О задаче для вырождающегося уравнения смешанного типа с операторами Капуто и Эрдели-Кобера дробного порядка.

Обиджон Абдуллаев

Национальный университет Узбекистана.Кафедра дифференциальных уравнений и математической физики. Ташкент, Узбекистан. obidjon.mth@gmail.com.,

Аннотация: *Эта работа посвящена изучению существования и единственности решения локальной задачи для вырождающегося уравнения параболо-гиперболического типа с нагруженными слагаемыми, в которых след решения находится в интегралах Эрдели-Кобера. Так как, след решения* ($т.е.u(x,0)$) *находится в интегралах Эрдели-Кобера и гиперболическое уравнение вырождается на линии* $y = 0$, *в процессе доказательство единственности и существования исследуемой задачи. мы воспользовались свойствами и оценками гипергеометрических функций, и некоторыми интегральными тождествами.*

Ключевые слова и фразы: *параболо-гиперболические уравнения, нагруженное слагаемое, дробное дифференцирование Капуто, интегралы Эрдели-Кобера, гипергеометрические функции, существование и едиственность решения.*

About a problem for the degenerate mixed type equation involving Caputo and Erdelyi−Kober operators fractional order.

Obidjon Abdullaev

National University of Uzbekistan. Department of Differential equations and mathematical physics. Tashkent, Uzbekistan. obidjon.mth@gmail.com.,

Abstract: *This research work devoted to the study of existence and uniqueness of solutions of a local problem for the degenerate parabolic-hyperbolic type equations with loaded terms involving a trace of solution in Erdelyi-Kober integrals. Since, the trace of solution* ($i.e.u(x,0)$) *is in Erdelyi-Kober integrals and hyperbolic type equation is degenerates on the line* $y = 0$, *we used some properties and estimations of hyper-geometric functions, moreover some integral equalities on the proofing process of the uniqueness and existence of solution of the investigated problem.*
Key words and phrases: *Parabolic-hyperbolic equation, Loaded terms, Caputo fractional derivative, Erdeyli-Kober integrals, Hypergeometric functions, Existence and uniqueness of solution.*

MSC-2010:-35M10,35R11, 35C15

1. Введение

Теория дробных дифференциальных и интегральных операторов является важной частью (не)линейного анализа, поскольку она естественным образом возникает во многих областях математики и математической физики, инженерии, нейро-биологии, экономики, теории управления и науки о горении (см. [1], [2] [3], [4]). Кроме того, в области динамических систем и теории управления, система дробного порядка представляет собой динамическую систему, которая может моделироваться дифференциальным уравнением дробного порядка, содержащим производные нецелого порядка [5]. Производные и интегралы дробных порядков используются для описания объектов, которые также могут быть охарактеризованы степенной нелокальностью [6].

Хорошо известно, что существуют разные подходы к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка (ДУДП), кроме того, это зависит от рассматриваемого процесса, который описывается с помощью ДУДП, и уравнений такого типа. Например, приближенные и численные методы были использованы и для ДУДП (подробности см. в [7], [8]). Кроме того, существуют некоторые классические методы, которые применимы для решения некоторых ДУДП с участием хорошо известных операторов, таких как Риман-Лиувилль, Капуто, Эрдели-Кобер и другие. Отметим, что применяя классические методы, мы можем получить классические решения, которые более полезны на практике.

Как нам известно, дробная производная Капуто является одним из наиболее используемых определений дробной производной наряду с определениями Римана-Лиувилля и Грюнвальда-Летникова. В математических тематиках и приложениях также часто используется так называемая дробная производная Эрдели-Кобера. Есть работы [9] - [12], в которых авторы исследовали некоторые модификации типа Капуто оператора Эрдели-Кобера и связи с их исследованиями масштабно-инвариантного решения диффузионно-вольных уравнений. Значительное развитие дробных дифференциальных уравнений мы можем найти в работах [13] - [15].

Дифференциальные уравнения с частными производными были успешно использованы для моделирования нескольких физических процессов (подробности см. [16] - [18]). В работах ([19] - [21] и др.) мы можем найти применение дробного исчисления в исследованиях вырождающихся уравнений в частных производных смешанного типа и гиперболических уравнений.

2.Постановка задачи и необходимые соотношения

Рассмотрим уравнение:

$$0=\begin{cases} u_{xx} -_C D^{\alpha}_{oy}u+\sum\limits_{k=1}^{n}p_k\left(I^{\gamma_{1k},\sigma_{1k}}_{\beta_{1k}}u\right)x, & \text{at } y>0\\ (-y)^m u_{xx}-u_{yy}+\sum\limits_{k=1}^{n}q_k\left(I^{\gamma_{2k},\sigma_{2k}}_{\beta_{2k}}u\right)\eta, & \text{at } y<0\end{cases} \tag{1}$$

с операторами (см [9],[11],[12],[13]):

$$_C D^{\alpha}_{oy}u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha}u_t(x,t)dt,$$

$$\left(I^{\gamma,\sigma}_{\beta}u\right)x=\frac{\beta}{\Gamma(\beta)}x^{-\beta(\gamma+\sigma)}\int\limits_0^x\frac{t^{\beta(\gamma+1)-1}}{\left(x^{\beta}-t^{\beta}\right)^{1-\sigma}}u(t,0)dt \tag{2}$$

где$\eta=x+(1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{1-2\delta}}$, $m,\ \alpha,\ \beta_{jk},\gamma_{jk},\sigma_{jk},p_k,q_k=const$, $m>0$, $0<\alpha,\ \beta_{jk},\gamma_{jk},\sigma_{jk}<1$, более того $0<\gamma_{jk}+\sigma_{jk}<1$, $(j=1,2;k=1,2,...n)$, $\delta=\frac{m}{2(m+2)}$.

Пусть Ω - конечная область ограниченная сегментами: $A_1A_2=\{(x,y):\ x=1,\ 0<y<h\}$, $B_1B_2=\{(x,y):\ x=0,\ 0<y<h\}$, $B_2A_2=\{(x,y):\ y=h,\ 0<x<1\}$ при $y>0$, и с характеристиками: $A_1C\ :\ x+(1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{(1-2\delta)}}=1$; $B_1C\ :\ x-(1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{1-2\delta}}=0$ уравнения (1) при $y<0$, где $A_1\left(1;0\right)$, $A_2\left(1;h\right)$, $B_1\left(0;0\right)$, $B_2\left(0;h\right)$, $C\left(\frac{1}{2};-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\delta}\right)$.

Введем обозначения: $\Omega^+=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega^-=\Omega\cap(y<0)$, $I_1=\left\{x:0<x<\frac{1}{2}\right\}$, $I_2=\{y:0<y<h\}$.

Формулировка задачи.
Требуется найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса функций:

$$W=\left\{u(x,y):\ u(x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega^-)\ ,\ u_{xx}\in C\left(\Omega^+\right),\ {}_C D_{oy}^{\alpha}u\in C\left(\Omega^+\right)\right\}$$

удовлетворяющее краевым:

$$u(x,y)\Big|_{A_1A_2}=\varphi(y),\quad 0\leqslant y\leqslant h, \tag{3}$$

$$u(x,y)\Big|_{B_1B_2}=\psi(y),\quad 0\leqslant y\leqslant h, \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{B_1C}=h(x),\quad x\in I_1. \tag{5}$$

и разрывным условиям склеивания:

$$\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\lambda u_y(x,-0),\quad (x,0)\in A_1B_1 \tag{6}$$

где $\varphi(y)$, $\psi(y)$, $h(x)$ заданные функции, приччм $\lambda=const$, $(\lambda\in\mathbb{R}^+)$.

Известно, что функция Римана для уравнения (1) при $y<0$ (в характеристических координатах $\xi=x-(1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{1-2\delta}}$ и $\eta=x+(1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{1-2\delta}}$) определяется через гипергеометрическую функцию Гаусса [22]:

$$R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)=\frac{(\eta-\xi)^{2\delta}}{(\eta-\xi_0)^{\delta}(\eta_0-\xi)^{\delta}}H\left(\delta,\delta,1;\frac{(\xi_0-\xi)(\eta-\eta_0)}{(\eta-\xi_0)(\eta_0-\xi)}\right). \tag{7}$$

где

$$H(a_1,a_2,a_3;z)=\frac{\Gamma(a_3)}{\Gamma(a_2)\Gamma(a_3-a_2)}\int\limits_0^1 x^{a_2-1}(1-x)^{a_3-a_2-1}(1-zx)^{-a_1}dx,$$

$0<\operatorname{Re}a_2<\operatorname{Re}a_3,\quad |\arg(1-z)|<\pi.$

Отметим, что решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω^- с начальными данными

$$u(x,0)=\tau(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1;\quad u_y(x,-0)=\nu^-(x),\quad 0<x<1 \tag{8}$$

дается формулой [20],[22]:

$$u(\xi,\eta)=k_1\int\limits_{\xi}^{\eta}(s-\xi)^{-\delta}(\eta-s)^{-\delta}\nu^-(s)\,ds-$$

$$-k_2\int\limits_{\xi}^{\eta}(\eta-\xi)^{1-2\delta}(s-\xi)^{\delta-1}(\eta-s)^{\delta-1}\tau^-(s)\,ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\xi}^{\eta}q_k I_{\beta_{2k}}^{\gamma_{2k},\sigma_{2k}}\tau(s)ds\int\limits_{s}^{\eta}\frac{(\eta-\xi)^{2\delta}}{(\eta-s)^{\delta}(z-\xi)^{\delta}}H\left(\delta,\delta,1;\frac{(s-\xi)(\eta-z)}{(\eta-s)(z-\xi)}\right)dz, \tag{9}$$

где $k_1=\frac{(2-4\delta)^{2\delta-1}\Gamma(2-2\delta)}{\Gamma^2(1-\delta)}$, $k_2=\frac{\Gamma(2\delta)}{\Gamma^2(\delta)}$.

Учитывая (5), (2) и используя свойства оператора Римана-Луувилля ([13]) из (9) получим:

$$\nu^{-}(\eta)=\frac{k_2\Gamma(\delta)}{k_1\Gamma(1-\delta)}D_{0\eta}^{1-2\delta}\tau(\eta)-\frac{2}{k_1\Gamma(1-\delta)}\eta^{3\delta}D_{0\eta}^{1-\delta}\int\limits_0^{\eta}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k\beta_{2k}}{\Gamma(\beta_k)}t^{-\beta_{2k}(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^{t}\frac{s^{\beta_{2k}(\gamma_{2k}+1)-1}}{\left(t^{\beta_{2k}}-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}}\tau(s)ds\int\limits_t^{\eta}\frac{1}{(\eta-t)^{\delta}z^{\delta}}H\left(\delta,\delta,1;\frac{t(\eta-z)}{z(\eta-t)}\right)dz+$$

$$+\frac{2}{k_1\Gamma(1-\delta)}\eta^{\delta}D_{0\eta}^{1-\delta}h\left(\frac{\eta}{2}\right),\tag{10}$$

здесь $D_{ax}^{\alpha}f$ $(\alpha\in R^{+})$- дробное дифференцирование Римана-Лиувилля, которое имеет вид [13.стр.70]:

$$\left(D_{ax}^{\alpha}f\right)x=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int\limits_a^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt,\quad n=[\alpha]+1,\quad x>a.$$

С другой стороны, в силу обозначений (8) и $\lim\limits_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\nu^{+}(x)$, $0<x<1$ из (6) имеем

$$\nu^{+}(x)=\lambda\nu^{-}(x)\tag{11}$$

Для дальнейших исследований, из уравнения (1) при $y\to+0$ учитывая (11) и

$$\lim_{y\to0}D_{0y}^{\alpha-1}f(y)=\Gamma(\alpha)\lim_{y\to0}y^{1-\alpha}f(y)$$

мы получим:

$$\tau''(x)-\Gamma(\alpha)\nu^{+}(x)+\sum_{k=1}^{n}p_kI_{\beta_{1k}}^{\gamma_{1k},\sigma_{1k}}\tau(x)=0,\quad 0<x<1\tag{12}$$

3.Теорема единственности.

Теорема 1. Пусть $\lambda>0$ и верны условия

$$0<\alpha,\ \beta_{jk},\gamma_{jk},\sigma_{jk}<1,\quad 0<\gamma_{jk}+\sigma_{jk}<1,\quad p_k<0,\ q_k<0,\quad (j=1,2),\quad k=1,2,...,n.\tag{13}$$

тогда решение исследуемой задачи единственно.

Доказательство. Исследуем интеграл $J=\int\limits_0^1\tau(t)\nu^{+}(t)dt$.

С этой целью, обе части уравнения (12) умножаем на $\tau(x)$ и проинтегрируем от 0 до 1:

$$\Gamma(\alpha)\int\limits_0^1\tau(t)\nu^{+}(t)dt=\int\limits_0^1\tau''(t)\tau(t)dt+\int\limits_0^1\tau(t)\sum_{k=1}^{n}p_kI_{\beta_{1k}}^{\gamma_{1k},\sigma_{1k}}\tau(t)dt.\tag{14}$$

В силу $[\varphi(y)\equiv\psi(y)\equiv0]$ и используя $\tau(0)=\tau(1)=0$ после некоторых вычислений получим

$$J\equiv\int\limits_0^1\tau(t)\nu^{+}(t)dt=-\int\limits_0^1\left(\tau'(t)\right)^2dt+\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_0^1\tau(t)dt\int\limits_0^t\frac{z^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(t^{\beta_{1k}}-z^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}\tau(z)dz.$$

Учитывая
$$\int\limits_0^x \frac{\beta t^{\beta\gamma+\beta-1}}{\left(x^\beta - t^\beta\right)^{1-\delta}}\tau(t)dt = \int\limits_0^{x^\beta} \frac{t^\gamma}{\left(x^\beta - t\right)^{1-\delta}}\tau\left(t^{1/\beta}\right)dt \tag{15}$$
и применяя формулу [22.стр.188]:
$$|x-t|^{-\delta} = \frac{1}{\Gamma(\delta)\cos\frac{\pi\delta}{2}}\int\limits_0^\infty z^{\delta-1}\cos\left[z(x-t)\right]dz, \quad 0<\delta<1,$$
после не которых упрощений,окончательно получим (см [20]):
$$\int\limits_0^1 \tau(x)dx\int\limits_0^x \frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}\tau(t)}{\left(x^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}dt =$$
$$= \int\limits_0^1 x^{1/\beta_{1k}-1}\tau(x^{1/\beta_{1k}})dx\int\limits_0^x \frac{t^{\gamma_{1k}}\tau(t^{1/\beta_{1k}})}{(x-t)^{1-\sigma_{1k}}}dt \geqslant 0.$$
Следовательно в силу (13), находим
$$\int\limits_0^1 \tau(t)\nu^+(t)dt \leqslant 0. \tag{16}$$
Теперь, докажем что $\int\limits_0^1 \tau(t)\nu^-(t)dt \geqslant 0$ из области Ω^-.

Возпользуясь заменой $t^{\beta_{2k}} \sim t$, $s^{\beta_{2k}} \sim s$ и $z^{\beta_{2k}} \sim z$ из (10) находим
$$\nu^-(\eta) = \frac{k_2\Gamma(\delta)}{k_1\Gamma(1-\delta)}D_{0\,\eta}^{1-2\delta}\tau(\eta) - \frac{2\eta^{3\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)}D_{0\,\eta}^{1-\delta}\sum_{k=1}^n \frac{q_k}{\beta_{2k}\Gamma(1+\beta_{2k})}\int\limits_0^{\eta^{\beta_{2k}}} \frac{t^{1/\beta_{2k}-1}}{t^{\gamma_{2k}+\sigma_{2k}}}dt\times$$
$$\times\int\limits_0^t \frac{s^{\gamma_{2k}}}{(t-s)^{1-\sigma_{2k}}}\tau(s^{1/\beta_{2k}})ds\int\limits_t^{\eta^{\beta_{2k}}} \frac{z^{\frac{1-\delta}{\beta_{2k}}-1}}{\left(\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)^\delta}H\left(\delta,\delta,1;\frac{t^{1/\beta_{2k}}\left(\eta-z^{1/\beta_{2k}}\right)}{z^{1/\beta_{2k}}\left(\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)}\right)dz+$$
$$+\frac{2}{k_1\Gamma(1-\delta)}\eta^\delta D_{0\,\eta}^{1-\delta}h\left(\frac{\eta}{2}\right). \tag{17}$$
Исследуем интеграл (см (17)):
$$A(\eta) \equiv \frac{2\eta^{3\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)}D_{0\,\eta}^{1-\delta}\sum_{k=1}^n \frac{q_k}{\beta_{2k}\Gamma(1+\beta_{2k})}\int\limits_0^{\eta^{\beta_{2k}}} \frac{t^{1/\beta_{2k}-1}}{t^{\gamma_{2k}+\sigma_{2k}}}dt\times$$
$$\times\int\limits_0^t \frac{s^{\gamma_{2k}}}{(t-s)^{1-\sigma_{2k}}}\tau\left(s^{1/\beta_{2k}}\right)\int\limits_t^{\eta^{\beta_{2k}}} \frac{z^{\frac{1-\delta}{\beta_{2k}}}-1}{\left(\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)^\delta}H\left(\delta,\delta,1;\frac{t^{1/\beta_{2k}}\left(\eta-z^{1/\beta_{2k}}\right)}{z^{1/\beta_{2k}}\left(\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)}\right)dz.$$

Вводя замену

$$\frac{t^{1/\beta_{2k}}\left(\eta - z^{1/\beta_{2k}}\right)}{z^{1/\beta_{2k}}\left(\eta - t^{1/\beta_{2k}}\right)} = \theta$$

в последнем интеграле и после несложных упрощений имеем:

$$A(\eta) \equiv \frac{2\eta^{1-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)} D_{0\,\eta}^{1-\delta} \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{\Gamma(1+\beta_{2k})} \int\limits_0^{\eta^{\beta_{2k}}} \frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}}{t^{\gamma_{2k}+\sigma_{2k}}\left(\eta - t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}} dt \times$$

$$\times \int\limits_0^t \frac{s^{\gamma_{2k}}}{(t-s)^{1-\sigma_{2k}}} \tau(s^{1/\beta_{2k}}) ds \int\limits_0^1 \left(t^{1/\beta_{2k}} + \theta\left(\eta - t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2} H\left(\delta, \delta, 1; \theta\right) d\theta$$

$$= \frac{2\eta^{1-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)\Gamma(\delta)} \frac{d}{d\eta} \int\limits_0^{\eta} (\eta - y)^{\delta-1} dy \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{\Gamma(1+\beta_{2k})} \int\limits_0^{y^{\beta_{2k}}} \frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}} t^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})}}{\left(y - t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}} dt \times$$

$$\times \int\limits_0^t \frac{s^{\gamma_{2k}}}{(t-s)^{1-\sigma_{2k}}} \tau(s^{1/\beta_{2k}}) ds \int\limits_0^1 \left(t^{1/\beta_{2k}} + \theta\left(y - t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2} H\left(\delta, \delta, 1; \theta\right) d\theta.$$

Далее, также вводя замену $y \sim y\eta$, $t \sim (\eta y)^{\beta_{2k}} t$ в первом и во втором интеграле получим:

$$A(\eta) \equiv \frac{2\eta^{1-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)\Gamma(\delta)} \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{\Gamma(1+\beta_{2k})} \frac{d}{d\eta} \eta^{1-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}} \int\limits_0^1 \frac{y^{1-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}} dy}{(1-y)^{1-\delta}} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}} dt}{\left(1 - t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1} t^{\gamma_{2k}+\sigma_{2k}}} \int\limits_0^{(\eta y)^{\beta_{2k}} t} \frac{s^{\gamma_{2k}} \tau(s^{1/\beta_{2k}}) ds}{\left(t(\eta y)^{\beta_{2k}} - s\right)^{1-\sigma_{2k}}} \int\limits_0^1 \frac{H\left(\delta, \delta, 1; \theta\right) d\theta}{\left(t^{1/\beta_{2k}} + \theta\left(1 - t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{2-\delta}}.$$

Интегрируя по частьям в третьем интеграле имеем:

$$A(\eta) \equiv \frac{2\eta^{1-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)\Gamma(\delta)} \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k(1-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k})}{\Gamma(1+\beta_{2k})\sigma_{2k}} \eta^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \frac{y^{1-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}}{(1-y)^{1-\delta}} dy \int\limits_0^1 \frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}} t^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})}}{\left(1 - t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}} dt \times$$

$$\times \int\limits_0^{(\eta y)^{\beta_{2k}} t} \frac{s^{\gamma_{2k}} \tau(s^{1/\beta_{2k}})}{\left(t(\eta y)^{\beta_{2k}} - s\right)^{1-\sigma_{2k}}} ds \int\limits_0^1 \left(t^{1/\beta_{2k}} + \theta\left(1 - t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2} H\left(\delta, \delta, 1; \theta\right) d\theta +$$

$$+ \frac{2\eta^{1-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)\Gamma(\delta)} \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k \eta^{(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}}{\Gamma(1+\beta_{2k})} \int\limits_0^1 \frac{y^{1-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_k)\beta_k}}{(1-y)^{1-\delta}} dy \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}} t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(1 - t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}} dt \int\limits_0^{(\eta y)^{\beta_{2k}} t} \frac{\gamma_k \beta_{2k} s^{\gamma_{2k}-1} \tau(s^{1/\beta_{2k}}) + s^{\gamma_{2k}+1/\beta_{2k}-1} \tau'(s^{1/\beta_{2k}})}{\left(t(\eta y)^{\beta_{2k}} - s\right)^{1-\sigma_{2k}}} ds \times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(1-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta. \tag{18}$$

Вводя обратные замены $y\eta\sim y$, $(\eta y)^{\beta_{2k}}t\sim t$, окончательно находим

$$A(\eta)\equiv\frac{2\eta^{2-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)\Gamma(\delta)}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k(1-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k})}{\Gamma(1+\beta_{2k})\sigma_{2k}}\eta^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}\times$$

$$\times\int\limits_0^{\eta^{\beta_{2k}}}s^{\gamma_{2k}}\tau(s^{1/\beta_{2k}})ds\int\limits_{s^{1/\beta_{2k}}}^{\eta}\frac{dy}{(1-y\eta)^{1-\delta}}\int\limits_s^{(y\eta)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})}}{(t-s)^{1-\sigma_{2k}}\left(y\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(y\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta+$$

$$+\frac{2\eta^{2-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)\Gamma(\delta)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k q_k\eta^{(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^{\eta^{\beta_{2k}}}s^{\gamma_{2k}-1}\tau(s^{1/\beta_{2k}})ds\times$$

$$\times\int\limits_{s^{1/\beta_{2k}}}^{\eta}\frac{dy}{(1-y\eta)^{1-\delta}}\int\limits_s^{(y\eta)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{(t-s)^{1-\sigma_{2k}}\left(y\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(y\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta+$$

$$+\frac{2\eta^{2-\delta}}{k_1\Gamma(1-\delta)\Gamma(\delta)}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k\eta^{(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}}{\Gamma(1+\beta_{2k})}\int\limits_0^{\eta^{\beta_{2k}}}s^{\gamma_{2k}+1/\beta_{2k}-1}\tau'(s^{1/\beta_{2k}})ds\times$$

$$\times\int\limits_{s^{1/\beta_{2k}}}^{\eta}\frac{dy}{(1-y\eta)^{1-\delta}}\int\limits_s^{(y\eta)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{(t-s)^{1-\sigma_{2k}}\left(y\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(y\eta-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta. \tag{19}$$

Учитывая (19) элементарно доказывается аналогичная лемма как в работе [19].

На основе той леммы (см [19]), заключаем что $\int\limits_0^1\tau(x)\nu^-(x)dx\geq 0$, следовательно, в силу (16) и (11) получим $\int\limits_0^1\tau(x)\nu^-(x)dx=0$ из которого следует что $\tau(x)\equiv 0$, $\nu^-(x)\equiv 0$. В итоге, можем получит что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}^+$ и $\overline{\Omega}^-$. Отметим, что если однородная задача имеет только тривиальное решение, то соответственная основная задача имеет единственное решение. **Теорема 1** доказана.

4. Существование решения исследуемой задачи.

Теорема 2. Если выпольнены все условия **Теорема 1** и

$$\varphi(y),\ \psi(y)\in C\left(\overline{I_2}\right)\cap C^1\left(I_2\right);\quad h(x)\in C^1\left(\overline{I_1}\right)\cap C^2\left(I_1\right), \tag{20}$$

то решение исследуемой задачи существует.

Доказательство. В силу (11) из уравнения (12) имеем

$$\tau''(x)=f(x), \tag{21}$$

где

$$f(x)=\lambda\Gamma(\alpha)\nu^-(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(0)p_k\beta_{1k}x^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_0^x\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(x^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k\beta_{1k}x^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_0^x\tau'(z)dz\int\limits_z^x\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}dt}{\left(x^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}. \tag{22}$$

Решение уравнения (21) удовлетворяющие $\tau(0)=\psi(0)$, $\tau(1)=\varphi(0)$ имеет вид: $\tau(x)=\int\limits_0^x(x-t)f(t)dt-x\int\limits_0^1(1-t)f(t)dt+\varphi(0)(1-x)+x\psi(0)$; следовательно, мы можем найти:

$$\tau'(x)=\int\limits_0^x f(t)dt-\int\limits_0^1(1-t)f(t)dt+\psi(0)-\varphi(0). \tag{23}$$

В силу (19) и подставляя (17) в (22) после некоторых упрощений имеем:

$$f(x)=k_{11}x^{2\delta-1}\psi(0)-k_{11}\int\limits_0^x(x-t)^{2\delta-1}\tau'(t)dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(0)p_k\beta_{1k}x^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_0^x\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(x^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k\beta_{1k}x^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_0^x\tau'(z)dz\int\limits_z^x\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}dt}{\left(x^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}-$$

$$-\frac{2k_{11}x^{2-\delta}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k x^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}\int\limits_0^x\tau'(z)dz\int\limits_z^x s^{\beta_{2k}(\gamma_{2k}+1)-1}ds\times$$

$$\times\int\limits_s^x\frac{dy}{(1-yx)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yx)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta-$$

$$-\frac{2k_{11}x^{2-\delta}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k x^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}\psi(0)\int\limits_0^x s^{\beta_{2k}(\gamma_{2k}+1)-1}ds\times$$

$$\times\int\limits_s^x\frac{dy}{(1-yx)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yx)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta+$$

$$+\frac{2k_{11}x^{2-\delta}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k q_k x^{(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^x\tau'(z)dz\int\limits_z^x s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}-1}ds\times$$

$$\times\int\limits_s^x\frac{dy}{(1-y\eta)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yx)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta+$$

$$+\frac{2k_{11}x^{2-\delta}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k q_k x^{(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}\psi(0)}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^x s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}-1}ds\times$$

$$\times\int\limits_s^x\frac{dy}{(1-y\eta)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yx)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta+$$

$$+\frac{2k_{11}x^{2-\delta}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k x^{(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^x s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\tau'(s)ds\times$$

$$\times\int\limits_s^x\frac{dy}{(1-yx)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yx)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yx-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta, \tag{24}$$

где $k_{11}=\frac{k_2\lambda\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta)}{k_1\Gamma(1-\delta)}$, $\omega_k=\frac{q_k(1-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k})}{\Gamma(\beta_{2k})\sigma_{2k}}$.

Далее, рассматривая (24) из (23) получим

$$\tau'(x)=\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^x z^{2-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz\int\limits_0^z A_k(s,z)\tau'(s)ds+$$

$$+\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k q_k}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^x z^{2-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz\int\limits_0^z B_k(\mu,z)\tau'(\mu)d\mu-$$

$$-\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\int\limits_0^x z^{2-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz\int\limits_0^z C_k(\mu,z)\tau'(\mu)d\mu-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_0^x z^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}dz\int\limits_0^z\tau'(s)ds\int\limits_s^z\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}dt}{\left(z^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}-$$

$$-k_{11}\int\limits_0^x dz\int\limits_0^z(z-t)^{2\delta-1}\tau'(t)dt-$$

$$-\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^1(1-z)z^{2-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz\int\limits_0^z A_k(s,z)\tau'(s)ds-$$

$$-\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k q_k}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_0^1(1-z)z^{2-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz\int\limits_0^z B_k(\mu,z)\tau'(\mu)d\mu+$$

$$+\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\int\limits_0^1(1-z)z^{2-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz\int\limits_0^z C_k(\mu,z)\tau'(\mu)d\mu+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_0^1(1-z)z^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}dz\int\limits_0^z\tau'(s)ds\int\limits_s^z\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}dt}{\left(z^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}+$$

$$+k_{11}\int\limits_0^1(1-z)dz\int\limits_0^z(z-t)^{2\delta-1}\tau'(t)dt+F(x), \tag{25}$$

где

$$A_k(s,z)=s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\int\limits_s^z\frac{dy}{(1-yz)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta, \tag{26}$$

$$B_k(\mu,z)=\int\limits_\mu^z s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}-1}ds\int\limits_s^z\frac{dy}{(1-y\eta)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta, \tag{27}$$

$$C_k(\mu,z)=\int\limits_{\mu}^{z} s^{\beta_{2k}(\gamma_{2k}+1)-1}ds\int\limits_{s}^{z}\frac{dy}{(1-yz)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta-1}}dt\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{1}\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-2}H\left(\delta,\delta,1;\theta\right)d\theta, \tag{28}$$

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(0)p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_{0}^{1}\frac{1-z}{z^{-\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}}dz\int\limits_{0}^{z}\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(z^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(0)p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_{0}^{x}z^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}dz\int\limits_{0}^{z}\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}}{\left(z^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}dt-$$

$$-\frac{2k_{11}\psi(0)}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\int\limits_{0}^{x}z^{2-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}C_k(0,z)dz+$$

$$+\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k q_k\psi(0)}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_{0}^{x}z^{2-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}B_k(0,z)dz+$$

$$+\frac{2k_{11}\psi(0)}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\int\limits_{0}^{1}(1-z)z^{2-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}C_k(0,z)dz-$$

$$-\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k q_k\psi(0)}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_{0}^{1}(1-z)z^{2-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}B_k(0,z)dz+$$

$$+\frac{k_{11}}{2\delta}x^{2\delta}\psi(0)+(\psi(0)-\varphi(0))(x-1)-\frac{k_{11}\psi(0)}{2\delta(2\delta+1)}. \tag{29}$$

После некоторых упрощений из (25), окончательно получим

$$\tau'(x)=\int\limits_{0}^{1}K(x,t)\tau'(t)dt+F(x). \tag{30}$$

Здесь

$$K(x,t)=\begin{cases}K_1(x,t); & 0\leqslant t\leqslant x,\\ K_2(x,t); & x\leqslant t\leqslant 1.\end{cases} \tag{31}$$

$$K_1(x,s)=\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_{s}^{x}\left[A_k(s,z)+\gamma_k B_k(s,z)\right]z^{3-\delta+(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz-$$

$$-\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_{x}^{1}\frac{1-z}{z^{\delta-2-(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}}\left[A_k(s,z)+\gamma_k B_k(s,z)\right]dz-$$

$$-\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\int\limits_s^x C_k(s,z)z^{3-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}dz+$$

$$+\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\int\limits_x^1 (1-z)z^{2-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}C_k(s,z)dz-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_s^x z^{1+\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}dz\int\limits_s^z\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}dt}{\left(z^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_x^1 (1-z)z^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}dz\int\limits_s^z\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}dt}{\left(z^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}+$$

$$+k_{11}\int\limits_s^x (1-z)(z-s)^{2\delta-1}dz+k_{11}\int\limits_s^1 (1-z)(z-s)^{2\delta-1}dz+\frac{k_{11}}{2\delta}(x-s)^{2\delta} \tag{32}$$

$$K_2(x,s)=-\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\Gamma(\beta_{2k})}\int\limits_s^1\frac{1-z}{z^{\delta-2-(1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k})\beta_{2k}}}\left[A_k(s,z)+\gamma_k B_k(s,z)\right]dz+$$

$$+\frac{2k_{11}}{k_2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\int\limits_s^1 (1-z)z^{2-\delta-(\gamma_{2k}+\sigma_{2k})\beta_{2k}}C_k(s,z)dz+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k\beta_{1k}}{\Gamma(\beta_{1k})}\int\limits_s^1 (1-z)z^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+\sigma_{1k})}dz\int\limits_s^z\frac{t^{\beta_{1k}(\gamma_{1k}+1)-1}dt}{\left(z^{\beta_{1k}}-t^{\beta_{1k}}\right)^{1-\sigma_{1k}}}+$$

$$+k_{11}\int\limits_s^1 (1-z)(z-s)^{2\delta-1}dz \tag{33}$$

Так как (см [13])

$$H(a_1,a_2,a_3;z)\le\begin{cases} c_1, \quad if \quad a_3-a_1-a_2>0, \quad 0\le z\le 1\\ c_2(1-z)^{a_3-a_1-a_2}, \quad if \quad a_3-a_1-a_2<0, \quad 0<z<1\\ c_3\left(1+\left|\ln(1-z)\right|\right), \quad if \quad a_3-a_1-a_2=0\end{cases} \tag{34}$$

и интегрируя по частям из (26)

$$A_k(s,z)\leqslant\frac{\delta^2\Gamma(1-2\delta)s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}}{|\delta-1|\,\Gamma^2(1-\delta)}\left|\int\limits_s^z\frac{(yz)^{\delta-1}dy}{(1-yz)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta}}dt\right|+$$

$$+\frac{\delta^2 s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}}{|\delta-1|}\left|\int\limits_s^z\frac{dy}{(1-yz)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(1-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{\left(t-s^{\beta_{2k}}\right)^{1-\sigma_{2k}}\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta}}dt\right|+$$

$$+\frac{\delta^2 s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}}{|\delta-1|}\left|\int\limits_s^z \frac{dy}{(1-yz)^{1-\delta}}\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}}\frac{t^{(2-\delta-\beta_{2k})/\beta_{2k}}t^{1-\gamma_{2k}-\sigma_{2k}}}{(t-s^{\beta_{2k}})^{1-\sigma_{2k}}\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)^{\delta}}dt\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^1\frac{\left(t^{1/\beta_{2k}}+\theta\left(yz-t^{1/\beta_{2k}}\right)\right)^{\delta-1}}{(1-\theta)^{2\delta}}H\left(1-\delta,1-\delta,2;\theta\right)d\theta\Bigg]\right|$$

В след за этим , учитывая $2-1+\delta-1+\delta=2\delta>0$, $|\theta|\leqslant 1$ имеем (см (34)) $H\left(1-\delta,1-\delta,2;\theta\right)\leqslant const$. Далее, рассматривая $\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}}dt=\int\limits_{s^{\beta_{2k}}}^{s_0^{\beta_{2k}}}dt+\int\limits_{s_0^{\beta_{2k}}}^{(yz)^{\beta_{2k}}}dt$ после несложных оценок заключаем, что

$$|A_k(s,z)|\leqslant c_1 s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\left|\int\limits_s^z\frac{(yz)^{1-(\sigma_{2k}+\gamma_{2k})\beta_{2k}}\left(s_0^{\beta_k}-s^{\beta_k}\right)^{\sigma_k}}{(1-yz)^{1-\delta}(yz-s_0)^{\delta}}dy\right|+$$

$$+c_2 s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\left|\int\limits_s^z\frac{(yz)^{(1-\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}}\left(s_0^{\beta_k}-s^{\beta_k}\right)^{\sigma_k-1}}{(yz-s_0)^{\delta}(1-yz)^{1-\delta}}dy\right|$$

На основе того что $\int\limits_s^z dy=\int\limits_s^{s_0/z}dy+\int\limits_{s_0/z}^z dy$ мы можем заключить, что

$$|A_k(s,z)|\leqslant c_{11}s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\left|s^{\beta_{2k}}-s_0^{\beta_{2k}}\right|^{\sigma_{2k}}(1-s_0)^{\delta-1}|sz-s_0|^{1-\delta}z^{1-(\sigma_{2k}+\gamma_{2k})\beta_{2k}}+$$

$$+c_{12}s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\left|s^{\beta_{2k}}-s_0^{\beta_{2k}}\right|^{\sigma_{2k}-1}(1-s_0)^{\delta-1}|sz-s_0|^{2-\delta}z^{2(1-\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}-1}+$$

$$+c_{21}s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\left|s^{\beta_{2k}}-s_0^{\beta_{2k}}\right|^{\sigma_{2k}}\left|z^2-s_0\right|^{1-\delta}\left(1-z^2\right)^{\delta-1}z^{1-2(\sigma_{2k}+\gamma_{2k})\beta_{2k}}+$$

$$+c_{22}s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\left|s^{\beta_{2k}}-s_0^{\beta_{2k}}\right|^{\sigma_{2k}-1}\left|z^2-s_0\right|^{2-\delta}\left(1-z^2\right)^{\delta-1}z^{2(1-\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}-1}\leqslant$$

$$\leqslant const s^{\beta_{2k}\gamma_{2k}}\left|s^{\beta_{2k}}-s_0^{\beta_{2k}}\right|^{\sigma_{2k}-1}(1-s_0)^{\delta-1}\left(1-z^2\right)^{\delta-1}z^{2(1-\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}-1}\qquad(35)$$

Аналогично получим, что:

$$|B_k(\mu,z)|\leqslant const(1-s_0)^{\delta-1}\left(1-z^2\right)^{\delta-1}z^{2(1-\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}-1}\left|\mu^{\beta_{2k}}-s_0^{\beta_{2k}}\right|^{\sigma_{2k}-1}$$

$$\times\left|z^{\gamma_{2k}\beta_{2k}}-\mu^{\gamma_{2k}\beta_{2k}}\right|\qquad(36)$$

$$|C_k(\mu,z)|\leqslant const(1-s_0)^{\delta-1}\left(1-z^2\right)^{\delta-1}z^{2(1-\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}-1}\left|\mu^{\beta_{2k}}-s_0^{\beta_{2k}}\right|^{\sigma_{2k}-1}$$

$$\times\left|z^{(1+\gamma_{2k})\beta_{2k}}-\mu^{(1+\gamma_{2k})\beta_{2k}}\right|\qquad(37)$$

$$|B_k(0,z)|\leqslant const s_0^{\beta_{2k}(\sigma_{2k}-1)}(1-s_0)^{\delta-1}\left(1-z^2\right)^{\delta-1}z^{(2-2\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}-1}\qquad(38)$$

$$|C_k(0,z)|\leqslant const s_0^{\beta_{2k}(\sigma_{2k}-1)}(1-s_0)^{\delta-1}\left(1-z^2\right)^{\delta-1}z^{(3-2\sigma_{2k}-\gamma_{2k})\beta_{2k}-1}\qquad(39)$$

Таким образом, в силу класса заданных функий (см (20)) и (13) учитывая (35)-(39) из (31)-(33) и (29) соответственно получим, что $|K(x,s)| \leqslant const$ и $|F(x)| \leqslant const$, для всех $0 \leqslant x \leqslant 1$. Следовательно, решая интегральное уравнение (30) находим $\tau(x)$, далее из (10) и (11) соответсвенно находим $\nu^{-}(x)$ и $\nu^{+}(x)$ (см [19]). Единственное решение исследуемой задачи в области Ω^{+} представимо в виде [22], [23]:

$$u(x,y) = \int\limits_0^y G_\xi(x,y,0,\eta)\psi(\eta)d\eta - \int\limits_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\varphi(\eta)d\eta + \int\limits_0^1 G_0(x-\xi,y)\tau(\xi)d\xi -$$

$$- \int\limits_0^y \int\limits_0^1 G(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta \sum_{k=1}^{n} p_k \left(I_{\beta_{1k}}^{\gamma_{1k},\sigma_{1k}} \tau \right) \xi.$$

Здесь $G_0(x-\xi,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^y \eta^{-\alpha} G(x,y,\xi,\eta)d\eta$,

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\alpha/\ 2-1}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2} \left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^{\alpha/2}} \right) - e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2} \left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^{\alpha/2}} \right) \right]$$

функция Грина как и в работах [19], [22], [23].

$$e_{1,\delta}^{1,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\delta-\delta n)}$$

функция типа Райта [23]. Таким образом, **Теорема 2.** доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. **B.N.Lundstrom, M.H. Higgs, W.J.Spain, A.L.Fairhall**, Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons. Nature Neuroscience 11,no.11,P. 1335-1342. (2018)

[2]. **F.Mairnardi**, Fractional calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. Imperial College Press, London (2010).

[3]. **E. Scalas.** The application of continuos-time random walks in finance and economics. Physica A 362, no.2. pp.225-239. (2006).

[4]. **B.M. Vinagre, I.Podlubny, A. Hernandez, V.Feliu.** Some approximations of fractional order operators used in control theory and application. Frac. Cal.Appl.3. no 3. P.231-248. (2000).

[5]. **Monje, Conception A.**, Fundamentals and Applications, Springer. ISBN: 978-1849-963-350, (2010).

[6]. **Cattani, Carlo; Srivastava Hari M.; Yang, Xiao-Jun.** Fractional Dynamics. Walter de Gruyter GmbH Co KG.P.31. ISBN: 978-3110-472-097, (2015)

[7]. **A.H. Bhrawy, E.H. Doha, D Baleanu, S.S. Ezz-eldein.** A spectral tau algorithm based on Jacobi operational matrix for numerical solution of time fractional diffusion wave equations. Journal of Computational Physics 293, P.142-156.(2015).

[8]. **D. Baleanu, M.Mehdi, B.Hakimeh,** A fractional derivative inclusion problem via an integral boundary condition . Journal of computational analysis and applications V.21. no.3. P. 504-514. (2016).

[9]. **Y. Luchko, J.J. Trujilo.** Caputo-Type modification of the Erdelyi-Kober fractional derivative. Fractional Calculus and Apllied Analysis. V 10. no.3. P.251-267.(2007)

[10]. **R. Gorenflo. Yu.F.Luchko, F.Mainardi.** Wright functions as scale-invariant solutions of the diffusion-wave equation. J.Comput.Appl.Math. 118, no. 1-2 ,P. 175-191.(2000)

[11]. **V.Kiryakova,** Generalized Fractional Calculus and Applications. Long-man Scientific and Technical. Harlow (1994).

[12]. **I.N.Sneddon.** The use in mathematical analysis of Erdlyi-Kober operators and some of their applications.In:Fractional Calculus and its Applications, Proc. Inter.Conf. Held in New Haven,= Lectures Notes in Math.457.Springer, N.York , P.35-79.(1975).

[13]. **A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo.** Theory and Applications of Fractional Differential Equations, in: North-Holland Mathematics Studies, vol. 204,Elsevier Science B.V., Amsterdam. (2006).

[14]. **I.Podlubny.** Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, (1999).

[15]. **S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev.** Fractional Integral and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach, Longhorne, PA, (1993).

[16]. **О.И. Маричев, А.А. Килбас, О.А.Репин.** Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Издат.Самар.Гос.Эконом.Универ., Самара (2008).

[17]. **А.А.Килбас и О. А. Репин.** "Аналог задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа с дробным дифференцированием. Дифференциальные уравнения. Т. 39, є. 5, стр. 674-680.(2003).

[18]. **A.A. Kilbas., O. A. Repin.** "An analog of the Tricomi problem for a mixed type equation with a partial fractional derivative,"Fractional Calculus and Applied Analysis. vol. 13, no. 1, P. 69-84. (2010).

[19]. **B.I. Islomov, O.Kh. Abdullaev, N.K. Ochilova.** On a problem for the loaded degenerating mixed type equation involving integral-differential operators. NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS, V.8(3), P.1Ц12.(2017).

[20]. **K.Sadarangani, O.X. Abdullaev.** A non-local problem with discontinuous matching condition for loaded mixed type equation involving the Caputo fractional derivative. Advances in Difference Equations.AIDE-D-16-00217R3.(2016).

[21]. **O.Kh. Abdullayev.** Solvability of a non-local problem with integral gluing condition for mixed type equation with Erdelyi-Kober operators. Fractional Differential Calculus. Volume 7, no.2. P.371-383.(2017),

[22]. **М.М. Смирнов.** Уравнения смешанного типа , М.Наука.(2000).

[23]. **А.В.Псху.** Решение краевой задачи для дробного диффузионного уравнения методом функции Грина. Дифференциальные уравнения., Т.39(10) стр. 1509-1513. (2003).