – отношение эквивалентности.

7. Пусть две системы образующих и соотношений $\langle S_1 | R_1 \rangle$, $\langle S_2 | R_2 \rangle$ задают изоморфные группы. Докажите, что их графы Кэли квазиизометричны.

8. Докажите, что группы $\mathbb{Z}^2$ и $\mathbb{Z}^3$ не квазиизометричны. *Подсказка:* для группы G, заданной образующими и соотношениями $\langle S | R \rangle$ рассмотрите так называемую *функцию роста*

$$\gamma(n)_{\langle S | R \rangle} := |\{g \in G : d(g, 1) \le n\}|.$$

Здесь $d(g, 1)$ – минимальная длина слова из алфавита S, представляющего элемент g. Покажите, что асимптотическое поведение функции роста для квазиизометричных групп имеет одинаковую асимптотику при $n \to \infty$.