Stochastic gradient-free online convex optimization. One point and many points inexact oracles. Convex and strictly convex cases

Gasnikov Alexander (PreMoLab MIPT, IITP RAS)

Dvurechenski Pavel (IITP RAS, PreMoLab MIPT)

Krymova Ekaterina (IITP RAS, PreMoLab MIPT)

Usmanova Ilnura (MIPT), Fedorenko Fedor (MIPT),

Kamzolov Dmitry (MIPT), Merkulov Daniil (MIPT)

February 27, 2015

Стохастическая безградиентная оптимизация

Рассматривается задача стохастической выпуклой оптимизации в пространстве $\mathbb{R}^n$

$$f(x) := E_\xi\left[f(x,\xi)\right] \to \min_{x\in Q}. \qquad (1)$$

Считаем также, что в $\mathbb{R}^n$ ($n \gg 1$) задана норма $\|\ \|$ и прокс-структура относительно этой нормы. Прокс-диаметр множества Q считаем равным R. Мы будем добавлять нижний индекс 2, если $\|\ \| = \|\ \|_2$ и проск-структура предполагается евклидовой. Функция $f(x)$ предполагается μ_2-сильно выпуклой в 2-норме ($\mu_2 \ge 0$, сюда включается случай просто выпуклости $\mu_2 = 0$).

Пример. Пусть Q – единичный шар в p-норме. Относительно оптимального выбора нормы и прокс-структуры можно заметить следующее: если $p \ge 2$, то в качестве нормы оптимально выбирать $\|\ \|_2$ и евклидову прокс-структуру. Определим q из $1/p + 1/q = 1$. Пусть $1 \le p \le 2$, тогда $q \ge 2$. Если при этом $q = o(\log n)$, то оптимально выбирать $\|\ \| = \|\ \|_p$, а прокс-структуру задавать прокс-функцией $d(x) = \frac{1}{p-1}\|x\|_p^2$. Во всех этих случаях прокс-диаметр множества Q есть $R = \sqrt{\max_{x\in Q} d(x)} = \mathrm{O}(1)$. Для $q \ge \Omega(\log n)$, выберем $a = 2\log n/(2\log n - 1)$, $\|\ \| = \|\ \|_a$, а прокс-структуру будем задавать прокс-функцией $d(x) = \frac{1}{a-1}\|x\|_a^2$. В этом случае прокс-диаметр множества Q есть $R = \mathrm{O}\left(\sqrt{\log n}\right)$. Детали см., например, в работе *Agarwal A., Bartlett P.L., Ravikumar P., Wainwright M.J.* Information-theoretic lower bounds on the oracle complexity of stochastic convex optimization // e-print, 2011. arXiv:1009.0571

Считаем, что имеют место неравенства

$$\left\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\right\|_* \le L\|x - y\|,\ E_\xi\left[\left\|\nabla f(x,\xi) - E_\xi\left[\nabla f(x,\xi)\right]\right\|_*^2\right] \le D,$$

которые предполагаются выполненными в некоторой окрестности множества Q (здесь важно, что функция $f(x)$ задана не только на множестве Q, но и в некоторой его τ_0-окрестности, см. ниже).

Предположим теперь, что у нас оракул может выдавать только реализацию значения функции при этом с шумом не только случайной природы.

Предположение 1. δ*-оракул выдает (на запрос, в котором указывается только одна точка* x*)* $f(x,\xi)+\delta(x,\xi)$*, где с.в.* ξ *независимо разыгрывается из одного и того же распределения, фигурирующего в постановке (1), случайная величина* $\delta(x,\xi)=\tilde{\delta}(x)+\bar{\delta}(\xi)$*, где* $\bar{\delta}(\xi)$ *– независимая от* x *случайная величина с неизвестным распределением (случайность которой может быть обусловлена не только зависимостью от* ξ*), ограниченная по модулю* δ*,* $\tilde{\delta}(x)/(R\delta)$ *– неизвестная 1-липшицева функция в норме* $\|\ \|$.

Имея в распоряжении такого δ-оракула, требуется предложить оптимальный метод. По определению это метод, для которого для данного класса задач в соотношении

$$E\left[f\left(x_{N(\varepsilon)}\right)\right]-\min_{x\in Q} f(x)\le\varepsilon,$$

$N(\varepsilon)$ – минимально. Если случайная величина $\|\nabla f(x,\xi)\|_*^2$ – равномерно ограниченная (это условие можно обобщать), то используемые методы дают практически такие же оценки на скорость сходимости и в вероятностных категориях: с вероятностью $\ge 1-\sigma$ имеет место

$$f\left(x_{N(\varepsilon,\sigma)}\right)-\min_{x\in Q} f(x)\le\varepsilon, \text{ где } N(\varepsilon,\sigma)=\mathrm{O}\left(N(\varepsilon)\ln\left((\sigma\varepsilon)^{-1}\right)\right).$$

Основная идея (восходит к работам B. Polyak, J. Matyas, A. Nemirovski)! Использовать в оптимальных методах вместо стохастического градиента

$$g_{\tau,\delta}(x,e,\xi)=\frac{n}{\tau}\Big(f(x+\tau e,\xi)+\delta(x+\tau e,\xi)-\big(f(x,\xi)+\delta(x,\xi)\big)\Big)e,$$

где e – случайный вектор (независимый от ξ), равномерно распределенный на единичной сфере в 2-норме в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\tau\sim\sqrt{\delta/L}$.

Spall J.C. Introduction to stochastic search and optimization: estimation, simulation and control. Wiley, 2003.

В теореме 1 и следствии 1 предполагается, что на каждом шаге можно обращаться только к δ -оракулу, причем не более $2\le m\le 2n$ раз с одной реализацией ξ. Отметим, что на данный момент, имеющийся у нас способ доказательства дополнительно предполагает, что в точке минимума x_* имеет место равенство (принцип Ферма) $\nabla f\left(x_*\right)=0$.

Теорема 1. *Существуют два однопараметрических семейства методов (параметр $p\in\left[0,1\right]$), которые дают оценки на требуемое число обращений к веденному ранее (в предположении 1) δ -оракулу*

$$N_1\left(\varepsilon\right)=n\max\left\{\mathrm{O}\left(\left(\frac{LR^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right),\mathrm{O}\left(\frac{DR^2}{\varepsilon^2}\right)\right\},\delta\le\frac{1}{n}\mathrm{O}\left(\varepsilon\cdot\left(\frac{\varepsilon}{LR^2}\right)^{\frac{p}{p+1}}\right);$$

$$N_2\left(\varepsilon\right)=n\max\left\{\mathrm{O}\left(\left(\frac{L_2}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{p+1}}\ln\left(\frac{\mu_2R_2^2}{\varepsilon}\right)\right),\mathrm{O}\left(\frac{D_2}{\mu_2\varepsilon}\right)\right\},\ \delta\le\frac{1}{n}\mathrm{O}\left(\varepsilon\cdot\left(\frac{\mu_2}{L_2}\right)^{\frac{p}{p+1}}\right).$$

При этом число итераций будет, соответственно

$$\frac{n}{m}\mathrm{O}\left(\frac{LR^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p+1}},\ \frac{n}{m}\mathrm{O}\left(\left(\frac{L_2}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{p+1}}\ln\left(\frac{\mu_2R_2^2}{\varepsilon}\right)\right).$$

Эти оценки в детерминированном случае $(D=0)$ при $p=1$ и с $\delta\equiv0$ были получены в работе *Nesterov Yu.* Random gradient-free minimization of convex functions // CORE Discussion Paper 2011/1. 2011.

Выписанные оценки, по-видимому, не улучшаемые. Однако здесь имеются лишь частичные результаты, см. цикл недавних работ Devolder–Glineur–Nesterov, а также *Duchi J.C., Jordan M.I., Wainwright M.J., Wibisono A.* Optimal rates for zero-order convex optimization: the power of two function evaluations // e-print, 2014. arXiv:1312.2139

В точности такие же оценки получаются и для методов, когда оракул выдает зашумленное значение реализации производной по предписанному нами направлению вместо зашумленной реализации функции в двух точках, только требования к точности оракула можно ослабить $\delta:=\sqrt{L\delta}$ (A. Gasnikov et al. arXiv:1502.06259).

Следуя работе *Nesterov Yu.* Universal gradient methods for convex optimization problems // CORE Discussion Paper 2013/63. 2013, заметим, что за счет допускаемой неточности оракула, можно погрузить задачу с гельдеровым градиентом ($\nu \in [0,1]$)

$$\left\|\nabla f(x)-\nabla f(y)\right\|_* \le L_\nu \left\|x-y\right\|^\nu$$

(в том числе и негладкую задачу с ограниченной нормой разности субградиентов при $\nu = 0$) в класс гладких задач со специальным оракулом (Devolder–Glineur–Nesterov), выдающим стохастический градиент, и характеризующимся точностью δ.

Следствие 1. *Существуют два однопараметрических семейства методов (параметр $p \in [0,1]$), которые дают оценки на требуемое число обращений к веденному ранее (в предположении 1) δ-оракулу*

$$N_1(\varepsilon) = n\max\left\{\underbrace{\mathrm{O}\left(\left(\frac{L_\nu R^{1+\nu}}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{1+2p\nu+\nu}}\right)}_{\bar{N}_1(\varepsilon)}, \mathrm{O}\left(\frac{DR^2}{\varepsilon^2}\right)\right\},\ \delta \le \frac{1}{n}\mathrm{O}\left(\frac{\varepsilon}{\bar{N}_1(\varepsilon)^p}\right);$$

$$N_2(\varepsilon) = n\max\left\{\underbrace{\mathrm{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^{1-\nu}}\ln\left(\frac{\mu_2^\nu R_2^{1+\nu}}{\varepsilon}\right)\left(\frac{L_{\nu,2}^{\frac{2}{1+\nu}}}{\mu_2}\right)^{\frac{1+\nu}{1+2p\nu+\nu}}\right)}_{\bar{N}_2(\varepsilon)}, \mathrm{O}\left(\frac{D_2}{\mu_2\varepsilon}\right)\right\},\ \delta \le \frac{1}{n}\mathrm{O}\left(\frac{\varepsilon}{\bar{N}_2(\varepsilon)^p}\right).$$

При этом число итераций будет, соответственно

$$\frac{n}{m}\mathrm{O}\left(\left(\frac{L_\nu R^{1+\nu}}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{1+2p\nu+\nu}}\right),\ \frac{n}{m}\mathrm{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^{1-\nu}}\ln\left(\frac{\mu_2^\nu R_2^{1+\nu}}{\varepsilon}\right)\left(\frac{L_{\nu,2}^{\frac{2}{1+\nu}}}{\mu_2}\right)^{\frac{1+\nu}{1+2p\nu+\nu}}\right).$$

Стохастическая онлайн оптимизация

Требуется подобрать последовательность $\{x^k\} \in Q$ так, чтобы минимизировать псевдо регрет:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E_{\xi^k}\left[f_k\left(x^k,\xi^k\right)\right] - \min_{x\in Q}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E_{\xi^k}\left[f_k\left(x,\xi^k\right)\right]$$

на основе доступной информации $\left\{\nabla\tilde{f}_1\left(x^1,\xi^1\right);...;\nabla\tilde{f}_{k-1}\left(x^{k-1},\xi^{k-1}\right)\right\}$ при расчете x^k, где $\left\|\nabla\tilde{f}_i\left(x^i,\xi^i\right)-\nabla f_i\left(x^i,\xi^i\right)\right\|_* \le \delta$. Здесь с.в. $\{\xi^k\}$ могут считаться независимыми одинаково распределенными. Онлайновость постановки задачи допускает, что на каждом шаге k функция f_k может подбираться из рассматриваемого класса функций враждебно по отношению к используемому нами методу генерации последовательности $\{x^k\}$. В частности, $E_{\xi^k}\left[f_k\left(x^k,\xi^k\right)\right]$ может зависеть от $\left\{x^1,\xi^1, f_1(\cdot);...;x^{k-1},\xi^{k-1}, f_{k-1}(\cdot);x^k\right\}$.

В стохастической онлайн оптимизации можно получить следующую оценку псевдо регрета (второе выражение в минимуме получается в предположении, что все функции $E_{\xi^k}\left[f_k\left(x,\xi^k\right)\right]$ – μ_2-сильно выпуклые по x равномерно по k)

$$\varepsilon = \min\left\{\mathrm{O}\left(\sqrt{\frac{M^2R^2}{N}}+\delta\right), \mathrm{O}\left(\frac{M_2^2\ln N}{\mu_2 N}+\delta\right)\right\}, \tag{2}$$

где $E_{\xi}\left[\left\|\nabla f_k\left(x,\xi\right)\right\|_*^2\right] \le M^2$ – равномерно по k, x. Эти оценки достигаются (на соответствующих зеркальных спусках) и неулучшаемы (в том числе для детерминированных постановок с $\delta = 0$). Как видно из этих оценок, наличие гладкости (липшицевости градиента) ничего не дает в общем случае в онлайн контексте. Все что ранее говорилось про прокс-структуру и большие отклонения, насколько нам известно, полностью и практически без изменений переносится и на онлайн случай.

Hazan E. Introduction to Online Convex Optimization. Graduate text in machine learning and optimization // e-print, 2015

Juditsky A., Nemirovski A. First order methods for nonsmooth convex large-scale optimization, I, II. In: Optimization for Machine Learning. Eds. S. Sra, S. Nowozin, S. Wright. MIT Press, 2012.

Стохастическая безградиентная онлайн оптимизация

Требуется подобрать последовательность $\left\{x^k\right\} \in Q$ так, чтобы минимизировать псевдо регрет:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E_{\xi^k}\left[f_k\left(x^k,\xi^k\right)\right] - \min_{x\in Q}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E_{\xi^k}\left[f_k\left(x,\xi^k\right)\right]$$

на основе доступной информации $\left\{\left\{\tilde{f}_1\left(x_i^1,\xi^1\right)\right\}_{i=1}^m;...;\left\{\tilde{f}_{k-1}\left(x_i^{k-1},\xi^{k-1}\right)\right\}_{i=1}^m\right\}$ при расчете x^k, где $\tilde{f}_k\left(x_i^k,\xi^k\right)$ – то, что выдает δ-оракул. Здесь с.в. $\left\{\xi^k\right\}$ могут считаться независимыми одинаково распределенными. Онлайновость постановки задачи допускает, что на каждом шаге k функция f_k может подбираться из рассматриваемого класса функций враждебно по отношению к используемому нами методу генерации последовательности $\left\{x^k\right\}$. В частности, f_k может зависеть от всей предыстории до шага $k-1$ включительно, но в случае $m=1$ не может зависеть от x^k, A. Flaxman et al. (если $m\geq 2$, то может)!

Будем предполагать, что функции $E_{\xi^k}\left[f_k\left(x,\xi^k\right)\right]$ заданы не только на множестве Q, но и в некоторой его τ_0-окрестности.

$$\boxed{m=1}$$

Одноточечные нелинейные многорукие бандиты соответствуют $m=1$. Здесь неточность оракула мало на что влияет (в отличие от случая $m\geq 2$). Для простоты формулировок положим $\delta=0$.

Основная идея (A. Flaxman et al.**)!** Использовать в оптимальных онлайн методах вместо стохастического градиента

$$g_\tau\left(x,e,\xi\right) = \frac{n}{\tau} f\left(x+\tau e,\xi\right)e,$$

где e – случайный вектор (независимый от ξ), равномерно распределенный на единичной сфере в 2-норме в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Лемма 1. *Пусть* e *– случайный вектор, равномерно распределенный на единичной сфере в 2-норме в пространстве* $\mathbb{R}^n$. *Тогда* $E_e\left[\|e\|_q^2\right]=\tilde{O}\left(n^{2/q-1}\right)$, $2\le q\le O(\log n)$. *Согласно примеру 1, другие значения* q *– не интересны. В частности,* $E_e\left[\|e\|_{O(\log n)}^2\right]=\tilde{O}\left(n^{-1}\right)$. *Здесь* $\tilde{O}(\ )=O(\ )$ *с точностью до* $\log n$.

R – прокс-диаметр множества Q относительно нормы $\|\ \|_p$, $1/p+1/q=1$	$E_\xi\left[f_k(x,\xi)\right]$ – выпуклые	$E_\xi\left[f_k(x,\xi)\right]$ – μ_2-сильно выпуклые
$E_\xi\left[\left\|f_k(x,\xi)\right\|\right]\le C$	$N=O\left(\frac{n^2C^6R^2}{\varepsilon^6\tau_0^2}\right)\tilde{O}\left(n^{2/q-1}\right)$	$N=O\left(\frac{n^2C^6\ln N}{\mu_2\varepsilon^5\tau_0^2}\right)$
$E_\xi\left[\left\|f_k(x,\xi)\right\|\right]\le C$, $E_\xi\left[\left\|\nabla f_k(x,\xi)\right\|_2^2\right]\le M_2^2$	$N=O\left(\frac{n^2C^2M_2^2R^2}{\varepsilon^4}\right)\tilde{O}\left(n^{2/q-1}\right)$	$N=O\left(\frac{n^2C^2M_2^2\ln N}{\mu_2\varepsilon^3}\right)$
$E_\xi\left[\left\|f_k(x,\xi)\right\|\right]\le C$, $\left\|\nabla E_\xi\left[f_k(x,\xi)\right]-\nabla E_\xi\left[f_k(y,\xi)\right]\right\|_2\le L_2\|x-y\|_2$	$N=O\left(\frac{n^2C^2L_2R^2}{\varepsilon^3}\right)\tilde{O}\left(n^{2/q-1}\right)$	$N=O\left(\frac{n^2C^2L_2\ln N}{\mu_2\varepsilon^2}\right)$

Таблица 1

Приведенные результаты обобщают соответствующие результаты работ

Flaxman A.D., Kalai A.T., McMahan H.B. Online convex optimization in the bandit setting: gradient descent without a gradient // e-print, 2004.

Agarwal A., Dekel O., Xiao L. Optimal algorithms for online convex optimization with multi-point bandit feedback // In Proceedings of the Twenty-Third Annual Conference on Learning Theory. 2010. P.28–40.

на случай проск-структур отличных от евклидовых. Речь идет о втором столбце таблицы 1, в третьем столбце прокс-структура евклидова. Выделенная желтым цветом оценка ранее нам не встречалась в литературе.

Все что ранее говорилось про большие отклонения, насколько нам известно, полностью и практически без изменений переносится на выписанные в таблице 1 оценки. Стоит также заметить, что на данный момент нам не известно, являются ли выписанные оценки оптимальными. Тем не менее, некоторые результаты здесь есть, см., например,

Bubeck S., Dekel O., Koren T., Peres Y. Bandit Convex Optimization: sqrt{T} Regret in One Dimension. Preprint, 2015.

Не для онлайн постановок нижние оценки известны (см., например, J. Duchi et al. для липшицевой выпуклой целевой функции) $N = \Omega\left(n^2/\varepsilon^2\right)$. Имеющиеся на данный момент наилучшая оценка сверху $N = \mathrm{O}\left(n^{7.5}/\varepsilon^2\right)$

Belloni A., Liang T., Narayanan H., Rakhlin A. Escaping the Local Minima via Simulated Annealing: Optimization of Approximately Convex Functions // e-print, 2015. arXiv:1501.07242

Для детерминированных не онлайн постановок (при небольших n) имеются другого типа нижние оценки для липшицевой выпуклой целевой функции (Немировский–Юдин) $N = \Omega\left(\mathrm{Poly}(n)\log(1/\varepsilon)\right)$. Имеющиеся на данный момент наилучшие оценки сверху ("Русский метод" В.Ю. Протасов и др.) также отличаются от нижних оценок.

$$\boxed{m \geq 2}$$

Рассмотрим теперь случай многоточечных многоруких бандитов $m \geq 2$. Есть принципиальная разница при переходе от $m = 1$ к $m \geq 2$. При последующем увеличении m оценки будут меняться крайне слабо (см. оценки на число итераций в теореме 1 и следствии 1, а также J. Duchi et al.). Далее мы ограничимся рассмотрением случая $m = 2$.

Основная идея (новизна в слове "всегда")! Всегда использовать в оптимальных онлайн методах вместо стохастического градиента

$$g_{\tau,\delta}(x,e,\xi) = \frac{n}{\tau}\Big(f(x+\tau e,\xi) + \delta(x+\tau e,\xi) - \big(f(x,\xi) + \delta(x,\xi)\big)\Big)e,$$

где e – случайный вектор (независимый от ξ), равномерно распределенный на единичной сфере в 2-норме в пространстве $\mathbb{R}^n$.

R – прокс-диаметр множества Q относительно нормы $\| \ \|_p$, $1/p + 1/q = 1$	$E_\xi\left[f_k(x,\xi)\right]$ – выпуклые	$E_\xi\left[f_k(x,\xi)\right]$ – μ_2-сильно выпуклые
$E_\xi\left[\left\|f_k(x,\xi)\right\|\right] \le C$	$N = \mathrm{O}\left(\frac{nC^4R^2}{\varepsilon^4\tau_0^2}\right)\tilde{\mathrm{O}}\left(n^{2/q-1}\right)$	$N = \mathrm{O}\left(\frac{nC^4 \ln N}{\mu_2\varepsilon^3\tau_0^2}\right)$
$E_\xi\left[\left\|\nabla f_k(x,\xi)\right\|_2^2\right] \le M_2^2$	$N = \mathrm{O}\left(\frac{nM_2^2R^2}{\varepsilon^2}\right)\tilde{\mathrm{O}}\left(n^{2/q-1}\right)$	$N = \mathrm{O}\left(\frac{nM_2^2 \ln N}{\mu_2\varepsilon}\right)$
$E_\xi\left[\left\|\nabla f_k(x,\xi)\right\|_2^2\right] \le M_2^2$, $\left\|\nabla E_\xi\left[f_k(x,\xi)\right] - \nabla E_\xi\left[f_k(y,\xi)\right]\right\|_2 \le L_2\left\|x-y\right\|_2$	$N = \mathrm{O}\left(\frac{nM_2^2R^2}{\varepsilon^2}\right)\tilde{\mathrm{O}}\left(n^{2/q-1}\right)$	$N = \mathrm{O}\left(\frac{nM_2^2 \ln N}{\mu_2\varepsilon}\right)$

Таблица 2

Приведенные результаты обобщают соответствующие результаты работ

Agarwal A., Dekel O., Xiao L. Optimal algorithms for online convex optimization with multi-point bandit feedback // In Proceedings of the Twenty-Third Annual Conference on Learning Theory. 2010. P.28–40.

Duchi J.C., Jordan M.I., Wainwright M.J., Wibisono A. Optimal rates for zero-order convex optimization: the power of two function evaluations // e-print, 2014. arXiv:1312.2139

на случай проск-структур отличных от евклидовых. Речь идет о втором столбце таблицы 2, в третьем столбце прокс-структура евклидова. Точнее говоря, в работе J. Duchi et al. как раз рассматривались различные прокс-структуры, однако исходя из прокс-структуры выбиралась рандомизация, но выбиралась лишь субоптимально. В данной работе было обнаружено, что оптимальной для безградиентных методов все же является рандомизация на евклидовой сфере вне зависимости от того, какая выбрана прокс-структура. Это позволило улучшить оценки J. Duchi et al., например, в следующем ключе: вместо nM_∞^2 (где $E_\xi\left[\left\|\nabla f_k(x,\xi)\right\|_\infty^2\right] \le M_\infty^2$) стало возможным писать просто M_2^2, вместо nM_∞^2 стало возможным писать nM_2^2. Отметим также, что выделенные желтым цветом оценки ранее нам не встречалась в литературе.

Все что ранее говорилось про большие отклонения, насколько нам известно, полностью и практически без изменений переносится на выписанные в таблице 2 оценки. Стоит также заметить, что выписанные оценки являются оптимальными, в том числе и для детерминированных постановок, и для стохастических не онлайн постановок (см. Немировский–Юдин и J. Duchi et al.). Относительно оптимальности оценок, выделенных желтым цветом, нам ничего не известно, но есть гипотеза, что они также оптимальны в онлайн контексте.

Осталось описать условие на уровень шума, при котором оценки в таблице 2 сохраняются. Мы ограничимся здесь только условиями на шум для δ-оракула выдающим зашумленную реализацию функции в двух точках. Случай, когда оракул выдает зашумленное значение реализации производной по предписанному нами направлению также приводит к таблице 2, только требования к точности оракула можно будет ослабить.

Поскольку формулы получаются достаточно громоздкими, мы ограничимся здесь изложением механизма их получения.

$$\min\left\{M_2\tau, L_2\tau^2/2\right\} = \mathrm{O}(\varepsilon) \text{ – условие аппроксимации}$$

$$L_2^2\tau^2n^2 + \frac{8\delta^2n^2}{\tau^2} = \mathrm{O}\left(M_2^2n\right) \text{ – условие правильной ограниченности квадрата нормы аппроксимации стох. градиента}$$

$$M_2 = \mathrm{O}\left(\frac{C^2}{\varepsilon\tau_0}\right) \text{ – условие на эффективную константу } M_2 \text{ для первых строк таблиц 1, 2 (A. Flaxman et al.)}$$

$$L_2 = \mathrm{O}\left(\frac{nM_2^2}{\varepsilon}\right) \text{ – условие на эффективную константу } L_2 \text{ для второй строки таблицы 2 (Yu. Nesterov, 2011; J. Duchi et al.)}$$

Выписанные условия позволяют для всех шести полей таблицы написать соответствующие условия на допустимый уровень шума, и параллельно подобрать оптимальный размер шага τ.

В заключение, заметим, что если не использовать концепцию δ-оракула, а использовать общую концепцию зашумления выдачи, возможно, враждебным шумом масштаба δ, то все приведенные в работе оценки сохранятся, только изменятся (увеличатся) требования к уровню этого шума. Поясним, каким образом, можно получить необходимые обобщения. Для этого, дополнительно потребуется рассматривать поведение такого типа сумм, отвечающих за смещенность аппроксимации стох. градиента,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\delta n}{\tau}\left|\left\langle e^k, x^k - x_*\right\rangle\right| = \mathrm{O}\left(\frac{\delta\sqrt{n}R}{\tau}\right)$$ – с большой вероятностью,

где e^k – i.i.d. (ни от чего независящие) из равномерно распределенный на единичной сфере в 2-норме в пространстве $\mathbb{R}^n$.