О математических работах Насиреддина Туси

Али Бабаев
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
ali_babaev@inbox.ru

Санкт-Петербург. 04 июня 2015

Великий ученый- энциклопедист Насиреддин Туси родился 17 февраля 1201 года в городе Тусе (нынешний Мешхед на востоке Ирана). Но его предки происходили из Хамадана, населенного в основном этническими азербайджанцами. Об этом свидетельствует Рашидеддин Фазлуллах (1247-1318) в своем известном труде «Сборник летописей» («Джами-ат-таварих»): «Когда выяснилось и оправдалось прямодушие и происхождение из города Хамадана ходжи Насир-ад-дина Туси и сыновей Раис-ад-довлэ и Муваффик-ад-довлэ, которые были великими почтенными врачами, [Хулагу-хан] всем им оказал милости, обласкал и дал перевозочные средства, чтобы они вывезли оттуда все свои семьи, родичей и домочадцев со всеми подначальными людьми, слугами, челядью и последователями и поставили бы их на службу его высочеству. До сих пор они и их дети постоянно состояли и состоят на службе и [являются] приближенными его высочества Хулагу-хана и его славного рода».[1]

Полное имя Туси – Мухаммед ибн Мухаммед ибн Хасан (Мухаммед сын Мухаммеда сына Хасана). “Насиреддин” (“опора веры”) это имя – прозвание, которое он получил по окончании курса религиозных наук.

По свидетельству средневековых жизнописателей Н.Туси, он получил блестящее образование в г.Тусе.

После того, как арабы завоевали обширные территории, включая Египет, Сирию и Иран, в их империи стали интенсивно развиваться науки. Собирались и переводились греческие и индийские тексты. В страну приглашались греческие ученые. Некоторые труды на греческом языке, оригиналы которых ныне утеряны, дошли до нас благодаря арабским переводам. К X веку вся античная наука была доступна арабским ученым, которым принадлежат выдающиеся достижения в различных отраслях науки и, в частности, в области математики и астрономии.

Эти факты позволяют судить об уровне образования в эпоху Н.Туси.

Более 25 лет жизни Насиреддина Туси прошли в Кухистане – государственном образовании исмаилитов, религиозного меньшинства шиитского направления. В Европе их называли «ассасинами» . Государство ассасинов создал в 1090 году Хасан ас-Саббах, имевший прозвище “Старец гор”. Подготовка ассасинов-смертников и религиозная борьба методом политических убийств были приоритетом в деятельности этого ордена. Государство ассасинов держало в страхе большую территорию Европы и Азии в течение 200 лет.

Итальянский путешественник Марко Поло, который побывал в этих местах после падения государства ассасинов, приводил следующую легенду: «”Старец гор” разбил сад бесподобный между двух гор. В этом саду он выращивал самые вкусные фрукты, строил очень красивые здания, воздвиг роскошные дворцы, украшенные золотом и драгоценными камнями, проводил арыки, по которым текли вино, молоко, мед и вода. Здесь жили самые красивые девушки, которые умели играть на всех музыкальных инструментах, петь и танцевать. “Старец гор” называл это место раем. Будущего убийцу сначала усыпляли, одурманивали наркотическими средствами, а затем приводили а этот “рай”. После того, как он отдыхал здесь, его, снова усыпив, возвращали назад. Когда он приходил в себя, его спрашивали, где он находился, он отвечал, что находился в раю. Ему поясняли, что если он снова хочет попасть в рай, то должен убить такого-то врага халифа. Таким образом, если “Старец гор” хотел кого-то убить, то отдавал приказ одному из ассасинов, а тот чтобы попасть в рай, а потом оставаться там навечно, с удовольствием выполнял этот приказ. Поэтому большинство правителей исламских государств боялись “Старца гор” и платили ему дань»[2].

В результате каких обстоятельств Туси удерживался в государстве Кухистан и был заточен в крепости Аламут, сказать затруднительно, так как на этот счет имеется несколько версий.

Сам же Туси во введении к своему труду “Шарх аль-Ишарат” (Комментарии к “Указаниям” Ибн Сины) сетовал на тяжелые условия, в которых жил он в крепости Аламут. Но именно здесь им были написаны комментарии к трудам Евклида, Птолемея, Архимеда и такие выдающиеся произведения как “Ахлаги-Насири” (Насирова этика), “Шарх аль-Ишарат”, “Ар-рисала аш-шафийа ан шакк фи-л-хутут ал-мутавазиййа” (“Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий”) и другие.

Слух об исключительном таланте Насиреддина дошел до монгольского принца Мангу-хана, отличавшегося широким умом и покровительствовавщего наукам. Мангу-хан просит своего брата Хулагу-хана, который к этому времени совершает свой поход в Иран и Ирак, освободить Насиредина и направить его к нему.

В 1256 году Хулагу-хан, захватив крепость Аламут, освобождает Н.Туси, но удостоверившись в его высоком уме и необыкновенных способностях, решает оставить его при себе и назначает Н.Туси своим главным советником. Можно сказать, что Хулагу-хан все вопросы государственной важности решал, советуясь с Н.Туси. Известна историческая роль Туси в захвате монголами Багдада. Все советники Хулагу-хана во главе с его визирем Низамеддин Али ибн Фазлуллах ас-Саларом пытались отговорить его от наступления на Багдад. Они утверждали, что это противоречит воле Аллаха, грозили наступлением всяческих бедствий на Земле и смертью самого Хулагу хана. Хулагу-хан спросил мнение Н.Туси, и тот сказал: «Когда были убиты халифы Мухаммед Амин, Мутаваккил, Мунтасир из рода Аббасидов, никаких бедствий не случилось. И теперь, если вы захватите Багдад и убьете халифа Мустасима (известного своей жесткостью– авт.), никаких бедствий не случится». Хулагу-хан по совету Н.Туси нападает на Багдад и за короткое время захватывает его. Правлению Аббасидов, длившемуся 500 лет, приходит конец.

Успешный исход похода на Багдад еще больше усилил авторитет Н.Туси при дворе Хулагу-хана. Сразу после взятия Багдада Н.Туси получает возможность осуществить свою давнюю мечту – создать обсерваторию, которая стала бы крупнейшим научным центром. С созданием обсерватории связана следующая легенда.

После составления “сметы” расходов Хулагу-хан был потрясен огромной суммой, которая требовалась на строительство. Туси напрасно его уговаривал, доказывая необходимость астрономических исследований. Для убеждения он воспользовался приемом аналогии. На вопрос Хулагу-хана о сумме расходов на строительство обсерватории, а именно: «Какая польза от исследования звезд, чтобы расходовать на это столько денег?», Н.Туси отвечает: «Прикажите, чтобы кто-нибудь тайно затащил на вершину горы большой медный таз и в темноте скатил его вниз по горе». Так и делают по приказу Хулагу-хана. Таз, катящийся в темноте ночи, поднимает такой шум, что приводит толпу в Мараге в паническое состояние, и солдаты Хулагу-хана впадают в оцепенение. За всем этим спокойно наблюдают только Н.Туси и Хулагу-хан. Туси указывает на это и говорит, что если вполне естественный шум, вызванный медным тазом, смог так напугать его войска, то какой же ужас вызывают у невежд небесные явления, на которые астрономия учит смотреть спокойно. Хулагу-хан был убежден. Сразу после взятия Багдада был издан приказ, согласно которому казначеи и правители должны были снабдить Насиреддина всем, что он пожелает. Были изготовлены инструменты, получены книги из Хорасана и Сирии, из Багдада и Мосула. По приказу Хулагу-хана со всех концов монгольской империи были приглашены знаменитые астрономы.

В апреле-мае 1259 г был заложен фундамент обсерватории. Для строительства обсерватории Насиреддин выбрал вершину горы вблизи г. Марага (Южный Азербайджан, провинция современного Иран).

Отметим, что эта обсерватория, которая имела богатую библиотеку и близкое к современному астрономическое оборудование, более сто лет была очень известным научным центром. Н.Туси 15 лет руководил марагинской обсерваторией, воспитал и подготовил плеяду блестящих ученых, написал много трудов, которые сыграли ключевую роль в развитии астрономии. После того, как марагинская обсерватория прекратила свою деятельность ученики Туси и ее сотрудники основали в разных уголках мира обсерватории, которыми руководили. Примером тому стали обсерватории Тебриза, Пекина, Дамаска, Самарканда.

В 1274 году по дороге в Багдад Н.Туси заболел и 25 июня того же года скончался. Похоронен ученый рядом с могилой седьмого имама Мусейи-Казыма На могильном камне высечены такие слова: “Шах мира науки, Султан ученых, Заступник религии, справедливости, народа. До сего времени матери не родили таких сыновей”. Подобными эпитетами награждали Насиреддина Туси практически все его современники.

Многие современники Н. Туси отмечают его высокие человеческие качества, его доброту и скромность. “Нежным отцом” называет его ученик из Марагинской обсерватории. Если своей эрудицией, гением он вызывал восхищение ученых, то своими человеческими качествами он добился всеобщего почитания.

Творчество Насиреддина Туси, а так же как и труды его великих предшественников - Аль-Хорезми, Сабит Ибн Курры, Ибн Сины, Абу Рейхана Бируни, Омара Хайяма, - опровергают бытующее среди некоторых исследователей мнение, что арабская наука была сугубо практической и в отношении теоретической мысли в арабском средневековье наблюдался регресс по сравнению с античной.

Вклад Насиреддина Туси в развитие математической науки неоспорим.

В библиографическом труде Г.П. Матвиевской и Б.А. Розенфельда [3] приводятся названия и места хранения 29-и рукописей Туси по математике. Некоторые труды Туси по астрономии и математике переведены на латынь, французский, русский и азербайджанский языки, при этом часть переводов сделана еще в средние века.

Так же как и сочинения других арабоязычных ученых, труды Н. Туси попали в Европу через Византию и Испанию и оказали несомненное влияние на развитие науки в Европе. В трудах европейских ученых Средневековья встречаются ссылки на результаты исследований Туси с упоминанием его имени или без ссылок на него. Так, Николай Коперник использовал тригонометрические теоремы Туси при создании своей гелиоцентрической системы мира.

Один из самых известных трудов Туси – “Изложение Евклида”. Существуют два варианта этого трактата. Первый вариант был опубликован в начале 1594 г. на арабском языке в Риме, а потом в 1657 г. на латыни в Лондоне. Второй вариант– 1881 г.– издан на арабском языке в Тегеране.

Стиль “Изложения” характеризуется приведением текстов “Начал” и комментариев к ним, начинающихся фразой «Я говорю» ..... Туси или упрощает или уточняет доказательства или приводит доказательства других авторов.

. О целесообразности перевода “Изложения” на русский язык писали А.П. Юшкевич, Б.А. Розенфельд и Г.П. Матвиевская.

Начатое после перевода на азербайджанский язык Г.Д. Мамедбейли и продолженное сотрудниками Института математики НАН Азербайджана исследование “Изложения” открыло поразительные, неизвестные доселе факты, меняющие сложившуюся историческую картину развития математики.

К таким фактами, например, относятся следующие:

Исследование комментариев Туси к геометрическим понятиям, положениям и теоремам Евклида приводит к выводу, что ко времени написания “Изложения” изменился характер геометрической мысли.

Если геометрия Евклида, по выражению С. Яновской, была “геометрией циркуля и линейки, но идеализированных циркуля и линейки” [Ист.-мат. Исследов. Т.XIII], а по мнению переводчика и комментатора “Начал” Мордухай-Болтовского – имела “конструктивный характер”, то “геометрия Туси”– это уже геометрия идеальных сущностей, хотя он и придерживается Евклида. Если существование по Евклиду – это возможность “построить” пусть и с помощью “идеализированных циркулей и линеек”, то у Туси существование имеет логически-выводимый идеальный характер.

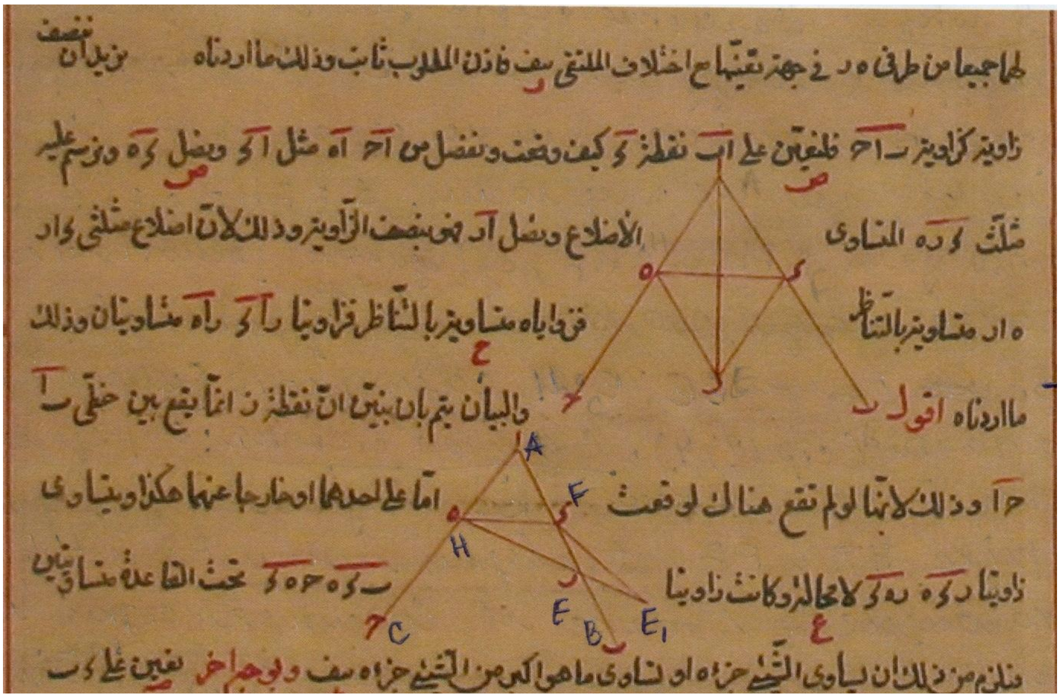
Об этом говорят следующие аксиомы, предпосылаемые Туси постулатам Евклида (планиметрии):

1. Точка, прямая, плоскость и поверхность наиважнейшим образом существуют, и круг существует.
2. На любой линии и на поверхности мы можем определить точку.
3. На любой поверхности мы можем предположить линию.
4. Как бы ни была расположена точка, мы можем предположить линию, проходящую через эту точку.
5. Любая точка, отрезок прямой и плоскостная поверхность наложимы на свой аналог.

С современной точки зрения – это аксиомы существования (1), принадлежности (2-4), конгруэнтности (5). Что касается аксиомы существования, то она отражает философско-логические воззрения Туси, излагаемые им в различных трактатах (и о видах существенного, и о научных силлогизмах и о выводе с пустым антецедентом). Так в логическом труде «Асас-ал иктибас» Туси пишет: «то, что не существует, о нем ничего утверждать нельзя». Таким образом прежде чем что-то доказывать о геометрических фигурах, надо сначала принять их существование. Процитируем высказывание Гильберта «Здесь обычно исходят из предположения о существовании всех элементов, то есть заранее предполагают, что существуют 3 системы вещей, а именно точки, прямые и плоскости, а затем, в существенном, по примеру Евклида, устанавливают между этими элементами взаимоотношения, посредством известных аксиом».

Об изменении характера геометрических представлений говорят и доказательства некоторых “передоказанных им” теорем, приводимых Туси.

Так в IX предложении I-ой книги - «Данный прямолинейный угол рассечь пополам» - Евклид строит равносторонний треугольник с вершинами на сторонах угла, что, возможно, согласно доказанному евклидову предложению 1, и соединяет 3-ю вершину с вершиной угла. То, что третья вершина треугольника лежит внутри угла у Евклида не вызывает сомнений. Действительно, если повторить конструкцию предложения 1: “о возможности построения равностороннего треугольника”, то действительно это будет так. Туси же делает замечание, что вершина может *находиться* и на стороне угла и вне его и рассматривает эти случаи . То есть доказательство теорем у Туси приобретает логико-дедуктивный характер. И если существование у Евклида– это наличие конструкции, у Туси - дедуктивно обоснованное, идеальное существование .

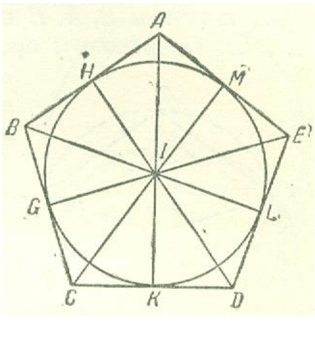


К Предложению 13 четвертой книги Туси делает замечание, также уточняющее форму доказательства.

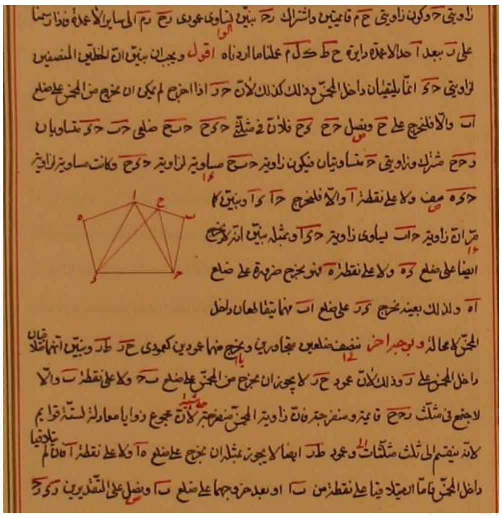
«Предложение 13. В данный пятиугольник, являющийся равносторонним и равноугольным, вписать круг.

Пусть данный пятиугольник, равносторонний и равноугольный, будет $ABCDE$; требуется вписать в пятиугольник $ABCDE$ круг.

Рассечем каждый из углов BCD, CDE пополам прямыми CI, DI; и из точки I, в которой встречаются друг с другом прямые CI и DI, проведем соединяющие прямые…» и продолжает доказательство[4].



В замечании Туси говорится: «то, что биссектрисы углов C и D пересекутся внутри пятиугольника, нужно доказывать». Далее Туси подробно доказывает, что биссектрисы пересекаются внутри пятиугольника [5].



Замечания к предложениям 29,30 десятой книги «Начал» имеют другой характер.

Предложение 29. Найти две рациональные, соизмеримые только в степени <прямые> так, чтобы в квадратах большая была больше меньшей на <квадрат> на соизмеримой с ней самой линейно.

Отложим некоторую рациональную <прямую> AB и два квадратных числа CD, DE так, чтобы их разность CE не была квадратом,...

В замечании Туси показывает способ построения (в десятой книге числа моделируются отрезками) двух чисел, разность квадратов которых не является квадратом.

В замечании к предложению 30 дается способ построения двух чисел, сумма квадратов которых не является квадратом.

В «Изложении книги измерения плоских и сферических фигур Бану Муса» замечания Туси тоже имеют характер уточнения доказательства. Рассмотрим Замечание к теореме 3.

Теорема 3. Пусть даны отрезок и круг, если отрезок меньше длины окружности круга, то в данный круг можно вписать многоугольник с периметром, большим, чем длина отрезка. Если отрезок больше длины окружности данного круга, можно описать многоугольник, около данного круга с периметром, меньшим, чем длина данного отрезка.

Для доказательства строится круг, длина окружности которого равна данному отрезку. Туси пишет: «Я говорю, все доказательство основывается на существование круга, длина окружности которого равна данному ограниченному отрезку... А это нигде не доказано».

Как известно, вплоть до XV века единица числом не считалась, так как она представлялась как количественное проявление монады, а число определялось как совокупность единиц (греческая традиция). Числовая характеристика единицы не выявлялась. В комментариях к VII книге "Начал", приводя Евклидово определение числа, Н.Туси пишет: «Я говорю: "Числом называется то, что занимает место в ряду счета. По этому определению единица должна считаться числом"». Таким образом, выявляется свойство чисел (начиная с единицы) – быть в ряду счета (т.е. быть характеристикой факторизации при взаимно-однозначном соответствии).

И, наконец, в 11 книге, посвященной стереометрии, Евклид дает описательные определения пространственных фигур, но не приводит аксиом. В замечании Туси приводит 3 стереометрические аксиомы:

1. Через данную прямую можно провести плоскость.
2. Через данную прямую и точку (на ней не лежащую) можно провести только одну плоскость.
3. Две плоскости не содержат пространства.

Заметим: принято считать, что первые стереометрические аксиомы ввел Борелли Джованни (XVII в).

Произведение Н.Туси “Трактат о полном четырехстороннике” (Шаклул-Гита) [6], по своей сути, является первым математическим трудом по тригонометрии как отдельной науке. До Туси тригонометрия рассматривалась как часть астрономии. В “Трактате” ученый впервые вводит понятие полярного треугольника и применяет его к решению задачи определения стороны сферического треугольника по трем углам. В этом “Трактате” Туси развивает теорию отношений Евдокса для несоизмеримых величин и вводит числовую характеристику отношений (“относиться” к единице).

“Трактат” был известен европейским ученым, в частности Региомонтану (XV в), а в 1952 году был переведен на русский язык Г.Д. Мамедбейли и Б.А.Розенфельдом.

В.Н. Молодший в книге “Основы учения о числах в начале XVIII-XIX веков” [7], ссылаясь на “Трактат”, писал: «В XIII веке азербайджанский астроном и математик Н.Туси определил понятие положительного действительного числа, так же, как и Ньютон (т.е. Туси дал определение на 460 лет раньше Ньютона– авт.)». Напомним, что число в определении Ньютона- это отношение одной величины к другой такого же рода, принятой за единицу.

Развитие теории параллельных линий происходило на протяжении двух тысячелетий. Теория параллельных была существенно продвинута в IX-XIVвв. учеными арабского мира. Трактат Туси о параллельных носит название “ар-Рисала аш шафийа ан шакк фи-л-хутут ал-мутавазаййа” (Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий) . [8].

Возражения против V постулата Евклида известны еще с античных времен. Однако причины сомнений в правомерности введения известной формулировки в качестве постулата были в прямой зависимости от философских и мировоззренческих взглядов критикующего и в итоге - от семантики геометрических понятий. Так Д.Д.Мордухай– Болтовский писал: «Представляется вероятным, что искать доказательство постулата древних заставляла вовсе не недостаточная очевидность, а только неприемлемая в то время форма». Прокл Диадох в своих «Комментариях к Евклиду» заявляет, что «это положение не применяется в качестве конструкции и не ставит требование что-то найти , а оно объясняет свойство…». « Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий» Н.Туси содержит не только критику теории параллельных его предшественников, но и его собственную аргументацию против постулата, и вместе с «Изложением Евклида», позволяет сделать и подтвердить предположение об изменившихся к этому времени взглядах на геометрические понятия. Анализ введения к трактату приводит к выводу, что Туси придерживался взглядов Аристотеля на аксиомы и постулаты. По Аристотелю, «постулат есть нечто такое, что хотя и подлежит доказательству, но понимается и принимается недоказуемым». Туси, пишет: «Он (Евклид) считал, что геометр не может доказать это свойство (V постулат), наиболее существенное для предмета искусства, оно получается необходимо в высшем искусстве. Но тогда эта трудность должна принадлежать аксиоме, в то время как обратное (положение 27 « Начал») нуждается в доказательстве. Как может кто-то счесть их принадлежащим к двум разным наукам или отнести их к двум противоположным дисциплинам ». Можно сравнить с высказыванием Прокла по этому поводу: «Разве не смешно причислять к недоказуемым предложения, обратные для которых являются доказуемыми». Заметим, что V постулат- это индуцированная идеализация построения двух отрезков, пересеченных третьим. В каждом случае точка пересечения находится, в то время, как обратное утверждение о расхождении – логически выводимое положение. Об этом говорит и Туси: «Это утверждение основано на практике, а не на интуиции проницательного исследователя». «Утверждение о встрече двух приближающихся линий не является абсолютным (что имеет место у гиперболы и двух прямых линий, не пересекающих ее)».

III. Трактат Насиреддина Туси “Сборник по арифметике с помощью доски и пыли” был написан в 1265 году [9]. Объясним, прежде всего, суть названия трактата. На Востоке, одним из средств выполнения вычислений с древних времен до позднего средневековья была доска, покрытая пылью (дорожной, каменной и т.д.). На этой доске с помощью остроконечной палочки (в виде ручки) записывались числа и выполнялись арифметические действия. Промежуточные результаты стирались и заменялись другими.

При исследовании трактата открылись факты, ранее неизвестные и меняющие датировку некоторых математических утверждений.

В разделе умножение целых чисел Туси пишет:" Для новичков мы создали таблицу умножения для чисел меньше десяти":

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	56
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	56	63	72	81

Ташкентская рукопись, лист 114

Такую таблицу мы не встречали в математических трудах Ал-Хорезми ,Ал-Банна, Ан-Насеви, Ал-Бируни, Омар Хаййама и других средневековых ученых. Рекомендуя запомнить эту таблицу, Туси параллельно приводит, очевидно, используемые в то время приемы умножения чисел меньших пяти и больших пяти. Поэтому не лишена основания версия, что впервые таблицу умножению составил Н.Туси.

В восьмом разделе Туси приводит таблицу для вычисления степеней.

Ташкентская рукопись , лист 120.

В этой таблице даются буквенные обозначения степеней. Мы сравнили эту таблицу с таблицей из XI главы книги Джона Валлиса "Исторический и практический трактат по алгебре", приведенной в [10].

Nomina	**Characnerer**				**Protestas seu qradus**
Radix	*R*	*A*	*a*	*a*	1
Quadratum	*Q*	*Aq*	*aa*	a^2	2
Cubus	*C*	*Ac*	*aaa*	a^3	3
Quad. Quadratum	*QQ*	*Aqq*	*aaaa*	a^4	4
Surdesolidum	*S*	*Aqc*	&c.	a^5	5
Quad. Cubi.	*QC*	*Acc*		a^6	6
2^m Surdesolidum	*bS*	*Aqqc*		a^7	7
Quad. quad. quad.	*QQQ*	*Aqcc*		a^8	8
Cubi. Cubus	*CC*	*Accc*		a^9	9
Quad.Surdesol	*QS*	*Aqqcc*		a^{10}	10
3^m Surdesolidum	*cS*	*Aqccc*		a^{11}	11
Quad. quad. cubi.	*QQC*	*Acccc*		a^{12}	12
4^m Surdesolidum	*dS*	*Aqqccc*		a^{13}	13
Quad. 2^i Surdesol.	*QbS*	*Aqcccc*		a^{14}	14
Cubus Surdesol.	*CS*	*Accccc*		a^{15}	15
Quad. quad. quad. quad.	*QQQQ*	*Aqqcccc*		a^{16}	16

Таблица 1

В этой таблице приведены знаки, используемые известными математиками шестнадцатого и семнадцатого веков, для обозначения корня, квадрата, куба, с 4 по 16-ую степень. В таблице 1 второй столбец– это обозначения Виета, третий– Оутреда, четвертый – Гарриота и пятый – Декарта. Если сравнить знаки таблицы степеней у Оутреда (1574-1660) и Туси , употребляемые для этих целей , [таблица 2] то мы увидим поразительно совпадение принципов обозначения.

.

Н.Туси	Оутред	Современное написание
р	A	a
l	Aq	a^2
b	Ac	a^3
ll	Aqq	a^4
lb	Aqc	a^5
bb	Acc	a^6
llb	$Aqqc$	a^7
lbb	$Aqcc$	a^8
bbb	$Accc$	a^9
$llbb$	$Aqqcc$	a^{10}

Таблица 2

Здесь r,l,b последние буквы арабских слов– джузур (корень), мал (квадрат), киаб (куб). Буквы q и c (у Оутреда) соответственно первые буквы слов Quadratum и Cubus (квадрат и куб), обозначение A– не соотнесено со словом.

Учитывая тот факт, что в арабском языке слова пишутся справа налево, принцип обозначения степеней у Туси и Оутреда одинаков.

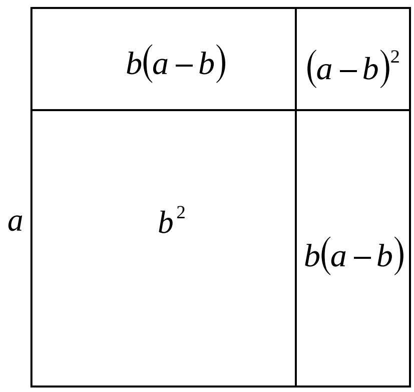
Заметим, что не известно употребление таких символов не только у предшественников Туси, но и у арабских математиков более позднего периода. Так, например, нет ничего подобного в известном труде “Ключ к арифметике” Дж.Г.Каши, жившего двумя веками позже Туси.

В девятом разделе приводится алгоритм извлечения квадратного корня, который сейчас известен под названием: метод Руффини –Горнера.

В случае иррациональности числа требуется найти приближенное значение корня, для чего требуется определить разность квадратов между числами. Туси приводит правило определения разности двух квадратов. Однако это не привычный для нас способ алгебраического представления разности квадратов как произведения суммы и разности. Туси пишет: «*Знай, если мы хотим определить разность квадратов двух подряд идущих чисел, достаточно их суммировать. Если* ч*исла идут не подряд\, то меньшее умножаем на их разность удваиваем произведение и прибавляем к квадрату разности*,» т.е.

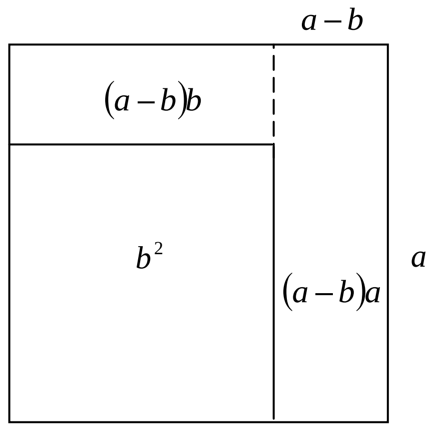
$$a^2 - b^2 = 2b(a-b) + (a-b)^2$$

Отсюда можно сделать вывод, что формула $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ не была известна Н.Туси,



В связи с этим пример, который приводит И.Г. Башмакова в статье "Новый взгляд на геометрическую алгебру древних" (ИМИ 36.2) в качестве аргументации существования геометрической алгебры не кажется нам убедительным

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$



В девятом разделе I части даны алгоритмы для извлечения квадратного корня, в десятом – кубического корня, а в одиннадцатом – корня любой степени.

В этом разделе приведена таблица, составленная Туси для коэффициентов бинома и алгоритм для ее составления в форме треугольника. Хотя считается, что таблицу для биномиальных коэффициентов составил знаменитый французский математик и физик Блез Паскаль (1623-1662). В подтверждение этому приведем цитату из Энциклопедического словаря математики, изданного в 1998 году в Москве (стр.175): «для вычисления коэффициентов бинома Паскаль разработал метод (“треугольник Паскаля”)». Но этот «треугольник» встречается ранее, например, в работах ал Самавала / 12 в./

Ташкентская рукопись, лист 122.

Другим впечатляющим фактом является замечание Н.Туси о “мерилах” в 12 раздела первой части. Здесь излагается проверка результатов арифметических действий с помощью “мерила”. Под способом “мерила” подразумевается способ проверки правильности действий с помощью числа 9 (11,7 и т.д.), основанный на сравнении остатков (“проверочных” чисел “мерил”) от деления суммы цифр числа на 9 (11,7 соответственно). Этот способ был известен грекам и индийцам. Суть его в том, что при выполнении арифметических действий над “мерилами” исходных производили те же действия, находилось “мерило” результата и сравнивалось с “мерилом” результата основной операции. Считалось, что совпадение мерил является необходимым и достаточным условием для проверки правильности вычислений. Об этом говорят в своих трудах такие великие средневековые математики как Абу-л Хасан ибн Ахмад ан Насави (X в.) [11] и Ахмад ибн ал-Банна (XIII-X1Vв.) [12].

Тем не менее, это условие необходимо, но не достаточно. История математики датирует первое указание на недостаточность условия XV веком.

В двенадцатом разделе I части “Сборника” Н.Туси пишет: «У вычислителей есть способ проверки, известный как “мерило”. Если вычисление проводилось верно, то “мерила” тоже совпадают, если “мерила” не равны, то вычисление тоже проводилось неверно. Нельзя сказать, что если “мерила” равны, то вычисление велось правильно, (или) если вычисление велось неправильно, то “мерила” тоже не равны».

Таким образом, утверждение о недостаточности проверки с помощью совпадения мерил появилось уже в XIII веке.

В Европе недостаточность проверки "девятью" была специально отмечена лишь Н.Шюке (1484 г.) и Л.Пачиоли (1495 г.).

Во второй главе Туси дает определение положительного рационального числа.

«Число – это величина относимая к единице и к тому, что составлено из единиц, либо отдельно либо в отношении к совокупности, принятой за единицу. Первое из них– целые, вторые– дроби, и совокупности, по отношении к которым они берутся, называются их [дробей] знаменателями».

Другим интересным фактом является то, что приводимый в третьем разделе II части алгоритм сложения дробей основан на методе нахождения общего знаменателя как наименьшего общего кратного. Все предшествующие Н.Туси математики и даже на 60 лет моложе его Ахмад ибн ал-Банна с целью нахождения общего знаменателя просто перемножали знаменатели слагаемых. Нахождение общего знаменателя как наименьшего общего кратного датируется второй половиной XVI века (Тарталья и Клавиус) .

Творчество Насиреддина Туси - неоценимый источник для изучения математической мысли в арабском средневековьи и для переосмысления многих математических идей.

Литература

1. Рашид-да-дин. Сборник летописей, т. Ш. Пер. с персидского под ред. Рамаскевича, с участием А. Али-заде. М.- Л. , 1946.

2. Марко Поло. Путешествие.Географиздат, М., 1956.

3.Матвиевская Г.П. Розенфельд Б.А. Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды (VIII-XVII в.в) т2. Москва 1983.

4.Начала Евклида. Москва, Ленинград 1948.

5.Насиреддин Туси. Изложение Евклида. Баку,2001. (На азербайджанским языке).

6.Насиреддин Туси. Трактат о полном четырехстороннике. Баку,1952.

7.Молодший В.Н. Основы учения о числе в XVIII и начале XIX века.Москва 1963.

8. .Насиреддин Туси. Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий. перевод трактата Б.А. Розенфельд и А.П. Юшкевич, “Историко-математических исследования” 1960, вып.13

9. Рожанская М.М., Матвиевская Г.П., Лютер И.О. Насир ад-дин ат- Туси и его труды по математике и астрономии в библиотеках Санкт-Петербурга, Казани, Ташкента и Душанбе. Москва 1999.

10.Токарева Т.А. “Об историческом и практическом трактате по алгебре Джона Валлиса”. Историко-математические исследования. Вып. XXVII.Москва 1983.

11.Али ибн Ахмад ан-Насави. “Достаточное об индийской арифметике”. Историко-математические исследования. Вып. XV. Москва 1963.

12.Ахмад ибн ал-Банна. “Краткое изложение арифметических действий.” Историко-математические исследования серия II, вып. 9(44)Москва 2005.