Листок 1

1. Докажите, что слово в группе $\langle a, b | aba^{-1}b^{-1}\rangle$ тривиально если и только если сумма степеней при символе a в этом слове равна нулю, и сумма степеней при символе b также равна нулю.

2. Рассмотрим замощение гиперболической плоскости 8-угольниками (оно нарисовано в Приложении 1). Нарисуйте на каждом ребре замощения ориентацию и поставьте один из четырех символов a_i, $i = 1, \dots, 4$ так, что в каждой вершине замощения будут сходиться 8 ребер, несущих 8 разных символов $a_i^{\pm 1}$, считываемых с учетом ориентации (то есть если ребро ориентировано в сторону этой вершины, считывается символ на этом ребре, а если ребро ориентировано от этой вершины, считывается символ с отрицательной степенью). *Подсказка:* ориентируйте четыре ребра центрального многоугольника по часовой стрелке и другие четыре ребра против, и поставьте символы a_1, a_2, a_3, a_4, a_1, a_2, a_3, a_4 по кругу. Распростаните эту расстановку на другие ребра, используя отражение относительно сторон 8-угольников.

Затем, выбрав удобную начальную вершину, нарисуйте путь, задаваемый словом

$$a_1 a_4^{-1} a_4 a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} a_4^{-1} a_4 a_3 a_2 a_1.$$

Помните: если путь проходит вдоль какого-то ребра в направлении, противоположном ориентации этого ребра, вкладом этого ребра в итоговое слово будет символ на этом ребре с отрицательной степенью.

3. Докажите, что слово

$$a_1 a_2 a_4^{-1} a_1 a_2 a_3 a_4 a_1^{-1} a_2^{-1} a_4 a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} a_4^{-1}$$

задает тривиальный элемент в группе $\pi_1 \Sigma_2 = \langle a_1, \dots, a_4 | a_1 a_2 a_3 a_4 a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} a_4^{-1}\rangle$.

4. Докажите *лемму Дена*: если $\tilde{\gamma}$ – замкнутый путь, состоящий из ребер замощения гиперболической плоскости 8-угольниками, то найдется такой 8-угольник, у которого по меньшей мере 5 подряд идущих сторон лежит на пути $\tilde{\gamma}$.

Подсказка: выберем вершину замощения, лежащую на пути. Определим $Star^1$ как объединение всех 8-угольников, содержащих эту вершину, $Star^n$ как объединение всех 8-угольников, имеющих непустое пересечение с $Star^{n-1}$. Рассмотрите n такое, что $\tilde{\gamma} \not\subset Star^{n-1}$, $\tilde{\gamma} \subset Star^n$. Сколько сторон на границе $Star^n$ имеет любой 8-угольник в $Star^n$, не лежащий целиком во внутренности $Star^n$?

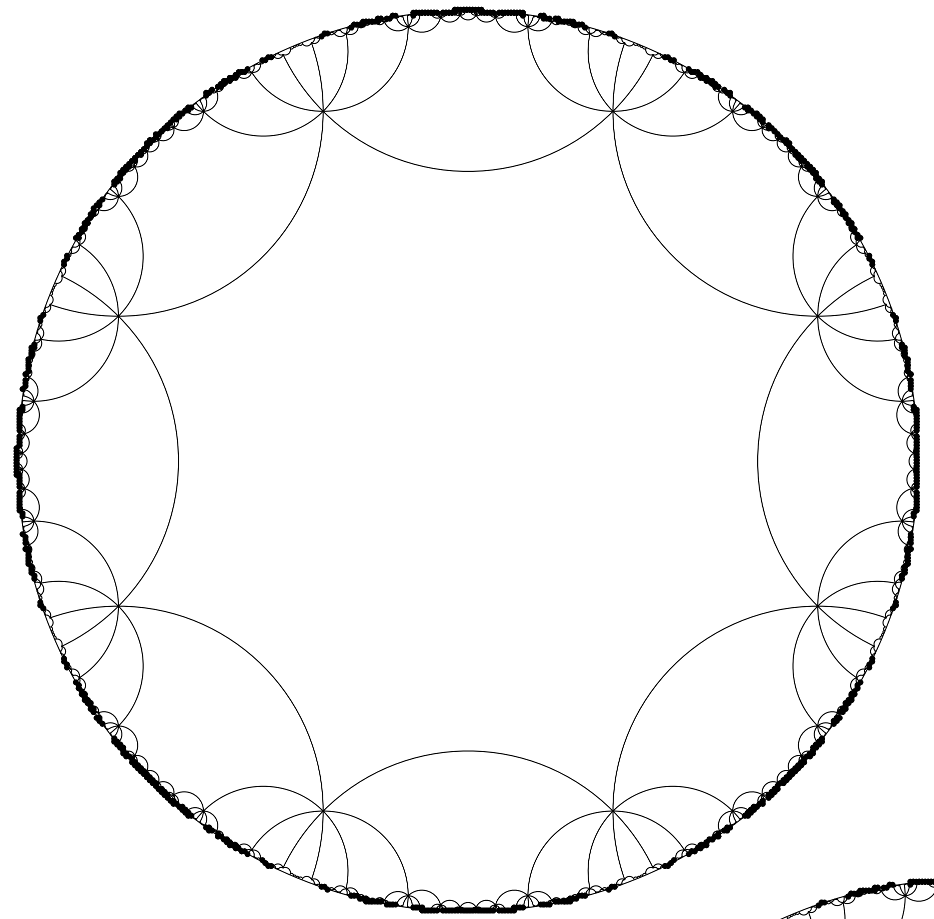
5. На гиперболической плоскости имеется треугольник с углами $\pi/2, \pi/3, \pi/7$; более того, этими треугольниками можно замостить гиперболическую плоскость, как изображено на рисунке в Приложении 2. Убедитесь, что группа сохраняющих ориентацию изометрий этого замощения имеет следующее представление:

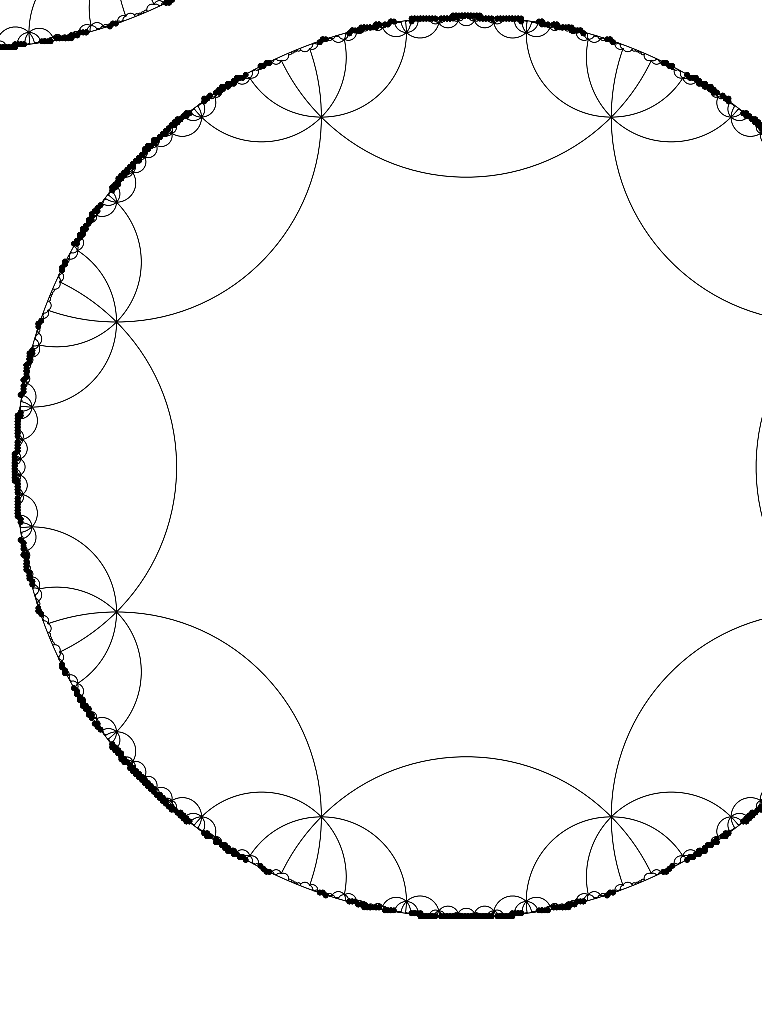
$$T(2,3,7) := \langle a, b | a^2, b^3, (ab)^7\rangle.$$

Здесь $(ab)^7$ обозначает слово $ab \dots ab$ (семь повторений ab). (На следущих лекциях мы увидим, что для этой группы тоже верен некий аналог леммы Дена.)

Если вы хотите задать нам вопросы или обсудить задачи, мы будем рады поговорить с вами. С нами можно связаться по почте tauberr@gmail.com и предложить удобное для вас время встречи, или просто подойти к нам, когда вы нас увидите.

Листок 1, Приложение 1





Гиперболические группы Громова, Дубна 2015 — Дмитрий Тонконог и Ксения Федосова

Листок 1, Приложение 2