

Математический институт им. В. А. Стеклова  
Российский фонд фундаментальных исследований

Международная конференция  
**“Современные проблемы  
механики сплошной среды”**

посвященная памяти академика  
**Леонида Ивановича Седова**  
в связи со столетием со дня его  
рождения

**Тезисы докладов**

МИАН, Москва, 13–15 ноября 2017 г.

**Председатели программного комитета:**

В. П. Карликов, В. В. Козлов, А. Г. Куликовский, В. А. Левин,  
В. А. Садовничий.

**Организационный комитет:**

А. Г. Куликовский, А. Т. Ильичев, В. В. Марков, А. В. Аксенов,  
Н. Е. Афонина, А. Н. Богданов, П. Ю. Георгиевский,  
Ю. И. Дмитриенко, Т. А. Журавская, А. Г. Калугин,  
М. С. Макарова, И. С. Мануйлович, А. В. Марченко,  
А. С. Савин, Н. И. Сидняев, А. М. Чайка

**Программный комитет:**

С. В. Болотин, А. Н. Голубятников, М. В. Гордин,  
И. Г. Горячева, Д. А. Губайдуллин, Д. М. Климов,  
А. Н. Крайко, К. В. Краснобаев, И. И. Липатов,  
Г. А. Любимов, О. Э. Мельник, Н. Ф. Морозов,  
Р. И. Нигматулин, Ю. М. Окунев, Ю. С. Осипов,  
А. Н. Осипцов, В. А. Полянский, С. Т. Суржиков,  
Г. А. Тирский, Д. В. Трещёв, В. Е. Фортов, С. Л. Чернышов,  
В. Н. Чубариков, М. Э. Эглит

**В организации конференции принимают участие:**

- Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова, механико-математический факуль-  
тет,
- Научно-исследовательский институт механики МГУ  
им. М. В. Ломоносова,
- Центральный аэрогидродинамический институт  
им. Н. Е. Жуковского.

**E-mail:** [sedov-110@mi.ras.ru](mailto:sedov-110@mi.ras.ru)

**Web site:** <http://www.mi.ras.ru/index.php?c=conf>

## Содержание

<b>Alekseev G. A.</b> Nonlinear interaction of strong gravitational and electromagnetic waves in the expanding universe	12
<b>Dryuma V. S.</b> On equations of incompressible liquids in Lagrangian variables	14
<b>Dutykh D., Ляпидевский В. Ю.</b> Математическая модель плотного течения	16
<b>Gavrilyuk S.</b> Multi-dimensional shear shallow water flows and compressible turbulence	17
<b>Sabelnikov V. A.</b> Challenges in modeling supersonic reacting flows and scramjet combustion simulation	18
<b>Абруков Д. А., Кержаев А. П., Коваленко М. Д., Меньшова И. В.</b> Бигармоническая проблема теории упругости. Точные решения	19
<b>Аджиев С. З., Веденяпин В. В., Казанцева В. В.</b> Экстремали Больцмана и эргодическая проблема по Пуанкаре и Гиббсу	21
<b>Азанов Г. М., Алексюк А. И., Осипцов А. Н.</b> О новых способах энергоразделения газовых потоков	23
<b>Аксенов А. В.</b> Симметрии фундаментальных решений и их применение в механике сплошной среды	26
<b>Алексеев Г. В., Левин В. А., Спивак Ю. Э., Терешко Д. А.</b> Моделирование и оптимизация в задачах дизайна тепловых оболочек	28
<b>Алексеев М. В., Савенков Е. Б.</b> Термомеханическая модель поведения непроницаемой пористой среды с химически активным	

наполнителем	30
<b>Андреев В. К.</b> О влиянии нестационарного градиента температуры на движение жидкости в канале	32
<b>Артемов М. А., Барановский Е. С., Переяславская И. И.</b> Напряженно-деформированное состояние диска при тепловом воздействии	33
<b>Афанасьев А. А.</b> Решение автомодельных задач фильтрации газа в водонасыщенном пласте	35
<b>Афанасьев А. А., Мельник О. Э., Уткин И. С.</b> Вулканомеханика	37
<b>Афони́на Н. Е., Громов В. Г., Левин В. А., Мануйлович И. С., Марков В. В., Смехов Г. Д., Хмелевский А. Н.</b> Концентрационные пределы распространения пламени в метановоздушных смесях с углеводородными добавками	39
<b>Афони́на Н. Е., Громов В. Г., Левин В. А., Мануйлович И. С., Марков В. В., Хмелевский А. Н.</b> Спектры сигналов пульсаций давления газа в соплах с дефлектором	41
<b>Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.</b> Внешняя алгебра и внешний анализ в теории блочного элемента	42
<b>Балапанов Д. М., Ведерников А. А.</b> Точное решение для одномерного течения газа в гомобарическом приближении	44
<b>Барановский Е. С.</b> Задача о движении нелинейно-вязкой жидкости при условии проскальзывания порогового типа	46
<b>Бахолдин И. Б.</b> Анализ уравнений, описывающих волны в трубах с упругими стенками	49
<b>Бобылев Д. Е.</b> Математическое моделирование пористых пластов	50
<b>Богачев И. В., Ватульян А. О.</b> Об идентификации свойств функционально-градиентного пьезополимерного цилиндра	52
<b>Богданов А. Н.</b> Некоторые аналитические подходы к исследованию задач газовой динамики, квалифицированных Л.И. Седовым, как трудные	53

- Борисов В. Е., Иванов А. И., Критский Б. В., Меньшов И. С., Савенков Е. Б.** Математическая модель и вычислительные алгоритмы для моделирования развития трещины ГРП в трехмерной постановке 55
- Бризицкий Р. В.** Анализ краевых и экстремальных задач для стационарных моделей МГД 57
- Бризицкий Р. В., Сарлицкая Ж. Ю.** Задачи восстановления коэффициентов для полулинейных моделей массопереноса 58
- Брушлинский К. В., Стёпин Е. В.** Ускорение плазмы в каналах криволинейной формы в присутствии продольного магнитного поля 60
- Брыкина И. Г., Тирский Г. А.** Моделирование взаимодействия единого и дробящегося метеороида с атмосферой 62
- Булатов В. В., Владимиров Ю. В.** Моделирование волновой динамики стратифицированных сред 64
- Веденеев В. В., Порошина А. Б.** Устойчивость упругой трубки с протекающей внутри неньютоновской жидкостью, имеющей локально ослабленный участок 66
- Вигдорович И. И.** Законы подобия для турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке газа 68
- Владимиров И. Ю., Корчагин Н. Н., Савин А. С.** Гидродинамическая реакция препятствия, обтекаемого двухслойным потоком 71
- Газизова С.Е., Каюмов И.Р., Маклаков Д.В.** О кавитирующих гидропрофилях оптимальной формы 71
- Гайфуллин А. М., Свириденко Ю. Н.** Вихревой след за самолетом. Модели и проблемы 74
- Георгиевский П. Ю., Левин В. А.** Подобие в задаче о сверхзвуковом обтекании тел при наличии области энерговклада в набегающем потоке 75
- Георгиевский П. Ю., Левин В. А., Сутырин О. Г.** Фокусировка ударной волны при взаимодействии с цилиндрическим облаком мелкодисперсной пыли 77

<b>Голубятников А. Н.</b> Оптимизация ускорения вязкоупругого тела	79
<b>Голубятников А. Н., Иванов О. О.</b> Нелинейная диффузия плавающих частиц	80
<b>Голубятников А. Н., Любошиц Д. Б.</b> Ударные волны аннигиляции в динамике гравитирующего газа	82
<b>Голушко И. Ю., Рошаль С. Б.</b> Взаимодействия белков, индуцированные деформацией мембраны: мультипольный подход	83
<b>Горбушин А. Р., Заметаев В. Б.</b> Асимптотический анализ вязких пульсаций в турбулентном пограничном слое	85
<b>Гордеева Н. М., Юшканов А. А.</b> Влияние параметров плазмы на дебаевское экранирование	86
<b>Губайдуллин Д. А.</b> Особенности распространения волн в газокапельных и пузырьковых средах	89
<b>Доброхотов С. Ю.</b> "Нестандартные" каустики в асимптотиках линейных волн на воде, порожденных локализованными источниками	91
<b>Дроздова Ю. А.</b> Математическое моделирование волн в безнапорном участке трубопровода	93
<b>Дружков К. П.</b> Гидродинамические законы сохранения систем уравнений одномерной и двумерной мелкой воды	93
<b>Дудин Г. Н., Нейланд В. Я.</b> Образование трехмерных течений на режиме сильного взаимодействия	95
<b>Егоров А. Г., Носулько К. Ю.</b> Оптимальная по расходу форма трубы при ламинарном потоке в ней вязкой жидкости	97
<b>Егорова Л. А., Лохин В. В.</b> Моделирование фрагментации метеороидов и энерговыделения	99
<b>Ефимова М. В.</b> Решение задачи конвекции при малых числах Марангони	101
<b>Жуков А. В.</b> Моделирование межфазных границ при необратимых процессах: влияние интенсивности фазовых превращений на поверхностное натяжение и динамические условия на границе раздела фаз	102

<b>Журавлева Е. Н., Карабут Е. А.</b> Эволюция сингулярностей в течениях жидкости со свободной границей	104
<b>Журавская Т. А., Левин В. А.</b> Управление детонацией в сверхзвуковом потоке в плоском канале с сужением	105
<b>Зайко Ю. С., Эглит М. Э., Якубенко А. Е.</b> Моделирование склоновых потоков с учетом неньютоновских свойств движущейся среды	106
<b>Закиров Т. Р.</b> Особенности двухфазного течения несмешиваемых жидкостей в цифровом микрофотографическом изображении песчаника	108
<b>Зубарев В. М.</b> Турбулентное течение в диффузоре с неблагоприятным градиентом давления	109
<b>Зубин М. А., Максимов Ф. А., Остапенко Н. А.</b> О структуре течения в ударных слоях около V-образных крыльев при сверхзвуковых скоростях обтекания	112
<b>Казаков А. Л., Орлов Св. С.</b> Построение специальных точных решений квазилинейного уравнения теплопроводности	114
<b>Казакова А. О., Микишанина Е. А., Терентьев А. Г.</b> Математическое моделирование в механике сплошных сред с использованием полигармонических уравнений и их систем	116
<b>Казакова А. О., Петров А. Г.</b> Численный расчет течения вязкой жидкости между двумя движущимися цилиндрами	118
<b>Калугин А. Г.</b> Об ориентационной неустойчивости сдвиговых течений нематических жидких кристаллов	121
<b>Калугин А. Г., Павлов Д. В.</b> О периодических решениях в слое нематического жидкого кристалла	122
<b>Каракин А. В.</b> Принцип неполной связанности в моделях гидро-разрыва в верхних слоях коры	124
<b>Карликов В. П., Нечаев А. Т., Толоконников С. Л.</b> Об автоколебательных режимах проникания свободных или затопленных струй через поверхность жидкости	126
<b>Карулин Е., Карулина М., Марченко А., Сахаров А., Чистяков П.</b> Плоские задачи механики морского льда	126

<b>Ковтаниук Л. В., Лемза А. О., Панченко Г. Л.</b> Большие деформации материалов в условиях ползучести и пластического течения	129
<b>Ковыркина О. А., Остапенко В. В.</b> Волновые течения, возникающие при подъеме бруса из мелкой воды	131
<b>Колесников А. Ф., Сахаров В. И.</b> Подobie теплообмена в струях ВЧ-плазмотрона и в гиперзвуковых потоках молекулярных газов	133
<b>Коровин В. М.</b> Влияние перпендикулярного электрического поля на распад тонкого слоя диэлектрической жидкости, движущегося в газе	136
<b>Краснобаев К. В., Тагирова Р. Р.</b> Самоподдерживающиеся ударные волны в областях фотодиссоциации	137
<b>Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.</b> Фронты затвердевания, задача о поршне	139
<b>Левин В. А., Мануйлович И. С., Марков В. В.</b> Численное моделирование детонации в изогнутом канале круглого сечения	141
<b>Лежнев В. Г., Марковский А. Н.</b> Собственный вихрь 2D области, расширенная задача Стокса	142
<b>Леонтьев Н. Е.</b> Автомодельные решения в задаче о безнапорной фильтрации в высокопористой среде	144
<b>Липатов И. И., Чернышев С. Л.</b> Леонид Иванович Седов. Годы работы в ЦАГИ. 1930-1947 гг.	145
<b>Лопато А. И., Уткин П. С.</b> Новые вычислительные технологии для моделирования газовой детонации	146
<b>Луценко Н. А., Фецов С. С.</b> О численной модели движения газа через слой капсулированного материала с фазовым переходом	148
<b>Лущик В. Г., Макарова М. С., Решмин А. И.</b> Численное исследование течения в плоском канале с конфуззором	150
<b>Любимов Г. А., Моисеева И. Н., Штейн А. А.</b> Эффективный метод математического моделирования клинических процедур для определения механических характеристик глаза	152

<b>Любимова О. Н., Морковин А. В.</b> Напряжения и деформации в растущей диффузионной зоне при пайке стекла со сталью	154
<b>Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А.</b> Структура катящихся волн в длинных каналах с податливыми стенками	155
<b>Маклаков Д. В., Шарипов Р. Р.</b> Почти предельные внутренние волны на границе раздела двух жидкостей	158
<b>Марченко А. В.</b> Распространение волн под ледяным покровом: результаты натурных измерений, физические механизмы диссипации энергии и моделирование	158
<b>Никитин Н. В., Пиманов В. О.</b> О механизме пристенной турбулентности	162
<b>Олейников А. И.</b> Негладкие модели упругости композитов	164
<b>Остапенко В. В.</b> К обоснованию теории мелкой воды	165
<b>Павельева Е. Б., Савин А. С.</b> Установление поверхностных волн в слое жидкости конечной глубины	167
<b>Панкратьева И. Л., Полянский В. А.</b> Влияние эффекта Онзагера на пристеночные заряженные слои в течениях слабопроводящей жидкости в плоских каналах	169
<b>Петров А. Г.</b> Нелинейные колебания маятника на пружине при резонансе 1:1:2. Теория, эксперимент и физические аналогии	171
<b>Роговой А. А., Столбова О. С.</b> Конечные деформации в материалах с памятью формы	173
<b>Рождественская Т. И.</b> Численное исследование свойств неоднородных жидкостей при обтекании ими кругового цилиндра	175
<b>Роцин Е. И.</b> Одномерные течения суспензий в пористых средах с образованием конечного скачка пористости	176
<b>Рудой Е. М., Щербаков В. В.</b> Математический анализ разрушения для вариационной модели механики композитов	178
<b>Рылов А. И.</b> Спиральные течения на плоскости потенциала	180
<b>Сальникова Т. В.</b> Циклы Пуанкаре и неравновесная термодинамика	181

<b>Сидняев Н. И.</b> Обтекание гиперзвуковых летательных аппаратов в условиях поверхностного разрушения	182
<b>Сидорова Д. А.</b> Осаждение частиц при течении суспензии через пористые среды	184
<b>Степанова И. В.</b> О точных решениях уравнений термодиффузии при различных зависимостях плотности	185
<b>Стурова И. В., Ткачева Л. А.</b> Движение области поверхностного давления в условиях неоднородного ледяного покрова	187
<b>Тихомирова К. А.</b> Эволюция фазово-структурной деформации в охлаждающемся пакете стержней из сплава с памятью формы	189
<b>Трубаев Н. А.</b> Об использовании Ньютоновского потенциала, равного константе внутри односвязной области, при моделировании струй идеальной несжимаемой жидкости	191
<b>Туник Ю. В.</b> Численный анализ устойчивости контактного разрыва в задаче о взрыве	192
<b>Тятюшкин А. Н.</b> Неустановившееся электровращение капли в постоянном электрическом поле	195
<b>Украинский Д. В.</b> Трехволновой резонанс в задачах газовой динамики	197
<b>Хохлов А. В.</b> Анализ возможностей нелинейного соотношения наследственности Работнова и линейного соотношения вязкоупругости	198
<b>Хохлов А. В.</b> Моделирование влияния температуры на кривые нагружения, ползучести и релаксации нелинейной модели типа Максвелла	200
<b>Худойназаров Х.</b> Моделирование крутильных колебаний трехслойной цилиндрической оболочки	202
<b>Цыпкин Г. Г.</b> Неустойчивость легкой жидкости над тяжелой в пористой среде	205
<b>Чашечкин Ю. Д.</b> Медленные, быстрые и сверхбыстрые компоненты процессов формирования и эволюции пространственно упорядоченных структур течений жидкостей	206

<b>Чичерин И. С.</b> Осесимметричное растекание пленки вязкой жидкости вдоль супергидрофобной поверхности	210
<b>Чичерина А. Д.</b> Автомодельное решение задачи о течении неньютоновской жидкости вдоль наклонной плоскости	211
<b>Чупахин А. П., Янченко А. А.</b> Особый вихрь в релятивистской газовой динамике	211
<b>Шамолин М. В.</b> Негладкие первые интегралы в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой	213
<b>Штука В. И.</b> Моделирование отклика упруго-вязко-пластического несжимаемого цилиндрического слоя на существенно нестационарные граничные воздействия	216

# Nonlinear interaction of strong gravitational and electromagnetic waves in the expanding universe

G. A. Alekseev

*Steklov Mathematical Institute, Russian Ac. Sci.*

G.A.Alekseev@mi.ras.ru

Wonderful events – the long awaited direct observations of gravitational waves by LIGO collaboration, which happened at the turn of the century of General Relativity theory, and subsequent observations of gravitational waves by LIGO-Virgo collaborations as well as the identifications of the sources of the recorded signals with black holes and neutron stars mergers marked the beginning of a new era in the studies of the Universe – the era of gravitational wave astronomy. In addition to the information which can be received now from various parts of electromagnetic spectrum, a new information channel was opened and it can bring important information about physical processes in various (particularly – very distant) astrophysical objects, about the structure and evolution of the Universe.

The recorded gravitational wave signals showed that these waves were produced at very large (in cosmological scale) distances in the processes of massive black holes as well as neutron stars close inspiral motions and mergers, i.e. these waves originally had been created with large amplitudes and might pass through the regions of strong gravitational and probably, electromagnetic fields. The existence of electromagnetic counterparts of the registered gravitational bursts obviously becomes a question of a present interest for observations. Possible sources of such electromagnetic signals can possess different nature: these can arise from the interaction of strong gravitational waves with ionized plasma which may surround the inspiralling and merging black holes and/or neutron stars, or as a result of a direct interaction of gravitational waves with strong external electromagnetic fields or even with electromagnetic wave bursts of high energy which also may exist in the regions surrounding these objects or along the paths of these waves from merging objects to the detectors.

The interaction of electromagnetic and gravitational fields and waves is predicted by General Relativity (the Einstein - Maxwell theory). The studies of these interactions possess a long history since a pioneer work of M.E.Gertsenstein (1962) who showed that a gravitational wave can be excited during the propagation of electromagnetic wave through a strong background electromagnetic field.

Later, periodic mutual transformations of gravitational and electromagnetic waves in a strong external electromagnetic field had been discovered and studied in the papers of Zel'dovich, Braginskii&etal (model equations), Sibgatullin, GA&Sibgatullin and others (the Einstein-Maxwell equations). However, in these studies the interaction of waves was considered in linear approximation only.

In this talk we discuss different aspects of nonlinear interaction of arbitrary strong gravitational and electromagnetic waves using a large class of exact solutions of Einstein - Maxwell equations found by the author in [1]. These solutions describe a head-on collision of plane linearly polarised waves – the soliton gravitational waves with electromagnetic waves of arbitrary amplitudes and profiles.<sup>1</sup> The most interesting features of nonlinear interaction of these waves are

- In contrast to our possible intuitive expectations, an arbitrary strong electromagnetic wave of any profile can't destroy a gravitational soliton wave.
- Constant parameters, which characterise the gravitational soliton before interaction, begin to evolve inside electromagnetic wave and become constant again (with changed values) after passing the back front of this wave.
- During a collision, a partial mutual conversion of gravitational and electromagnetic waves (similar to that known in the linear case) takes place.
- After a collision, a gravitational soliton can change its profile so that, e.g., the "dark"soliton can become a "light"soliton.
- After a collision, a gravitational soliton gets its electromagnetic counterpart with a profile very similar to the gravitational one.
- A part of "energy"of gravitational soliton is scattered and a gravitational wave which goes back and follows the electromagnetic wave is created.

Another process – a collision of electromagnetic soliton wave with another electromagnetic wave of arbitrary profile, their mutual nonlinear scattering and creation of gravitational waves in this collision is also discussed in the talk.

[1] G.A.Alekseev, “Collision of strong gravitational and electromagnetic waves in the expanding universe”, Phys.Rev. D 93, 061501(R) (2016)

---

<sup>1</sup>A choice of a homogeneous anisotropically expanding universe as a background for waves (instead of e.g., Minkowski space-time) simplifies the solutions considerably because it prevents the mutual focusing of waves and creation of singularities on the caustics.

# On equations of incompressible liquids in Lagrangian variables

**V. S. Dryuma**

*Institute of Mathematics and Informatics of the AS of Moldova*

valdryum@gmail.com

1. The Euler system of equations of two-dimensional flows of incompressible ideal fluid in Lagrangian variables has the form

$$x_{tt} + p_u y_v - p_v y_u = 0, \quad y_{tt} + x_u p_v - x_v p_u = 0, \quad x_u y_v - x_v y_u = 1, \quad (1)$$

where the variables  $x = x(u, v, t)$ ,  $y = y(u, v, t)$ ,  $p = p(u, v, t)$  are the coordinates and pressure of individual elements of fluid.

To construct of exact particular solutions of the system (1) find from it expressions to partial derivatives of function  $p = p(u, v)$

$$p_v = -y_{tt} y_v - x_v x_{tt}, \quad p_u = -x_u x_{tt} - y_u y_{tt}, \quad (2)$$

in which it is necessary to substitute an explicit solutions of the equations of incompressibility of fluid

$$x_u y_v - x_v y_u = 1. \quad (3)$$

As example of solution of undetermined equation (3) we choose a following  $x(u, v, t) = \mu(v, t)$ ,  $y(u, v, t) = \nu(v, t) - \frac{u}{\frac{\partial}{\partial v} \mu(v, t)}$ , which depend from two arbitrary function  $\mu(v, t)$  and  $\nu(v, t)$ .

Remark. Solutions of the equation (3) after hodograph transformations

$$x(u, v) = x, \quad u - \lambda(x, v) = 0, \quad x_u = 1/\lambda_x, \quad x_v = -\lambda_v/\lambda_x,$$

$$y(u, v) = y, \quad y - \rho(x, v) = 0, \quad y_u = \rho_x \lambda_x, \quad y_v = \rho_v - \rho_x \lambda_v/\lambda_x.$$

takes the form  $-\rho_v + \lambda_x = 0$  and it has solution  $\lambda(x, v, t) = \psi_v$ ,  $\rho(x, v, t) = \psi_x$ , where  $\psi(x, v, t)$  is arbitrary function or  $\lambda(x, v, t) = \int \rho_v dx + F_1$ .

2. The Euler system of equations of three-dimensional flows of incompressible ideal fluid in Lagrangian variables has the form

$$x_{tt} + y_u z_v p_w - y_u z_w p_v - z_u y_v p_w + z_u y_w p_v + p_u y_v z_w - p_u y_w z_v = 0,$$

$$y_{tt} + z_u x_v p_w - z_u x_w p_v - x_u z_v p_w + x_u z_w p_v + p_u x_w z_v - p_u x_v z_w = 0,$$

$$\begin{aligned}
z_{tt} + x_u y_v p_w - x_u y_w p_v - y_u x_v p_w + y_u x_w p_v + p_u x_v y_w - p_u x_w y_v &= 0, \\
x_u y_v z_w - x_u y_w z_v - y_u x_v z_w + y_u x_w z_v + z_u x_v y_w - z_u x_w y_v &= 1. \quad (4)
\end{aligned}$$

From the system (4) follows expressions to the partial derivatives on the function pressure  $p = p(u, v, w, t)$

$$\begin{aligned}
p_u &= -z_u z_{tt} - x_u x_{tt} - y_u y_{tt}, & p_v &= -x_v x_{tt} - y_v y_{tt} - z_v z_{tt}, \\
p_w &= -x_w x_{tt} - y_w y_{tt} - z_w z_{tt}, \quad (5)
\end{aligned}$$

for which necessary to write the conditions of compatibility

The system of equations consisted from the conditions of compatibility and the equation of incompressibility

$$x_u y_v z_w - x_u y_w z_v - y_u x_v z_w + y_u x_w z_v + z_u x_v y_w - z_u x_w y_v = 1, \quad (6)$$

that together form full system of 3D equations of Lagrangian hydrodynamics.

The equation (6) play key role in this theory and for solving of it can be used presentation of the function and variables in parametric form [1]

$$\begin{aligned}
x &= a(\tau, v, w, t), & y &= b(\tau, v, w, t), & z &= c(\tau, v, w, t), & u &= e(\tau, v, w, t), \\
x_u &= a_\tau/e_\tau, & x_v &= a_v - e_v a_\tau/e_\tau, & x_w &= a_w - e_w a_\tau/e_\tau, & x_t &= a_t - e_t a_\tau/e_\tau, \\
y_u &= b_\tau/e_\tau, & y_v &= b_v - e_v a_\tau/e_\tau, & y_w &= a_w - e_w a_\tau/e_\tau, & y_t &= a_t - e_t a_\tau/e_\tau, \\
z_u &= c_\tau/e_\tau, & z_v &= a_v - e_v a_\tau/e_\tau, & z_w &= a_w - e_w a_\tau/e_\tau, & z_t &= a_t - e_t a_\tau/e_\tau, \quad (7)
\end{aligned}$$

where the variable  $\tau$  is considered as parameter .

Substitution of the expressions (7) in the equation (6) leads to an undefined relationship, which allows find its solutions, dependent on arbitrary functions. These functions are used then to construction of solutions of the full system.

As example is the singular solution of the system (4)

$$\begin{aligned}
y(u, v, w, t) &= -2at \cos(u) \cos(v), & x(u, v, w, t) &= -2at \sin(u) \sin(v), \\
z(u, v, w, t) &= -1/2 \frac{w}{a^2 t^2 (\cos(2u) - \cos(2v))}, \\
p(u, v, w, t) &= -3/8 \frac{w^2}{(\cos(v)^2 - \cos(u)^2) (-\cos(2u) + \cos(2v)) t^6 a^4}.
\end{aligned}$$

## Литература

1. On solving of Euler equations of ideal incompressible liquid, *International Conference on Mathematical Control theory and Mechanics, Suzdal, July' 3-7 Abstracts: (2015)*, 166–168.

## Математическая модель плотностного течения

<sup>1</sup>D. Dutykh, <sup>2</sup>В. Ю. Ляпидевский

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН  
Новосибирский государственный университет  
LAMA, UMR 5127 CNRS, Université Savoie Mont Blanc, France*

<sup>1</sup>Denys.Dutykh@univ-smb.fr

<sup>2</sup>liapid@hydro.nsc.ru

Плотностные течения представляют важный с теоретической и практической точки зрения класс течений, широко распространенный в атмосфере и в океане. Влияние топографии, наличие осадков приводят к развитию таких высокоэнергетических процессов как формирование снежных лавин и потоков взвеси, локальных присклоновых течений (Lac du Bourget), мощных подводных "водопадов" и др. Основными механизмами развития плотностных течений являются генерация турбулентности за фронтом течения, подъем и осаждение осадков, вовлечение в поток окружающей жидкости. При этом принципиальная проблема моделирования состоит в определении скорости фронта течения. Несмотря на наличие большого экспериментального материала, связывающего скорость распространения потока с условиями его генерации, вывести эти зависимости из общих принципов в рамках существующих моделей не удается.

В работе представлена многослойная модель мелкой воды с учетом массообмена между слоями в результате турбулентного перемешивания и осаждения осадков, построенная на основе полной системы законов сохранения [Ляпидевский, Тешуков, 2000]. Эта модель позволяет более полно описать начальную стадию развития плотностного течения и найти граничные условия, определяющие динамику потока. Кроме того, рассматриваемая схема течения, в которой скорость более плотной жидкости в придонном слое превосходит скорость фронта приводит к новым математическим постановкам задач о структуре головной части и прави-

ле отбора скорости плотностного течения. Исследованы автомодельные решения и найдена их связь с асимптотическим поведением нестационарных численных решений. Проведено сравнение с экспериментальными данными в задаче об эволюции термика над склоном [Rastello, Hopfinger, 2004].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-03942), а также Université Savoie Mont Blanc (AAP Montagne 2016, project AVAL).

## Multi-dimensional shear shallow water flows and compressible turbulence

**S. Gavriluk**

*Aix-Marseille Université, CNRS, IUSTI, UMR 7343, 5 rue E. Fermi,  
13453 Marseille Cedex 13, France  
sergey.gavrilyuk@univ-amu.fr*

The multi-dimensional equations of shear shallow water flows represent a  $2D$  hyperbolic non-conservative system of equations which is reminiscent of generic Reynolds averaged equations for barotropic turbulent fluids. The model has three families of characteristics corresponding to the propagation of surface waves, shear waves and average flow.

I present a new splitting technique to define the weak solutions to this non-conservative system of equations. The full system is split into several subsystems for which the notion of the weak solution is almost classical. Each split subsystem contains only one family of waves (either surface or shear waves) and contact characteristics. The accuracy of such an approach is tested on the exact  $2D$  solutions describing the flow where the velocity is linear with respect to the space variables (generalisation of L. I. Sedov's and L. V. Ovsyannikov's solutions to the Euler equations of compressible fluids), and on the solutions describing  $1D$  roll waves. The capacity of the model to describe multi- $D$  experimentally observed phenomena was shown : 'fingering' of plane one-dimensional wave fronts, and the formation of singularities in radially convergent flows.

I will also discuss the perspectives of such a 'splitting approach' for the description of  $3D$  compressible turbulent flows.

This is joint work with K. Ivanova and N. Favrie.

## Литература

1. 2017 S. Gavriluk, K. Ivanova, N. Favrie, Multi-dimensional shear shallow water flows : problems and solutions (submitted).

## Challenges in modeling supersonic reacting flows and scramjet combustion simulation

V. A. Sabelnikov

*ONERA–The French Aerospace Laboratory, Palaiseau, F-91761, France*

*TsAGI, 140180 Zhukovskiy, Moscow Region, Russian Federation*

`vladimir.sabelnikov@onera.fr`

The scramjet (supersonic combustion ramjet) engine is conceptually a ramjet in which the compressed air flow from the inlet is kept supersonic throughout the whole flowpath. These engines are designed for air-breathing propulsion of vehicles at high Mach number values (above 5 or 6) where practical ramjet engines feature lower performance, especially in term of specific impulse. The corresponding conditions concern several fields of application including civil transport, space launchers or missiles. In comparison with experimental investigations, which remain very challenging to conduct in such flow conditions, computational fluid dynamics (CFD) offers an attractive alternative and nonetheless complementary tool for the study of such high-speed turbulent reactive flows.

The challenges to model high speed combustion in the frame of RANS (the Reynolds-averaged Navier–Stokes equations) and LES (Large Eddy Simulation) approaches are summarized. The state of the art of CFD capabilities for predicting supersonic combustion is presented. The models available to account for turbulence-chemistry interactions (TCI) are critically described (flamelet model (FM), linear eddy mixing model (LEM), eddy dissipation concept (EDC), partially stirred reactor (PaSR) and extended (transported) PaSR models, probability density function (PDF) approach (transported and assumed PDF)). The review shows that the description of combustion in high-speed turbulent flows where turbulent mixing, compressibility effects and chemical kinetics processes are competing still remains a challenging issue for numerical simulations. The review

provides also short description and references to experimental databases that can be used for the validation, improvements and development of phenomenological TCI models for RANS, subgrid scale models for LES, and reduced-kinetics models.

The author was financially supported by ONERA and by the Grant of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Contract No. 14.G39.31.0001 of 13.02.2017).

## Бигармоническая проблема теории упругости. Точные решения

<sup>1</sup>Д. А. Аbruков, <sup>2</sup>А. П. Кержаев, <sup>3</sup>М. Д. Коваленко,

<sup>4</sup>И. В. Меньшова

<sup>1</sup> ЧГУУ

<sup>2,3,4</sup> ИТПЗ РАН

<sup>1</sup>abrukovda@yandex.ru

<sup>2</sup>alex\_kerg@mail.ru

<sup>3</sup>kov08@inbox.ru

<sup>4</sup>menshovairina@yandex.ru

В виде рядов по собственным функциям Фадля–Папковича (однородным решениям) строятся точные решения краевых задач теории упругости и теории изгиба тонких прямоугольных пластин. Функции Фадля–Папковича точно удовлетворяют нулевым граничным условиям на двух противоположных сторонах прямоугольника. Удовлетворяя граничным условиям на его торцах, приходим к проблеме разложения заданных здесь граничных функций в ряды по системам функций Фадля–Папковича (бигармоническая проблема).

Функции Фадля–Папковича комплекснозначны и не образуют базиса на отрезке – торцах прямоугольника. Поэтому найти неизвестные коэффициенты разложений по ним, основываясь на классических представлениях теории базиса функций, невозможно. Их нужно рассматривать как пример представляющих систем экспонент с комплексными показателями (А.Ф. Леонтьев, Ю.Ф. Коробейник) и с вырожденной в отрезок областью аналитичности. Основываясь на преобразовании Бореля в классе квазицелых функций экспоненциального типа, к функциям

Фадля–Папковича удается построить соответствующие биортогональные функции и затем найти простые явные выражения для коэффициентов искомым разложений.

Вначале изучаются разложения одной функции в ряд по какой-либо одной системе функций Фадля–Папковича. При решении краевых задач эти разложения играют ту же роль, какую ряды Фурье играют в известных периодических решениях Файлона–Рибьера. Затем даются решения краевых задач, в том числе неоднородных, смешанных, с разрывами сплошности.

Полученные точные решения обладают свойствами, не присущими известным точным решениям. Например, они не единственны (впервые внимание на это обратил Е.И. Шемякин). Отсюда, как следствие, вытекает возможность описания этими решениями остаточных напряжений.

Особое внимание уделяется физической стороне задачи. В частности, обсуждается глубокая связь между неединственностью, совместностью деформаций, поведением решений в окрестности угловых точек границы и т.д.

Неединственность связана не только с необходимостью продолжения заданных на торце полуполосы граничных функций с отрезка (торцов прямоугольника) на всю вещественную ось, но и с продолжением решения вдоль горизонтальных сторон прямоугольника. Это значит, что угловые точки в прямоугольнике рассматриваются не как геометрические объекты (например, как в решении для бесконечного клина), но как бесконечно малые элементы, подобные другим точкам области. От того, как выполнены эти продолжения, будет зависеть решение. Способ того или иного продолжения определяется из физических соображений.

Важной особенностью решений, описывающих остаточные напряжения, является то, что граничные условия в них ставятся строго на прямолинейных границах полуполосы, а не «сносятся на недеформированную поверхность». Как было показано Д.И. Шерманом, «сносение на недеформируемую поверхность» связано с добавлением недостающего (или удалением лишнего) материала (создание «вкладок», по Н.И. Мухелишвили). Благодаря этому выполняются условия совместности деформаций. В полученных точных решениях условия совместности не выполняются, и это означает лишь то, что стороны прямоугольника, прямолинейные до деформации, не остаются прямолинейными после приложения нагрузки.

Найденными точными решениями можно описывать остаточные напряжения. Укажем, вытекающие из полученных результатов, несколько признаков, свидетельствующих о наличии остаточных напряжений в какой либо конечной плоской области: 1) знакопеременность напряжений, являющаяся следствием их самоуравновешенности; 2) значительные остаточные деформации свободных поверхностей разрыва, возникающие в результате сброса остаточных напряжений; 3) фрагменты области, образовавшиеся вследствие ее разделения и сброса остаточных напряжений, перемещаются и поворачиваются как абсолютно жесткие; 4) их невозможно сложить вновь по поверхностям разрыва без зазоров.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 15-41-02644 и 16-31-60028 мол\_а\_дк.

## Экстремали Больцмана и эргодическая проблема по Пуанкаре и Гиббсу

<sup>1</sup>С. З. Аджиев, <sup>2</sup>В. В. Веденяпин, <sup>2</sup>В. В. Казанцева

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

<sup>2</sup>ИПМ имени М.В. Келдыша РАН

vicveden@yahoo.com

$H$ -теорема впервые была рассмотрена Больцманом в [1]. Эту теорему, обосновывающую сходимость решений уравнений типа Больцмана к максвелловскому распределению, Больцман связал с законом возрастания энтропии [2]. Доказательство  $H$ -теоремы не только обосновывает 2-е начало термодинамики, но и делает поведение решения уравнения понятным, так как позволяет узнать, куда сходится решение для данного уравнения при времени, стремящемся к бесконечности. Мы рассматриваем обобщения уравнений химической кинетики, включающие в себя классическую и квантовую химическую кинетику [3].  $H$ -теорема для этих обобщений уравнений химической кинетики: (2) и (3), в случае непрерывного времени исследовалась [3]. Были изучены обобщенное условие детального равновесия (баланса) и обобщенное условие динамического равновесия (или обобщенное условие Штюккельберга–Батищевой–Пирогова), при выполнении которых справедлива  $H$ -теорема. В работах [4,5] было показано, как выполняется закон роста энтропии для уравнений Лиувилля: энтропия

временного среднего больше или равна энтропии начального распределения, хотя вдоль решения она сохраняется. В работах [6,7] показано, что временные средние для уравнения Лиувилля совпадают с экстремалью Больцмана, там, где достигается условный максимум энтропии при фиксированных законах сохранения. Мы доказываем это совпадение для представлений групп, вводя энтропию и изучая ее свойства в теории представлений. Потом мы выясняем, что дает это для эргодической проблемы, получая обобщение и уточнение эргодических теорем Рисса, Биркгофа-Хинчина, фон Неймана и Боголюбова с единой точки зрения. Это обосновывает, проясняет и уточняет метод Гиббса. Это также по-новому проясняет проблемы необратимости, в частности, парадоксы Лосмидта и Пуанкаре.

### Литература

1. Л. Больцман, “Дальнейшие исследования теплового равновесия между молекулами газа”, Избранные труды, Наука, М., 1984, 125–189.
2. Л. Больцман, “О связи между вторым началом механической теории теплоты и теорией вероятностей в теоремах о тепловом равновесии”, Избранные труды, Наука, М., 1984, 190–235.
3. В. В. Веденяпин, С. З. Аджиев, “Энтропия по Больцману и Пуанкаре”, УМН, 69:6(420) (2014), 45–80.
4. Пуанкаре А., Замечания о кинетической теории газов, Пуанкаре А. Избранные труды. Т.3. Наука, М., 1974.
5. Козлов В.В., Трещев Д.В., Слабая сходимости решений уравнения Лиувилля для нелинейных гамильтоновых систем, ТМФ. 2003. 134:3. С.388–400.
6. Веденяпин В.В., Кинетическая теория по Максвеллу, Больцману и Власову, Конспект лекций. МГОУ, М., 2005.
7. Веденяпин В.В., Временные средние и экстремали по Больцману, Доклады Академии Наук, 2008, Т.422, №2, с.161-163.

# О новых способах энергоразделения газовых потоков

<sup>1</sup>Г. М. Азанов, <sup>2</sup>А. И. Алексюк, <sup>3</sup>А. Н. Осипцов

<sup>1,2</sup>*Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова*

<sup>3</sup>*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

osiptsov@imec.msu.ru

Безмашинным энергоразделением газового потока называется такая организация течения, при которой однородный поток преобразуется в два потока с существенно различающимися температурами торможения без совершения работы или подвода тепла из внешних источников. Наиболее известным способом безмашинного газодинамического энергоразделения является использование вихревых трубок Ранка–Хилша [1]. Такие устройства могут обеспечить разность температур торможения выходящих потоков в десятки градусов, однако имеют существенный недостаток, связанный с высокими потерями полного давления. Несмотря на большое число приближенных моделей вихревого эффекта Ранка, до сих пор отсутствует полное понимание физических механизмов безмашинного энергоразделения газовых потоков, что затрудняет оптимизацию работы существующих энергоразделяющих устройств и создание более эффективных устройств, основанных на новых схемах течения. Настоящая работа направлена на исследование нескольких перспективных схем организации течения и общих механизмов газодинамического энергоразделения.

Для иллюстрации основных механизмов энергоразделения запишем уравнение переноса полной энтальпии для вязкого теплопроводного газа:

$$\frac{di_0}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla_j (\tau^{ij} V_i) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\lambda \nabla T)$$

Здесь  $\tau^{ij}$  — тензор вязких напряжений,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности, остальные обозначения общепринятые. Видно, что изменение полной энтальпии (а следовательно, и температуры торможения  $T_0$ ) в жидкой частице связано с действием диссипативных механизмов (вязкости и теплопроводности), а также с нестационарностью течения. В стационарном течении невязкого нетеплопроводного газа полная энтальпия  $i_0 = c_p T + V^2/2 = c_p T_0$

сохраняется вдоль линии тока (интеграл Бернулли) и энергоразделение невозможно.

В докладе рассмотрены примеры течений, в которых в процессе энергоразделения существенную роль могут играть как эффекты теплопроводности, так и нестационарность потока. В первой части доклада обсуждаются пути повышения эффективности схемы энергоразделения стационарного газового потока, предложенной в [2]. В этой схеме часть газа, втекающего в энергоразделяющее устройство, проходит через сопло Лавалья и разгоняется до сверхзвуковой скорости. Далее, до- и сверхзвуковой потоки газа, имеющие одинаковые исходные параметры торможения и разделенные тонкой цилиндрической перегородкой, движутся в цилиндрическом канале. Вследствие теплообмена между до- и сверхзвуковыми потоками осредненные температуры торможения на выходе из устройства в этих потоках могут различаться на несколько процентов. Основное преимущество такой схемы — малые потери полного давления. Эффект энергоразделения в данном случае обусловлен теплообменом между потоками газа, имеющими существенно различные скорости. В случае теплоизолированной пластины, разделяющей течения в до- и сверхзвуковом пограничных слоях, температура восстановления на различных сторонах пластины может заметно различаться. Соответственно, при замене теплоизолированной пластины теплопроводной перегородкой происходит теплообмен между разделенными течениями, что приводит к появлению разности осредненных температур торможения в газе, прошедшем до- и сверхзвуковой пограничные слои. В докладе представлены результаты параметрических численных расчетов течения в до- и сверхзвуковом ламинарных пограничных слоях, разделенных теплоизолированной, а также теплопроводной плоской стенкой. Показано, что для течений чистого газа эффективность энергоразделения может быть существенно повышена (разность средних температур торможения в потоках по обе стороны пластины, отнесенная к исходной температуре торможения может достигать 7%) при использовании смесей газов с малыми числами Прандтля ( $Pr \sim 0.2$ ). Исследована возможность резкого повышения эффективности энергоразделения за счет примеси жидких капель в сверхзвуковом пограничном слое. Рассмотрены режимы течения с наличием и отсутствием испарения капель. На основании численных расчетов в рамках модели двухфазного пограничного слоя показано, что для нор-

мальных газов (с числами Прандтля, как у воздуха) присутствие даже очень малых (порядка процентов) массовых концентраций жидкой конденсированной фазы в высокоскоростном пограничном слое может приводить к значительному снижению температуры восстановления на адиабатической стенке и резкой (до 10%) интенсификации процесса энергоразделения в случае теплопроводной стенки [3-4].

Во второй части доклада, на примере задачи поперечного обтекания круглого цилиндра сжимаемым вязким газом в режиме периодического схода вихрей в ближний след, исследуется влияние нестационарности течения на процесс энергоразделения. На основе прямого численного решения двумерных уравнений Навье–Стокса для чисел Маха  $\leq 0.6$  и чисел Рейнольдса  $\leq 10^3$  исследована динамика зон повышенной и пониженной температуры торможения в ближнем следе за цилиндром [5]. Подтвержден и объяснен парадоксальный экспериментальный факт снижения равновесной температуры поверхности адиабатического цилиндра вблизи задней критической точки до температур ниже статической температуры набегающего потока [6]. Проведен детальный анализ роли различных диссипативных механизмов, а также нестационарности течения на распределение осредненной по времени температуры торможения газа в ближнем следе. Сформулированы некоторые идеи о возможности управления процессом энергоразделения в нестационарных газовых потоках.

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-19-00699.

### Литература

1. Eiasma-ard S., Promvonge P. Review of Ranque-Hilsch effects in vortex tubes // Renewable and sustainable energy reviews. 2008. V. 12. N7. P. 1822-1842.
2. Леонтьев А.И. Газодинамический метод энергоразделения газовых потоков // Теплофизика высоких температур. 1997. Т. 35. №1. С. 157-159.
3. Азанов Г.М., Осипцов А.Н. Влияние мелких испаряющихся капель на температуру адиабатической стенки в сжимаемом двухфазном пограничном слое // Изв РАН. МЖГ. 2016. №4. С. 67-78.
4. Azanov G.M., Osiptsov A.N. The efficiency of one method of machineless gasdynamic energy stratification in a gas flow // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2017. V. 106. P. 1125-1133.

5. Aleksyuk A.I., Osiptsov A.N. Direct numerical simulation of energy separation effect in the near wake behind a circular cylinder // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2017 (in press).
6. Eckert E., Weise W., Messungen der Temperaturverteilung auf der Oberfläche schnell angeströmter unbeheizter Körper // Forschung im Ingenieurwesen. 1942. V 13. N6. P. 246-254.

## **Симметрии фундаментальных решений и их применение в механике сплошной среды**

**А. В. Аксенов**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*  
[aksenov.av@gmail.com](mailto:aksenov.av@gmail.com)

Симметрии линейного уравнения с частными производными с  $\delta$ -функцией в правой части называются симметриями фундаментальных решений. Соответствующая им группа непрерывных преобразований переводит фундаментальное решение в фундаментальное. Отметим, что фундаментальные решения определены с точностью до решения однородного уравнения. В работе [1] было показано, что симметрии фундаментальных решений образуют подалгебру алгебры Ли симметрий однородного уравнения. В работе также были предложены метод нахождения симметрий фундаментальных решений и алгоритм построения инвариантных фундаментальных решений. В настоящей работе представлены примеры применения симметрий фундаментальных решений в механике сплошной среды.

Показано, что симметрии фундаментальных решений линейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными оставляют инвариантной функцию Римана сопряженного уравнения. Предложен метод построения функции Римана.

Система уравнений одномерной газовой динамики для степенной зависимости давления от плотности в переменных годографа сводится к гиперболическому уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД). Найдены симметрии фундаментальных решений и

построено инвариантное фундаментальное решение гиперболического уравнения ЭПД. На основании симметрий фундаментальных решений построена функция Римана гиперболического уравнения ЭПД. Функция Римана описывает взаимодействие двух центрированных волн Римана.

Система уравнений, описывающая распространение длинноволновых возмущений в абсолютно неустойчивых средах, в переменных годографа сводится к эллиптическому уравнению ЭПД. Показано, что фундаментальные решения эллиптического уравнения ЭПД описывают периодические по пространственной переменной решения системы уравнений, описывающей распространение возмущений в абсолютно неустойчивых средах. Найдены симметрии фундаментальных решений и построено инвариантное фундаментальное решение эллиптического уравнения ЭПД.

В работе [2] для трансверсально изотропной линейно-упругой среды система уравнений равновесия в перемещениях была редуцирована к системе из трех линейных неоднородных уравнений относительно трех компонент вектора перемещений. Однородным уравнениям соответствуют канонические линейные дифференциальные уравнения с частными производными четвертого порядка. Полученные канонические уравнения являются обобщением бигармонического уравнения, описывающего перемещения изотропной линейно-упругой среды. Для нахождения перемещений трансверсально изотропной линейно-упругой среды при наличии заданной объемной силы, необходимо знать фундаментальные решения канонических уравнений. Показано, что полученные канонические уравнения можно свести к одному уравнению заменой зависимых и независимых переменных. В работе [3] найдены симметрии фундаментальных решений этого уравнения и построено в элементарных функциях инвариантное фундаментальное решение.

## Литература

1. Аксенов А.В. Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Доклады АН. 1995. Т. 342. № 2. С. 151–153.
2. Георгиевский Д.В. Обобщенное представление Галёркина для трансверсально изотропной линейно-упругой среды // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. № 6. С. 883–887.

3. Аксенов А.В. Фундаментальное решение уравнений в перемещениях для трансверсально изотропной упругой среды // Доклады АН. 2016. Т. 470. № 5. С. 514–518.

## Моделирование и оптимизация в задачах дизайна тепловых оболочек

<sup>1,2</sup>Г. В. Алексеев, <sup>3</sup>В. А. Левин, <sup>2</sup>Ю. Э. Спивак,  
<sup>1</sup>Д. А. Терешко

<sup>1</sup>*Институт прикладной математики ДВО РАН*

<sup>2</sup>*Дальневосточный федеральный университет*

<sup>3</sup>*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

`alekseev@iam.dvo.ru`

В последние годы интенсивно развивается новое направление в тепломассопереносе, связанное с разработкой технологий дизайна специальных функциональных устройств, служащих для управления потоками тепла. Одним из важнейших таких функциональных тепловых устройств является тепловая оболочка, представляющая собой область, имеющую вид сферического слоя (или кольца на плоскости  $\mathbb{R}^2$ ), заполненную неоднородной и анизотропной в общем случае средой. В зависимости от поставленной цели указанная тепловая оболочка может служить для тепловой маскировки любого объекта, помещенного внутрь ее, либо, наоборот, для концентрирования тепла в ее внутренности [1,2]. О других возможных целях построения проектируемых тепловых оболочек можно прочитать, например, в [3,4].

При решении задач дизайна средств тепловой маскировки либо концентрирования тепла применяются как экспериментальные, так и теоретические методы. Большинство экспериментальных исследований в этой области направлено на изучение возможностей и способов управления тепловыми потоками с помощью специально разрабатываемых для этой цели новых материалов (см. [1]). Теоретические исследования направлены на разработку методов дизайна тепловых функциональных устройств, служащих для управления потоками тепла. Применение теоретических методов приводит к необходимости решения обратных

задач для соответствующей модели теплопереноса. Указанные задачи заключаются в выборе параметров среды, заполняющей оболочку с заданной топологией исходя из некоторой дополнительной информации о создаваемом тепловом поле, вытекающей из цели проектируемого устройства.

При некоторых упрощающих предположениях задачи дизайна функциональных тепловых устройств были рассмотрены в ряде работ (см., например, [3,4] и ссылки там), где предложен метод построения точных решений, основанный на методе Фурье. Однако этот метод применим лишь при выполнении жестких упрощающих предположений, обеспечивающих построение в явном виде точного или приближенного решения прямой задачи теплопереноса.

В настоящей работе исследуются задачи управления для стационарной модели теплопереноса. Указанные задачи возникают при разработке технологий дизайна тепловых оболочек, предназначенных для маскировки материальных тел или концентрации тепла внутри оболочки. Особое внимание уделяется анализу слоистых оболочек, состоящих из конечного числа слоев, каждый из которых заполнен однородной изотропной либо анизотропной средой. В частном случае однослойной однородной анизотропной оболочки приводится и анализируется точное решение. С помощью оптимизационного метода рассматриваемые обратные задачи сводятся к задачам управления. Для их решения используется разработанный в [5,6] численный алгоритм, основанный на методе роя частиц, обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00365-а) и РНФ (проект 14-11-00079).

## Литература

1. Narayana S., Sato Y. Heat flux manipulation with engineered thermal materials // *Phys. Rev. Lett.* 2012. V. 108. 214303.
2. Guenneau S., Amra C., Veynante D. Transformation thermodynamics: cloaking and concentrating heat flux // *Opt. Express.* 2012. V. 20. 8207.
3. Han T., Qiu C.-W. Transformation Laplacian metamaterials: recent advances in manipulating thermal and dc fields // *Opt.* 2016. V. 18. 044003.

4. Алексеев Г. В. Проблема невидимости в акустике, оптике и теплопереносе. Владивосток: Дальнаука, 2016.
5. Алексеев Г. В., Левин В. А., Терешко Д. А. Оптимизационный анализ задачи тепловой маскировки цилиндрического тела // Докл. АН. 2017. Т. 472, N 4. С. 398–402.
6. Алексеев Г. В., Левин В. А., Терешко Д. А. Оптимизационный метод в задачах дизайна сферических слоистых тепловых оболочек // Докл. АН. 2017. Т. 476, N 5.

## **Термомеханическая модель поведения непроницаемой пористой среды с химически активным наполнителем**

**М. В. Алексеев, Е. Б. Савенков**

*ФГУ ФИЦ «Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
РАН»*

mikhail.alekseev@phystech.edu

В работе рассматривается самосогласованная математическая модель термомеханического поведения упругой среды, содержащей пустоты, заполненные химически активным веществом [1,2].

Для описания поведения вмещающей пустоты (поры) среды используются уравнения термомеханики, описывающие совместную эволюцию механических и температурных полей.

Процессы в порах описываются сосредоточенной моделью с учетом энерговыделения, химических реакций и условий фазового равновесия. Модель состояния вещества в порах позволяет учитывать произвольное число компонент, которые могут находиться в твердой и трех подвижных фазах (жидкой и газообразной углеводородных и водной). Распределение компонент по фазам определяется термодинамически согласованным способом, при этом любой подвижный компонент может присутствовать в любой из подвижных фаз. Для описания термодинамического поведения компонент и фаз с учетом фазовых переходов используются кубические уравнения состояния, распространенные в инженерной практике.

Указанные группы уравнений дополняются условиями согласования на границах пустот, которые имеют вид условий непрерывности потоков энергии и импульса.

В силу допущений модели поведение системы описывается дифференциальными уравнениями законов сохранения массы компонент и энергии, дополненными алгебраическими уравнениями, описывающими фазовое равновесие системы. Массы компонент изменяются за счет химических реакций, а внутренняя энергия смеси изменяется благодаря притоку тепла из вмещающей среды и тепловому эффекту химических реакций, протекающих в порах. Приток массы через границу пор в данной модели не рассматривается.

Таким образом, полная система уравнений для определения решения задачи состоит из уравнений, описывающих состояние среды; уравнений, описывающих состояние вещества в пустотах и условий согласования на границах пустот. При этом в матрице рассматривается пространственное распределение параметров, описывающих состояние среды, а в пустотах соответствующие параметры являются сосредоточенными. Полная задача описывает процессы с существенно отличающимися характерными временами, протекающие в областях различной пространственной размерности, и является жесткой.

Для численного решения построенной системы уравнений предложен вычислительный алгоритм на основе комбинации метода декомпозиции области и метода расщепления по физическим процессам. При этом для аппроксимации уравнений термоупругости используется метод конечных элементов.

Схема алгоритма для одного шага по времени имеет следующий вид:

- 1) рассчитывается поле температуры в матрице путем интегрирования уравнения теплопроводности термоупругой модели с известными граничными и начальными условиями;

- 2) по полученному полю температуры, а также известным давлениям в пустотах и граничным условиям определяются поля перемещений, деформаций и напряжений в среде;

- 3) производится расчет объема пор исходя из полученного поля перемещений;

- 4) производится расчет изменения внутренней энергии вещества в порах с использованием ранее рассчитанного на шаге 1) поля температур;

5) производится расчет равновесного состава фаз, температуры и давления вещества в порах, насыщенности фаз и их компонентного состава.

В работе представлены результаты моделирования с использованием разработанного подхода.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 16-29-15078 офи\_м.

### Литература

1. Алексеев М.В., Кулешов А.А., Савенков Е.Б. Математическая модель поведения непроницаемой пористой среды при температурном воздействии //Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. N 35. 34 с.
2. Алексеев М.В., Кулешов А.А., Савенков Е.Б. Термомеханическая модель непроницаемой пористой среды с химически активным наполнителем // Математическое моделирование, 2018 (принята к печати).

## О влиянии нестационарного градиента температуры на движение жидкости в канале

**В. К. Андреев**

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск  
andr@icm.krasn.ru*

Изучаются однонаправленные движения жидкости в плоском канале, описываемые формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (U(y, t)0, 0), \quad \theta = -A(y, t)x + T(y, t), \\ p &= -B(y, t)x + P(y, t). \end{aligned} \tag{1}$$

Стационарные течения при  $A \equiv \text{const}$  исследованы уже давно и носят название решений Остроумова – Бириха [1]. В докладе решения вида (1) применяются для анализа движений в модели Обербека – Буссинеска: а) одной жидкости в плоском канале с твёрдыми стенками или верхней свободной границей; б) двух

несмешивающихся жидкостей с общей границей раздела. На свободной границе и поверхности раздела учтено влияние термокапиллярных сил. Вид решения (1) позволяет на нижней твёрдой стенке (подложке  $y = 0$ ) задавать произвольным образом нестационарный градиент температуры и тем самым управлять движением жидкости в канале. Возникающие начально-краевые задачи для функций  $U(y, t)$ ,  $A(y, t)$  (для движений с поверхностью раздела  $U_j(y, t)$ ,  $A_j(y, t)$ ,  $j = 1, 2$ ) являются обратными, поскольку содержат неизвестный градиент давления. Для этих задач получены априорные оценки решения в равномерной метрике и указаны условия на входные данные, когда эти решения с ростом времени выходят на стационарный режим. Численными методами прослежена эволюция скоростей и температур для конкретных жидкостей и толщины канала для различных заданий градиента  $A(y, t)$  на твёрдых стенках.

### Литература

1. Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical Models of Convection*. Berlin/Boston, Walter de Gruyter GmbH & CO KG, 2012.

## Напряженно-деформированное состояние диска при тепловом воздействии

**М. А. Артемов, Е. С. Барановский, И. И. Переяславская**  
*Воронежский государственный университет*  
artemov\_m\_a@mail.ru

Рассматривается задача определения напряженного и деформированного состояния тонкого кругового диска, проявляющего упругие и пластические свойства при тепловом воздействии.

В центральной области диска температурное поле является однородным и может изменяться. Температурное поле в диске определяется с учетом теплоотдачи на его границах. Изменение температуры по толщине диска не учитывается. Процесс изменения состояния диска считается квазистатическим. Принимается гипотеза о естественном состоянии диска.

Задача решается в рамках теории течения при выборе кусочно-линейного пластического потенциала общего вида, что позволяет учитывать пластическую сжимаемость. Принимается ассоциированный закон пластического течения и учитывается зависимость предела пластичности от температуры. Выбор кусочно-линейного пластического потенциала позволяет получить аналитическое решение.

В области  $0 \leq r \leq a$ , где температура  $T = \text{const}$ , реализуются однородные поля напряжений и деформаций.

Алгоритм решения задачи включает несколько шагов.

ШАГ 1. По формулам для упругого состояния диска и выбранного условия пластичности в зависимости от величины радиуса диска определяем значения  $T_{in}$  и  $T_{ex}$  температур центральной области диска  $0 \leq r \leq a$ , для которых пластическая область зарождается в области  $0 \leq r \leq a$  или на внешней границе диска  $r = b$ .

ШАГ 2. Из равенства  $T_{in} = T_{ex}$  находим формулу для вычисления значения радиуса диска  $b_k$ , для которого пластическая область одновременно зарождается в области  $0 \leq r \leq a$  и на границе  $r = b$ .

ШАГ 3. Если  $T < T_{in}$  и  $b > b_k$ , или  $T < T_{ex}$  и  $b < b_k$ , то диск будет находиться в упругом состоянии. Выполняем вычисления и построение интересующих графиков.

ШАГ 4. Если  $b > b_k$ , то вычисляем температуру  $T_2$ , при которой на границе  $r = b$  выполняется условие пластичности.

4.1) Если  $T_{in} \leq T \leq T_2$ , то вычисляем радиус упруго-пластической границы  $r = c_{in}$ . В области  $0 \leq r \leq c_{in}$  диск будет находиться в пластическом состоянии, а в области  $c_{in} \leq r \leq b$  — в упругом. В области  $0 \leq r \leq a$  выполняется условие полной пластичности  $\sigma_r = \sigma_\phi = -k$ . В области  $a \leq r \leq c_{in}$  выполняются смежные режимы пластичности. Например, для условия пластичности Треска — режим  $\sigma_\phi = -k$ . Режимы пластичности, соответствующие сингулярным точкам кривой пластичности (кроме режима  $\sigma_r = \sigma_\phi = -k$ ) не реализуются.

4.2) Если  $T_2 < T$ , то вычисляем радиусы упругопластических границ для внутренней и внешней пластических зон:  $c_{in}$  и  $c_{ex}$ . Упругое состояние реализуется в области  $c_{in} \leq r \leq c_{ex}$ , а в областях  $0 \leq r \leq c_{in}$  и  $c_{ex} \leq r \leq b$  — пластическое состояние.

ШАГ 5. Если  $b < b_k$ , то вычисляем температуру  $T_1$ , при которой на границе  $r = a$  выполняется условие  $\sigma_r = \sigma_\phi = -k$ .

5.1) Если справедливы неравенства  $T_{ex} < T < T_1$ , то вычисляем  $c_{ex}$ . В области  $0 \leq r \leq c_{ex}$  — упругое состояние, в области  $c_{ex} \leq r \leq b$  — пластическое состояние. На границе  $k = b$  реализуется режим, определяемый давлением  $p$  на внешней границе.

5.2) Если  $T_1 < T$ , то вычисляем  $c_{in}$  и  $c_{ex}$ . Как и на шаге 4.2, в области  $c_{in} \leq r \leq c_{ex}$  реализуется упругое состояние.

Для верификации результатов строятся графики для эквивалентного напряжения, соответствующего допустимым режимам пластичности, и график годографа вектора напряжений.

Предложенный алгоритм является общим для целого класса подобных задач. Аналогичная задача рассматривалась ранее другими авторами для конкретных условий пластичности (Треска, Шмидта), например, [1,2]. Однако практически не обсуждался вопрос, связанный с определением полей пластических деформаций и наличием разрывов на границах, соответствующих сингулярным точкам кривых пластичности.

Важным элементом предложенного алгоритма является верификация полученных результатов.

### Литература

1. Orcan Y., Garner U. Elastic-plastic deformation of a centrally heated cylinder // *Acta Mechanica*. 1991. Vol. 90. P. 61–80.
2. Dats E., Murashkin E. On unsteady heat effect in center of the elastic-plastic disk // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. 2016. Vol. 1. P. 69–72.

## Решение автомодельных задач фильтрации газа в водонасыщенном пласте

**А. А. Афанасьев**

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

`afanasyev@imec.msu.ru`

Глобальное потепление – острая проблема, стоящая перед человечеством. Для смягчения его последствий и уменьшения климатических изменений перспективной считается технология захоронения парниковых газов, в частности углекислого газа ( $\text{CO}_2$ ),

в проницаемых недрах Земли. Закачка газа в водонасыщенный пласт приводит к многофазным неизотермическим течениям, сопряжённых с фазовыми переходами. Нагнетаемый через вертикальную скважину газ, как более лёгкая фаза, поднимается вверх, скапливаясь и растекаясь вдоль кровли пласта. Исследование данных нелинейных процессов также осложняется околокритическим термодинамическим состоянием газа. В настоящей работе в полной нелинейной постановке решены две автомодельные задачи, описывающие распространение газа от скважины в пласт.

Во-первых, в пренебрежении силой тяжести решена одномерная краевая задача Римана в полупространстве (задача о поршне), описывающая неизотермическое течение  $\text{CO}_2$  от нагнетательной скважины в водонасыщенный пласт. Для смешанной системы уравнений фильтрации предложен асимптотический метод исследования нелинейных волн – возможных волновых картин, описывающих многофазное течение в пласте. Метод основывается на рассмотрении фильтрации при устремлении проницаемости пласта к бесконечности. Решение задачи может состоять из 3-х эволюционных фазовых разрывов, на каждом из которых выполняется условие Жуге, и 3-х простых волн Римана. На фазовой плоскости ограничены области качественно различных решений, взаимное расположение которых определяется околокритическим термодинамическим состоянием  $\text{CO}_2$ . Сравнение с численным решением задачи в полной постановке подтвердило хорошую точность построенной асимптотики.

Во-вторых, решена двухмерная нестационарная задача, описывающая накопление лёгкой фазы газа у кровли пласта на начальном этапе закачки. В случае общего положения осесимметричное течение  $\text{CO}_2$  и пластовой воды в окрестности вертикальной скважины зависит от времени и двух пространственных переменных – расстояния от скважины и глубины. В работе найдены нелинейные асимптотические решения данной задачи, зависящие только от двух автомодельных переменных, являющихся комбинациями отмеченных размерных переменных. Асимптотика строится в предположении значительной мощности пласта, если процессы у его подошвы не влияют на течение газа вдоль кровли. В предположении несмешивающегося изотермического вытеснения определены параметры подобия. Показано, что тип двухмерной волновой картины в окрестности скважины зависит только

от двух безразмерных чисел и функций относительной фазовой проницаемости. Первое из безразмерных чисел есть отношение вязкостей пластового флюида и газа, а второе – сложное безразмерное отношение абсолютных проницаемостей породы в вертикальном и горизонтальном направлениях и других параметров задачи. Методом прямого численного моделирования исследованы двумерные волновые картины, описывающие распределение насыщенности газа. Построены оценки для размеров области накопления газа в зависимости от параметров подобия течения.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-31-20585).

## Вулканомеханика

**А. А. Афанасьев, О. Э. Мельник, И. С. Уткин**

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

`melnik@imec.msu.ru`

В докладе будут рассмотрены три модели вулканических извержений, учитывающие взаимодействие магмы с вмещающими породами в процессе извержения.

В процессе экструзивных извержений происходит медленное выдавливание лавового купола. Скорости подъема магмы невелики, поэтому существенны кристаллизация магмы и отделение газа в свободную фазу. Существующие модели либо рассматривали фильтрацию газа сквозь магму, либо в упрощенной постановке – отток газа в окружающие породы. В докладе будет представлена совместная модель течения магмы в канале вулканы и геотермальной системы, окружающей канал [1]. Показано, что интенсивность оттока вулканических газов в породы сравнима с интенсивностью их переноса вместе с поднимающейся магмой. Учёт оттока газа из магмы существенно влияет на динамику извержения, в частности на период колебаний расхода магмы. Объяснено отсутствие корреляции измеряемых на поверхности расходов магмы и газа, наблюдаемое на многих вулканах.

Измерение деформаций земной поверхности, происходящие в процессе вулканического извержения, являются одним из основных методов мониторинга активных вулканов. Источником деформаций служат процессы в системе очаг–канал, а также в

геотермальных системах, прогреваемых магмой. Роль очага и, в меньшей степени, канала при деформировании окружающих пород достаточно хорошо изучена теоретически, однако влияние геотермальной системы на измеряемые деформации в процессе вулканического извержения ранее не рассматривалось. В [2] сравниваются деформации от двух инициирующих деформации источников: щелевого канала с заданным избыточным давлением и геотермальной системы, прогрев которой осуществлялся за счет течения магмы. Показано, что вертикальные деформации вследствие активности геотермальной системы могут в разы превосходить деформации, связанные с течением магмы. Пространственное распределение деформаций также существенно различается. При деформациях, вызванных геотермальной системой, максимум вертикального перемещения находится над щелевым каналом, в случае же изменения давления в канале над ним наблюдается локальное опускание поверхности, а ее максимальное поднятие располагается на расстоянии, примерно вдвое превышающем глубину залегания верхней части щелевого канала. Влияние геотермальной системы необходимо учитывать при интерпретации данных мониторинга активных вулканов.

Вулканическая активность часто проявляется в виде циклов коротких взрывных извержений, сопровождающихся выбросом пепла и газа в атмосферу; в промежутках между извержениями активности практически не наблюдается. Извержения такого типа происходят на вулканах Santiaguito в Гватемале, Карымский на Камчатке и некоторых других. Канал вулкана при таких извержениях большую часть времени закрыт твёрдой лавовой пробкой, образующейся в результате дегазации и охлаждения столба магмы. В магме под пробкой растворено большое количество газа, который при падении давления образует свободную фазу и фильтруется через пузырьки, образующиеся в магме. Циклический характер извержений можно объяснить наличием газовой полости под пробкой. Газ фильтруется в эту полость, давление под пробкой растёт до некоторого критического значения. Тогда пробка начинает подниматься вверх, освобождая каналы для движения газа. За короткое время в атмосферу выбрасывается большое количество газа, давление под пробкой падает. Давление в полости будет падать до значения, при котором произойдет обратное движение пробки: она опускается вниз, и на этом цикл завершается.

## Литература

1. О.Э. Мельник, А.А. Афанасьев, Г.А. Зарин. Дегазация магмы при подъёме по каналу вулкана, пересекающему водонасыщенные породы. Доклады Академии наук, 468(2):162–165, 2016.
2. Г.А. Зарин, О.Э. Мельник, Ю.Д. Цветкова, А.А. Афанасьев. О влиянии геотермальной системы на деформации земной поверхности во время вулканического извержения. Вычислительная механика сплошных сред, 8(1):16–23, 2015.

## Концентрационные пределы распространения пламени в метановоздушных смесях с углеводородными добавками

<sup>1</sup>Н. Е. Афонина, <sup>2</sup>В. Г. Громов, <sup>3</sup>В. А. Левин,  
<sup>4</sup>И. С. Мануйлович, <sup>5</sup>В. В. Марков, <sup>6</sup>Г. Д. Смахов,

<sup>7</sup>А. Н. Хмелевский

<sup>1,2,3,4,6,7</sup>НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова

<sup>3,4,5,7</sup>ЦАГИ имени Н.Е. Жуковского

<sup>5</sup>МИАН имени В.А. Стеклова РАН

<sup>1</sup>afonina@imec.msu.ru

<sup>2</sup>gromov@imec.msu.ru

<sup>3</sup>levin@imec.msu.ru

<sup>4</sup>manuylovich@imec.msu.ru

<sup>5</sup>markov@mi.ras.ru

<sup>6</sup>smekhov@imec.msu.ru

<sup>7</sup>khmelevsky@imec.msu.ru

Взрывоопасность работ по добыче и переработке угля, нефти и газа обусловлена рядом факторов, в числе которых одним из определяющих является превышение концентрационных пределов распространения (КПР) пламени. При этом основным горючим компонентом, содержащимся во взрывоопасной смеси, является метан, а содержание других дополнительных горючих компонентов может изменяться в зависимости от месторождения. Наличие углеводородов приводит к расширению диапазона взрывоопасных концентраций метановоздушной смеси.

В работе представлены результаты исследования концентрационных пределов распространения (КПР) пламени в метановоздушных смесях с добавками водорода, ацетилена и бутана, которые могут содержаться в составе рудничного газа. Исследования проводились в сферической камере сгорания. Все опыты выполнены при начальном атмосферном давлении, комнатной температуре и нормальной влажности воздуха. В экспериментах использовался метан высокой чистоты, содержащий не более 0.07% примесей азота. Абсолютная точность приготовления компонентов смеси в исследуемом составе составляла по объемной концентрации 0.04%. Горение смесей инициировалось в центре сферы взрывом проволочки. Основным измеряемым параметром являлось давление, регистрируемое в процессе распространения пламени датчиками, установленными в экваториальной плоскости на стенке сферической камеры сгорания. Считалось, что пламя сформировалось (был достигнут КПР пламени), если начальное давление в смеси после завершения горения возрастало на 5% и более.

В результате проведенного исследования установлено, что:

1. Нижние концентрационные пределы распространения пламени для бинарных топлив метан-водород, метан-ацетилен, и трехкомпонентного топлива метан-ацетилен-бутан с 16% точностью соответствуют значениям КПР пламени, предсказываемым правилом А. Ле-Шателье с различными наборами констант.

2. Временные развертки сигналов давления разделяются на два характерных класса по виду кривой нарастания давления до максимума: с наличием и отсутствием явно выраженного излома на развертке. Сформулирован критерий появления характерного излома на записи развертки давления и получено соответствующее ему пороговое значение средней скорости распространения пламени.

3. Результаты измерений времен сгорания можно представить в безразмерных координатах. Получена универсальная экспериментальная кривая зависимости нормированного времени сгорания метановоздушных смесей от значения числа А. Ле-Шателье её состава. Она позволяет определить время сгорания смеси при сферическом распространении пламени в камерах произвольного радиуса.

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ при частичной финансовой поддержке гранта Ми-

истерства образования и науки РФ (договор №14.G39.31.0001 от 13.02.2017 г.), Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-8425.2016.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-29-01092).

## Спектры сигналов пульсаций давления газа в соплах с дефлектором

<sup>1</sup>Н. Е. Афонина, <sup>2</sup>В. Г. Громов, <sup>3</sup>В. А. Левин,  
<sup>4</sup>И. С. Мануйлович, <sup>5</sup>В. В. Марков, <sup>6</sup>А. Н. Хмелевский

<sup>1,2,3,4,6</sup>*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

<sup>3,4,5,6</sup>*ЦАГИ имени Н.Е. Жуковского*

<sup>5</sup>*МИАН имени В.А. Стеклова РАН*

<sup>1</sup>*afonina@imec.msu.ru*

<sup>2</sup>*gromov@imec.msu.ru*

<sup>3</sup>*levin@imec.msu.ru*

<sup>4</sup>*manuylovich@imec.msu.ru*

<sup>5</sup>*markov@mi.ras.ru*

<sup>6</sup>*khmelevsky@imec.msu.ru*

Кольцевые и линейные двух щелевые сопла с внутренним дефлектором рассматриваются в качестве перспективных для реализации пульсирующего, в том числе детонационного, режима сжигания топлив. Исследование спектров сигналов пульсаций давления газа в них представляет интерес для выяснения зависимости спектрального состава пульсаций от геометрических параметров сопел и условий течения в них с целью управления частотой процесса.

В работе представлены результаты расчетно-экспериментального исследования зависимости частоты и амплитуды колебаний давления газа на стенке дефлектора от условий на входе и выходе из сопла и его геометрии. Расчеты проведены с использованием химически неравновесной термохимической модели, включающей все основные продукты горения стехиометрической смеси ацетилена в воздухе. Эксперименты с кольцевыми соплами выполнены в импульсном аэродинамическом стенде с использованием в качестве рабочего газа воздуха и продуктов сгорания ацетиленовоздушной смеси. В экспериментах стартовые возмущения давления на тяговой стенке после запуска сопла не затухали, а переходили в квазипериодический режим. Аналогичные режимы течений

были получены и в расчетах, выполненных на основе уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной реагирующей газовой среды.

В результате проведенного исследования для базовой конфигурации кольцевого сопла экспериментально установлена основная доминирующая частота спектра (22 кгц), качественно подтвержденная расчетами (30 кгц). Численное исследование зависимости частоты и амплитуды колебаний параметров течения в указанных соплах показало, что управление основной доминирующей частотой наиболее эффективно может осуществляться как за счет пропорционального увеличения масштаба сопла (частота уменьшается пропорционально), так и размера критического сечения и высоты дефлектора, независимо от высоты полета – противодавления в пространстве истечения. Использование указанных регулировок позволило продемонстрировать возможность изменения основной доминирующей частоты пульсаций давления в исследованных соплах в пределах 7–30 кгц.

В расчетах впервые предсказано существование квазипериодических пульсирующих режимов течения газа в линейных двухцелевых соплах и определена основная доминирующая частота пульсаций ( $\approx 25$  кгц) давления газа на тяговой стенке сопла.

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ при частичной финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ (договор №14.G39.31.0001 от 13.02.2017 г.), Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-8425.2016.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-29-01092).

## **Внешняя алгебра и внешний анализ в теории блочного элемента**

**В. А. Бабешко, О. М. Бабешко, О. В. Евдокимова**

*Кубанский государственный университет*

**babeshko41@mail.ru**

Понятие «внешняя алгебра» впервые было введено Грассманом. Внешняя алгебра — это алгебраический аппарат для описания порождения многомерных пространств одномерными. Применение внешней алгебры для исследования и решения гранич-

ных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных топологическим методом в областях с границей впервые было осуществлено в работе [1]. До выхода этой работы ни в отечественной, ни в зарубежной печати не было опубликовано работ, посвященных применению одновременно топологических и факторизационных методов, в граничных задачах, что детально разъяснено в [2]. В работе [1] внешняя алгебра послужила лишь средством, позволившим свести систему дифференциальных уравнений в частных производных к новому типу функциональных уравнений. В процессе этих построений были использованы внешние формы. Дальнейшие преобразования в этой работе были связаны уже не с внешней алгеброй, а с математическим анализом нового типа функциональных уравнений, потребовавших разработки методов дифференциальной факторизации матриц-функций, с элементами, зависящими от нескольких комплексных переменных, преобразованных внешних форм в результате вычисления форм-вычетов Лере, реализации автоморфизма, построение псевдодифференциальных уравнений, их исследование, извлечение из них интегральных уравнений и разработки способов их решения. Все это уже никак не вкладывается в задачи и возможности внешней алгебры. Поэтому все повторяющиеся однотипные действия при применении топологических методов в граничных задачах, начиная от факторизации функций и матриц-функций, вычисления форм-вычетов Лере, и вплоть до построения представлений решений граничных задач названо авторами «внешним анализом».

Внешний анализ был применен в большом числе работ, как чисто теоретических, так и прикладных. Следующим этапом исследований в этой области, также использующим внешний анализ, явилось построение метода блочного элемента [3], подхода, позволяющего строить решение граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными или переменными коэффициентами в областях, являющихся результатом разделения области задания граничной задачи на части, с последующим «склеиванием» (построение фактортопологий соответствующих топологических пространств) полученных на них решений. Наиболее важные прикладные результаты получены при исследовании блочных структур, среди которых задачи для тел с покрытиями, имеющими скрытые дефекты. С применением внешнего анализа обнаружен новый тип землетря-

сения, названного стартовым, поскольку оно может произойти до того, как сближающиеся литосферные плиты начнут взаимодействовать. Разрушение происходит в связи с появлением в зоне концентрации контактных напряжений сблизившихся литосферных плит сингулярных составляющих [4]. В докладе излагаются новые результаты применения внешней алгебры и внешнего анализа в проблеме оценки возможности стартового землетрясения при вертикальных и горизонтальных воздействиях на литосферные плиты.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2017 г. проекты (9.8753.2017/БЧ) и при поддержке грантов РФФИ (15-01-01379), (15-08-01377), (16-41-230214), (16-41-230218), (16-48-230216), (17-08-00323).

### Литература

1. Бабешко В.А., Бабешко О.М. Метод факторизации решения некоторых краевых задач // ДАН. 2003. Т. 389. № 2. С.184–188
2. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О связи факторизационных методов с другими подходами в теории дифференциальных и интегральных уравнений // ДАН. 2015. 2015. N 463, № 1. С. 32–35
3. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. К теории блочного элемента // ДАН. т. 427, №2, 2009. С. 183–186
4. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. К проблеме физико-механического предвестника стартового землетрясения: место, время, интенсивность // ДАН. 2016. Т. 466. № 6. С. 664–669.

## Точное решение для одномерного течения газа в гомобарическом приближении

**Д. М. Балапанов, А. А. Ведерников**

*Microgravity Research Center, Université libre de Bruxelles, Belgium*  
dbalapan@ulb.ac.be

Принято считать, что сжимаемые среды ведут себя аналогично несжимаемым при малых числах Маха. Однако, можно привести ряд течений свойственных только газам, но вызванных медленными, по сравнению с распространением звука, изменениями плотности. Среди них: установившиеся течения с подвижными или проницаемыми границами; тепловое расширение/сжатие у стенки с переменной температурой; потоки типа Стефановского, вызванные химическими реакциями и фазовыми переходами на стенках или взвешенных частицах. Найдены точные аналитические решения, описывающие динамику газов при медленных изменениях плотности.

Решения найдены для одномерной геометрии, что характерно для условий микрогравитации, и симметричных источников и границ. При медленном изменении плотности газа давление в газе можно считать однородным (гомобарическое приближение). При указанных допущениях, уравнение импульса удовлетворяется автоматически [1]. В предположении, что конвективный перенос тепла пренебрежим по сравнению с молекулярным, уравнение энергии переходит в уравнение теплопроводности и решается независимо относительно температуры.

Давление находится из условия сохранения массы во всем объеме среды с использованием уравнение состояния идеального газа для связи плотности с давлением. Явное выражение получается как следствие того, что давление не зависит от координаты и выходит из-под знака интегрирования. Выражение для скорости газа получается из условия сохранения массы в выделенном объеме, как для скорости поверхности, заключающей постоянную массу газа. Таким образом, получаются общие решения для давления и скорости, включающие подвижные границы, источники массы и переменную температуру газа.

В качестве наглядного примера приведем решение для течения газа в плоской щели ширины  $L$ , вызванного изменением температуры стенок  $T_1(t)$  и  $T_2(t)$  во времени [2]. Источники массы отсутствуют. При больших числах Фурье профиль температуры линейный и решение для скорости имеет вид

$$u = L \left( T \frac{\ln(T/T_1)}{\ln(T_2/T_1)} - xT_2 \right) \frac{\dot{T}_2/T_2 - \dot{T}_1/T_1}{T_2 - T_1}, \quad (1)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени  $t$ , а  $0 \leq x \leq 1$  это безразмерная координата поперек щели. Показано, что

при небольших  $\Delta T$  профиль скорости упрощается до параболического:

$$u = \frac{\dot{T}_2 - \dot{T}_1}{2\overline{T}^2} T(x-1)xL, \quad (2)$$

В работе найдены частные решения для различных термических граничных условий, для подвижных и проницаемых стенок, для объемных источников массы, а также для ряда комбинаций данных эффектов. Полученные решения могут быть полезны для валидации численных методов в динамике сжимаемых сред при малых числах Маха. Результаты работы имеют приложение в точных измерениях кинетических коэффициентов и транспортных свойств частиц. Предложенная методика наглядна, и может быть включена в университетские курсы механики сплошной среды, поскольку позволяет получать частные точные решения для ряда постановок с использованием лишь интегрального исчисления. Все полученные решения совпадают с аналогичными численными решениями полной системы уравнений сохранения, выполненными в пакете ANSYS Fluent.

Авторы признательны за поддержку Европейскому Космическому Агентству и Бельгийскому Федеральному Министерству науки и культуры.

### Литература

1. С.Г. Черкасов. Теплофизика высоких температур, Т. 48, Вып. 3, СС. 422–426.
2. A. Vedernikov and D. Balapanov, Phys. Rev. E 94, 053121, 2016.

## Задача о движении нелинейно-вязкой жидкости при условии проскальзывания порогового типа

**Е. С. Барановский**

*Воронежский государственный университет*  
esbaranovskii@gmail.com

Рассмотрим краевую задачу, описывающую стационарное течение несжимаемой нелинейно-вязкой жидкости в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с непроницаемой твердой границей  $\Gamma$  при условии проскальзывания порогового типа [1] на участке границы  $\Gamma_0$  и условии прилипания на  $\Gamma \setminus \Gamma_0$ :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \operatorname{div}(\psi(I_2[\mathbf{v}])\mathbf{D}\mathbf{v}) + \nabla p = \mathbf{f} \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_0, \quad (3)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad |(\mathbf{S}\mathbf{n})_{\tan}| \leq q \text{ на } \Gamma_0, \quad (4)$$

$$|(\mathbf{S}\mathbf{n})_{\tan}| < q \implies \mathbf{v}_{\tan} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma_0, \quad (5)$$

$$|(\mathbf{S}\mathbf{n})_{\tan}| = q \implies \mathbf{v}_{\tan} \updownarrow (\mathbf{S}\mathbf{n})_{\tan} \text{ на } \Gamma_0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость,  $p$  — давление,  $\mathbf{f}$  — объемные силы,  $\mathbf{D}\mathbf{v}$  — тензор скоростей деформации,  $\mathbf{D}\mathbf{v} = (\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T)/2$ , функция  $I_2[\mathbf{v}]$  — второй инвариант  $\mathbf{D}\mathbf{v}$ ,  $I_2[\mathbf{v}] = |\mathbf{D}\mathbf{v}|^2$ , через  $\mathbf{S}$  обозначен девиатор тензора напряжений,  $\mathbf{S} = \psi(I_2[\mathbf{v}])\mathbf{D}\mathbf{v}$ ,  $\psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  и  $q: \Gamma_0 \rightarrow (0, +\infty)$  — заданные функции,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma$ ,  $\mathbf{v}_{\tan} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ . Запись  $\updownarrow$  используется для обозначения противоположно направленных векторов.

Примем следующие предположения:

- (i) граница области  $\Omega$  локально-липшицева и  $\operatorname{meas}(\Gamma \setminus \Gamma_0) > 0$ ;
- (ii) имеют место включения:  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  и  $q \in L^2(\Gamma_0)$ ;
- (iii) функция  $\psi$  непрерывна и существуют константы  $a_1$  и  $a_2$  такие, что  $0 < a_1 \leq \psi(r) \leq a_2$ ,  $r \in [0, +\infty)$ ;
- (iv) для любых симметрических  $3 \times 3$ -матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  выполнено неравенство:

$$\sum_{i,j=1}^3 \left( \psi(|\mathbf{A}|^2)A_{ij} - \psi(|\mathbf{B}|^2)B_{ij} \right) (A_{ij} - B_{ij}) \geq 0.$$

Нас будут интересовать слабые (обобщенные) решения краевой задачи (1)–(6). Введем гильбертово пространство

$$\mathbf{X}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u}|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} = 0, \mathbf{u}|_{\Gamma \setminus \Gamma_0} = \mathbf{0}\},$$

где  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  — пространство Соболева вектор-функций  $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Определение.** Слабым решением краевой задачи (1)–(6) назовем вектор-функцию  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}(\Omega)$ , удовлетворяющую неравенству

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^3 \left( v_i \mathbf{v}, \frac{\partial(\mathbf{u} - \mathbf{v})}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} + \left( \psi(I_2[\mathbf{v}]) \mathbf{D}\mathbf{v}, \mathbf{D}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \right)_{L^2(\Omega)} \\
 & + \int_{\Gamma_0} q|\mathbf{u}| d\Gamma_0 \geq (\mathbf{f}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} + \int_{\Gamma_0} q|\mathbf{v}| d\Gamma_0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{X}(\Omega). \quad (7)
 \end{aligned}$$

**Замечание 1.** Если вектор-функция  $\mathbf{v}$  и функция  $p$  удовлетворяют соотношениям (1)–(6), то нетрудно проверить, что выполнено неравенство (7) и, следовательно,  $\mathbf{v}$  является слабым решением. С другой стороны, если слабое решение  $\mathbf{v}_0$  окажется достаточно регулярным, то найдется функция  $p_0$  такая, что пара  $(\mathbf{v}_0, p_0)$  будет удовлетворять (1)–(6).

**Замечание 2.** Различные постановки краевых задач (в том числе задач со свободным пристенным скольжением) для уравнений нелинейно-вязких жидкостей приводятся в [2,3].

Сформулируем теперь основной результат работы.

**Теорема.** Пусть выполнены условия (i)–(iv). Тогда:

- a) задача (1)–(6) имеет по крайней мере одно слабое решение,
- b) любое слабое решение  $\mathbf{v}$  удовлетворяет равенству:

$$\int_{\Omega} \psi(I_2[\mathbf{v}]) I_2[\mathbf{v}] dx + \int_{\Gamma_0} q|\mathbf{v}| d\Gamma_0 = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-31-00182 мол\_а.

## Литература

1. Fujita H. A mathematical analysis of motions of viscous incompressible fluid under leak or slip boundary conditions // RIMS Kokyuroku. 1994. Vol. 888(1). P. 199–216.
2. Литвинов В. Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. М.: Наука, 1982.
3. Baranovskii E. S., Artemov M. A. Existence of optimal control for a nonlinear-viscous fluid model // Int. J. Differ. Equ. 2016. Vol. 2016. Article ID 9428128. P. 1–6.

# Анализ уравнений, описывающих волны в трубах с упругими стенками

**И. Б. Бахолдин**

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва*

*ibbakh@yandex.ru*

Рассматриваются одномерные уравнения, описывающие осесимметричные течения в трубах с упругими стенками. Уравнения движения стенок трубы были получены на основе полных уравнений мембраны с использованием начальной Лагранжевой продольная координата. Для материала стенок применялась нелинейная модель гиперупругого тела. Такая модель обычно используется в тех случаях, когда образец можно растянуть многократно без его разрушения, в данном случае это могут быть кровеносные сосуды или трубки из резиноподобных материалов. Зависимость напряжения от растяжения определяется потенциалом, подбираемым на основе экспериментальных данных. Обычная линейная и нелинейная упругость также может быть описана с помощью такого потенциала, таким образом, теоретические результаты исследования могут применяться и для обычных металлических трубопроводов. Предложено дополнительно учитывать жесткость стенок трубы на изгиб на основе локальной линеаризации уравнений. Это позволяет добиваться корректности уравнений и в случае продольного сжатия стенок трубы. Предложены способы учета сжимаемости материала стенок трубы, учета вязкости материала стенок и наполнителя. Рассмотрены случаи заполнения трубы жидкостью и газом. Частным случаем газонаполненной трубы можно считать модель с контролируемым давлением. Анализируется число и вид дисперсионных кривых для каждого случая. На основе этого анализа делаются предположения о возможном характере решений задачи о распаде произвольного разрыва.

Численно решена задача о распаде произвольного разрыва в случае контролируемого давления, заполнения трубы жидкостью и заполнения газом. Во всех случаях полученные результаты соответствуют ранее разработанной теории обратимых и слабодиссипативных структур разрывов. Обнаружены все основные типы обратимых структур разрывов. Для случая контролируемого давления также численно исследована устойчивость уединенных волн.

Анализируется возможность опрокидывания волн. В результате этого анализа делается вывод о том, что упругие волны могут опрокидываться, и это допустимо с физической точки зрения, и в случае контролируемого давления такие решения пригодны для описания реальных явлений. Гидродинамические и газодинамические волны не опрокидываются.

Применялись численные схемы, опробованные ранее на большом числе уравнений, описывающих среды со сложной дисперсией: трехслойная схема типа "крест" и двухслойная схема предиктор-корректор с аппроксимацией временных производных по методу Рунге-Кутты. В случае контролируемого давления и заполнения газом при расчете аппроксимируются непосредственно исходные уравнения и применяются явные схемы. В случае заполнения жидкостью делается преобразование уравнений для исключения давления и применяется неявная схема. Для решения уравнений, описывающих распространения волн в трубах, была разработана методика коррекции численных схем посредством добавления в уравнения членов с высшими производными. При данной методике не меняется порядок аппроксимации. Методика обеспечивает низкую схемную диссипацию и может применяться для нахождения решений широкого круга уравнений с дисперсией недиссипативного типа или со слабой диссипацией.

Для случаев заполнения жидкостью и газом и для случая контролируемого давления выведены упрощенные гиперболические уравнения длинных волн. Для таких уравнений возможно опрокидывание газодинамических и гидродинамических волн, требующее учета физической вязкости или использования специальных численных методов, позволяющих находить обобщенные решения с разрывами необратимого типа. Для случаев заполнения жидкостью и газом выведены уравнения волн малой амплитуды без учета продольных упругих волн, аналогичные уравнениям Буссинеска. В этом случае опрокидывания нет и можно применять стандартные методы расчета недиссипативных систем уравнений. Расчет и анализ решений уравнений такого типа проводился ранее при разработке теории обратимых структур разрывов.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, номер проекта 15-01-04357а.

# Математическое моделирование пористых пластов

Д. Е. Бобылев

*Криворожский национальный университет, Украина*

*dmytrobobyliiev@gmail.com*

Математическое моделирование процесса разработки нефтяного месторождения, смоделированного кусочно-однородным ограниченным пористым пластом, заключается в составлении и решении системы дифференциальных уравнений в частных производных, которая его описывает и дополненной начальными условиями (существовавшими до начала разработки), краевыми условиями (на поверхностях, ограничивающих полости с внешних сторон, и на стенках скважины внутри пласта) и условиями контакта между зонами, имеют различные, но постоянные физические характеристики. Предположив, что толщина пласта и ее изменение довольно малы по сравнению с его размерами в горизонтальной плоскости вдоль осей, вертикальной составляющей скорости движения жидкости можно пренебречь и решать двумерные уравнения движения для протяженных пластов с переменной толщиной. Основная распространенная сегодня модель однородного по параметрам неограниченного пласта не всегда адекватно описывает реальную среду и процессы, происходящие в нем при разработке нефтяного месторождения. Для оценки влияния изменения коэффициентов гидро- и пьезопроводности различных зон необходимо рассматривать модель кусочно-однородного ограниченного пласта.

Построена математическая модель изменения во времени давления в двумерном кусочно-однородном пористом пласте с криволинейной границей с учетом идеального контакта на границе раздела сред. Для нахождения решения задачи использован метод граничных элементов совместно с временной схемой последовательности начальных условий, что позволило точно удовлетворить уравнения во всей исследуемой области и контролировать погрешность удовлетворения граничных условий на ее границах и на границах раздела сред. Осуществлена программная реализация предложенного численно-аналитического подхода и проведен ряд исследований влияния физических и временных параметров на распределение давления в пласте.

# Об идентификации свойств функционально-градиентного пьезополимерного цилиндра

И. В. Богачев, А. О. Ватульян

*Южный федеральный университет*

bogachev89@yandex.ru

В современной промышленности активно используются сложные многосоставные материалы и конструктивные элементы, обладающие свойствами пьезокерамики, металлов и полимеров. К таким материалам относятся функционально-градиентные пьезоэлектрики (ФГПЭ), которые широко используются в устройствах умных систем в авиационной, космических технологиях, атомной энергетике, медицине и других отраслях науки и промышленности. Важным свойством ФГПЭ является непрерывное изменение электрических и механических свойств, зависящих от координат, причем свойства могут варьироваться в довольно больших диапазонах, что позволяет создавать материалы, применимые для решения многих практических задач. Также, значительное внимание посвящено функционально-градиентным пьезополимерам (ФГПП), отличительными свойствами которых являются значительные коэффициенты затухания, низкая теплопроводность, надежность и долговечность при циклических нагружениях, являющихся одними из самых распространенных на практике. Важной практической задачей при использовании таких материалов является решение задач идентификации законов изменения их свойств по данным о компонентах электрических и механических полей.

В настоящем исследовании представлено решение новой обратной задачи идентификации свойств функционально-градиентного пьезокерамического цилиндра с радиальной поляризацией при наличии эффекта затухания. При моделировании считалось, что неоднородные законы изменения физических характеристик (комплексных аналогов упругих модулей и электрических характеристик) являются функциями радиальной координаты. Определяющие соотношения электроупругости для пьезополимера сформулированы на основе концепции комплексных модулей аналогично с использованием принципа соответствия и модели стандартного вязкоупругого тела. Рассматривался случай,

при котором электроды на поверхности цилиндра отсутствуют, установившиеся колебания возбуждаются нормальной механической нагрузкой, приложенной к боковой поверхности цилиндра. В связи с этим после исключения компоненты электрического потенциала (путем интегрирования уравнения электростатики) из основных уравнений электроупругости была получена краевая задача второго порядка относительно радиального смещения и комплексных модулей, характеризующих механические свойства цилиндра. Обратная задача заключалась в идентификации мгновенных и длительных модулей, входящих в состав исходных комплексных модулей, по дополнительной информации о значениях функции смещения в некоторой точке поверхности цилиндра в наборе частот. Для решения обратной задачи представлен специальный подход - метод алгебраизации, при котором искомые функции представлялись в виде разложений по некоторым системам линейно независимых функций. После подстановки разложений в исходные уравнения колебаний обратная задача сводилась к решению системы линейных уравнений относительно коэффициентов разложения функции смещения и последующем решении системы нелинейных уравнений относительно коэффициентов разложения функций мгновенных и длительных модулей. Представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению функций различного характера, демонстрирующих эффективность предложенного подхода.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00354 А) и Минобрнауки РФ (проект № 9.4726.2017/8.9).

## **Некоторые аналитические подходы к исследованию задач газовой динамики, квалифицированных Л.И. Седовым, как трудные**

**А. Н. Богданов**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

Рассматривается возможность аналитического подхода к исследованию задач динамики ударных волн в газовых средах (в

том числе задачи о поршне). Анализируются известные и предлагаются оригинальные аналитические методы исследования.

Задача о поршне в газовой динамике является классической. Л.И. Седовым она отнесена к числу трудных и в общем случае при непрерывных ускоренных движениях газа решаемой только с помощью численных расчетов на машинах [1].

Автором доклада предлагается аналитический подход к получению решения задачи в общем случае вдвижения поршня в объем, занимаемый газом. Предлагаемый метод основан на интегрировании малых отклонений параметров процесса как откликов на малые изменения скорости движения поршня.

Такой метод возможно применить к исследованию других задач динамики ударных волн при произвольном изменении параметров среды распространения разрыва, начальных и граничных условий процесса. В частности, указанным методом может быть получена аналитическая зависимость скорости ударной волны, при ее распространении в среде со стратификацией плотности и температуры, как функции плотности перед фронтом волны.

Результаты исследования динамики ударных волн в неоднородных средах также приведены [2], однако только для частного случая, а примененный метод нахождения решения оставлял вопросы о справедливости полученных результатов.

Имеющиеся автомоделные решения [2] отвечают частным случаям распространения ударной волны по среде с монотонным изменением плотности по степенному или экспоненциальному закону.

Исследование [3], посвященное безударному сжатию в слоистых системах оболочек, проведено несколько для других целей и в других условиях. Именно, слои считаются несжимаемыми, скорости в них постоянными по пространству, противодействие на свободных границах отсутствует, в возникающем течении все вещество в рассматриваемой области за характерное время коллапсируется в одной точке, необходимым условием, определяющим организуемое течение, является сохранение энтропии для высокой экономичности процесса и т.д. Результатом проведенного исследования является определение величины кумулирующейся энергии и выявление ее зависимости от параметров конструкций и способов энергозложения.

Работа выполнена по плану исследований НИИ механики МГУ при частичной финансовой поддержке гранта Министерства Об-

разования и Науки РФ (договор №14.G39.31.0001 от 13.02.2017г.), Совета по грантам Президента РФ (проект НШ 8425.2016.1) и РФФИ (проект 16 29 01092).

### Литература

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. – М.: Наука, 1976.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977.
3. Долголева Г.В., Забродин А.В. Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

### Математическая модель и вычислительные алгоритмы для моделирования развития трещины ГРП в трехмерной постановке

**В. Е. Борисов, А. И. Иванов, Б. В. Критский,  
И. С. Меньшов, Е. Б. Савенков**

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*  
e.savenkov@gmail.com

Гидравлический разры пласта (ГРП) является одним из наиболее распространенных методов увеличения нефтеотдачи. По существу процедура ГРП заключается в создании крупномасштабной (длина  $\sim 100$ м, высота  $\sim 10$ м) трещины в толще нефтегазонасного пласта путем закчки в пласт специальной жидкости разрыва. Созданная трещина играет роль высокопроводящего канала, обеспечивающего интенсивный приток пластового флюида к скважине. Анализ и предсказание геометрических и фильтрационных свойств трещины ГРП является в настоящее время важной и не до конца решенной задачей. Существующие процедуры для анализа эволюции трещины ГРП в основном используют сильно упрощенные математические модели.

В настоящей работе предлагается математическая модель развития трещины ГРП в полностью трехмерной постановке, с учетом всех основных механических процессов, сопровождающих

развитие трещины и соответствующий комплекс вычислительных алгоритмов. Предложенные модели и алгоритмы могут быть использованы для решения комплекса прикладных задач разработки месторождений, связанных как с развитием трещины, так и с влиянием ее наличия на фильтрационные и механические процессы в пласте.

Состояние пласта описывается в рамках пороупругой модели Био, связывающей процессы фильтрации в пласте и его деформацию. Геометрическая модель трещины позволяет задавать ее произвольной достаточно гладкой поверхностью с краем. Течение в трещине описывается в рамках модели смазочного слоя и позволяет использовать как классическую ньютоновскую реологию флюида в трещине, так и неньютоновскую реологию, специфичную для современных жидкостей разрыва пласта. Указанные модели связаны набором условий согласования на границе «трещина»/«пласт», выражающих условия непрерывности консервативных величин.

Комплекс вычислительных алгоритмов основан для применения «расширенного» метода конечных элементов (X-FEM) для расчета напряженно-деформированного состояния пласта [1] и специальных методов решения уравнений смазочного слоя, заданных на произвольной гладкой поверхности с краем. В отличие от стандартно используемого в рамках X-FEM метода поверхностей уровня для представления геометрии поверхности трещины [2,3], в настоящей работе использован подход, основанный на методе проекции ближайшей точки. Этот же метод используется для аппроксимации уравнений смазочного слоя в трещине [4]. Результирующая система уравнений решается методом итераций между группами уравнений, что позволяет гибко адаптировать используемую модель в зависимости от конкретной задачи.

Работоспособность предлагаемой методики моделирования демонстрируется рядом тестовых расчетов.

Работы выполнены при поддержке Российского научного фонда, проект N 15-11-00021.

## Литература

1. Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T. A finite element method for crack growth without remeshing // Int. J. Numer. Meth. Engng. 1999. 46(1): 131-150.

2. Moës N., Gravouil A., Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets — Part I: Mechanical model // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2002.; 53:2549-2568.
3. Gravouil A., Moës N., Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets — Part II: Level set update // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2002. 53:2569-2586.
4. Ruuth, S.J., Merriman, B. A simple embedding method for solving partial differential equations on surfaces // J. Comput. Phys., 2008. 227(3):1943-1961.

## Анализ краевых и экстремальных задач для стационарных моделей МГД

**Р. В. Бризицкий**

*Институт прикладной математики ДВО РАН  
Дальневосточный федеральный университет  
mlnwizard@mail.ru*

В ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\partial\Omega$  состоящей из двух частей  $\Sigma_\nu$  и  $\Sigma_\tau$  рассматривается краевая задача для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \varkappa \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H} = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$\nu_1 \operatorname{rot} \mathbf{H} - \rho_0^{-1} \mathbf{E} + \varkappa \mathbf{H} \times \mathbf{u} = \nu_1 \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ в } \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_\tau} = q, \quad \mathbf{H} \times \mathbf{n}|_{\Sigma_\nu} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Sigma_\tau} = \mathbf{k}. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – вектор скорости,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  – напряженность магнитного и электрического полей, соответственно,  $p = P/\rho_0$ , где  $P$  – давление,  $\rho_0 = \operatorname{const}$  – плотность жидкости,  $\varkappa = \mu/\rho_0$ ,  $\nu_1 = 1/\rho_0\sigma = \varkappa\nu_m$ ,  $\nu$  и  $\nu_m$  – постоянные коэффициенты кинематической и магнитной вязкости,  $\sigma$  – постоянная проводимость,  $\mu$  – постоянная магнитная проницаемость,  $\mathbf{n}$  – вектор единичной внешней нормали к  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{j}$  – плотность внешних токов. С физической точки зрения условия (3) отвечают ситуации, когда участок границы  $\Sigma_\nu$  –

идеальный изолятор О разрешимости краевой задачи (1)–(3) см. [1,2].

Для модели (1)–(3) исследованы задачи управления, в случае, когда роль управлений играют граничные функции  $\mathbf{g}$  и  $q$  и плотность внешних токов  $\mathbf{j}$ . При минимальных требованиях к указанным функциям, в частности,  $q \in L^2(\Sigma_\tau)$ , доказана разрешимость соответствующих экстремальных задач и получены системы оптимальности. С использованием систем оптимальности выведены оценки устойчивости решений задач управления относительно возмущений как функционалов качества, так и заданных функций задачи (1)–(3), не являющихся управлениями. Интерес к минимальным требованиям на управления, связан с тем, что соответствующие нормы этих функций входят в минимизируемые функционалы в качестве регуляризаторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00365-а) и Российского научного фонда (код проекта 14-11-00079).

### Литература

1. Alekseev G., Brizitskii R. Solvability of the boundary value problem for stationary magnetohydrodynamic equations under mixed boundary conditions for the magnetic field // Applied Mathematics Letters. 2014. V. 32. P. 13–18.
2. Алексеев Г.В. Смешанные краевые задачи для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. ЖВМ. 2016. Т. 56. № 8. С. 1441–1454.

### Задачи восстановления коэффициентов для полулинейных моделей массопереноса

<sup>1</sup>Р. В. Бризицкий, <sup>2</sup>Ж. Ю. Сарицкая

<sup>1,2</sup>Дальневосточный федеральный университет

<sup>1</sup>Институт прикладной математики ДВО РАН

<sup>1</sup>mlnwizard@mail.ru

<sup>2</sup>zhsar@icloud.com

В ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma$ , состоящей из двух частей  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$ , рассматривается краевая задача

$$-\operatorname{div}(\lambda \nabla \varphi) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi + k\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$\varphi = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda(\partial\varphi/\partial n + \alpha\varphi) = \chi. \quad (2)$$

Здесь  $\varphi$  – концентрация вещества,  $\mathbf{u}$  – заданный вектор скорости,  $f$  – объемная плотность внешних источников (загрязняющего) вещества,  $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$  – коэффициент диффузии,  $k = k(\varphi, \mathbf{x})$  – коэффициент реакции,  $\alpha = \alpha(\varphi, \mathbf{x})$  – коэффициент массообмена,  $\psi$  и  $\chi$  – заданные на  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$  функции.

Глобальная разрешимость задачи (1), (2) доказана по схеме, разработанной в [1–3] в случае, когда коэффициенты реакции и массообмена  $k$  и  $\alpha$  достаточно произвольно зависят как от концентрации вещества  $\varphi$ , так и от пространственных переменных. В частности, рассматриваются следующие коэффициенты реакции и массообмена:  $k = \beta_1(\mathbf{x})\varphi^4 + \beta_2(\mathbf{x})\varphi^2|\varphi| + \beta_3(\mathbf{x})\varphi^2 + \dots$  и  $\alpha = \gamma_1(\mathbf{x})\varphi^2 + \gamma_2(\mathbf{x})|\varphi| + \gamma_3(\mathbf{x})$ .

Обратная коэффициентная задача заключается в восстановлении коэффициента диффузии  $\lambda$ , скорости  $\mathbf{u}$ , а так же функций  $\beta_i(\mathbf{x})$  и  $\gamma_i(\mathbf{x})$  по дополнительной информации о решении задачи (1), (2). Указанная задача сведена к задаче мультипликативно-го управления, разрешимость которой доказана при достаточно общих функционалах качества. При конкретных функционалах качества и коэффициентах реакции выведены оценки локальной устойчивости решений экстремальных задач относительно малых возмущений как функционалов качества, так и исходных данных задачи (1), (2).

Отметим работу [4], в которой была исследована устойчивость решения экстремальной задачи при  $k = \beta(\mathbf{x})\varphi^2$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00365-а) и Российского научного фонда (код проекта 14-11-00079).

## Литература

1. Алексеев Г. В., Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю. Оценки устойчивости решений экстремальных задач для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Сиб. журн. индустр. матем. 2016. Т. 19, № 2. С. 3–16.

2. Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю. Оценки устойчивости решений экстремальных задач для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Журн. вычисл. матем. матем. физики. 2016. Т. 56, № 12. С. 60–71.
3. Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю. Об устойчивости решений задач управления для уравнения конвекции–диффузии–реакции с сильной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 4. С. 493–504.
4. Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю. Обратные коэффициентные задачи для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Известия РАН. Серия математическая. 2018 (в печати).

## Ускорение плазмы в каналах криволинейной формы в присутствии продольного магнитного поля

<sup>1</sup>К. В. Брушлинский, <sup>2</sup>Е. В. Стёпин

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН*

<sup>1</sup>brush@keldysh.ru

<sup>2</sup>stypin.evgeniy@gmail.com

Несколько поколений плазменных ускорителей созданы и исследованы во второй половине XX века по инициативе, под руководством и при участии А. И. Морозова с весьма широким диапазоном характеристик. Маломощные стационарные плазменные двигатели (СПД) с длительным ресурсом работы [1] давно используются для коррекции орбит спутников Земли. Ускорители большой мощности представлены квазистационарным сильноточным плазменным ускорителем (КСПУ), продемонстрировавшим рекордные показатели скорости и энергии плазменной струи на выходе [2]. Здесь ускорение плазмы в канале, образованном двумя коаксиальными электродами, обязано амперовой силе взаимодействия радиального электрического тока с азимутальным, т.е. поперечным по отношению к течению, магнитным полем. Теория и расчёты процесса ускорения в МГД-приближении представлены в [3–5] с необходимой библиографией.

Менее изучены течения плазмы в каналах, где дополнительно присутствует продольное магнитное поле, созданное, например, внешними проводниками с током. Математическая модель и результаты первых расчётов стационарных МГД-течений в тех же каналах с продольным магнитным полем изложены в [5]. Полученные результаты касаются классификации течений и некоторых их свойств, но они ограничены геометрией каналов, слабо отличающейся от цилиндрической. В продолжение и развитие этих работ в докладе представлены исследования течений в каналах и трубках, образованных электродами криволинейной формы. Рассмотрена роль кривизны каждого из электродов в отдельности. Основное внимание уделено сверхальфвеновским трансзвуковым течениям с ускорением в каналах соплообразной формы. Расчёты проведены в двумерной МГД-модели, стационарные режимы получены установлением во времени. Отдельные детали течения в узких трубках между двумя близкими траекториями исследованы в квазиодномерном приближении. Здесь стационарные течения описываются первыми интегралами МГД-уравнений, и нужные результаты получены в процессе решения системы линейных алгебраических уравнений.

В серии расчётов найдены распределения плотности и скорости плазмы, а также электрического тока в сечении канала и в узких трубках течения для различных вариантов геометрии. Влияние продольного поля на эти распределения определяется сравнением результатов с аналогичными расчётами без него. Установлено, что каналы с профилированным центральным электродом и цилиндрическим внешним обеспечивают более эффективное ускорение, чем противоположный вариант геометрии. Этот результат служит обоснованием выбранной формы канала КС-ПУ.

Полученные в последнее время результаты частично опубликованы в [6].

Работы, представленные в докладе, выполнены при поддержке РФФИ (проект № 15-01-03085).

### Литература

1. Morozov A.I., Savelyev V.V. // *Reviews of Plasma Physics* / Ed. by B.B. Kadomtsev and V.D. Shafranov. — NY, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Consultants Bureau, 2000. — V. 21. — P. 203–391.

2. Морозов А.И., Брушлинский К.В., Терёшин В.И., Белан В.Г., Астапинский В.М. и др. Серия статей // Физ. плазмы. — 1990. — Т. 16, Вып. 2. — С. 131–196.
3. Морозов А.И., Соловьёв Л.С. // Энциклопедия низкотемпературной плазмы / Под ред. В.Е. Фортова. - М: Янус-К, 2007. — Серия Б. — Т. IX-2. — С. 292–333.
4. Брушлинский К.В., Морозов А.И. // Там же. — С. 334–369.
5. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. - М: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. — 200 с.
6. Брушлинский К.В., Жданова Н.С., Стёпин Е.В. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2017. — № 42. — 19 с.

## Моделирование взаимодействия единого и дробящегося метеороида с атмосферой

<sup>1</sup>И. Г. Брыкина, <sup>2</sup>Г. А. Тирский

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

<sup>1</sup>shantii@mail.ru

<sup>2</sup>tirskiy@imec.msu.ru

Предлагается метод моделирования взаимодействия с атмосферой крупного метеороида, когда он движется как единое и как дробящееся тело; этим методом исследуется взаимодействие с атмосферой Земли Челябинского болида 15 февраля 2013 г. Большинство крупных каменных и железных метеороидов разрушается во время входа в атмосферу. Можно выделить два основных подхода к моделированию дробления метеороида. В первом предполагается, что фрагменты двигаются независимо (модели дробления на достаточно крупные куски или прогрессивной фрагментации). Другой подход - дробление метеороида на мелкие осколки, движущиеся, объединенные общей ударной волной, как единое тело, которое под действием аэродинамических нагрузок расплющивается, т.е. расширяется в поперечном направлении и сжимается в продольном. Такая <жидкостная> модель была предложена [1] для малых метеороидов, затем

подробно разработана [2] для крупных; аналогичные модели, получившие название «блин» (был введен термин «pancake» [3]), применялись и в других работах ([3,4] и др.)

В данном исследовании разработана модель фрагментации в атмосфере крупного метеороида с применением второго подхода. Предполагается, что до начала разрушения метеороид имеет форму сферы, затем он движется как облако фрагментов, мелких испаряющихся частиц и паров с единой ударной волной. Рассматриваются два процесса: расплющивание дробящегося метеороида, при этом сфера трансформируется в сплюснутый эллипсоид вращения, и уменьшение его плотности за счет увеличения промежутков между фрагментами, заполненных парами. Предложенная модель дробления отличается от других моделей «блин» тем, что учитывает уменьшение плотности раздробленного метеороида вдоль траектории и зависимость скорости увеличения радиуса поперечного сечения облака фрагментов от значения этого радиуса.

Взаимодействие метеороида с атмосферой исследуется в рамках уравнений физической теории метеоров [5], описывающих его торможение и абляцию, в которые входят коэффициенты сопротивления и теплопередачи. Для коэффициента сопротивления эллипсоида вращения получено выражение в зависимости от отношения его осей. Для коэффициента радиационной теплопередачи для эллипсоида вращения с использованием литературных данных получено выражение в зависимости от его скорости, размера, отношения осей и плотности атмосферы. Проведена оценка областей преобладающего влияния конвективного и радиационного тепловых потоков. Найдены при некоторых предположениях аналитические решения уравнений физической теории метеоров для уноса массы единого и фрагментированного метеороида, скорости, энерговыделения, световой кривой и высоты максимального энерговыделения. Проведено сравнение аналитического решения с численными расчетами.

Рассматривается взаимодействие с атмосферой Земли Челябинского болида с использованием предложенной модели фрагментации и найденных решений. Проведено моделирование изменения массы метеороида вдоль траектории, энерговыделения и световой кривой. Оценивается влияние определяющих параметров на характеристики взаимодействия болида с атмосферой. Проводится сравнение полученного решения с наблюдательными

данными: кривой энерговыделения [6] и световыми кривыми, построенными по разным видеозаписям [7,8].

### Литература

1. Opik E.J. *Physics of meteor flight in the atmosphere*. New York, Interscience Publishers Inc., 1958. 174 p.
2. Григорян С.С. *Движение и разрушение метеоритов в планетных атмосферах* Космич. исслед. 1979. Т. 17. № 6. С. 875-893.
3. Melosh H.J. *Atmospheric breakup of terrestrial impactors* Proc. Lunar Planet. Sci., 12A.1981. P. 29-35.
4. Hills J.G., Goda M.P. *The fragmentation of small asteroids in the atmosphere* Astronomical J. 1993. Vol. 105. No 3. P. 1114-1144.
5. Бронштэн В.А. *Физика метеорных явлений*. М.: Наука, 1981. 416 с.
6. Brown P.G., Assink J.D., Astiz L., et al. *A 500-kiloton airburst over Chelyabinsk and an enhanced hazard from small impactors*
7. Borovicka J., Spurny P., Brown P., et al. *The trajectory, structure and origin of the Chelyabinsk asteroidal impactor*. Nature. 2013. Vol. 503. P. 235-237.
8. Попова О.П., Дженнискенс П., Глазачев Д.О. *Фрагментация Челябинского метеороида. Динамические процессы в геосфере*. Сборник научных трудов ИДГ РАН. Вып. 5. Геофизические эффекты падения Челябинского метеороида. М.: ГЕОС, 2014. С. 59-78.

### Моделирование волновой динамики стратифицированных сред

<sup>1</sup>В. В. Булатов, <sup>2</sup>Ю. В. Владимиров

*Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлунского РАН*

<sup>1</sup>internalwave@mail.ru

<sup>2</sup>vladimyura@yandex.ru

Доклад посвящен изложению фундаментальных проблемам математического моделирования волновой динамики природных стратифицированных сред (океан, атмосфера). В докладе представлены основные математические модели, описывающие процессы возбуждения и распространения внутренних и поверхностных гравитационных волн в стратифицированных по вертикали, неоднородных по горизонтали и нестационарных средах, изложены асимптотические методы, являющихся обобщением пространственно-временного лучевого метода (метода геометрической оптики, метода ВКБ). Внутренние и поверхностные гравитационные волны изучаются уже достаточно давно, и по данной тематике опубликовано значительное число работ. В настоящее время возникают новые направления в математическом исследовании этих волн. Во-первых, стало понятным, что в поле внутренних и поверхностных волн могут появляться аномально большие короткоживущие волны-убийцы, природа которых напоминает природу волн-убийц на поверхности моря. Во-вторых, сдвиговые течения внутренних волн приводят к большим изгибающим моментам на опоры морских платформ, что уже приводит к деформации подводных технологических конструкций в ряде районов Мирового океана. В стадии разработки находится система мониторинга интенсивных внутренних и поверхностных волн (аналогичная системе мониторинга цунами), которая основана на фундаментальных результатах математического моделирования волновой генерации. В-третьих, внутренние волны способны вызвать транспорт донных наносов в глубоководных районах, где эффект поверхностных волн на дно минимален. Наконец, классические задачи гидродинамики о взаимодействии внутренних и поверхностных гравитационных волн по-прежнему остаются актуальными. На распространение внутренних и поверхностных гравитационных волн существенное влияние оказывают как неоднородность и нестационарность гидрофизических полей, так и изменение рельефа дна. При этом точные аналитические решения основных волновых задач получаются только в случае, если распределение плотности морской воды (рельеф дна) описываются достаточно простыми модельными функциями. Когда характеристики океанической среды (форма профиля дна) произвольны, можно построить только численные решения соответствующих задач. Однако последнее не позволяет качественно анализировать характеристики волновых полей, особенно на больших расстояниях,

что необходимо для решения, например, проблемы обнаружения внутренних волн дистанционными методами, в том числе с помощью средств аэрокосмической радиолокации. В этом случае описание и анализ волновой динамики можно осуществить только на основе асимптотических моделей и аналитических методов их решения, изложенных в докладе. Построенные математические модели волновой динамики позволяют описывать поля внутренних и поверхностных волн для реальных гидрофизических параметров сред. Универсальный характер предложенных асимптотических методов моделирования волновой динамики позволяет не только эффективно рассчитывать волновые поля, но и, кроме того, качественно анализировать полученные решения. Тем самым открываются широкие возможности анализа волновых картин в целом, что важно и для правильной постановки математических моделей волновой динамики, и для проведения экспресс оценок при натурных измерениях волновых полей. Особая роль разработанных асимптотических методов обусловлена тем обстоятельством, что основные параметры природных стратифицированных сред (океан, атмосфера), как правило, известны приближенно, и попытки их точного численного решения по исходным уравнениям гидродинамики с использованием таких параметров могут привести к заметной потере точности получаемых результатов. Помимо фундаментального интереса построенные математические модели представляют значительную ценность для практики, поскольку позволяют решать задачи моделирования волновых гидрофизических полей в широком классе приложений (В.В.Булатов, Ю.В.Владимиров. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015).

## **Устойчивость упругой трубки с протекающей внутри неньютоновской жидкостью, имеющей локально ослабленный участок**

**В. В. Веденеев, А. Б. Порошина**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*  
vasily@vedeneev.ru

Задача об устойчивости упругих трубок, содержащих текущую жидкость, имеет ряд практических приложений. Изгибные

колебания таких трубок могут иметь место в различных охлаждающих устройствах (радиаторах), в т.ч. в ядерной промышленности [1,2]. Колебания, имеющие вид схлопывания трубок с сохранением прямолинейности их оси, могут иметь место в биомеханике кровеносных сосудов [3,4]. Возникновение последних связано с отрывом потока от стенок трубки и неосесимметричным характером схлопывания [5,6,7].

В настоящей работе исследуется потеря устойчивости трубок, не связанная с отрывом потока. Движение трубки предполагается осесимметричным, текущая внутри жидкость описывается степенным реологическим законом, в случае чистого сдвига имеющим вид

$$\tau^{12} = \mu \left( \frac{dv_1}{dx_2} \right)^n,$$

где  $\tau^{12}$  — сдвиговое напряжение,  $\vec{v}$  — вектор скорости,  $\mu$  — коэффициент вязкости,  $n$  — параметр степенного закона. Линейно-вязкой жидкости соответствует случай  $n = 1$ . Интегрированием уравнений движения по сечению выводится одномерное уравнение движения трубки, которое исследуется на устойчивость.

В первой части работы проведён анализ дисперсионного уравнения в случае однородной трубки и показано, что неустойчивость может иметь место при показателе степенного закона  $n < 0.611$ , причём она может быть абсолютной при  $n < 1/3$ . Границы простой и абсолютной неустойчивостей получены в явном виде.

Во второй части работы рассматривается трубка с переменной по длине жёсткостью, такой что в некотором участке она мала, и локально имеет место неустойчивость, а вне него трубка локально устойчива. Исследуется существование глобальных растущих собственных мод. В предположении о медленном изменении жёсткости по длине задача решается методом ВКБ. Исследована структура линий Стокса и показано, что трубка в целом может быть неустойчива, только если локальная неустойчивость в ослабленном участке абсолютная. Получено достаточное условие глобальной неустойчивости.

Работа поддержана грантом РФФ 14-50-00005.

## Литература

1. Païdoussis, M.P. Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow. Vol. 1. Academic press, 1998.

2. Gorshkov, A.G., Morozov, V.I., Ponomarev, A.T., Shklyarchuk, F.N. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000.
3. Shapiro, A.H. Physiologic and medical aspects of flow in collapsible tubes// Proc. 6th Canadian Congress on Applied Mechanics, p. 883–906, 1977.
4. Pedley, T.J., Brook, B.S., Seymour, R.S, Blood pressure and flow rate in the giraffe jugular vein// Philos. Trans. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci. V. 351, p. 855–866, 1996.
5. Pedley, T.J. Arterial and Venous Fluid Dynamics// Cardiovascular fluid mechanics (ed. G. Pedrizzetti, K. Perktold). Chap. 1, p. 1–72. Springer, 2003.
6. Grotberg, J.B., Jensen, O.E.. Biofluid mechanics in flexible tubes// Ann. Rev. Fluid Mech. V. 36, p. 121–147, 2004.
7. Heil, M., Hazel, A.L.. Fluid-Structure Interaction in Internal Physiological Flows// Ann. Rev. Fluid Mech. V. 43, p. 141–162, 2011.

## **Законы подобия для турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке газа**

**И. И. Вигдорович**

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

`vigdorovich@imec.msu.ru`

Доклад посвящен описанию течения в турбулентном пограничном слое на пластине при нулевом продольном градиенте давления в терминах законов подобия для основных гидродинамических и тепловых величин. Для течения несжимаемой жидкости такие законы подобия надежно установлены. К ним относятся закон стенки Прандтля, законы дефекта скорости и трения Кармана и аналогичные соотношения для температуры и теплового потока на стенке. В промежуточной пристеночной области пограничного слоя профили скорости и температуры удовлетворяют известному логарифмическому закону.

Обобщение закона стенки для профиля скорости на случай турбулентного течения сжимаемого газа принадлежит Ван Дристу [1]. В своем анализе, однако, он, как и его последователи,

просто использовал формулу пути смешения Прандтля. Поэтому этот результат нельзя считать в такой же степени обоснованным как соотношения для несжимаемой жидкости, которые, фактически, получены из первых принципов. Более того, известно, что формула Ван Дриста заметно хуже согласуется с экспериментальными данными, чем ее аналог для несжимаемого течения. Расхождения особенно существенны при наличии теплопередачи на стенке.

Цель настоящей работы — объяснить причину расхождения формулы Ван Дриста с результатами измерений и вывести новые законы подобия для скорости и температуры, которые являются точными асимптотическими решениями уравнений Рейнольдса для сжимаемого газа. Тот факт, что рассматриваемое течение зависит от конечного числа определяющих параметров, позволяет сформулировать условия замыкания, связывающие турбулентное касательное напряжение и турбулентный поток тепла с градиентами усредненной скорости и энтальпии. Идея существования таких связей в случае, когда задача зависит от конечного числа параметров, впервые была сформулирована в [2] и затем для несжимаемых течений использовалась, например, в работах [3–7]. Замкнутые таким образом уравнения Рейнольдса решаются методом сращиваемых асимптотических разложений для различных характерных областей течения, в число которых входят: вязкий подслой, логарифмический подслой и внешняя область пограничного слоя. Малый параметр теории — число Маха, вычисленное по динамической скорости и энтальпии газа на стенке. Рассматриваются все возможные случаи теплопередачи на обтекаемой поверхности — охлаждаемая, теплоизолированная и нагреваемая стенка.

Показано, что в вязком подслое пограничного слоя сжимаемого газа безразмерный профиль скорости такой же, как для несжимаемой жидкости, а профиль температуры — суперпозиция известного профиля для несжимаемой жидкости при нулевом кинетическом нагреве и профиля температуры, соответствующего частному случаю теплоизолированной пластины, когда кинетический нагрев не равен нулю. Решение задачи в логарифмическом подслое и асимптотическое сращивание с решением для вязкого подслоя дают связь между температурой и скоростью (интеграл Крокко) и законы стенки для скорости и температуры. Главный член асимптотики для профиля скорости соответствует извест-

ной формуле Ван Дриста. Однако полученное решение содержит дополнительные слагаемые порядка единицы, что объясняет расхождение формулы Ван Дриста с экспериментальными данными. Аналогичную структуру имеет закон стенки для температуры, который для сжимаемого течения сформулирован впервые. Кроме постоянной Кармана и турбулентного числа Прандтля в логарифмической области, известных для течения несжимаемой жидкости, полученные соотношения содержат три новые универсальные константы, которые не зависят от молекулярных свойств и отношения теплоемкостей газа. Сращивание решений для логарифмического подслоя и внешней области дает законы трения и теплообмена, выражения для коэффициентов восстановления и аналогии Рейнольдса, законы дефекта скорости и температуры для внешней области пограничного слоя.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (16-01-00172).

### Литература

1. Van Driest E. R. J. Aeronaut. Sci. 1951. V. 18. P. 145–160.
2. Вигдорович И. И. ДАН. 2003. Т. 392. № 3. С. 340–345.
3. Вигдорович И. И. ЖЭТФ. 2013. Т. 144. Вып. 2(8). С. 413–427.
4. Вигдорович И. И. ЖЭТФ. 2014. Т. 146. Вып. 5(11). С. 1062–1089.
5. Vigdorovich I. I. Int. J. Heat Mass Transfer. 2015. V. 84. No. 5. P. 653–659.
6. Вигдорович И. И. ДАН. 2016. Т. 466. № 4. С. 412–417.
7. Vigdorovich I. I. Physics of Fluids. 2016. V. 28. No. 8. P. 085102-1–7.

## Гидродинамическая реакция препятствия, обтекаемого двухслойным потоком

<sup>1</sup>И. Ю. Владимиров, <sup>2</sup>Н. Н. Корчагин, <sup>3</sup>А. С. Савин

<sup>1,2</sup>*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН*

<sup>3</sup>*МГТУ им. Н.Э. Баумана*

<sup>1</sup>*iyuvladimirov@rambler.ru*

<sup>2</sup>*e-niknik@mail.ru*

<sup>3</sup>*assavin@list.ru*

Получены выражения для гидродинамической нагрузки на препятствие при его циркуляционном обтекании потоком двухслойной жидкости конечной глубины. В качестве подводного препятствия рассматривался горизонтально протяженный элемент инженерной конструкции (например, транспортного трубопровода), смоделированный точечным диполем. Рассмотрены варианты локализации диполя вблизи скачка плотности как над, так и под ним. Исследованы зависимости волнового сопротивления и подъемной силы, действующих на препятствие, от скорости потока и циркуляции, а также параметров морской среды. Полученные результаты модельных расчетов показали, что учет циркуляции может значительно изменить величину гидродинамической реакции диполя. Выявлены особенности в характере изменения реакций на обтекаемое препятствие, а также условия их значительного усиления. Обнаружен эффект резкого (реверсивного) изменения направления действия подъемной силы в относительно узком диапазоне скорости обтекания моделируемого диполем элемента трубопровода. Поэтому данный эффект необходимо учитывать при проектировании подводных инженерных конструкций в толще морских вод и на дне моря.

## О кавитирующих гидропрофилях оптимальной формы

<sup>1</sup>С.Е. Газизова, <sup>2</sup>И.Р. Каюмов, <sup>3</sup>Д.В. Маклаков

*Казанский федеральный университет*

<sup>1</sup>*silmaril92@mail.ru*

<sup>2</sup>*ikayumov@gmail.com*

<sup>3</sup>*dmaklak@kpfu.ru*

В докладе продолжают исследования, начатые в работах [1,2]. Предположим, что имеется профиль, обтекаемый установившимся безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости со скоростью  $v_0$  на бесконечности по схеме Гельмгольца–Кирхгофа (рис. 1).

Согласно этой модели течения поток отделяется от поверхности профиля в точках отрыва  $A$  и  $B$ , за профилем образуется бесконечная каверна с постоянным давлением, равным давлению в набегающем потоке, скорость на свободных поверхностях  $AI$  и  $BI$  постоянна и равна скорости на бесконечности  $v_0$ . Точку разделения потока обозначим через  $O$ . Дуговую абсциссу отсчитываем от точки  $A$ .

Формулы для подъемной силы  $L$  и сопротивления  $D$  профиля были получены недавно в работе [1]:

$$L = \rho v_0 \int_0^l (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) \log \frac{v_0}{v} ds, \quad D = \frac{\rho v_0}{4\pi} \left( \int_0^l \frac{v}{\sqrt{\varphi}} \log \frac{v_0}{v} ds \right)^2, \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}$  – вектор скорости,  $\boldsymbol{\tau}$  – единичный вектор касательной,  $l$  – длина дуги  $AOB$  омываемой части профиля,  $\varphi = \varphi(s)$  – распределение потенциала скорости вдоль  $AOB$ :

$$\varphi = \int_s^{l_1} v(s) ds \quad \text{при } 0 \leq s \leq l_1, \quad \varphi = \int_{l_1}^s v(s) ds, \quad \text{при } l_1 \leq s \leq l,$$

$l_1$  – дуговая абсцисса точки разделения потока  $O$ .

Введем отнесенные к  $l$  коэффициенты подъемной силы  $C_L = 2L/(\rho v_0^2 l)$  и сопротивления  $C_D = 2D/(\rho v_0^2 l)$ . Как видно из (1), для определения подъемной силы и сопротивления профиля необходимо знать лишь распределение скорости по его поверхности как функцию дуговой абсциссы  $s$ . Таким образом, формулы (1) вполне аналогичны теореме Кутты–Жуковского, сыгравшей выдающуюся роль в теории безотрывного обтекания профилей.

Модель Гельмгольца–Кирхгофа в настоящее время трактуется как предельная схема кавитационного обтекания, когда давление в набегающем потоке совпадает с давлением в каверне, а размеры каверны бесконечно велики. В теории кавитационных течений известно первое условие Бриллюэна: давление в каверне

Рис. 1: Профиль, обтекаемый по схеме Гельмгольца-Кирхгофа

минимально. Тогда скорость на свободных поверхностях  $AI$  и  $BI$  – максимальна, и следовательно

$$v(s) \leq v_0, \quad 0 \leq s \leq l. \quad (2)$$

Отсюда вытекает, что в формулах (1) множитель  $\log \frac{v_0}{v} \geq 0$ .

Простота формул (1) позволяет ставить различные задачи по определению распределений скорости на кавитирующем профиле, обеспечивающих максимальную подъемную силу при выполнении условия Бриллюэна (2). Одна из таких задач была решена в статье [2], именно, были найдены распределения скорости на поверхности кавитирующего профиля, которые при заданной подъемной силе  $L$  обеспечивают максимальное гидродинамическое качество  $\kappa = L/D$  при выполнении условия Бриллюэна (2) (ограничение сверху на скорость обтекания). С точки зрения физической реализуемости профиля большой интерес представляет аналогичная задача с ограничениями на скорость обтекания и сверху, и снизу. Именно такая задача и исследуется в настоящем докладе. С помощью теории меры и теоремы Хелли найдено ее точное аналитическое решение. По полученным формулам построены оптимальные гидропрофили.

### Литература

1. Dmitri V. Maklakov. On the lift and drag of cavitating profiles and the maximum lift and drag // Journal of Fluid Mechanics, **687** (2011), 360–375.

2. D.V. Maklakov, I.R. Kayumov. Exact bounds for lift-to-drag ratios of profiles in the Helmholtz-Kirchhoff flow // European Journal of Applied Mathematics, **25** (2014), 231–254.

## Вихревой след за самолетом. Модели и проблемы

<sup>1</sup>А. М. Гайфуллин, <sup>2</sup>Ю. Н. Свириденко

*Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е.*

*Жуковского*

<sup>1</sup>amgaif@mail.ru

<sup>2</sup>ysviridenko@yandex.ru

Сходящая с самолета вихревая пелена образует вихревой след, который живет за летательным аппаратом с крылом большого удлинения достаточно длительное время: около одной-двух минут. За это время самолет успевает пролететь расстояние порядка десяти километров. Постоянная тенденция к утяжелению веса самолета породила проблему предсказания времени жизни и интенсивности вихревого следа за самолетом еще на стадии его проектирования. Увеличение габаритов самолетов ведет к увеличению времени жизни следа за ним, а, следовательно, к требованию увеличения расстояния между самолетами. Известны случаи катастроф и серьезных последствий из-за попадания самолета в вихревой след от другого самолета. В работе рассматриваются три проблемы: определение характеристик вихревого следа за самолетом, определение сил и моментов на самолет, попавший в зону влияния вихревого следа и моделирование полета самолета в зоне влияния вихревого следа на пилотажном стенде.

На характеристики вихревого следа в основном влияет турбулентная диффузия поля скоростей и температуры, а также развитие неустойчивости к возмущениям различной частоты. Первое приводит к росту турбулентного ядра и падению максимальной окружной скорости по мере удаления от самолета, второе - к длинноволновой неустойчивости. Математическая модель вихревого следа, которая предлагается в данной работе, состоит из следующих подмоделей: определение характеристик течения около самолета и ближнего следа за ним, диффузия дальнего следа,

длинноволновая неустойчивость дальнего следа. Результаты расчетов по данной модели показали хорошее соответствие с экспериментальными данными, что указывает на ее приемлемость для описания турбулентного течения в вихревом следе за самолетом и для определения времени жизни интенсивного вихревого следа. Из измерений характеристик следа с помощью лидаров известно, что циркуляция правой (или левой) половины следа с течением времени уменьшается по абсолютной величине. С помощью аналитического решения задачи о диффузии двух вихрей в работе раскрыт физический механизм потери циркуляции.

Определение характеристик вихревого следа позволило решить следующие практически важные проблемы: определение сил и моментов, действующих на самолет, случайно или преднамеренно попавший в зону влияния вихревого следа, и математическое моделирование движения самолета, попавшего в вихревую след, на пилотажном стенде в режиме реального времени. Решение последней задачи стало возможным благодаря использованию нейронных сетей. Данная математическая модель установлена на пилотажных стендах ЦАГИ, РСК МИГ, ФАЛТ МФТИ и имеет целью обучение управлением самолета при его случайном или преднамеренном (например, на режиме дозаправки) попадании в зону влияния вихревого следа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00128).

## **Подобие в задаче о сверхзвуковом обтекании тел при наличии области энерговклада в набегающем потоке**

**П. Ю. Георгиевский, В. А. Левин**  
*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*  
georgi@imec.msu.ru

В своей замечательной книге «Методы подобия и размерности в механике» Л. И. Седов указывал сколь важно выделять универсальные параметры подобия для исследуемого класса физических явлений. При этом он отмечал, что «наиболее существенные и полезные результаты получаются путем комбинирования соображений теории размерности с общезначительными предположениями».

В аэродинамике яркими примерами такого подхода, основанного на ясных (хотя и не совсем строгих) физических соображениях, являются закон гиперзвукового подобия, гипотеза плоских сечений и правило площадей, которые широко применялись при конструировании сверхзвуковых летательных аппаратов.

Еще в самой первой нашей работе (Письма в ЖТФ, 1988, 14(8): 684) было отмечено, что основной причиной снижения волнового сопротивления тел при локальном тепловом воздействии на набегающий поток является формирование передних отрывных зон. В настоящем докладе изучено влияние числа Маха потока, интенсивности энерговклада и размера области энерговклада на геометрические характеристики передних отрывных зон и эффективность снижения сопротивления для затупленных тел.

Сформулирован универсальный критерий подобия: интенсивность энерговклада должна быть обратно пропорциональна линейному размеру энергоисточника и прямо пропорциональна числу Маха набегающего потока. Первое условие является прямым следствием теории размерностей – точным условием подобия для задачи об обтекании энергоисточника сверхзвуковым потоком, которое обеспечивает сохранение параметров температурного следа при изменении размеров энергоисточника. Второе условие является физическим, оно означает, что жидкая частица за время движения через область энерговклада получает при разных скоростях набегающего потока примерно одинаковое количество тепла (чем меньше время пролета, тем выше должна быть интенсивность энерговклада).

На первом этапе проведена серия расчетов для задачи об обтекании энергоисточника сверхзвуковым потоком. Оказалось, что при соблюдении критерия подобия один из основных параметров – коэффициент мощности энерговклада (отношение подведенной мощности к потоку энтальпии через поперечное сечение энергоисточника) остается примерно постоянным. Более того, что при различных числах Маха набегающего потока распределение плотности в дальнем следе в поперечном направлении остается одинаковым с высокой точностью (в пределах погрешности вычислений). А ведь согласно С.В. Гувернюку (ДАН, 2007, 413(2): 188) именно параметры следа оказывают определяющее воздействие на формирование изобарических отрывных зон.

На втором этапе проведена серия численных расчетов нестационарного обтекания сферы при наличии в набегающем пото-

ке энергоисточников. В соответствии с концепцией «тепловой иглы» при динамическом уменьшении размеров энергоисточника с соблюдением критерия подобия форма передней отрывной зоны изменяется, приближаясь к форме конуса с малым затуплением, но при этом статическое давление в отрывной зоне не изменяется, и снижение сопротивления остается постоянным. Важным результатом оказалось, что для различных чисел Маха формируются передние отрывные зоны практически одинаковой геометрии и, соответственно, снижение сопротивления также остается примерно одинаковым.

Получена и проверена в численных расчетах простая формула для коэффициента эффективности снижения сопротивления (определяется как отношение сэкономленной мощности к вложенной). Показано, что при выполнении критерия подобия коэффициент эффективности пропорционален числу Маха в квадрате и обратно пропорционален линейному размеру области энерговклада в квадрате. В расчетах зафиксировано снижение волнового сопротивления 30%, а коэффициент эффективности при числе Маха 5 превысил 1000 (для сферического энергоисточника радиус которого в 50 раз меньше радиуса сферы).

Работа выполнена в соответствии с планом научных исследований НИИ механики МГУ при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-8425.2016.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-29-01092).

## **Фокусировка ударной волны при взаимодействии с цилиндрическим облаком мелкодисперсной пыли**

**П. Ю. Георгиевский, В. А. Левин, О. Г. Сутырин**

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

*sutyurin@imec.msu.ru*

Распространение ударных волн по запыленному газу имеет место в широком круге задач, важными примерами которых являются процессы в межзвездной среде, взрывобезопасность угольных шахт и импульсные методы нанесения порошковых покры-

тий. Ключевую роль играет взаимодействие ударных волн с локальными облаками взвешенных частиц. В работе численно моделируется взаимодействие ударной волны с цилиндрическим облаком кварцевой пыли небольшой концентрации. Используется равновесная односкоростная и однотемпературная модель пылегазовой смеси, построенная на основе уравнений Эйлера [1]. Описан процесс преломления падающей ударной волны, формирования поперечных скачков уплотнения и тройных точек, а также фокусировки поперечных скачков на плоскости симметрии задачи. Обнаружены два качественно различных режима взаимодействия реализующиеся в зависимости от концентрации пыли в облаке. В первом режиме – внешнем, реализующемся при меньших концентрациях пыли, – поперечные скачки и тройные точки выходят из облака до того, как достигнут плоскости симметрии. Во втором режиме – внутреннем – скачки схлопываются внутри пылевого облака.

Определена зависимость положения пиковой точки фокусировки и интенсивности фокусировки волн от объемной концентрации пыли в диапазоне от 0.01% до 0.15%. При повышении концентрации пыли точка фокусировки приближается к границе и смещается внутрь облака, а интенсивность фокусировки монотонно возрастает.

Работа выполнена в НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ им. М.В. Ломоносова при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-8425.2016.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-29-01092).

## Литература

1. Георгиевский П. Ю., Левин В. А., Сутырин О. Г. *Фокусировка ударной волны при взаимодействии ударной волны с цилиндрическим облаком пыли*. Письма в "Журнал технической физики". 2016. Т. 42. № 18. С. 17–24.

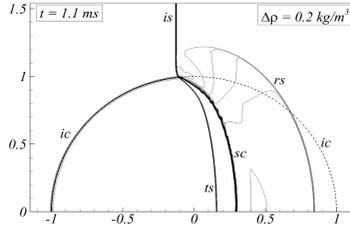


Рис. 1: Ранняя стадия взаимодействия, изолинии плотности.  $is$  – падающая ударная волна,  $ic$  – граница облака,  $ts$  – волна внутри облака,  $rs$  – отраженная волна.

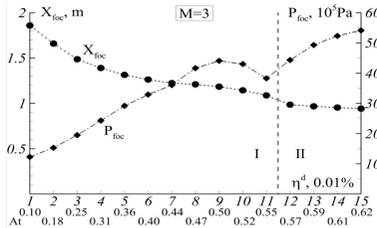


Рис. 2: Зависимость удаления точки пиковой фокусировки ( $X_{\text{foc}}$ ) и давления в этой точке ( $P_{\text{foc}}$ ) от концентрации пыли в облаке. I и II – области внешнего и внутреннего режимов фокусировки соответственно.

## Оптимизация ускорения вязкоупругого тела

А. Н. Голубятников

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
golubiat@mail.ru

Проблема управляемого ускорения мягких металлических оболочек, в частности с образованием кумулятивных струй, исследуется теоретически и экспериментально уже более века. В частности достигнут прогресс в обеспечении устойчивости движения тонкой оболочки за счет учета упругого упрочнения материала, фактически проявляющего жидкокристаллические свойства (Голубятников А.Н., Зоненко С.И., Черный Г.Г. Прикладная математика и механика, 2007). Интересно также влияние вязкости материала. В настоящем докладе представлено точное решение осесимметричной задачи об оптимизации ускорения вязкоупругого однородного несжимаемого тела Фойхта из состояния покоя под

ходящим распределением поверхностных сил. Заданы масса тела, объем, время его движения, коэффициент необходимого поперечного обжатия  $k$  и приобретаемый телом импульс. Плотность диссипации — гладкая выпуклая функция от компонент скорости деформации, а удельная внутренняя энергия — функция лагранжевых компонент метрического тензора, выпуклая по дисторсии (в частности квадратичные функции). Требуется минимизировать сумму работы поверхностных сил и энергии возможного начального удара.

Важно, что в интегральное уравнение кинетической энергии, записанное в конечный момент, входит интеграл по времени от диссипации, который минимизируется независимо. Это приводит к движению с однородной деформацией, причем совместному с дифференциальными уравнениями движения, которые в данном случае сводятся к уравнениям идеальной жидкости и определяют только распределение давления. Кроме этого, остается еще одна произвольная функция от времени, выбор которой позволяет полностью определить движение материала и вычислить энергию начального удара, обязательно ненулевую. Далее минимизируется конечная кинетическая энергия, что приводит к начальной форме тела в виде сплющенного эллипсоида вращения с соотношением продольной и поперечной осей  $0,5 k^3$ , обычно относительно тонкого.

Полученный результат позволяет проводить сравнение с движением тел других форм. Близкое значение затрат энергии в 1,05 от наименьшего дает оптимизация в классе прямых круговых цилиндров, ускорение которых может быть обеспечено действием нормальной нагрузки (давлением). Аналогичные результаты получаются и в теории вязкоупругости Максвелла.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-01-00361, 17-01-00037).

## Нелинейная диффузия плавящихся частиц

**А. Н. Голубятников, О. О. Иванов**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*  
ololiv@rambler.ru

Методами статистической механики строится модель сплошной среды, состоящей из большой системы невзаимодействующих плавящихся частиц, находящихся в своем перегретом расплаве.

Выделятся три характерных масштаба: окрестность частицы, где решаются задачи плавления и обтекания сферической частицы с вычислением действующей на нее силы; объем, связанный со статистическим осреднением по большому ансамблю частиц; переход к описанию сплошной среды как смеси частиц и расплава. В результате выводится уравнение диффузии, коэффициент которого зависит от температуры расплава, переменного радиуса частиц и их плотности. Характерной особенностью является появление реактивной силы, превосходящей в случае достаточно большой температуры расплава силу гидродинамического сопротивления.

Сначала решается автомоделная сферически-симметричная задача о плавлении частицы в неподвижной несжимаемой теплопроводной жидкости, когда плотности частицы и расплава одинаковы. Далее используется малый параметр, связанный с небольшой положительной, характерной для металлов, разностью этих плотностей, с помощью которого находится величина расхода, и в приближении Стокса решается задача квазистационарного ускоренного поступательного обтекания частицы однородным потоком вязкой жидкости с вычислением действующей на частицу силы.

С учетом силы вязкого сопротивления, реактивной силы и присоединенной массы решаются уравнения движения частицы, допускающие интеграл, который можно назвать “интегралом изменения энергии”. Он далее используется в статистической теории. Здесь можно феноменологически учесть и квадратичный по скорости член, который сначала тормозит частицу, но затем по мере уменьшения радиуса перестает играть существенную роль, передавая ее силе Стокса. В результате малые частицы могут неограниченно ускоряться, уменьшаясь вплоть до молекулярных размеров, причем процесс плавления заканчивается за конечное время.

Явно решается уравнение Лиувилля для плотности вероятности распределения невзаимодействующих частиц одинакового радиуса по скоростям центров масс. В предположении однородного термодинамического равновесия считается, что статистическая температура движения частиц совпадает с температурой расплава.

ва. На основании формул статистической физики определяется коэффициент диффузии, обратно пропорциональный плотности числа частиц, квадрату радиуса и достаточно сложно зависящий от температуры.

В рамках механики сплошной среды составляются уравнение так называемой “сверхбыстрой диффузии” , которое учитывает макромасштабы изменения скорости и температуры расплава.

Проводится исследование свойств, классификация и решение, как правило, в неявном виде, инвариантно-групповых одномерных задач полученного нелинейного уравнения диффузии в покоящемся изотермическом расплаве. В случае распространения плоских волн дополнительно найдено пробразование, переводящее уравнение в себя при перестановке значений искомой функции (числа частиц) и пространственной координаты, что позволяет строить новые решения.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 15.01.00361, 17.01.00037).

## **Ударные волны аннигиляции в динамике гравитирующего газа**

**<sup>1</sup>А. Н. Голубятников, <sup>2</sup>Д. Б. Любошиц**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

<sup>1</sup>golubiat@mail.ru

<sup>2</sup>daniilll@yandex.ru

Строится точное сферически-симметричное решение уравнений общей теории относительности, представляющее собой склейку решения А. Фридмана, которое описывает однородный изэнтропический разлет газа, с предварительным параболическим (с нулевой скоростью на бесконечности) сжатием смеси частиц и античастиц без противодействия. Ударная волна, на которой идет реакция полной аннигиляции античастиц, образуется по мере достижения определенной конечной плотности смеси. Причем уравнение для закона движения ударной волны сводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка при произвольном уравнении состояния газа, которое интегрируется. Выбирается комбинированное уравнение состояния, имеющее асимптотики

больших и малых плотностей массы покоя, проводятся расчеты. Направленным по радиусу излучением, учет которого возможен (Голубятников А.Н., Любошиц Д.Б. Гравитация и космология, 2016), пренебрегается. Оно рассматривается как вторичное.

Постановка такой задачи о волне аннигиляции может быть обоснована, в частности, в рамках ньютоновской механики, где однозначно известно определение энергии, необходимостью перевода части массы системы в энергию гиперболического разлета (с ненулевой скоростью на бесконечности), наблюдающегося в настоящее время, например, при расширении Вселенной. Открытие А. Риссом и др. (1998) небольшого ускорения разлета на дальних рубежах Вселенной может быть интерпретировано как достижение средствами наблюдения структуры расходящейся ударной волны. А закон однородного разлета по Э. Хабблу, как известно, типичен для задач о взрыве, даже в неоднородной среде (Л. И. Седов, 1946).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 15-01-00361, 17-01-00037).

## **Взаимодействия белков, индуцированные деформацией мембраны: мультипольный подход**

**<sup>1</sup>И. Ю. Голушко, <sup>2</sup>С. Б. Рошаль**

*Южный федеральный университет*

<sup>1</sup>vaniagolushko@yandex.ru

<sup>2</sup>rochal\_s@yahoo.fr

Трубчатые липидные мембраны (ТЛМ), сформированные из везикул, часто используются в качестве модельных систем при изучении взаимодействий между индуцирующими кривизну белками и мембранами с развитой морфологией *in vitro*. Мы рассматриваем, вызванные деформацией клеточной мембраны, анизотропные взаимодействия между адсорбированными на поверхности ТЛМ белками. Энергия упругой деформации мембраны, рассматривается в рамках классической теории упругости липидного бислоя Хелфриха (Helfrich). Свободная энергия системы задается

выражением:

$$\Phi = \frac{k}{2} \int \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - 2C_0 \right)^2 dS + \sigma \int dS - \int \Pi(\phi, z) u_r(\phi, z) dS - FL + \Phi_{chem}$$

где  $k$  — изгибная жесткость,  $R_1$  и  $R_2$  — главные кривизны, а  $C_0$  — собственная кривизна липидного бислоя (spontaneous curvature).  $\sigma$  — поверхностное натяжение и  $L$  — длина ТЛМ. Продольная сила приложенная к ТЛМ —  $F$ ,  $dV$  and  $dS$  — дифференциалы объема и площади соответственно.  $u_r(\phi, z)$  — поле радиальных смещений,  $\Pi(\phi, z)$  — радиальные напряжения вызванные адсорбированными белками,  $\Phi_{chem}$  — энергия химического взаимодействия между липидами мембраны и белками. Последний член учитывает, что адсорбция белков понижает общую энергию системы. Мы считаем, что вклад в энергию  $\Phi_{chem}$  отрицателен и пропорционален числу адсорбированных молекул белка на поверхности ТЛМ. При этом мы полагаем, что он не зависит ни от координат прикрепления белков, ни от внешних параметров системы. Действие отдельных индуцирующих кривизну белков на липидный бислой моделируется при помощи мультиполей, представляющих собой суперпозиции точечных дельта-подобных сил. В дальнейшем вместо самих функций радиальных смещений  $u_r(\phi, z)$  и напряжений  $\Pi_{\phi, z}$ , вызванных адсорбированными белками, мы используем их разложения по ортонормированным собственным функциям, удовлетворяющим рассматриваемым граничным условиям.

Предложенный подход, описывающий действие адсорбированных протеинов на липидный бислой при помощи мультиполей, является мощным инструментом для моделирования механических анизотропных взаимодействий между белками.

Для мультиполей, состоящих из трех или большего количества сил, поле напряжений может быть локализовано в области сравнимой с характерными размерами белковой молекулы, которые обычно меньше радиуса ТЛМ.

Наша теория позволяет сконструировать мультиполи, взаимодействующие друг с другом таким образом, что равновесное расстояние между парой мультиполей оказывается больше их размера. Таким образом, в этом случае теория не требует введения дополнительных отталкивающих потенциалов, для описания белков конечного размера.

Наряду с исследованием системы с периодическими граничными условиями, используемыми в подавляющем большинстве работ рассматривающих ТЛМ, мы проанализировали поведение шарнирно закрепленной на концах ТЛМ. В результате было показано, что на концах мембраны возникают области, в которых адсорбция белковых молекул является гораздо более энергетически выгодной, чем на остальной поверхности ТЛМ.

Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 15-12-10004.

## Асимптотический анализ вязких пульсаций в турбулентном пограничном слое

<sup>1</sup>А. Р. Горбушин, <sup>2</sup>В. Б. Заметаев

*Московский Физико-Технический Институт, г. Жуковский*

<sup>1</sup>gorbushin.ar@mipt.ru

<sup>2</sup>zametaev.vb@mipt.ru

В работе построена асимптотическая теория двухмерного турбулентного пограничного слоя на плоской пластине при больших числах Рейнольдса. Подтверждено, что турбулентный пограничный слой делится на основную невязкую часть, содержащую быстрые пульсации относительно основного (осредненного) профиля продольной скорости и вязкий ламинарный подслой. Однако найдено, что вязкий ламинарный подслой не является традиционным тонким слоем, а состоит из набора малых квадратных (в том смысле, что размеры по обоим направлениям одного порядка величины) подобластей, решение в которых удовлетворяет полным уравнениям Навье-Стокса. Определены асимптотические величины толщины турбулентного пограничного слоя и ламинарного подслоя. Найден механизм взаимодействия основной, пульсационной части турбулентного пограничного слоя и малой вязкой области на обтекаемой поверхности. Это взаимодействие описывается спектром решений уравнения Гамеля с большим значением параметра и означает интенсивный обмен жидкостью между этими областями. Решение оказывается быстро осциллирующей функцией, которая описывает множество тонких струек, как вытекающих в вязкую пристенную область, так и вытекающих из нее.

Данное решение предлагает механизм генерации мелкомасштабной завихренности (турбулентности) в двухмерных уравнениях Навье-Стокса.

Для анализа полных нестационарных уравнений Навье-Стокса используется метод многих масштабов при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности, а неизвестной заранее толщины пограничного слоя к нулю. В качестве основы для рассмотрения используются результаты работы Заметаева и Горбушина, посвященной развитию крупномасштабных пульсаций (вихрей) в ламинарных или турбулентных пограничных слоях в рамках невязкой постановки. В частности используется найденный факт, что малые возмущения относительно основного (осредненного) профиля продольной скорости состоят из суммы сносимых (традиционных решений Рэлея) возмущений и так называемого сингулярного возмущения, которое отвечает за взаимодействие вихрей со стенкой. Показано, что найденные сингулярные аналитические пульсации качественно соответствуют поведению пульсаций в турбулентных пограничных слоях, описанных Райхардтом, а теоретический коэффициент корреляции пульсаций близок по величине к экспериментальному значению. Вблизи стенки описана вязкая малая ламинарная область, решение в которой удовлетворяет полным уравнениям Навье-Стокса, но эта область не является тонким слоем, а имеет квадратную форму. Таким образом, в каждой точке по медленной переменной вдоль пластины, происходит взаимодействие крупномасштабных пульсаций в пограничном слое со своей малой вязкой ламинарной областью на дне пограничного слоя. То есть быстрое решение имеет сложную форму по времени и пространству, но в результате дает свой вклад в эволюцию осредненного профиля скорости в турбулентном пограничном слое.

### Литература

1. Zametaev V. B., Gorbushin A. R. Evolution of vortices in 2D boundary layer and in the Couette flow // AIP Conference Proceedings 1770, 030044 (2016) doi: 10.1063/1.4963986.
2. Reichardt H. Messungen turbulenter Schwankungen // Naturwissenschaften 404 (1938).

# Влияние параметров плазмы на дебаевское экранирование

<sup>1</sup>Н. М. Гордеева, <sup>2</sup>А. А. Юшканов

*МГТУ им. Н.Э. Баумана, МГОУ*

<sup>1</sup>nmgordeeva@bmstu.ru

<sup>2</sup>yushkanov@inbox.ru

Рассматривается влияние высокочастотного электрического поля на слой электронной плазмы с произвольной степенью вырождения. Для одномерного случая, когда все величины зависят только от одной переменной  $x$ , получено аналитическое решение для напряженности индуцированного в слое поля [1]. В безразмерном виде это выглядит так:  $e(x) = e_{as}(x) + e_d(x) + e_c(x)$ .

Слагаемые  $e_{as}(x)$ ,  $e_d(x)$ ,  $e_c(x)$  представляют из себя моды Друде, Дебая и Ван Кампена соответственно. Мода Дебая описывает экранировку внешнего поля в плазме и распространение плазменных колебаний. Но она не всегда присутствует в разложении по собственным решениям, а только когда у дисперсионной функции имеется корень при заданных параметрах плазмы (частоте внешнего электрического поля и частоте столкновений в плазме). Для определения наличия корня используется принцип аргумента. В результате комплексная плоскость параметров делится на области, в одной из которых искомый корень существует, в другой — отсутствует.

На рисунках:  $D^+$  — область существования корня и  $D^-$  — область, где не существует корня. Эти две области разделяет кривая  $L(\alpha)$ , которая определяется параметрическими уравнениями:

$$L(\alpha) : \quad \Omega = \sqrt{L_1(\mu, \alpha)}, \quad \varepsilon = \sqrt{L_2(\mu, \alpha)}, \quad 0 \leq \mu \leq +\infty,$$

где

$$L_1(\mu, \alpha) = \frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)} \cdot \frac{\mu^2[\lambda_0(\mu, \alpha)(1 + \lambda_0(\mu, \alpha)) + s^2(\mu, \alpha)]^2}{[-\lambda_0(\mu, \alpha)][(1 + \lambda_0(\mu, \alpha))^2 + s^2(\mu, \alpha)]},$$

$$L_2(\mu, \alpha) = \frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)} \cdot \frac{\mu^2 s^2(\mu, \alpha)}{[-\lambda_0(\mu, \alpha)][(1 + \lambda_0(\mu, \alpha))^2 + s^2(\mu, \alpha)]}.$$

Здесь  $\Omega$  — безразмерная частота внешнего поля,  $\varepsilon$  — безразмерная частота столкновений в плазме,  $\alpha$  — безразмерный коэффициент вырождения плазмы. На рисунке 1 можно видеть, как меняются параметрические кривые с изменением коэффициента вырождения плазмы  $\alpha$ .

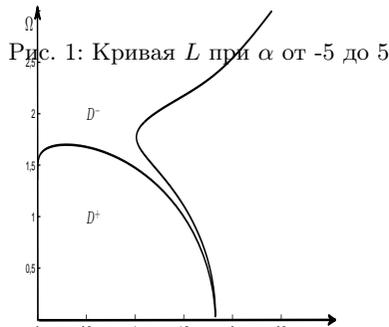


Рис. 1: Кривая  $L$  при  $\alpha$  от  $-5$  до  $5$

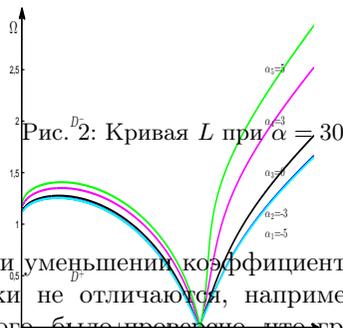


Рис. 2: Кривая  $L$  при  $\alpha = 30$

Видно, что при уменьшении коэффициента вырождения графики практически не отличаются, например при  $\alpha = -3$  и  $\alpha = -5$ . Более того, было проверено, что график для максвелловской плазмы, где  $\alpha = -\infty$ , практически совпадает с графиком для  $\alpha = -5$ .

А при росте  $\alpha$  график обнаруживает интересную особенность. Правая ветвь кривой все больше изгибается и появляются области, при которых искомый корень дисперсионной функции (а значит и дебаевская мода) то появляется, то исчезает. На рисунке 2 изображена кривая  $L$ , соответствующая коэффициенту вырождения плазмы  $\alpha = 30$ . Видно, что при  $\varepsilon = 1,5$  при возрастании

частоты внешнего поля получается следующая картина: мода Дебая сначала существует, потом она пропадает, потом опять появляется, потом пропадает вновь.

Примерно при  $\varepsilon = 1, 8$  подкоренное выражение для кривой  $L$  всегда обращается в ноль, т.е. график всегда будет касаться оси  $\varepsilon$ . При  $\alpha = +\infty$  (полностью вырожденная плазма) ширина петли на графике будет стремиться к нулю.

## Литература

1. *А.В. Латышев, Н.М. Гордеева*, Поведение плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа в слое проводящей среды, ТМФ, 192:3 (2017), 506-522; Theoret. and Math. Phys., 192:3 (2017), 1234-1249.

## Особенности распространения волн в газочапельных и пузырьковых средах

**Д. А. Губайдуллин**

*ИММ КазНЦ РАН*

`gubaidullin@imm.knc.ru`

Рассмотрены особенности волновой динамики и акустики парогазовых капельных и пузырьковых сред. Из последних публикаций по этой теме отметим работы [1-5].

С единых позиций механики сплошных гетерогенных сред развита континуальная теория распространения линейных волн в парогазовых полидисперсных (с произвольной функцией распределения включений по размерам) и дискретных многофракционных капельных и пузырьковых средах с фазовыми превращениями. Представлены математические модели, получены дисперсионные соотношения, изучены высоко- и низкочастотные асимптотики коэффициента затухания, обсуждаются области применимости развитых теорий.

Проанализированы некоторые эффекты и особенности распространения акустических возмущений в дисперсных средах. Среди них эффекты немонотонной зависимости затухания волн

от массового содержания капель и концентрации паровой компоненты в парогазокапельной среде, эффект немонотонной зависимости затухания волн от радиуса пузырьков в пузырьковых жидкостях.

Для смеси воздуха с паром, каплями воды и частицами песка и сажи рассчитаны дисперсионные кривые и распространение импульсных возмущений. Показано, что наличие загрязняющих примесей существенно влияет на динамику слабых волн в воздушных туманах.

Для смеси воды с паровоздушными пузырьками и пузырьками гелия или углекислого газа рассчитаны дисперсионные кривые и динамика слабых импульсов давления. Установлено, что замена части паровоздушных пузырьков в пузырьковой смеси с фазовыми переходами на пузырьки с инертным гелием и парами воды может приводить к существенному увеличению затухания волн в низкочастотной области частот. Показано хорошее согласие теории с опубликованными экспериментальными данными других авторов.

Разработан теоретический метод расчета искажения акустического сигнала при его взаимодействии с многослойной преградой, содержащей слой полидисперсной пузырьковой жидкости. Получено хорошее согласование результатов теоретических расчетов с данными эксперимента. Установлено, что особые дисперсионные и диссипативные свойства слоя пузырьковой жидкости существенно влияют на динамику акустического сигнала в многослойной среде.

На основе результатов расчетов отражения акустической волны от слоя конечной толщины, содержащей газозвесь или пузырьковую жидкость, установлены соотношения между длиной волны и толщиной слоя, при которых коэффициент отражения принимает экстремальные значения. Приводится сопоставление теории и эксперимента.

Изучены нелинейные колебания аэрозолей и динамика частиц в трубах в ударно- и безударно волновом режимах. Установлен резонансный характер осаждения капель от частоты акустического поля и возможность эффективного акустического осаждения наиболее проблемных для экологии субмикронных капель.

## Литература

1. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Звуковые волны в жидко-

- стях с полидисперсными парогазовыми и газовыми пузырьками // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 1. С. 67-77.
2. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Звуковые волны в жидкости с полидисперсными парогазовыми пузырьками // Акустический журнал. 2016. Т. 62. № 2. С. 178-186.
  3. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Падение акустической волны на многослойную среду, содержащую слой пузырьковой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 1. С. 109-116.
  4. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Взаимодействие акустического сигнала с неподвижной дискретно-слоистой средой, содержащей слой пузырьковой жидкости // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55. № 1. С.102-107.
  5. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А., Шайдуллин Л.Р. Экспериментальное исследование коагуляции и осаждения газозвеси в закрытой трубе при переходе к ударно-волновому режиму // Теплофизика высоких температур. 2017. Т.55. № 3. С.484-486.

## **"Нестандартные" каустики в асимптотиках линейных волн на воде, порожденных локализованными источниками**

**С. Ю. Доброхотов**

*Институт проблем механики им А.Ю.Ишлунского РАН*

*Московский физико-технический институт*

dobr@ipmnet.ru

Рассматривается задача о распространении линейных волн на воде в бассейне переменной глубины  $y = D(x)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ , порожденных пространственно-локализованными источниками. Используя подходы, основанные на недавно полученных модификациях канонического оператора Маслова мы даем эффективные асимптотические формулы для описания превышения свободной поверхности, включая волны в окрестности переднего фронта. Эти формулы основаны на семействе решений  $p =$

$P(\alpha, t), x = X(\alpha, t)$  гамильтоновой системы  $\dot{p} = -H_x, \dot{x} = H_p, H = \sqrt{|p|g \tanh(D(x)|p|)}$ ,  $p|_{t=0} = \alpha, x|_{t=0} = 0$ , в 4-ч мерном фазовом пространстве с координатами  $p = (p_1, p_2), x = (x_1, x_2)$ . Здесь  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ . Уравнения  $p = P(\alpha, t), x = X(\alpha, t)$  для каждого фиксированного времени  $t$  определяют геометрические объекты- Лагранжевы многообразия  $\Lambda_t^2$ , параметры  $\alpha_1, \alpha_2$ - это координаты на них. В стандартной теории Маслова многообразия  $\Lambda_t^2$  предполагаются гладкими и существует алгоритм (канонический оператор Маслова) построения волнового поля по  $\Lambda_t^2$ , при этом асимптотики имеют разные структуры в окрестности регулярных точек, где  $\det \frac{\partial X}{\partial \alpha} \neq 0$  и сингулярных, где  $\det \frac{\partial X}{\partial \alpha} = 0$ . Последние образуют *каустики*, где амплитуда волн много больше чем в регулярных точках. В рассматриваемой ситуации многообразия  $\Lambda_t^2$  для  $t > 0$  становится негладким при  $\alpha \rightarrow 0$  и стандартные формулы Маслова не работают в окрестности соответствующей кривой  $\gamma_t = \{x = X(t, 0)\}$ , которая на самом деле может быть определена при интегрировании гамильтоновой системы с гамильтонианом  $H^0 = \sqrt{gD(x)|p|}$ , описывающим характеристики 2-мерного “предельного” волнового уравнения. Эта кривая  $\gamma_t$  описывает передний фронт и волны в ее окрестности- один и наиболее интересных объектов задачи. Наше наблюдение состоит в том, что фронт  $\gamma_t$  - “нестандартная” *каустика* (или нестандартная лагранжева особенность) и что в его окрестности можно и нужно использовать полученные недавно в работах С.Доброхотова, В.Назайкинского и А.Шафаревича (2016) новые интегральные представления для канонического оператора Маслова. В результате мы даем эффективное описание головной волны в окрестности переднего фронта в случае начальных возмущений с широким диапазоном их горизонтального размера. Эти формулы 1) сравнительно легко и явно позволяют оценить вклад в амплитуду глубины бассейна, расходимость лучей, дисперсионных эффектов и структуры начального возмущения, 2) показывают, что в окрестности переднего фронта для описания волнового поля можно ограничиться линеаризованным уравнением Буссинеска. Как частные случаи они включают в себя (и имеют более праматичную и эффективную форму) формулы полученные ранее в работах В.А.Боровикова и М.Кельберта (1984), С.Доброхотова, В.Кузьминой, П.Жевандрова (1993), М.Берри (2007), С.Секерж-Зеньковича (2013).

Эта работа выполнена совместно с В.Назайкинским и А.Тол-

## Математическое моделирование волн в безнапорном участке трубопровода

Ю. А. Дроздова

*Российский государственный университет нефти и газа имени И.М.*

*Губкина*

drozdova.yu7@gmail.com

Известно, что на некоторых участках трубопроводов течение нефтепродуктов происходит в режиме неполного заполнения сечения трубы. При этом продольный градиент давления отсутствует, а движущей силой является сила тяжести. На поверхности безнапорного потока могут возникать волны, связанные с изменением режима компрессорных и насосных станций, с другими техногенными или стихийными воздействиями, а также с имеющей иногда место неустойчивостью потока. Возникновение волн приводит к дополнительному сопротивлению. Отражение волн от границ участков с полным заполнением, взаимодействие с верхней границей трубы, происходящее в случае, когда амплитуда волн достаточно велика, приводит к возмущениям во всем трубопроводе. В силу указанных причин изучение таких волн представляется важным. В данной работе с использованием метода, предложенного в [1], выводятся уравнения, описывающие длинные нелинейные волны в круглой трубе при неполном заполнении сечения с учетом поперечного ускорения частиц жидкости (приближение Буссинеска). При этом малость амплитуд волн не предполагается.

### Литература

1. Дроздова Ю. А. , Куликовский А. Г. Об описании длинных нелинейных волн в каналах // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. N 5. С. 136 - 145.

# Гидродинамические законы сохранения систем уравнений одномерной и двумерной мелкой воды

К. П. Дружков

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Konstantin.Druzhkov@gmail.com

В безразмерных переменных система уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном  $y = h(x)$  имеет вид [1]

$$\begin{aligned}u_t + uu_x + \eta_x &= 0, \\u_x(\eta + h) + u(\eta_x + h_x) + \eta_t &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Под гидродинамическими законами сохранения системы (1) будем понимать пары функций  $(P; R)$ , такие что

$$(D_x(P) + D_t(R))|_{(1)} = 0,$$

где  $P$  и  $R$  зависят от  $x, t, u, \eta$ .

В работе [2] было получено:

**Утверждение 1.** При любой гладкой функции  $h(x)$  система (1) обладает дополнительным законом сохранения

$$\begin{aligned}P &= u(\eta + h(x))(u^2 + 2\eta), \\R &= (\eta + h(x))(u^2 + \eta - h(x)),\end{aligned}\tag{2}$$

В безразмерных переменных система уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном  $z = h(x, y)$  имеет вид [1]

$$\begin{aligned}u_t + uu_x + vv_y + \eta_x &= 0, \\v_t + uv_x + vv_y + \eta_y &= 0, \\u_x(\eta + h) + u(\eta_x + h_x) + v_y(\eta + h) + v(\eta_y + h_y) + \eta_t &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Под гидродинамическими законами сохранения системы (3) будем понимать тройки функций  $(P; Q; R)$ , такие что

$$(D_x(P) + D_y(Q) + D_t(R))|_{(3)} = 0,$$

где  $P, Q$  и  $R$  зависят от  $x, y, t, u, v, \eta$ .

В настоящей работе получено:

**Утверждение 2.** При любой гладкой функции  $h(x, y)$  система (3) обладает дополнительным законом сохранения

$$\begin{aligned} P &= u(\eta + h(x, y))(u^2 + v^2 + 2\eta), \\ Q &= v(\eta + h(x, y))(u^2 + v^2 + 2\eta), \\ R &= (\eta + h(x, y))(u^2 + v^2 + \eta - h(x, y)), \end{aligned} \quad (4)$$

который аналогичен закону сохранения (2).

В работе также получены расширения системы базовых законов сохранения в случаях специальных видов функции  $h(x, y)$ .

### Литература

1. *Стокер Д.Д.* Волны на воде: Математическая теория и приложения М.: Изд-во ИЛ. 1959.
2. *Aksenov A. V., Druzhkov K.P.* Conservation laws and symmetries of the shallow water system above rough bottom // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 722. P. 1–7.

## Образование трехмерных течений на режиме сильного взаимодействия

<sup>1</sup>Г. Н. Дудин, <sup>2</sup>В. Я. Нейланд

*Центральный Аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского*

<sup>1</sup>gndudin@yandex.ru

<sup>2</sup>neyland@tsagi.ru

Исследования двумерных течений около плоской пластины, оканчивающейся донным срезом, показали, что на режиме сильного вязко-невязкого взаимодействия разложение функций течения в окрестности передней кромки не является единственным, а содержит неизвестную константу [1,2,3]. При этом предполагалось, что дополнительное условие на задней кромке (например, донное давление) является постоянной величиной и не изменяется по поперечной координате. В работе [1], в которой впервые

было установлен этот факт для определения индуцированного давления была использована формула "касательного клина" в [3] в более точной постановке, рассматривался ударный слой. В настоящей работе рассматривается обтекание под нулевыми углами атаки и скольжения бесконечной плоской пластины конечной длины (по направлению набегающего потока) на режиме сильного взаимодействия при заданной температуре её поверхности. Предполагается, что на задней кромке пластины может задаваться дополнительное условие, которое является функцией от поперечной координаты. В соответствии с обычными оценками для ламинарного пограничного слоя в гиперзвуковом потоке вводятся безразмерные переменные и функции течения, и используется преобразование А. А. Дородницына. Вводится преобразование переменных, которое позволяет учесть особенности поведения функций течения в окрестности передней кромки [2] и формулируется краевая задача для пространственного пограничного слоя с заданной зависимостью давления от поперечной координаты на задней кромке пластины. В окрестности передней кромки проводится разложение функций течения в степенные ряды для определения функций течения на кромке и собственных чисел. В эти разложения входит свободный параметр, который является функцией от поперечной координаты. В разложение для поперечной компоненты скорости входит производная от этого параметра по поперечной координате. В результате получаются две краевые задачи. Одна - для нахождения главных членов разложения для компонент скорости в продольном и нормальном направлениях, и энтальпии (автомодельная система уравнений). Вторая - для нахождения коэффициентов в членах разложений, содержащих собственное число (неавтомодельная система уравнений). При этом уравнение для поперечной компоненты скорости отделяется от указанных краевых задач и может быть решено после нахождения значения собственного числа. В результате численного решения первой краевой задачи (автомодельной) определены профили компонент скорости в продольном и нормальном направлениях, а также энтальпии для различных значений температурного фактора, показателя адиабаты и числа Прандтля. В результате решения неавтомодельной системы уравнений вычислены соответствующие коэффициенты в разложениях и найдены собственные числа в зависимости от указанных выше параметров течения. Используя автомодельные профили функций течения и

соответствующие им собственные числа, решена краевая задача для определения профиля поперечной компоненты скорости. Показано сильное влияние показателя адиабаты и температурного фактора на образование пространственного течения в рассмотренном случае.

### Литература

1. Нейланд В.Я. Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 40-49.
2. Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. - М.: Физматлит, 2003. - 456 с.
3. Brown S.N., Stewartson K. A non-uniqueness of the hypersonic boundary layer // Q J Mech. appl. Math. 1975. V. XXVIII, Pt. 1. P75-90.

## Оптимальная по расходу форма трубы при ламинарном потоке в ней вязкой жидкости

<sup>1</sup>А. Г. Егоров, <sup>2</sup>К. Ю. Носулько

*Казанский (Приволжский) федеральный университет*

<sup>1</sup>aegorov0@gmail.com

<sup>2</sup>knosulko@gmail.com

Рассматривается режим двухфазного установившегося течения – ламинарный стратифицированный поток [1,2] жидкости в горизонтальной трубе, при котором в нижней части трубы течет более тяжелая фаза (вода), в верхней – легкая (нефть). Для труб круглого поперечного сечения этот режим рассматривался во многих работах [3,4,5]. В данных работах было установлено, что зависимость расхода нефти от доли воды в потоке немонотонна. Следствием немонотонности является принципиальная возможность повышения эффективности перекачки вязкой нефти в круглых трубах за счет добавления в поток некоторого количества воды, выполняющей роль жидкой смазки.

В настоящей работе был определен максимальный выигрыш по расходу нефти для труб круглого поперечного сечения с добавлением оптимального количества воды в поток относительно полностью заполненных нефтью труб. Результат был получен для различных заданных значений отношения вязкости фаз. Наряду с вышеописанным способом в представленной работе предложена еще одна возможность повышения расхода нефти за счет оптимизации формы поперечного сечения трубы заданного периметра. Главный интерес состоял в том, чтобы выяснить степень выигрыша по расходу нефти при использовании оптимальной трубы относительно трубы круглого поперечного сечения.

В результате была определена форма и площадь поперечного сечения оптимальной трубы при различных заданных значениях отношения вязкости фаз. Для обоих случаев круглого и оптимального поперечного сечения представлен ряд характеристик течения, при которых достигнут максимум расхода по нефти: доля воды в потоке; угол, определяющий положение границы раздела фаз; длина границы области, занятой водой; площадь сечения, занятого водой. Проведен их сравнительный анализ. Решение поставленных оптимизационных задач осуществлялось численными методами при помощи пакета Matlab.

### Литература

1. Angeli P. and Hewitt G.F. Flow structure in horizontal oil-water flow // International Journal Multiphase Flow, Vol. 26. 2000. No. 7. Pp. 1117-1140.
2. Brauner N. and Moalem Maron D. Flow pattern transitions in two phase liquid-liquid horizontal tubes // International Journal of Multiphase Flow, Vol. 18. 1992. No. 1. Pp. 123-140.
3. Ng T.S., Lawrence C.J., Hewitt G.F. Laminar stratified pipeflow // International Journal Multiphase Flow, Vol. 28. 2002. No. 6. Pp. 963-996.
4. Bentwich M. Two-phase axial flow in pipe // Trans. of the ASME, Vol. D 84 1964. No. 4. Pp. 669-672.
5. Brauner N., Rovinsky J. and Moalem Maron D. Analytical solution for laminar-laminar two-phase stratified flow in circular conduits // Chemical Engineering Communications, Vols. 141-142. 1996. Pp. 103-143.

## Моделирование фрагментации метеороидов и энерговыделения

Л. А. Егорова, В.В. Лохин

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

Взаимодействие метеороида с атмосферой и дальнейшие последствия его входа зависят от размера тела, его скорости и состава (прочности). Тела размером порядка 1 км и более, вход которых представляет опасность для человечества можно определить системами наблюдения заранее [1]. Расчет последствий внедрения в атмосферу тел размерами десятки и сотни метров (болидов) имеет практическую ценность, так как они могут вызывать локальные и региональные катастрофы, но не обнаруживаются вне атмосферы. Наблюдения за полетом метеорных тел с помощью наземных и орбитальных станций фиксируют интенсивность их свечения вдоль траектории. Результаты наблюдения обычно представляются в виде графика - кривой светимости. При наблюдении за болидами часто регистрируется увеличение свечения в конце полета, так называемая «конечная вспышка», свидетельствующее о его разрушении под действием аэродинамических сил. В настоящее время все больше работ моделируют вход и разрушение метеорных тел в атмосфере и вычисление высвобождаемой энергии [2,3]. В [2] рассмотрено явление «воздушного гигантского болида или воздушный взрыв метеора» (когда продукты полностью распадающегося и испаренного метеорного тела замедляются в атмосфере и не достигают поверхности Земли, но ударная волна и тепловое излучение производят заметное разрушение и пожары». Для условий Челябинского болида рассмотрено полное испарение и формирование высокоскоростной газовой струи, которая затем моделировалась численно. В работе [3] предложены численные методы решения уравнений движения и испарения метеорных тел для различных моделей дробления. Выбрав свободные параметры задачи, удалось получить совпадение с наблюдательными данными. Эти работы дают хорошо моделируют результаты наблюдений и полезны для практики, однако не дают объяснений по поводу источника высвобожденной тепловой энергии после дробления. Поэтому мы предложили модель разрушения и переход кинетической энергии в тепловую. Мы предполагаем разрушение метеороида на множество фрагментов. В отличие

от классической работы [4] осколки различны и движутся независимо. После дробления фрагментов разрушенного тела за короткий промежуток времени (полета) некоторое количество газа (окружающего воздуха и паров тела) нагревается до высокой температуры. Кинетическая энергия движущихся частиц метеорного тела переходит в тепловую энергию объема газа, в котором происходит их движение. Мы вычислили температуру облака газовых частиц по методике из [5,6]. В предыдущих работах мы вычислили светимость аналитически через соотношение светимости и уравнения физической теории метеоров. Распределение масс фрагментов, данное в [7] позволяет вычислить интегральные соотношения для всего набора частиц. В настоящей работе используя закон сохранения энергии мы нашли температуру облака после фрагментации. Необходимые данные для случая Челябинского болида были взяты из [8]. Таким образом, полагая известным распределение фрагментов метеороида по массам после дробления, получена температура в облаке газа и частиц для конкретных условий Челябинского события. Высокая температура газа позволяет говорить о явлении «теплового взрыва», как и предлагается в [1,2].

### Литература

1. Катастрофические воздействия космических тел. Под ред. В.В. Адушкина и И.В. Немчинова. М. : ИКЦ «Академкнига», 2005, 310 с.
2. Шувалов В. В., Светцов В. В., Трубецкая И. А. Оценка размера зоны разрушений, производимых на поверхности земли ударами астероидов размером 10 300 метров *Астрономический вестник*. - 2013. - Т. 47. - №. 4. - С. 284-291.
3. Register P. J., Mathias D. L., Wheeler L. F. Asteroid fragmentation approaches for modeling atmospheric energy deposition Icarus. - 2017. - Т. 284. - С. 157-166.
4. Григорян С. С. О движении и разрушении метеоритов в атмосферах планет // *Космические исследования*. – 1979. – Т. 17. – №. 6. – С. 875-893.
5. Egorova L., Lokhin V. On the mechanism of crushing meteoroid with end flash effect. EPSC // *Moon and Planets*. - Т. 95. - С. 303-319.
6. Егорова Л. А., Лохин В. В. О двустадийном разрушении метеороида с концевой вспышкой *Вестник Московского уни-*

- верситета. Серия 1: Математика. Механика. 2016. - № 4. - С. 43-47.
7. Немчинов И. В., Попова О. П., Тетерев А. В. Внедрение крупных метеороидов в атмосферу: теория и наблюдения (Обзор) Инж-физ. журн. - 1999. - Т. 72. - С. 1233-1265
  8. Porova O. P. et al. Chelyabinsk airburst, damage assessment, meteorite recovery, and characterization Science. - 2013. - Т. 342. №. 6162. - С. 1069-1073.

## Решение задачи конвекции при малых числах Марангони

**М. В. Ефимова**

*Институт вычислительного моделирования СО РАН*  
efmavi@icm.krasn.ru

В данной работе исследуется двумерная нестационарная задача о течении двухслойной системы бинарная смесь-вязкая теплопроводная жидкость с общей поверхностью раздела. Считается, что бинарная смесь заполняет слой  $|x| < \infty$ ,  $0 < y < l_1(x, t)$ . Сверху этого слоя имеется слой вязкой теплопроводной жидкости  $|x| < \infty$ ,  $l_1(x, t) < y < l_2$ . Система жидкостей ограничена непроницаемыми твердыми стенками с заданным распределением температуры. Полагаем отсутствие потока вещества через твердую стенку и поверхность раздела. На границе раздела задана линейная зависимость поверхностного натяжения от температуры и концентрации  $\sigma(\theta_1, C) = \sigma^0 - \alpha_1\theta_1 - \alpha_2C$ .

Математическое моделирование течений жидкостей проводится на основе системы уравнений Навье-Стокса в приближении Обербека- Буссинеска [1]. Для описания процессов в нижнем слое система уравнений должна быть дополнена уравнением диффузии.

Для нахождения точного решения, описывающего конвективное течение бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости, использовался класс решений, в котором скорости течения жидкостей линейно зависят от горизонтальных координат, а коэффициенты при координатах - от поперечной координаты и времени.

Концентрация в слое с бинарной смесью, температура и давление являются квадратичными формами относительно продольной координаты

$$\begin{aligned}u_j &= U_j(\eta, \tau)\xi, & v_j &= V_j(\eta, \tau); \\ \theta_j &= A_j(\eta, \tau)\xi^2 + B_j(\eta, \tau), & c_1 &= H_1(\eta, \tau)\xi^2 + E_1(\eta, \tau), \\ p_j &= P(\xi, \eta, \tau).\end{aligned}\quad (1)$$

Специальный вид решения позволяет описывать движения вблизи локальных экстремумов температуры на твердых стенках и границе раздела.

Получены следующие результаты: 1) предполагая, что движение в слоях является ползущим, построено точное стационарное решение конвективного течения системы жидкостей; 2) построено стационарное решение задачи с учетом влияния энергии межфазного теплообмена; 3) получены априорные оценки нестационарного решения и определены условия распределения температуры вдоль твердых стенок, при котором движение стабилизируется; 4) получено решение нестационарной задачи в квадратурах методом преобразования Лапласа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00229).

### Литература

1. Андреев В.К., Захватаев В.Е., Рябицкий Е.А. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000, 280.

## Моделирование межфазных границ при необратимых процессах: влияние интенсивности фазовых превращений на поверхностное натяжение и динамические условия на границе раздела фаз

**А. В. Жуков**

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*  
az@imec.msu.ru

Известно, что при постановке задач о распространении фронтов фазовых превращений в сплошных средах во многих случаях, кроме условий непрерывности потоков массы, импульса и энергии, необходимы дополнительные соотношения на поверхности разрыва (например, условия непрерывности обобщенного химического потенциала или уравнения, определяющие интенсивность фазовых превращений).

Эти дополнительные соотношения могут быть получены в рамках термодинамики необратимых процессов из анализа уравнения для производства энтропии при описании границы раздела фаз как двумерной сплошной среды (D. Bedeaux, A. M. Albano, P. Mazur, 1976). Обобщение этой теории в рамках расширенной неравновесной термодинамики учитывает зависимость поверхностной энтропии от поверхностных потоков массы и энергии (L. M. S. Sagis, 2010). Однако эти модели не позволяют описать зависимость поверхностного натяжения от потока массы через межфазную границу, наблюдаемую при численном моделировании процессов испарения и конденсации методами молекулярной динамики (S. I. Anisimov et al., 1999).

В настоящей работе граница раздела фаз рассматривается как двумерная система с нулевой поверхностной плотностью, обладающая внутренней энергией, температурой и энтропией. На основе уравнения для производства энтропии и вариационного уравнения Л. И. Седова, где в число дополнительных определяющих параметров входит интенсивность фазовых превращений, построена уточненная модель движущейся границы раздела жидкостей. Получены определяющие уравнения, условия на границе раздела и кинетические соотношения в рамках данной модели. В частности, получено дополнительное соотношение, связывающее скачок обобщенного химического потенциала на границе раздела фаз и скорость изменения потока массы через данную границу.

В изотермическом приближении численно решена задача о структуре движущейся плоской межфазной границы, что позволяет найти уравнения состояния двумерной среды и кинетические коэффициенты. При этом внутри межфазного слоя используется уравнение состояния, основанное на обобщенной модели Ван дер Ваальса с учетом градиентов плотности. Для некоторых значений определяющих параметров задача допускает точное аналитическое решение. Поверхностные плотности экстенсивных физических величин определяются по Гиббсу с помощью введения разде-

ляющей поверхности и вычисления избыточных величин для соответствующих объемных плотностей. Найдена зависимость поверхностной свободной энергии и поверхностного натяжения от интенсивности фазовых превращений и получены асимптотические выражения для этих функций при малых потоках массы через межфазную границу.

Зависимость поверхностного натяжения от интенсивности фазовых превращений приводит к модификации дополнительного соотношения на разрыве, что влияет на движение фронтов фазовых переходов, в том числе для одномерных движений с плоскими волнами. Для таких движений решена задача об устойчивости фронта фазового перехода, движущегося с дозвуковой скоростью.

В качестве приложения рассмотрен ряд задач о движении фронтов испарения и конденсации в жидкостях — сферически симметричная задача о движении парового пузырька в вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости и задача об испарении сферически симметричного тела в вакуум.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ- (проекты № 16-01-00157 и 17-01-00037).

## **Эволюция сингулярностей в течениях жидкости со свободной границей**

**Е. Н. Журавлева, Е. А. Карabut**

*Институт гидродинамики СО РАН*

*eakarabut@gmail.com*

Рассматриваются нестационарные плоские потенциальные течения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей в отсутствии силы тяжести и поверхностного натяжения. Несмотря на простоту постановки в таких задачах известно мало точных решений.

Для более простого случая стационарных течений существует метод Кирхофа и с его использованием найдено много струйных решений. Один из вариантов метода Кирхофа основан фактически на угадывании решения путем анализа нулей и особых точек решения. Нельзя ли такой подход обобщить на нестационарный случай? Это сделать труднее, поскольку в нестационарном случае нули и сингулярности решения будут уже подвижными.

Важность исследования особенностей решения связана также с гипотезой об интегрируемости плоской нестационарной задачи со свободной границей, высказанной в ряде работ академиком В.Е. Захаровым. В большей степени эта гипотеза основана на наблюдении, что движущиеся нули и сингулярности решения могут генерировать дополнительные законы сохранения.

В докладе будут представлены новые аналитические и полуаналитические результаты о характере движения и типе встречающихся особенностей. В результате удастся построить несколько точных решений. Обнаружена коалесценция двух или трех особенностей. Зафиксирован выход сингулярностей на свободную границу.

## **Управление детонацией в сверхзвуковом потоке в плоском канале с сужением**

<sup>1</sup>Т. А. Журавская, <sup>2</sup>В. А. Левин

<sup>1,2</sup>*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

<sup>1,2</sup>*ЦАГИ*

<sup>2</sup>*ИАПУ ДВО РАН*

<sup>1</sup>[zhuravskaya@imec.msu.ru](mailto:zhuravskaya@imec.msu.ru)

<sup>2</sup>[levin@imec.msu.ru](mailto:levin@imec.msu.ru)

Используя детальный кинетический механизм химического взаимодействия, изучено детонационное горение стехиометрической водородно-воздушной смеси, поступающей со сверхзвуковой скоростью, превышающей скорость распространения самоподдерживающейся детонации, в плоский симметричный канал с сужением (пережатием). Цель исследования – определение условий, обеспечивающих формирование в канале создающего тягу течения со стабилизированной детонационной волной, а также выявление механизмов управления положением детонации в потоке с целью повышения эффективности детонационного сжигания газовой смеси.

Продолжая начатое ранее исследование (Журавская Т.А., Левин В.А. МЖГ. 2012. № 6. С. 126-136), в работе рассмотрены условия стабилизации инициируемой энергоподводом детонационной волны в канале с сужением, выходное сечение которого больше входного. Определены условия, обеспечивающие формирование в

канале создающего тягу течения с детонационной волной, стабилизирующейся в расширяющейся части канала.

Изучено влияние изменений числа Маха входящего потока, добавок в поступающую в канал горючую смесь (например, мелких инертных частиц пыли) и геометрических параметров канала на положение стабилизированной в потоке волны. Предложен ряд способов управления положением детонации с целью увеличения создаваемой потоком тяги.

Установлена возможность формирования создающего тягу течения со стабилизированной детонацией без затрат энергии в случае формирования детонационной волны в потоке перед препятствием, расположенным в определенном месте канала и существующим в течение некоторого времени.

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (договор № 14.G39.31.0001 от 13.02.2017г.), Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-8425.2016.1), Программы фундаментальных научных исследований Президиума РАН (Программа I.31) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-29-01092). Исследования выполнены с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова.

## **Моделирование склоновых потоков с учетом неньютоновских свойств движущейся среды**

<sup>1</sup>Ю. С. Зайко, <sup>2</sup>М. Э. Эглит, <sup>3</sup>А. Е. Якубенко

<sup>1,2</sup>*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

<sup>1,3</sup>*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

<sup>2</sup>*m.eglit@mail.ru*

<sup>3</sup>*yakub@imec.msu.ru*

Рассматриваются природные геофизические потоки, движущиеся по склонам под действием силы тяжести, такие как снежные лавины, сели, быстрые оползни. Знание их динамических параметров и границ распространения необходимо для организации защиты различных объектов в горах. Большая часть существующих математических моделей геофизических склоновых потоков основана на уравнениях, осредненных по толщине потока. В

этой работе строятся и исследуются модели склоновых потоков с использованием полных (не осредненных по толщине) уравнений механики сплошных сред. Модели учитывают следующие три важных фактора: сложные нелинейные реологические свойства движущегося материала, захват потоком подстилающего материала и возможность турбулентного режима движения. Предполагается, что захват донного материала происходит вдоль нижней поверхности потока, когда касательное напряжение на дне потока достигает значения предела прочности на сдвиг материала дна. Для задания реологических свойств среды используются модели Хершеля - Балкли, которые при надлежащем выборе входящих параметров соответствуют ньютоновской (линейно-вязкой) жидкости, жидкости с нелинейной зависимостью эффективной вязкости от скорости деформации, а также средам, характеризующимся наличием предела текучести. Для описания турбулентных характеристик предлагается трехпараметрическая модель турбулентности, предложенная В.Г. Лущиком, А.А. Павельевым и А.Е. Якубенко для расчетов движения жидкостей и газов вдоль проницаемых и непроницаемых стенок в присутствии градиента давления, массообмена и других процессов. Сформулированные модели используются для исследования влияния перечисленных трех факторов на динамику потока и величину скорости вовлечения донного материала на примере движения по длинному однородному склону с постоянным уклоном, в предположении, что все параметры потока не зависят от продольной координаты. В частности, показано, что, как в ламинарных, так и в турбулентных потоках, при движении по длинному однородному склону с захватом подстилающего материала скорость и толщина потока при больших временах растут пропорционально времени, а скорость захвата донного материала стремится к константе. Величина этой константы зависит только от свойств движущегося материала и склона и от режима течения, и не зависит от величины средней скорости или толщины потока.

Работа поддержана РФФИ (проекты 15-01-00361, 15-01-08023)

# Особенности двухфазного течения несмешиваемых жидкостей в цифровом микротомографическом изображении песчаника

Т. Р. Закиров

*Казанский (Приволжский) федеральный университет*  
timurz0@mail.ru

Особенности многофазных течений жидкостей в пористых средах являются предметом большого интереса у исследователей, работающих во многих областях науки и техники. Поведение таких потоков зависит от множества параметров, таких как геометрия порового пространства, скорость вытеснения, вязкость и плотность флюидов, поверхностное натяжение и краевой угол смачивания, которые различны для каждой рассматриваемой задачи. При рассмотрении многофазных потоков в масштабе пор, как правило, размеры расчетной области составляют несколько миллиметров, а образцу ядра ставится в соответствие его цифровой аналог, который состоит из заполненных флюидом или твердой фазой упорядоченных вокселей. Получить цифровую модель ядра высокого разрешения (несколько мкм) можно при помощи рентгеновской компьютерной микротомографии. Цель данной работы заключается в исследовании особенностей двухфазного течения в трехмерном микротомографическом изображении природного песчаника при различных параметрах многофазного потока.

Для математического описания двухфазного течения жидкостей в масштабе пор в данной работе используются решеточные уравнения Больцмана, а явления на границе раздела фаз описываются при помощи модели градиента цветового поля.

Ранее исследователями было выявлено, что число капиллярности  $Ca$  и соотношение вязкости несмачивающей и смачивающей жидкостей  $M$  контролируют поведение совместного течения. Нами была проведена серия из более чем 20 численных расчетов по несмешиваемому вытеснению смачивающей жидкости несмачивающей (дренирование) при различных значениях данных параметров. Для численного описания структуры течения был построен график зависимости насыщенности образца несмачивающей фазой от координаты наиболее близкой к выходному сечению ее фронта, согласно которому было выделено три типа вытеснения.

При преобладании сравнительно высоких значениях  $\log Ca > -2$ , и  $\log M < -0.5$  кривая на графике имеет монотонный возрастающий характер. Эффективность заполнения несмачивающей фазой низка, т.е. при достижении нагнетаемой жидкости выходного сечения образец заполнен ею лишь на 20-30 %. В поровых каналах, вследствие слабости поверхностного натяжения, наблюдается образование изолированных глобул нагнетаемой жидкости. В каналах, куда проникла несмачивающая фаза, присутствует значительное количество контактирующей с поверхностью скелета смачивающей жидкости к моменту прорыва нагнетаемой фазы через выходное сечение. Для такого набора параметров вытеснения присуще формирование так называемых «вязких» пальцев.

При  $\log Ca < -3$ , и  $-1 < \log M < 1$ , в отличие от режима формирования «вязких» пальцев, распространение несмачивающей фазы наблюдается по всем направлениям, в том числе и противоположно градиенту гидродинамического давления. График имеет возрастающий характер, однако, в отличие от первого случая, наблюдаются вертикальные участки, что указывает на временное прекращение перемещения фронта, однако количество нагнетаемой жидкости в образце увеличивается. В таком режиме течения образуются «капиллярные» пальцы. Эффективность заполнения нагнетаемой фазой по сравнению с первым режимом выше и составляет более 40%.

При промежуточных значениях  $\log Ca$  и  $\log M$  наблюдаются эффекты, свойственные как режиму формирования «вязких», так и «капиллярных» пальцев. Эффективность заполнения порового пространства при прорыве нагнетаемой фазы через выходное сечение выше, чем в первом режиме, но ниже, чем во втором. Это так называемый режим «стабильного» вытеснения.

По окончании серии расчетов была построена диаграмма, где по оси  $OX$  отложен  $\log M$ , а по оси  $OY$  –  $\log Ca$ . На диаграмму для каждой пары чисел, для которых были произведены расчеты, нанесены значения насыщенности образца нагнетаемой фазой при ее достижении выходного сечения. Определены границы для трех типов течения.

Работа выполнена частично при поддержке гранта РФФИ мол\_а 16-35-00155.

# Турбулентное течение в диффузоре с неблагоприятным градиентом давления

В. М. Зубарев

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН*

zubarev@ipmnet.ru

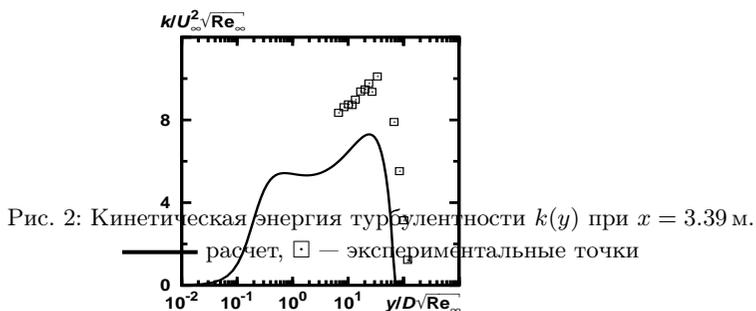
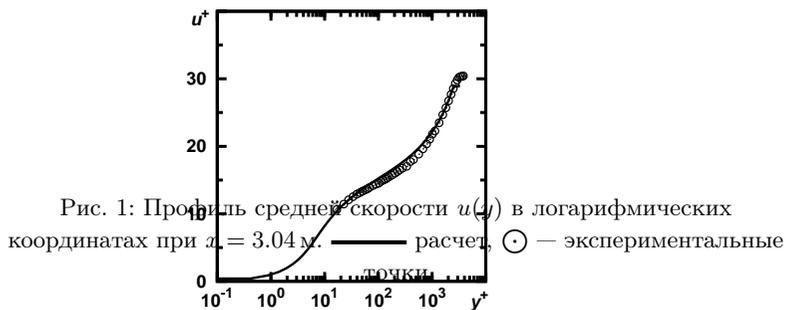
В данной работе численным методом исследовалось течение в пограничном слое несжимаемой жидкости в диффузоре с увеличивающимся продольным (неблагоприятным) градиентом давления. В эксперименте F0141A [1] были измерены различные осредненные и турбулентные величины в пограничном слое. При численном моделировании применялась пристеночная модель турбулентности [2,3], полученная для полной скорости диссипации энергии турбулентности. Эта модель использовалась ранее в работах [4,5] при исследовании ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое при большой степени интенсивности турбулентности и показала результаты, совпадающие с экспериментом. Детально изучено численными методами особенности течения F0141A в диффузоре. Результаты расчетов сопоставлены с данными эксперимента по профилям средней скорости, значениям кинетической энергии турбулентности.

Здесь характерная длина была  $D = 1$  м, скорость –  $V_\infty = 0.222639 \cdot 10^2$  м/с, число Рейнольдса набегающего потока было  $Re_\infty = V_\infty D / \nu = 1.76 \cdot 10^6$ . Для проверки моделирования параметров турбулентности на рисунках приведено сравнение расчетного и экспериментального профиля средней скорости  $u(y)$  (рис. 1) при  $x = 3.04$  м и энергии турбулентности  $k(y)$  (рис. 2) при  $x = 3.39$  м в области близкой к концу измерений.

Характеристики динамического пограничного слоя и параметров турбулентности детально изучены при наличии продольного градиента давления. Представленные расчетные результаты показали их хорошее соответствие экспериментальным данным по профилям средней скорости и кинетической энергии турбулентности.

## Литература

1. Simpson R., Samuel A. *Increasingly adverse pressure gradient flow* // Proc. 1980–81 AFOSR-HTTM-Stanford Conf. on Complex Turbul. Flows: Comparison of Computation and Experiment,



- Stanford, CA, 3–6 Sept. 1980 / Eds. S. J Kline, B. J Cantwell, G. M Lilley, Mech. Eng. Dept., Stanford Univ., v. 1, 1981, p. 259–261.
2. Myong H. K., Kasagi N. *A new proposal for a  $k$ - $\varepsilon$  turbulence model and its evaluation. 1st report, development of the model* // Trans. Japan Soc. Mech. Eng, 1988, В 54, p. 3003–3009.
  3. Myong H. K., Kasagi N. *A new proposal for a  $k$ - $\varepsilon$  turbulence model and its evaluation. 2nd report, evaluation of the model* // Trans. Japan Soc. Mech. Eng., 1988, В 54, p. 3512–3520.
  4. Зубарев В. М. *Исследование совместного влияния параметров турбулентности набегающего потока на переход течения в пограничном слое* // Тепл. процессы в техн., 2016, т. 8, № 1, с. 4–16.

5. Zubarev V.M. *Comparative analysis of various  $k-\varepsilon$  turbulence models for laminar-turbulent transition* // Препринт ИПМех РАН. М.: Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 1997, Препринт № 601. – 52с.

## О структуре течения в ударных слоях около V-образных крыльев при сверхзвуковых скоростях обтекания

<sup>1</sup>М. А. Зубин, <sup>2</sup>Ф. А. Максимов, <sup>3</sup>Н. А. Остапенко

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

<sup>1</sup>zubinma@mail.ru

<sup>2</sup>f\_a\_maximov@mail.ru

<sup>3</sup>ostap@imec.msu.ru

Представлены результаты комплексного теоретического и экспериментального исследования структуры обтекания V-образных крыльев при сверхзвуковых скоростях обтекания.

Показана возможность распространения ранее установленных критериев существования невязких вихревых структур (вихревых особенностей Ферри) в ударных слоях около V-образных крыльев [Зубин М.А., Максимов Ф.А., Остапенко Н.А. ДАН. Т.434. №3. С.282-288.] на случай образования контактного разрыва соответствующей интенсивности, исходящего из точки ветвления  $\lambda$ -конфигурации ударных волн, сопровождающей отрыв турбулентного пограничного слоя под воздействием внутреннего скачка уплотнения, падающего на одну из консолей крыла. В рамках модели идеального газа рассмотрены режимы течения как с ударными волнами, присоединенными к передним кромкам, так и с центрированной волной разрежения на передней кромке подветренной консоли, реализующиеся при несимметричном обтекании крыла с нулевым углом стреловидности передних кромок и углом раскрытия  $2\pi/3$  потоком с числом Маха  $M = 3$ . С использованием результатов численных расчетов, точного расчета точек ветвления на головной ударной волне и разработанной ранее эффективной полуэмпирической методики расчета интенсивности контактного разрыва, исходящего из точки ветвления  $\lambda$ -конфигурации ударных волн, а также экспериментальных данных, полученных с помощью различных методов, установлено,

что при интенсивности контактных разрывов, исходящих из точек ветвления головной ударной волны и  $\lambda$ -конфигурации ударных волн, большей порогового значения, над наветренной консолью крыла существуют невязкие вихревые структуры – вихревые особенности Ферри.

Приведены результаты численного исследования несимметричного обтекания ромбовидного крыла с углами раскрытия  $\gamma = 240^\circ$  и при вершине консолей  $\beta = 45^\circ$  на режимах со сверхзвуковыми передними кромками при числах Маха  $M = 3-6$ .

Обнаружены неизвестные ранее разнообразные схемы течения в ударном слое в зависимости от числа Маха, углов атаки и скольжения, обусловленные наличием точки излома поперечного контура крыла. При обтекании со скольжением на режимах с дозвуковым (поперечным) течением в окрестности центральной хорды крыла наблюдается срыв потока с наветренной консоли с образованием вихря на подветренной консоли. Увеличение угла скольжения приводит к возникновению транс- и сверхзвукового течения по обводу вихря и в возвратном потоке около стенки подветренной консоли с образованием ударных волн. При реализации в окрестности точки излома контура условий, допускающих существование центрированной волны разрежения, вихрь сдвигается вниз от точки излома контура вдоль поверхности крыла, а перед ним образуется ударная волна.

В экспериментах при числе  $M = 3$  с использованием различных методов, в частности – специального теневого метода для визуализации конических течений, подтверждено существование схем обтекания с образованием вихря на подветренной консоли крыла в окрестности центральной хорды. В возвратном потоке внутри вихря обнаружен отрыв турбулентного пограничного слоя, который существует при дозвуковой скорости возвратного течения и исчезает при достижении ею скорости звука.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект №15-01-02361).

# Построение специальных точных решений квазилинейного уравнения теплопроводности

<sup>1</sup>А. Л. Казаков, <sup>2</sup>Св. С. Орлов

*Институт динамики систем и теории управления имени*

*В. М. Матросова СО РАН, Иркутск*

<sup>1</sup>s.orlov@icc.ru

<sup>2</sup>kazakov@icc.ru

Рассматривается квазилинейное параболическое уравнение

$$T_t = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (k(T)\nabla_{\mathbf{x}}T), \quad k(T) = k_0T^\sigma, \quad (1)$$

которое, как известно, встречается при описании процессов горения, тепло- и массопереноса, фильтрации в сплошных нелинейных средах [1]. В литературе (1) именуется *нелинейным уравнением теплопроводности (фильтрации)* [2,3], а также *уравнением пористой среды (the porous medium equation)* [4].

Будем считать, что  $T \triangleq T(t, \mathbf{x}): \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^{\nu+1} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ,  $\nu \in \{0, 1, 2\}$ ,  $k_0, \sigma \in \mathbb{R}_+$ . В предположении наличия пространственных (плоской, осевой и сферической) симметрий уравнение (1) серией невырожденных преобразований приводится к одномерному виду

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{u_\rho^2}{\sigma} + \frac{\nu u}{\rho} u_\rho, \quad (2)$$

в котором  $u$  — новая искомая функция времени  $t \geq 0$  и неотрицательной скалярной переменной  $\rho = \|\mathbf{x}\|_\nu \triangleq (\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2)^{1/2}$ .

Авторами исследуется проблема поиска точных решений типа тепловой волны уравнения (2), удовлетворяющих специальному краевому условию

$$u(t, \rho)|_{\rho=f(t)} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\rho = f(t)$  — некоторая функция, обладающая достаточной степенью гладкости. Ее график определяет в плоскости переменных  $(t, \rho)$  *фронт тепловой волны*.

Настоящая работа включает в себя три основных этапа.

**А.** Поиск точных решений уравнения (2) в виде

$$u(t, \rho) = \psi(t, \rho)v(\xi), \quad \xi \triangleq \xi(t, \rho), \quad \psi \xi_t \xi_\rho \neq 0 \quad (4)$$

(прямой метод Кларксона–Крускала) [5]. Структура анзаца [4] предполагает редукцию к ОДУ относительно  $v(\xi)$ . В формулу

[4], в частности, укладываются такие важные для приложений классы точных решений, как автомодельные, типа бегущей волны [6,7].

**В.** Согласование найденных семейств решений с краевым условием (3). Выделение решений типа тепловой волны. Переход к задачам Коши для ОДУ 2-го порядка.

**С.** Качественное исследование свойств решений задач Коши. Идентификация поведения решений типа тепловой волны.

Итак, авторами получены новые классы точных решений нелинейного уравнения теплопроводности (2), имеющих вид тепловой волны. Проводится подробный качественный анализ, позволяющий определить поведение и свойства этих решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00608, № 16-31-00291).

## Литература

1. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
2. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
3. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
4. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.
5. Olver P. J. Direct reduction and differential constraints // Proc. Roy. Soc. (London). 1994. Ser. A, V. 444. P. 509-523.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
7. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1978.

# Математическое моделирование в механике сплошных сред с использованием полигармонических уравнений и их систем

<sup>1</sup>А. О. Казакова, <sup>2</sup>Е. А. Микишанина, <sup>3</sup>А. Г. Терентьев

*Чувашский государственный университет*

<sup>1</sup>kazakova\_anastasia@bk.ru

<sup>2</sup>evaeva\_84@mail.ru

<sup>3</sup>agterent@rambler.ru

Полигармоническим уравнением  $n$  - го порядка называется уравнение вида

$$\Delta^n u = 0. \quad (1)$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа,  $n \in N$ . Многие задачи теории упругости и гидродинамики сводятся к решению гармонических ( $n = 1$ ) и бигармонических ( $n = 2$ ) уравнений. Однако удобные аналитические выражения могут быть получены только для некоторых областей частного вида. В остальных случаях применяются численные методы.

В [1] для решения краевых задач для уравнения (1) предложен численный метод граничных элементов, который заключается в аппроксимации границы области системой конечного числа малых элементов и в аппроксимации вспомогательных функций  $u_k = \Delta^k u$  ( $k = \overline{0, n-1}$ ) и их нормальных производных  $v_k = \frac{\partial u_k}{\partial n}$  на каждом элементе. Тогда система интегральных уравнений Грина для этих функций может быть сведена к системе линейных уравнений относительно их значений в контрольных точках (середины граничных элементов). Если контур разбивается на  $N$  элементов, то эта система представляет систему  $Nn$  линейных алгебраических уравнений относительно  $2Nn$  компонент, из которых  $Nn$  компонент задаются граничными условиями. Эти условия классифицируются по аналогии с краевыми задачами для гармонического уравнения: 1) условия Дирихле, если на границе заданы функции  $u_k$ ; 2) условия Неймана, если заданы нормальные производные  $v_k$ ; 3) смешанные условия, если задана часть функций  $u_k$  и часть функций  $v_k$ .

В докладе также рассматриваются системы вида

$$\begin{cases} \Delta^n u = v, \\ \Delta^m v = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Возможны два случая: 1)  $v$  является заданной  $m$ -гармонической функцией; 2)  $v$  является решением  $m$ -гармонического уравнения.

Применяя к первому уравнению системы (2)  $m$  раз оператор Лапласа, получаем одно полигармоническое уравнение порядка  $m + n$ , для решения которого необходимы  $m + n$  граничных условий. Первые  $n$  граничных условий совпадают с граничными условиями для первого уравнения системы (2). Если функция  $v$  задана, то оставшиеся  $m$  условий могут быть найдены из нее непосредственным дифференцированием. Если  $v$  неизвестна, то оставшиеся  $m$  условий совпадают с граничными условиями для второго уравнения системы (2).

К решению краевых задач для систем дифференциальных уравнений сводятся многие задачи теории упругости, например, исследование изгиба пластин, в том числе многослойных, и тонких оболочек приводит к системе вида (2). Чистый изгиб пластины в некоторых случаях описывает система:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x, y) = q(x, y), \\ \Delta^m q(x, y) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $q(x, y)$  определяется нагрузкой на пластину, а также ее физическими и геометрическими характеристиками. Граничные условия для решения системы (3) задаются в зависимости от способа закрепления контура пластины и степени определенности функции  $q(x, y)$ . В докладе рассматриваются случаи жесткой заделки и свободного опирания края пластины.

В качестве приложения в гидродинамике можно рассмотреть плоскую модель Стокса движения цилиндра в ограниченной вязкой жидкости. Задача сводится к нахождению бигармонической функции тока  $\psi$ , через которую выражаются скорости точек жидкости и все другие гидродинамические характеристики. Граничные условия получаются из условий прилипания: на контурах скорость жидкости совпадает со скоростью контуров. Далее от этих граничных условий можно перейти к граничным условиям для функции тока – на границах будут заданы сама функция  $\psi$  и ее нормальная производная (основная краевая задача для бигармонического уравнения). Численный метод решения такой постановки рассмотрен в работе [2]. Тестовые примеры, рассмотренные для задач о движении круглого цилиндра (точные решения задач получены, например, в работах [3,4]), подтверждают высокую точность предложенного алгоритма. Проведены расчеты для

цилиндров эллиптического и прямоугольного сечений.

### Литература

1. Казакова А.О., Терентьев А.Г. Численное решение краевых задач для полигармонического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012.– Т.52. – №1. – С. 2050-2059.
2. Терентьев А.Г., Казакова А.О. Численное решение плоской задачи теории упругости в многосвязной области // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2016.– №2(28). – С. 34-47.
3. Терентьев А.Г., Терентьев А.А. Движение цилиндра в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Известия НАНИ ЧР. – 2002.– №2. – С. 44-62.
4. Казакова А.О., Петров А.Г. О поле скоростей вязкой жидкости между двумя цилиндрами, вращающимися и движущимися поступательно // Изв. РАН. МЖГ. – 2016.– №3. – С. 16-25.

### Численный расчет течения вязкой жидкости между двумя движущимися цилиндрами

<sup>1</sup>А. О. Казакова, <sup>2</sup>А. Г. Петров

<sup>1</sup>Чувашский государственный университет

<sup>2</sup>ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН

<sup>1</sup>kazakova\_anastasia@bk.ru

<sup>2</sup>petrovipmech@gmail.ru

Построен алгоритм численного решения плоской задачи гидродинамики между двумя произвольно движущимися цилиндрами произвольного сечения. Предполагается малость числа Рейнольдса, и уравнения движения жидкости решаются в линейном приближении Стокса. Пусть жидкость заключена между двумя цилиндрическими телами с сечением произвольной формы: в плоскости  $z = x + iy$  контур  $\partial D_0$  находится внутри контура  $\partial D_1$ . Если жидкость несжимаема, то компоненты ее скорости выражаются через функцию тока, которая в приближении Стокса

удовлетворяет бигармоническому уравнению  $\Delta^2\Psi = 0$ , и, используя условия прилипания на границах, можно перейти к основной краевой задаче для этого уравнения в двусвязной плоской области.

Теорема Гурса: любая бигармоническая функция  $\Psi$  может быть представлена с помощью двух гармонических функций  $\varphi$  и  $\psi$ :  $\Psi = \varphi(x, y) + x \cdot \psi(x, y)$ . Граничные условия тогда примут вид:

$$\begin{aligned} \varphi|_{\partial D_k} + x_k(s)\psi|_{\partial D_k} &= g^{(k)}(s), \quad k = 0, 1, \\ (\partial\varphi/\partial n)|_{\partial D_k} + x_k(s)(\partial\psi/\partial n)|_{\partial D_k} + \psi|_{\partial D_k} dy_k/ds &= g_n^{(k)}(s). \end{aligned} \quad (1)$$

Каждая из гармонических функций  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяет граничным интегральным уравнениям вида:

$$\begin{aligned} A\varphi_n(s) + B\varphi(s) &= 2\pi\varphi(s) \quad (M \in \partial D_0), \\ A\varphi_n(s) + B\varphi(s) &= 0 \quad (M \in \partial D_1), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $A$  и  $B$  - линейные операторы:

$$\begin{aligned} A\varphi_n(s) &= - \int_{\partial D} G(s, s') \varphi_n(s') ds', \\ B\varphi(s) &= \int_{\partial D} G_n(s, s') (\varphi(s') - \varphi(s)) ds', \end{aligned}$$

$$G(s, s') = \ln(r(s, s')), \quad r^2(s, s') = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

Уравнения (1) и (2) представляют систему восьми уравнений с неизвестными  $\varphi^{(k)}$ ,  $\psi^{(k)}$ ,  $\varphi_n^{(k)}$ ,  $\psi_n^{(k)}$  ( $k = 0, 1$ ).

Для проведения численных расчетов используется модификация метода граничных элементов – схема без насыщения, подробно описанная в [1]. Вводится дискретизация контуров конечным числом точек  $M_i^{(0)}$  ( $i = \overline{1, N_0}$ ),  $M_i^{(1)}$  ( $i = \overline{1, N_1}$ ). Тогда система граничных уравнений (1), (2) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функций  $\varphi^{(k)}$ ,  $\psi^{(k)}$ ,  $\varphi_n^{(k)}$ ,  $\psi_n^{(k)}$  ( $k = 0, 1$ ) в точках  $M_i^{(k)}$ . К ней необходимо присоединить дискретизированные условия  $\int_{\partial D} (\partial\varphi/\partial n) ds = 0$ ,  $\int_{\partial D} (\partial\psi/\partial n) ds = 0$  для нахождения неопределенных констант интегрирования, входящих в правые части граничных условий (1). Решив полученную систему, определяем неизвестные граничные значения искомых функций, зная которые можно приближенно определить значение бигармонической функции тока  $\Psi$  в любой точке области  $D$ .

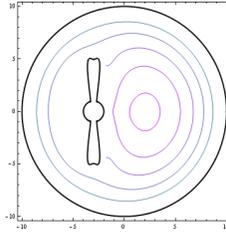


Рис. 1: Линии тока для модели миксера ( $N_0 = 120$ ,  $N_1 = 180$ ).

Вертикальное положение

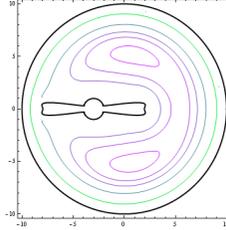


Рис. 2: Линии тока для модели миксера ( $N_0 = 120$ ,  $N_1 = 180$ ).

Горизонтальное положение

На тестовых примерах для случая круговых цилиндров (точное аналитическое решение получено в [2]) показана эффективность предложенного алгоритма. С его помощью проведены численные расчеты для модели миксера для различных форм лопатки при различных ее положениях. В частности, на рис. 1 и 2 представлены линии тока  $\Psi = const$  для вертикального и горизонтального положений лопатки сложной формы, вращающейся с угловой скоростью  $\omega = 1$ , параметры контуров показаны на рисунках.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 14-19-01633.

## Литература

1. *Petrov A.G.* Quadrature Formulas for Periodic Functions and Their Application to the Boundary Element Method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2008. – V.48. – No. 8. – pp. 1266-1283.
2. *Казакова А.О., Петров А.Г.* О поле скоростей вязкой жидкости между двумя цилиндрами, вращающимися и движущимися.

## Об ориентационной неустойчивости сдвиговых течений нематических жидких кристаллов

А. Г. Калугин

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*  
kalugin@mech.math.msu.su

Нематические жидкие кристаллы (нематики) – среды, обладающие дополнительным макроскопическим параметром – единичным вектором ориентации (директором)  $\vec{n}$ , описывающим среднее направление длинных осей молекул в частице среды. Используя этот параметр и свойства симметрии среды, можно ввести анизотропную свободную энергию – энергию упругости ориентации Франка, которая с точностью до тождественных преобразований в общем случае принимает вид

$$2F_V = K_1(\operatorname{div}\vec{n})^2 + K_2(\vec{n}, \operatorname{rot}\vec{n})^2 + K_3[|\vec{n}, \operatorname{rot}\vec{n}|]^2 + \\ + K_{24}(\nabla_i n_j \nabla^j n^i - (\nabla_k n^k)^2),$$

где  $K_i$  – постоянные Франка. Также нематики обладают анизотропным тензором вязких напряжений.

Для нематических жидких кристаллов характерна ориентационная неустойчивость, которая наблюдается, например, в динамических процессах. В частности, для сдвиговых потоков рядом авторов экспериментально обнаружено и теоретически исследовалось образование периодических структур поля директора. В представленной работе рассматривается задача об устойчивости сдвиговых течений слоя нематика в случае, когда на границе среды для директора применяется модель слабого сцепления. Для такой модели ориентация директора на границе находится из условия минимума поверхностной энергии. В докладе рассматривается случай, когда минимум достигается при параллельном стенкам директоре. При этом в энергии Франка необходимо учитывать слагаемое с коэффициентом  $K_{24}$  которое имеет дивергентную форму и поэтому не входит в уравнения движения среды и

эволюции вектора ориентации, но существенно влияет на граничные условия.

В докладе рассматриваются стационарные плоскопараллельные течения типа Куэтта и Пуазейля, когда вектор ориентации сонаправлен с вектором скорости потока. Показано, что учет дивергентного слагаемого позволяет обнаружить новый тип ориентационной неустойчивости потока, выражающейся в появлении периодических отклонений директора от невозмущенного с волновым вектором, лежащим перпендикулярно вектору скорости и параллельно границам слоя нематика. Определено, в каком диапазоне значений  $K_{24}$  объемная энергия Франка периодической конфигурации меньше, чем для однородной и, соответственно, решения с постоянным директором неустойчивы. Для линейризованной задачи о возмущениях выведена зависимость волнового числа таких периодических решений от толщины слоя и констант Франка. На основании полученных соотношений и имеющих в литературе экспериментальных данных определена величина  $K_{24}$  для некоторых типов нематических жидких кристаллов. Также на основе оценок характерного времени релаксации возмущений скорости и вектора ориентации дано теоретическое объяснение причин, осложняющих экспериментальное обнаружение таких эффектов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 15-01-00361.

## О периодических решениях в слое нематического жидкого кристалла

<sup>1</sup>А. Г. Калугин, <sup>2</sup>Д. В. Павлов

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

<sup>1</sup>kalugin@mech.math.msu.su

<sup>2</sup>pavlovdmv@mail.ru

В работе рассматривается модель нематического жидкого кристалла - сплошной среды, анизотропные свойства которой описываются единичным вектором (директором)  $\vec{n}$ . Наличие дополнительного макроскопического параметра среды приводит к появлению анизотропной части свободной энергии, квадратичное разложение которой по градиенту директора имеет вид

$$2F_V = K_1(\operatorname{div}\vec{n})^2 + K_2(\vec{n} \cdot \operatorname{rot}\vec{n})^2 + K_3|[\vec{n} \times \operatorname{rot}\vec{n}]|^2 + \\ + K_{24} (\nabla_i n_j \nabla^j n^i - (\nabla_k n^k)^2)$$

где  $K_i$  — постоянные коэффициенты Франка, причем слагаемое с коэффициентом  $K_{24}$  имеет дивергентную форму и не дает вклада, например, в уравнения равновесия внутри объема, но влияет на граничные условия.

Граничные условия определяются моделью слабого сцепления, когда ориентация директора на границе нематика находится из условия минимума поверхностной энергии, для которой рассмотрено приближение Рапини-Папулара

$$2F_S = 2\gamma + W(1 - (\vec{n}, \vec{m}))^2$$

где  $\gamma$ ,  $W$  — постоянные коэффициенты,  $\vec{m}$  — ось легкого ориентирования. При этом  $\vec{m}$  может вращаться по конусу с заданным углом между образующей и осью — вектором нормали к границе.

В докладе рассматривается задача о равновесии планарно (параллельно границам) ориентированного плоского слоя нематического жидкого кристалла. Показано, что учет дивергентных слагаемых в свободной энергии упругости ориентации Франка позволяет получить нетривиальные периодические решения задачи о малых возмущениях директора с волновым вектором, лежащим в плоскости слоя и перпендикулярным невозмущенной планарной ориентации директора.

При этом получена связь между параметрами среды, толщиной слоя  $H$  и волновым числом  $k$  возмущенного решения в виде

$$\pm(K_2 - K_1)HK_{24}^2k^2 + kK_{24}(4K_1K_2 - K_{24}(K_1 + K_2))sh(kH) + \\ + 2W(ch(kH) \pm 1)K_1K_2 = 0$$

Также проведен анализ этого соотношения. Для параметров типичного нематического жидкого кристалла МББА найден диапазон значений  $K_{24}$  при которых такие периодические решения существуют, исследована зависимость  $k$  от толщины слоя  $H$ . Кроме того, предложена новая интерпретация наблюдавшихся ранее экспериментально эффектов, на основании данных которых получена количественная оценка  $K_{24}$  для МББА.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 15-01-00361.

## Принцип неполной связанности в моделях гидроразрыва в верхних слоях коры

**А. В. Каракин**

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*

avkarakin@yandex.ru

Рассматривается класс неполно связанных плоских аналитических задач о медленных движениях равновесной трещины ГРП в пороупругой среде земной коры при наличии в ней разломов. Аналитическими методами исследуются вязкие движения жидкости в самой трещине и вызванные этими движениями деформации и фильтрация во внешней среде. Движения создаются закачкой жидкости в скважину. Течение в трещине описывается уравнениями гидродинамики Стокса в приближении смазочного слоя. Внешняя задача описывается уравнениями пороупругости. Жидкость может фильтроваться через стенки трещины. Этому исследованию посвящен цикл публикаций. Цель указанных работ состоит в том, чтобы понять суть геомеханических процессов, происходящих при гидроразрыве в пороупругих средах, а также быть тестом для численных моделей.

Областью определения однородных и изотропных уравнений пороупругости является плоскость с разрезами. Границы трещины являются проницаемыми. В клюве трещины задается условие Ирвина. Как внешняя, так и внутренняя задачи содержат малый параметр  $\varepsilon$ , который имеет смысл величины раскрытия трещины, а также упругой деформации  $\varepsilon = \theta^*$ . Здесь  $\theta$  обозначает объемную деформацию среды, звездочка – ее максимальное значение. На бесконечности возмущения затухают. Специфика пороупругих задач состоит в том, что около трещины возникает тонкий пограничный слой, в котором возникают интенсивные фильтрационные процессы.

Основной метод решения состоит в том, что производится расщепление решения на упругую и фильтрационную составляющие. Это расщепление удовлетворяет принципу неполной связанности,

т.е. решаются отдельные независимые задачи о течении в трещине, о пороупругих деформациях во внешней области и о фильтрации в тонком пограничном слое. Тем не менее, задача остается связанной. Исследуются частные случаи автомодельных задач, которые решаются аналитически. Отдельно рассматривается крестообразная трещина, которая имеет целью качественно исследовать слоисто-неоднородную трещиноватую структуру среды при наличии в ней разломов. Рассматриваются два крайних режима движения трещины ГРП – toughness-dominated и viscous-dominated режимы.

Режим toughness-dominated допускает наиболее полное исследование без ограничений на форму движения во времени. Режим viscous-dominated содержит больше степеней свободы. Поэтому для получения конечного решения для прямолинейной трещины следует ограничиться автомодельным режимом закачки. Крестообразная трещина также исследовалась в двух режимах – toughness-dominated и viscous-dominated. В обоих случаях использовался аппарат комплексных переменных и конформного преобразования аналитических функций. В первом случае решение было представлено в виде конечного аналитического выражения. Во втором случае решение получено в виде ряда.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 15-11-00021.

### Литература

1. Белоусов Т.П., Куртасов С.Ф., Мухамедиев Ш.А. Делимость земной коры и палеонапряжения в сейсмоактивных нефтегазоносных регионах Земли. М.: ОИФЗ РАН, 1997.
2. Каракин А.В. Принцип неполной связанности в моделях пороупругих сред // Математическое моделирование, 18:2 (2006), 24–42.
3. Каракин А.В., Рамазанов М.М., Борисов В.Е. Проблема неполной связанности уравнений гидроразрыва // Математическое моделирование, 29:6 (2017), 115–134.
4. Лаврентьев М.М., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
5. Рамазанов М.М., Каракин А.В., Борисов В.Е., Меньшов И.С., Савенков Е.Б. Автомодельное решение задачи о трещине ГРП для пороупругой среды // Математическое моделирование, 29:4 (2017), 59–74.

## Об автоколебательных режимах проникания свободных или затопленных струй через поверхность жидкости

<sup>1</sup>В. П. Карликов, <sup>2</sup>А. Т. Нечаев, <sup>3</sup>С. Л. Толоконников  
*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

<sup>1</sup>karlikovvp@mail.ru

<sup>2</sup>artm26@mail.ru

<sup>3</sup>tolsl@mail.ru

Представлен краткий обзор наиболее существенных результатов выполненных в Институте механики МГУ исследований нового класса нестационарных течений несжимаемой жидкости, возникающих при проникании затопленных или свободных турбулентных струй разной формы через поверхность покоящейся жидкости. Изучались проникание вертикальных затопленных или свободных плоских и осесимметричных водяных струй через поверхность воды, находящейся в относительно узких каналах, а также проникание через поверхность воды в сосуде прямоугольной формы свободных тонкостенных водяных струй, вытекающих из конического щелевого сопла с вертикальной осью.

Обнаружено существование широких диапазонов значений определяющих параметров, при которых в жидкости формируются неизвестные ранее автоколебательные режимы течений. Описаны разные механизмы возникновения таких режимов и характерные особенности найденных экспериментально и численно зависимостей периода автоколебаний от основных определяющих параметров. Указаны возможные приложения полученных результатов.

## Плоские задачи механики морского льда

<sup>1</sup>Е. Карулин, <sup>2</sup>М. Карулина, <sup>3</sup>А. Марченко, <sup>4</sup>А. Сахаров,  
<sup>5</sup>П. Чистяков

<sup>1,2</sup>*Крыловский государственный научный центр, Санкт-Петербург*

<sup>3</sup>*Университетский центр на Свальбарде, Лонгирбюен, Норвегия*

<sup>4,5</sup>*Московский государственный университет имени М.В.*

*Ломоносова*

<sup>1,2</sup>for.marina.m.k@gmail.com

<sup>3</sup>aleksey.marchenko@unis.no

<sup>4,5</sup>asakhmst@gmail.com

Для нахождения предельных нагрузок воздействия морского льда на шельфовые сооружения необходимо построение механических моделей его деформирования и разрушения на основе экспериментальных данных. Температура льда в естественных условиях близка к точке плавления, в связи с этим полная механическая модель деформирования и разрушения льда должна учитывать его вязко-упруго-пластические свойства и их зависимости от температуры и солености льда, а также от его структуры [1]. Эксперименты по определению предельных нагрузок, приводящих к разрушению образцов плавающего морского льда, регулярно проводятся на Шпицбергене с 2011 года. Оригинальная геометрическая конфигурация образцов и разработанное оборудование, позволяющее прикладывать нагрузку по всей толщине льда, дают возможность определить прочностные свойства льда на сжатие, растяжение, срез и изгиб, а также сопротивление льда при внедрении цилиндрического индентора [2–8]. Эксперименты проводились на льду толщиной от 30 до 80 см. Хотя геометрическая конфигурация испытываемых образцов льда двумерна, наличие вертикального градиента свойств льда влияет на характеристики его деформирования и разрушения. В частности, обнаружены масштабные эффекты уменьшения прочности льда на сжатие и растяжение по сравнению с лабораторными экспериментами и получены зависимости изгибной прочности от направления приложения нагрузки.

В ряде экспериментов на растяжение и сдвиг, где нагрузка прикладывалась в плоскости льда, разрушение носило двумерный характер и происходило с образованием вертикальных трещин, проходящих сквозь толщину пластины льда. Для интерпретации результатов этих экспериментов в данной работе теоретически исследуются две задачи предельного равновесия в условиях плоского напряженного состояния, в которых свойства льда по вертикали полагаются однородными. Лед моделируется изотропным материалом, а предельная поверхность в пространстве напряжений, задаваемая в виде объединения конуса и цилиндра, соосных гидростатической оси, зависит только от гидростатического давления  $p$ , температуры и солености  $s$  льда. На плоскости главных напряжений предельная кривая состоит из дуги эллипса, соответствующего критерию Мизеса при высоких давлениях  $p > p_c$ , и дуги параболы, соответствующей критерию разрушения при наличии сдвигов [9]. Эллипс определяется параметром, находящимся из эксперимента на двухосное сжатие. Парабола опре-

деляется двумя параметрами из экспериментов на одноосное растяжение и сжатие.

Первая задача о равновесии клина, равномерно нагруженного по боковой грани, решается в предположении осесимметрии. Для задачи предельного равновесия существуют две ветви решений. Первое решение приводит к равномерным полям напряжений и в случае острого клина к разрывному решению. В натуральных экспериментах [10] разрушение острых клиньев происходит в основном за счет развития трещины отрыва, поскольку велика доля изгибной составляющей в напряженном состоянии. Для клиньев с углами большими  $\pi/3$  можно ожидать реализации сценария, отвечающего представленному решению. В случае тупого клина построено непрерывное решение для напряжений, где области равномерного напряженного состояния, примыкающие к сторонам клина, сопрягаются с помощью второй ветви решений. Вторая задача о растяжении пластинки с круговыми боковыми вырезами относится к эллиптическому типу и допускает простое решение для напряжений в полярной системе координат.

### Литература

1. Sanderson T.J.O., 1988. Ice Mechanics – Risks to Offshore Structures. Graham and Trotman.
2. Chistyakov, P., Karulin, E., Marchenko, A., Sakharov, A., Lishman, B., 2016. The tensile strength of saline and freshwater ice in field tests. Proc. of the 23rd IAHR Symposium on Ice, Ann Arbor, Michigan, paper 4872921.
3. Karulin, E., Marchenko, A., Karulina, M., Chistyakov, P., Sakharov, A., Ervik, A., Sodhi, D., 2014. Field Indentation Tests of Vertical Semi-Cylinder on First-Year Ice. Proc. of the 22th IAHR Symposium on Ice, Singapore, paper 1125.
4. Karulina, M., Marchenko, A., Sakharov, A., Karulin, E., Chistyakov, P., 2016. Experimental Studies of Fracture Mechanics for Various Ice Types. Proc. of the 23rd IAHR Symposium on Ice, Ann Arbor, Michigan, paper 4869357.
5. Konstantinova, M., Marchenko, A., Karulina, M., Sakharov, A., Karulin, E., Chistyakov, P., 2016. In-situ investigations of ice deformations and loads in indentation tests. Proc. of the 23rd IAHR Symposium on Ice, Ann Arbor, Michigan, paper 4870465.

6. Marchenko, A., Karulin, E., Chistyakov, P., Sodhi, S., Karulina, M., Sakharov, A., 2014. Three dimensional fracture effects in tests with cantilever and fixed ends beams. Proc. of the 22th IAHR Symposium on Ice, Singapore, paper 1178.
7. Murdza, A., Marchenko, A., Chistyakov, P., Karulin, E., Sakharov, A., Karulina, M., 2016. Test with L-shaped cantilever beam for complex shear and bending strength. Proc. of the 23rd IAHR Symposium on Ice, Ann Arbor, Michigan, paper 4855605.
8. Sakharov, A., Karulin, E., Marchenko, A., Karulina, M., Sodhi, D., Chistyakov, P., 2015. Failure envelope of the brittle strength of ice in the fixed-ends beam test (two scenarios). POAC15-00230, Trondheim, Norway, 8 pp.
9. Schulson, E.M., Duval, P., 2009. Creep and Fracture of Ice. Cambridge University Press.
10. Karulina, M., Marchenko, A., Sakharov, A., Karulin, E., Chistyakov, P., 2016. A Study of Ice Oblique Drift Action onto the Structure Partially Sheltered by another Object. POAC17, Busan, Korea, v.185, p.1-10.

## Большие деформации материалов в условиях ползучести и пластического течения

<sup>1</sup>Л. В. Ковтанюк, <sup>2</sup>А. О. Лемза, <sup>3</sup>Г. Л. Панченко

<sup>1</sup>*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН*

<sup>1,2</sup>*Дальневосточный федеральный университет*

<sup>3</sup>*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН*

<sup>3</sup>*Владивостокский государственный университет экономики и сервиса*

<sup>1</sup>lk@iacp.dvo.ru

<sup>2</sup>alsu-24@yandex.ru

<sup>3</sup>panchenko.21@yandex.ru

Для ряда конструкционных материалов холодная формовка, основанная на медленном процессе ползучести, оказывается наиболее перспективной технологией получения крупногабаритных изделий [1]. Присутствующие в этом случае области пластического течения существенно изменяют поле напряжений, а значит, и основной процесс ползучести. При этом хотя бы необратимые

деформации нельзя положить малыми. Таким образом, адекватной процессу формовки оказывается модель больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами. Предлагаемая здесь модель последовательного накопления больших необратимых деформаций сначала в условиях ползучести, а затем и пластического течения основана на более ранних предложениях [2,3], где обратимые  $e_{ij}$  и необратимые  $p_{ij}$  составляющие полных деформаций Альманси  $d_{ij}$  определяются дифференциальными уравнениями изменения, а компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши  $\sigma_{ij}$  — аналогом формулы Мурнагана.

Диссипативный механизм деформирования, определяющий накопление необратимых деформаций, связан с пластическими и реологическими свойствами материалов. Далее считаем, что вязкие свойства среды проявляются на всех этапах процесса деформирования, необратимые деформации  $p_{ij}$  не разделяются на пластические и деформации ползучести, накапливаются в материале с начала процесса деформирования, а накопленные к моменту начала пластического течения необратимые деформации ползучести являются начальными значениями для их дальнейшего роста в области течения. Их различие связано с различием в механизмах их накопления. В областях, где напряжённое состояние ещё не достигло поверхности текучести или где пластическое течение происходило, но прекратилось, полагаем скорости необратимых деформаций  $\gamma_{ij}$  равными скоростям деформаций ползучести  $\varepsilon_{ij}^V$ . Соответствующий диссипативный механизм деформирования зададим, например, введя потенциал  $V(\sigma_{ij})$  в форме степенного закона ползучести Нортона:

$$V(\sigma_{ij}) = B\Sigma^n, \quad \Sigma = \max |\sigma_i - \sigma_j|, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^V = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_i$  — главные значения тензора напряжений,  $B$  и  $n$  — параметры ползучести.

Когда напряжённое состояние в материале достигает поверхности нагружения, диссипативный механизм деформирования меняется, появляется и развивается область пластического течения. В этой области  $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^P$ , связь скоростей пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}^P$  с напряжениями устанавливается ассоциированным законом пластического течения, а для учёта вязких свойств среды при пластическом течении используется обобщённое условие

пластичности Треска:

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \alpha_{ij}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0, \quad \lambda > 0, \quad \alpha_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\nu_0}, \quad (2)$$
$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\varepsilon_k^p - \alpha_k|, \quad \alpha_k = \varepsilon_k^{\nu_0},$$

где  $\varepsilon_k^p$  — главные значения тензора скоростей пластических деформаций,  $\varepsilon_{ij}^{\nu_0}$  — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения,  $\varepsilon_k^{\nu_0}$  — его главные значения,  $k$  и  $\eta$  — предел текучести и вязкость материала.

Предложенная модель иллюстрируется решением краевых задач о прямолинейном и вискозиметрическом деформировании с последующим пластическим течением.

### Литература

1. Олейников А. И., Пекарш А. И. Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей. — М. : Эком, 2009. — 109 с.
2. Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // ДАН. — 1996. — Т. 347. — №2. — С. 199–201.
3. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. — Владивосток : Дальнаука, 2013. — 312 с.

## Волновые течения, возникающие при подъеме бруса из мелкой воды

<sup>1</sup>О. А. Ковыркина, <sup>2</sup>В. В. Остапенко

<sup>1,2</sup>*Институт гидродинамики СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет*

<sup>1</sup>olyana@ngs.ru

<sup>2</sup>Ostapenko\_VV@ngs.ru

Подъем тела с поверхности жидкости и возникающее при этом течение представляют интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Физические явления, которые необходимо

учитывать при моделировании такого подъема, находятся в стадии предварительного анализа. Теоретические, экспериментальные и численные исследования подъема тел с поверхности глубокой жидкости без учета влияния дна проведены в [1–3]. Экспериментальное изучение подъема стеклянного круглого диска с поверхности воды, целью которого было объяснить процесс лапания кошачьими, выполнено в [1]. Для теоретического объяснения этих результатов в [3] предложена линеаризованная модель данного процесса, основанная на эвристическом предположении, что скорость движения границы области контакта жидкости пропорциональна местной скорости течения. В [4–6] в рамках первого приближения теории мелкой воды изучены волновые течения, возникающие при вертикальном подъеме прямоугольного бруса, частично погруженного в воду, заполняющую прямоугольный призматический канал с горизонтальным дном. На первом этапе, подробно исследованном в [4], нижняя поверхность бруса полностью находится под водой. Течение жидкости на втором этапе, когда нижняя поверхность бруса начинает выходить из воды, существенно зависит от знака функции  $G = R^2 - R'$ , где  $R = H'/H$ ,  $H = H(t)$  — заданный закон подъема бруса.

При  $G > 0$  брус препятствует свободному подъему жидкости за ним и граница смоченной части нижней поверхности бруса движется с докритической скоростью [5]. При  $G = 0$  брус не влияет на течение жидкости на втором этапе и граница его смоченной части движется вдоль характеристики системы уравнений мелкой воды [6]. В этих двух случаях отрыв жидкости от бруса происходит при глубине равной начальной глубине жидкости вне бруса. При  $G < 0$  брус ускоряет подъем жидкости, примыкающей к нему на втором этапе, и граница его смоченной части движется с критической скоростью, вдоль линии, огибающей уходящие с нее характеристики [6]. В этом случае отрыв жидкости от бруса может происходить при глубине существенно превосходящей начальную глубину жидкости вне бруса. Получены явные формулы для скорости течения жидкости в области, примыкающей к брусу, а также для скорости движения границы области контакта бруса и жидкости на втором этапе. Течение жидкости в области вне бруса находилось путем численных расчетов по разностной схеме КАБАРЕ второго порядка аппроксимации [7].

## Литература

1. Reis P. M., Jung S., Aristoff J. M., Stocker R. *How cats lap: water uptake by Felis catus*. Science. 2010. V. 330. P. 1231–1234.
2. Tassin, A., Piro, D. J., Korobkin, A. A., Maki, K. J., Cooker, M. J. *Two-dimensional water entry and exit of a body whose shape varies in time*. J. Fluids and Structures. 2013. V. 40, P. 317–336.
3. Korobkin A. A. *A linearized model of water exit*. J. Fluid Mech. 2013. V. 737. P. 368–386.
4. Кузнецова В. В., Остапенко В. В. *Волновые течения, возникающие при вертикальном подвеме из мелкой воды прямоугольного бруса*. ПМТФ. 2015. Т. 56. № 5. С. 102–110.
5. Кузнецова В. В., Остапенко В. В. *Волновые течения, возникающие при подвеме прямоугольного бруса, частично погруженного в мелкую воду*. ДАН. 2016. Т. 467. № 2. С. 163–167.
6. Ostapenko V. V., Kovyrkina O. A. *Wave flows induced by lifting of a rectangular beam partly immersed into shallow water*. J. Fluid Mech. 2017. V. 816. P. 442–467.
7. Головизнин В. М., Зайцев М. А., Карабасов С. А., Короткин И. А. *Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов*. М.: Изд. МГУ, 2013.

## Подобие теплообмена в струях ВЧ-плазмотрона и в гиперзвуковых потоках молекулярных газов

<sup>1</sup>А. Ф. Колесников, <sup>2</sup>В. И. Сахаров

<sup>1</sup>ИПМ имени А.Ю. Ишлинского РАН

<sup>2</sup>НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова

<sup>1</sup>koles@ipmnet.ru

<sup>2</sup>vl.sakharov@mail.ru

ВЧ-плазмотрон ВГУ-4 (ИПМех РАН) мощностью 100 кВт — многофункциональная установка для исследований теплофизики

высокоэнтальпийных течений газов, теплообмена и термохимического взаимодействия потоков диссоциированных газов с поверхностью [1]. Установка может работать на воздухе, азоте, кислороде, углекислом газе и аргоне в режимах до- и сверхзвукового истечения плазмы из разрядного канала. Использование чистых плазменных струй индукционных плазмотронов позволяет наиболее полно моделировать термохимическое взаимодействие диссоциированного пограничного слоя с поверхностью материалов тепловой защиты в окрестности носового затупления спускаемых аппаратов. Теплообмен с поверхностью в сверхзвуковых струях индукционного плазмотрона изучался экспериментально и численно в ряде работ. В результате получены согласующиеся экспериментальные и расчетные данные по тепловым потокам и давлению в точке торможения на цилиндрической модели с плоским носком в первой сверхзвуковой зоне недорасширенных струй диссоциированных газов [2-4].

При анализе экспериментальных и расчетных данных по теплообмену возникает вопрос, какие параметры входа затупленного тела в атмосферу Земли или Марса соответствуют условиям теплообмена в точке торможения цилиндрической водоохлаждаемой модели с плоским торцом, находящейся на некотором расстоянии от среза звукового сопла при обтекании ее недорасширенной струей диссоциированного газа. Ответ на него может быть получен из условий локального моделирования теплообмена в критической точке, сформулированных впервые в [5] на основе теории ламинарного диссоциированного пограничного слоя. Эти условия представляют собой равенства полных энтальпий, давлений торможения и градиентов скорости на внешних границах пограничных слоев на обтекаемом затупленном теле и модели. Из них по параметрам сверхзвукового обтекания молекулярными газами цилиндрических моделей с плоским торцом радиуса  $R_m$ , расположенных на расстоянии  $Z_m$  от среза разрядного канала в плазмотроне, можно определить параметры обтекания сфер соответствующего радиуса  $R_{w0}$  гиперзвуковыми равномерными потоками в атмосферах Земли или Марса. При этом тепловые потоки в точках торможения цилиндрических моделей в струях плазмотрона могут быть пересчитаны в тепловые потоки к сферам при соответствующих параметрах обтекания гиперзвуковыми потоками.

Численное моделирование течений в разрядном канале плазмотрона с индукционным нагревом газов и в истекающих недо-

расширенных струях диссоциированных и частично ионизованных молекулярных газов проводилось для ряда режимов работы установки ВГУ-4. Применялась технология, основанная на комплексе программ численного интегрирования уравнений Навье-Стокса [6] и специальных программ-генераторов, взаимодействующих с базами данных по термодинамическим и переносным свойствам индивидуальных газовых веществ.

Установлено, что нормированные зависимости тепловых потоков в точках торможения на модели и сфере от эффективного коэффициента каталитической рекомбинации атомов для условий экспериментов на ВЧ-плазматроне и соответствующих условий входа сферы в атмосферы планет, связанных условиями локального моделирования теплообмена, подобны. Это ведет к формуле для экстраполяции тепловых потоков к модели в плазматроне на условия гиперзвукового обтекания сферы при ее полете в атмосферах Земли или Марса.

Данная работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-01-00054.

## Литература

1. Гордеев А.Н., Колесников А.Ф. Высокочастотные индукционные плазматроны серии ВГУ. Сб. Актуальные проблемы механики: Физико-химическая механика жидкостей и газов. Москва, Наука, 2010, с. 151-177.
2. Афолина Н.Е., Васильевский С.А., Громов В.Г., Колесников А.Ф., Першин И.С., Сахаров В.И., Якушин М.И. Течение и теплообмен в недорасширенных струях воздуха, истекающих из звукового сопла плазматрона // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 156-168.
3. Сахаров В.И. Численное моделирование термически и химически неравновесных течений и теплообмена в недорасширенных струях индукционного плазматрона // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 6. С. 157-168.
4. Гордеев А.Н., Колесников А.Ф., Сахаров В.И. Течение и теплообмен в недорасширенных струях индукционного плазматрона // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 4. С. 130 – 142.
5. Колесников А.Ф. Условия моделирования в дозвуковых течениях теплопередачи от высокоэнтальпийного потока к

критической точке затупленного тела // Изв. РАН, МЖГ. 1993. № 1. С. 172-180.

6. Afonina N.E., Gromov V.G., Sakharov V. I. HIGHTEMP technique of high temperature gas flows numerical simulations // Proc. 5th Europ. Symp. on Aerothermodyn. Spase Vehicles. Cologne, Germany, 2004. SP 563. Noordwijk: ESTEC, 2004. P. 323-328.

## **Влияние перпендикулярного электрического поля на распад тонкого слоя диэлектрической жидкости, движущегося в газе**

**В. М. Коровин**

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*  
korovale@yandex.ru

Моделирование распада струй топлива в воздушных потоках, возникающего под действием аэродинамических сил, в настоящее время [1] проводят в рамках линейной теории устойчивости. Впервые задача о неустойчивости тонкого слоя невязкой жидкости с параллельными границами, движущегося с постоянной скоростью в покоящемся газе, была рассмотрена в [2]. В [3] на базе уравнений и граничных условий гидромеханики и электростатики исследовано влияние однородного продольного электрического поля на развитие неустойчивости тонкого плоского слоя диэлектрической жидкости, движущегося в потоке газа. Неравные по величине скорости жидкости и газа параллельны полю. Установлено, что поляризационные силы, локализованные на границах слоя, оказывают стабилизирующее воздействие. В работе изучен эффект, вызываемый поляризационными силами в случае однородного внешнего электрического поля перпендикулярного границам слоя. Вдали от жидкости газ покоится. Как и в [2,3] силой тяжести пренебрегается. Исследовано влияние определяющих параметров на скорость роста амплитуд волн, гребни которых перпендикулярны направлению движения слоя. Вычислена длина  $\lambda_m$  наиболее быстро растущей волны. По порядку величины длина  $\lambda_m$  представляет характерный размер фрагментов, образующихся при первичном, по терминологии [1], распаде

слоя с параллельными границами. Показано, что в случае жидкостей с достаточно большой диэлектрической проницаемостью воздействие перпендикулярного электрического поля умеренной напряженности приводит к существенному уменьшению  $\lambda_m$ . Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00037).

### Литература

1. Погребная Т.В., Свириденков А.А., Третьяков В.В. Моделирование распыливания жидкости воздушным потоком. Модели и методы аэродинамики. Материалы Пятнадцатой Международной школы-семинара. МЦНМО. Москва. 2015. С. 121-122.
2. Squire H.B. Investigation of the instability of a moving liquid film. Br. J. Appl. Phys. 1953. Vol. 4. P. 167-169.
3. El-Sayed M.F. Electro-aerodynamic instability of a thin dielectric liquid sheet sprayed with an air stream. Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. No. 6. P. 7588-7591.

## Самоподдерживающиеся ударные волны в областях фотодиссоциации

<sup>1</sup>К. В. Краснобаев, <sup>2</sup>Р. Р. Тагирова

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

<sup>2</sup>Институт космических исследований РАН

<sup>1</sup>kvk-kras@list.ru

<sup>2</sup>rtaghirova@gmail.com

В средах с объемными источниками тепла может происходить самопроизвольное возникновение и нарастание амплитуды ударных волн [1–5]. Примером таких сред в космических условиях служат области фотодиссоциации в облаках молекулярного межзвездного водорода, где наблюдаются процессы активного звездообразования. Тепловой баланс в облаках поддерживается за счет поглощения излучения молодых звезд и высвечивания в линиях примесных атомов и ионов. Критерий роста малых возмущений

в области фотодиссоциации следует из общей теории тепловой неустойчивости и имеет вид

$$Q_T|_{p_0} = \left( Q_T - \frac{\rho Q_\rho}{T} \right)_{\rho_0, T_0} > 0 - \text{энтропийная мода} \quad (1)$$

$$Q_T|_{S_0} = \left( Q_T + \frac{\rho Q_\rho}{(\gamma - 1)T} \right)_{\rho_0, T_0} > 0 - \text{изоэнтропическая мода} \quad (2)$$

где  $\rho, T, Q(\rho, T)$  - соответственно плотность, температура и мощность притока тепла к единице массы среды,  $Q(\rho_0, T_0) = 0$ ;  $p$  - давление,  $S$  - энтропия. Физически согласно критерию (1) при сжатии газа его давление убывает с ростом плотности, а при выполнении критерия (2) к единице массы газа в фазе сжатия подводится тепло. Для выполнения неравенства (2) и, следовательно, для образования и усиления ударных волн необходимо, чтобы темп нагрева возрастал с ростом  $\rho$  и  $T$ , в то время как темп охлаждения слабо зависел бы от этих параметров. Применительно к тем частям областей фотодиссоциации, где степень диссоциации невелика, в [6] было найдено, что неравенство (2) удовлетворяется. Оно справедливо и для той зоны области фотодиссоциации, где преобладает атомарный водород [4]. Однако в ранее проводившихся расчетах рассматривался лишь небольшой диапазон изменения концентрации атомов водорода  $n \approx 10^3 \text{ см}^{-3}$  и интенсивностей ультрафиолетового излучения  $G_0 \approx 10^2$  (в единицах Хабинга). Поэтому авторами настоящей работы реализована новая модель атомарной области фотодиссоциации [5], учитывающая изменения на несколько порядков интенсивности излучения, концентрации и температуры газа, а также вариации оптической толщины зоны. Согласно модели, нагрев обусловлен фотоэлектрической эмиссией электронов с поверхности пылинок, а охлаждение газа происходит путем возбуждения и последующего высвечивания уровней атомов кислорода и ионов углерода. В рамках сформулированной модели получены следующие результаты: исследована зависимость  $Q(\rho, T) = 0$  и определены области неустойчивости акустических волн; установлено, что в интервале  $4.5 \times 10^4 < n < 10^6 \text{ см}^{-3}$ ,  $10^3 < G_0 < 10^6$  преобладает охлаждение в линиях кислорода и возможно распространение самоподдерживающихся ударных волн (автоволн), амплитуда которых в режиме насыщения практически не зависит от величины и масштаба начальных возмущений; столкновения автоволн не приводят к

изменению их структуры. Определены инкременты нарастания автоволн для ряда наблюдаемых областей фотодиссоциации. Показано, что присутствием автоволн можно объяснить сетчатую (ячеистую) структуру среды на периферии области *HII RCW 120* и коротковолновые (порядка толщины ударного фронта) вариации скорости в туманности Ориона.

### Литература

1. И. А. Кириллов, В. Д. Русанов, А. А. Фридман. Хим. физика 4, 132 (1985).
2. К. В. Краснобаев, В. Ю. Тарев. Астрон. журн. 64, 1210 (1987).
3. К. В. Краснобаев, Н. Е. Сысоев, В. Ю. Тарев. Ядерная физика, физика космических излучений, астрономия (М.: Изд-во МГУ, 1994,), с. 222.
4. N. E. Molevich et al. *Astrophys. Space Sci.* 334, 35 (2011).
5. K. V. Krasnobayev and R. R. Tagirova. *MNRAS* 469, 1403 (2017).
6. Oprenheimer. *ApJ*, 211, 400 (1977).

### Фронты затвердевания, задача о поршне

**А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова**

*Математический институт им. В.А.Стеклова РАН*

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

`kulik@mi.ras.ru`

В работе рассматриваются фронты затвердевания, при прохождении через которые среда, не выдерживающая касательных напряжений, (например, состоящая из невзаимодействующих частиц или идеальная жидкость) превращается в анизотропную упругую среду. Строится решение автомодельной задачи о плоских волнах при наличии фронта затвердевания. На поверхности фронта затвердевания, кроме основных условий, следующих из интегральных законов типа законов сохранения, граничные условия содержат также дополнительные соотношения.

Ранее при весьма общих предположениях относительно уравнений, используемых при описании структуры разрыва, было показано, что требование существования решения для структуры приводит именно к такому числу дополнительных условий [1].

Если число величин, характеризующих состояние за разрывом, более чем на единицу превосходит число основных условий на разрыве, то в определенных диапазонах изменения скорости разрыва могут возникать многопараметрические разрывы, то есть такие, состояние за которыми при заданном состоянии перед ними характеризуется более чем одним свободным параметром [2]. Иначе говоря, в этом случае в фазовом пространстве параметров состояния размерность ударной адиабаты с учетом дополнительных соотношений превосходит единицу.

В предлагаемой работе особенности разрывов с несколькими дополнительными соотношениями, а также поведение решений, содержащих такие разрывы, демонстрируются на примере фронтов затвердевания [2-4] путем исследования автомодельной задачи "о поршне".

В рассматриваемом случае считается, что за фронтом затвердевания образуется нелинейно упругая несжимаемая анизотропная среда, в которой нелинейность и анизотропия принимаются малыми. Исследование структуры фронтов затвердевания проводится на базе уравнений модели вязкоупругой среды Кельвина-Фойхта отдельно для сред с разными типами нелинейности [3,4].

Используются лагранжевы декартовы переменные, в которых ось  $x$  ортогональна фронту. Искомыми величинами являются компоненты деформации сдвига  $u_i(x, t) = \partial w_i / \partial x$ ,  $i = 1, 2$ . Здесь  $t$  – время,  $w_i$  – компоненты смещение частиц среды в плоскостях  $x = \text{const}$ . Скорость фронта затвердевания  $W$  может принимать произвольные значения и рассматривается как произвольный параметр.

Проводится исследование структуры фронтов затвердевания, в результате чего находятся дополнительные соотношения на фронте. С их учетом в пространстве  $W, u_1, u_2$  построено множество состояний за фронтом затвердевания – ударная адиабата для сред с разными типами нелинейности [2-4].

Ударная адиабата содержит части трех, двух и одного измерений в зависимости от соотношений между  $W$  и скоростями медленных ( $c_1$ ) и быстрых ( $c_2$ ) малых возмущений непосредственно

за фронтом

$$1)W < c(u_1, u_2), \quad 2)c_1(u_1, u_2) < W < c_2(u_1, u_2), \quad 3)W > c_2(u_1, u_2)$$

В случае 1) фронт затвердевания медленный, дополнительных соотношений нет, в случае 2) – быстрый, одно дополнительное соотношение, в случае 3) – сверхбыстрый, два дополнительных соотношения.

Решение задачи о поршне однозначно строится по значениям  $u_1 = u_1^*$  и  $u_2 = u_2^*$ , задающим граничные условия на поршне и состоит из фронта затвердевания и следующих за ним нелинейных упругих волн.

### Литература

1. Куликовский А.Г. О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с разными свойствами. Волны рекомбинации. // ПММ. 1968. Т.32. Вып.6. С. 1125–1131.
2. Куликовский А.Г. О многопараметрических фронтах сильных разрывов в механике сплошных сред // ПММ. 2011. Т.75. Вып.4. С. 531–550.
3. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Образование анизотропной упругой среды на фронте уплотнения потока частиц // ПММ. 2015. Т.79. Вып.6. С. 739–755.
4. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Фронты образования нелинейной упругой среды из среды дез касательных напряжений // Вестн.Моск. ун-та. Серия 1, математика, механика. 2017. № 3. С. 48–54.

### Численное моделирование детонации в изогнутом канале круглого сечения

**В. А. Левин, И. С. Мануйлович, В. В. Марков**

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

*Центральный аэрогидродинамический институт имени Н.Е.*

*Жуковского (ЦАГИ)*

*Математический институт имени В.А. Стеклова РАН*

*ivan.manuylovich@gmail.com*

Рассмотрена задача об инициировании детонации в сверхзвуковом потоке стехиометрической пропановоздушной смеси в трёхмерном канале круглого сечения постоянной ширины с изгибом. В зоне изгиба стенка канала имеет форму тора. Длина торообразной секции определяется заданным углом поворота канала. Исследование проводится в рамках одностадийной кинетики горения численным методом, основанным на схеме С.К. Годунова, в оригинальном программном комплексе, разработанном для проведения многопараметрических расчётов и визуализации течений. Инициирование детонации происходит в результате формирования в канале ударно-волновых конфигураций, связанных с поворотом потока. Получены нестационарные картины течения и исследована их зависимость от параметров задачи – скорости набегающего потока, угла поворота канала, его ширины и радиусов кривизны стенок. Получены диапазоны определяющих параметров, соответствующие различным режимам течения. Получен режим течения без детонации, режим с детонационной волной, выходящей из канала через входное сечение, и режим со стационарной детонацией. Проведено сравнение с результатами, полученными в аналогичной плоской задаче о детонации в канале с изгибом. Расчёты проведены на суперкомпьютере МГУ «Ломоносов» при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ (договор № 14.G39.31.0001 от 13.02.2017 г.).

## Собственный вихрь 2D области, расширенная задача Стокса

<sup>1</sup>В. Г. Лежнев, <sup>1</sup>А. Н. Марковский

*Кубанский государственный университет*

<sup>1</sup>lzhnv@mail.ru

<sup>2</sup>mark@kubsu.ru

1. Рассмотрим вихрь  $\bar{u}(x)$ , функция тока которого  $\psi(x)$  есть решение краевой задачи, где  $q^*(x)$  – плотность потенциала Робена:

$$\Delta^2 \psi(x)|_Q = 0, \quad \psi(x)|_S = 0, \quad \frac{\partial \psi(x)}{\partial n} \Big|_S = q^*(x).$$

Обозначим  $g^* = \Delta\psi$ . В области  $Q$  функция

$$\psi^*(x) = \iint_Q g^*(y)E(x-y)dy, \quad x \in Q,$$

как функция тока, определяет присоединенный вихрь течения Робена во внешней к  $Q$  области;  $E(x)$  – фундаментальное решение уравнения Лапласа. Этот вихрь с плотностью вихрей  $g^*$  будем называть *собственным вихрем области  $Q$* .

Пространство  $L_2(Q)$  раскладывается в прямую сумму [1]:

$$L_2(Q) = N(Q) \oplus G(Q) = N(Q) \oplus \{g^*\} \oplus G^*(Q),$$

где  $G(Q)$  – подпространство гармонических функций.

2. При формулировке краевых задач гидродинамики не всегда может быть указана скорость искомого течения на границе, как, например, в задаче Стокса, где искомая плотность вихрей определяется в подпространстве гармонических функций. Но единственное решение может быть получено в естественном классе регулярных минимальных вихрей только по граничным значениям функции тока таким, которые исключают присутствие собственного вихря.

Рассмотрим расширенную постановку задачи определения векторного поля  $\bar{u}(x)$  в ограниченной области  $Q$  по граничным значениям его функции тока  $\psi$ , а также алгоритм ее решения.

*Задача U.* Найти в ограниченной области векторное поле скоростей  $\bar{u}(x)$  несжимаемой жидкости с минимальной плотностью вихрей в  $Q$ , если заданы на границе  $S$  значения функции тока,  $\psi(x)|_S = f(x)$ .

Решение определяется логарифмическим потенциалом  $\psi(x)$ , искомая плотность потенциала  $g$  принадлежит подпространству гармонических функций  $G^*(Q)$ .

3. Подпространство гармонических функций  $G(Q)$ , оснащенное полной системой потенциалов, представляет собой достаточно эффективный инструмент решения различных 2D и 3D задач гидродинамики [2]. Кроме этого построены сходящиеся проекционные алгоритмы метода базисных потенциалов, использующего также полные системы потенциалов в  $L_2(S)$  [3].

Расширенную постановку предполагается применить для анализа задач гидродинамической и газовой смазки, задач вихревого обтекания профиля и др.

## Литература

1. Новиков П.С. Об единственности решения обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР, 18:3 (1938), 165–168.
2. Лежнев В.Г., Марковский А.Н. Метод базисных потенциалов для неоднородного бигармонического уравнения // Вестник Самарского госуниверситета – Естественно научная серия, №8/1(67), 2008, С.127-139.
3. Лежнев В.Г. Системы потенциалов, полные на границе области // Тр. Конф. Математическая физика. Владимир-90, МИАН, 2013.

## Автомодельные решения в задаче о безнапорной фильтрации в высокопористой среде

**Н. Е. Леонтьев**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*  
leontiev\_n@mail.ru

В докладе изучается течение тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью внутри высокопористой среды над горизонтальным непроницаемым основанием. Такие задачи могут возникать в некоторых практических приложениях, например при пропитке пористых сред при производстве композиционных материалов.

Течение предполагается медленным, так что можно пренебречь инерционными эффектами и для описания фильтрации использовать уравнение Бринкмана. На нижней границе слоя ставится условие проскальзывания Навье [Леонтьев Н. Е. Изв. РАН. МЖГ, 2014, № 2]. В качестве эвристической гипотезы на свободной поверхности ставятся (1) условие непрерывности давления (поверхность предполагается полой, влиянием поверхностного натяжения пренебрегается) и (2) условие для тензора скоростей деформаций, вычисленного по скорости фильтрации, которое формально аналогично условию отсутствия касательных

напряжений на свободной поверхности в свободной вязкой жидкости. В принципе возможны обобщения рассматриваемых условий, моделирующие влияние капиллярной каймы на свободной поверхности с помощью касательных напряжений, приложенных к верхней границе слоя (известно качественно аналогичное демпфирующее влияние пены на поверхности жидкости).

При этих предположениях выведено уравнение для толщины слоя жидкости, которое оказывается частным случаем нелинейного уравнения теплопроводности, а также получено условие на слабых разрывах. При стремлении толщины слоя к нулю в случае прилипания на дне уравнение асимптотически переходит в известное уравнение течения тонкой пленки вязкой жидкости [Leal L. G. *Advanced transport phenomena. Fluid mechanics and convective transport processes*, 2007], а с ростом толщины слоя уравнение асимптотически переходит в уравнение Буссинеска для полой безнапорной фильтрации в рамках закона Дарси [Полубаринова-Кочина П. Я. *Теория движения грунтовых вод*, 1977].

На примере плоских течений строятся автомоделные решения, описывающие течение от источника. По-видимому, впервые на существование решений такого вида (в случае уравнения теплопроводности с нестепенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры) обратил внимание Н. А. Дмитриев [Зельдович Я. Б., Компанец А. С. *Сборник, посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе*, 1950], впоследствии аналогичные автомоделные решения для нелинейных параболических уравнений рассматривались многими авторами.

Находятся асимптотические разложения решений в окрестности передней границы растекающейся жидкости (точки касания свободной поверхности и подстилающей поверхности). В случаях прилипания и проскальзывания показатели степени в разложениях толщины пленки как функции от расстояния до передней границы растекающейся жидкости (в рамках принятой модели) оказываются различными (соответственно  $1/3$  и  $1/2$ ), что можно использовать как диагностический признак при анализе экспериментальных данных.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 15-01-00361, 17-01-00037).

## Леонид Иванович Седов. Годы работы в ЦАГИ. 1930-1947 гг.

**И. И. Липатов, С. Л. Чернышев**

*Центральный Аэрогидродинамический Институт, Жуковский*  
csl@tsagi.ru

Представлены материалы, иллюстрирующие деятельность Л.И. Седова в Центральном Аэрогидродинамическом институте. С самого начала своей работы в ЦАГИ он был участником знаменитых теоретических семинаров, проводившихся под руководством С.А. Чаплыгина.

Во время работы в институте Л.И. Седовым разработана математическая теория глиссирования на поверхности тяжёлой жидкости. Было дано решение задач об ударе тел о воду и глиссировании. Выведены формулы аэродинамических сил и моментов для деформируемых крыльев, получены формулы аэродинамических сил при неустановившемся движении крыльев, в частности, при их вибрациях. Л.И. Седов обобщил теорему Жуковского на случай произвольных движений крыла, построил новый математический метод решения задач об обтекании профилей крыльев и применил этот метод в теории тонкого крыла, а затем в теории волн, теории упругости, теории фильтрации. Им было получено решение задачи о восстановлении аналитической функции в области ее регулярности по заданию на одних участках границы этой области действительной, а на других – мнимой частей аналитической функции.

В докладе также представлены результаты современных исследований, проводящихся в ЦАГИ, продолжающих и использующих результаты Л.И. Седова.

### **Новые вычислительные технологии для моделирования газовой детонации**

<sup>1</sup>А. И. Лопато, <sup>2</sup>П. С. Уткин

*Институт автоматизации проектирования РАН, МФТИ*

<sup>1</sup>lopato2008@mail.ru

<sup>2</sup>pavel\_utk@mail.ru

Первые результаты численного моделирования распространения одномерной пульсирующей волны газовой детонации, а также многомерной ячеистой структуры детонации, относятся к 1960-ым (У. Фикетт) и 1970-ым годам (В.В. Марков, Т. Фудживара) соответственно. С тех пор с развитием численных методов решений задач газовой динамики, совершенствованием кинетических схем и ростом доступных вычислительных мощностей происходило постоянное уточнение качественных (например, получение трехмерного спинового режима распространения, тонкой структуры ячеистой детонации) и количественных (например, детонационные пределы) характеристик процесса. Текущее понимание механизмов распространения детонационной волны (ДВ) во многом находится в зависимости от максимальной достигнутой на данный момент производительности вычислительной техники. В то же время, развитие вычислительных мощностей и, как следствие, возможности проводить расчеты со все более и более детальным пространственно-временным разрешением выявили ряд необычных эффектов при моделировании детонации, полного объяснения которым нет до сих пор. К их числу относится возможное затухание детонации для параметров кинетики, близких к углеводородным топливам, в двумерных расчетах длительного распространения ДВ в плоском канале [1]. Таким образом, несмотря на, казалось бы, почти сорокалетнюю историю расчетных работ в области детонации, остается еще ряд фундаментальных вопросов математического моделирования ДВ.

В работе представлены две оригинальные вычислительные технологии для исследования течений с волнами детонации. Разработан вычислительный алгоритм второго порядка аппроксимации для исследования одномерной пульсирующей ДВ в системе координат, связанной с лидирующим скачком [2]. Для случая устойчивой, слабо неустойчивой, нерегулярной и сильно неустойчивой детонации проведено качественное и количественное сопоставление результатов расчетов с использованием разработанной методики и при моделировании привычным способом в лабораторной системе координат. Получены оценки занижения давления за фронтом лидирующей волны в расчетах в лабораторной системе координат за счет численного размазывания лидирующего скачка.

Исследована возможность моделирования двумерных течений с волнами детонации на полностью неструктурированных

расчетных сетках с треугольными ячейками. Построен робастный конечно-объемный алгоритм второго порядка аппроксимации. Проведено моделирование ячеистой структуры ДВ в плоском канале для случая устойчивой детонации при варьировании сеточного разрешения и порядка аппроксимации алгоритма [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16-31-00408 и № 15-31-70004).

### Литература

1. *Semenov I.V., Utkin P.S., Akhmedyanov I.* Mathematical modeling of detonation initiation via flow cumulation effects // Progress in Propulsion Physics. 2016. 8. 389-406.
2. *Лопато А.И., Уткин П.С.* Детальное математическое моделирование пульсирующей детонационной волны в системе координат, связанной с лидирующим скачком // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. 56, № 5. 856-868.
3. *Лопато А.И., Уткин П.С.* Особенности математического моделирования течений с волнами детонации на неструктурированных расчетных сетках // Вычислительные методы и программирование. 2017. 18, № 4 (в печати).

## О численной модели движения газа через слой капсулированного материала с фазовым переходом

<sup>1</sup>Н. А. Луценко, <sup>2</sup>С. С. Фецов

<sup>1,2</sup> *Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН*

<sup>1,2</sup> *Дальневосточный федеральный университет*

<sup>1</sup>[nickl@inbox.ru](mailto:nickl@inbox.ru)

<sup>2</sup>[fetc95@mail.ru](mailto:fetc95@mail.ru)

Одним из путей повышения надежности, стабильности и эффективности энергетических систем является использование хранилищ энергии, которые позволяют накапливать излишки энергии и отдавать их при пиковом энергопотреблении. Особенно необходимыми такие устройства становятся при использовании

нетрадиционной энергетики (солнечной, ветряной), которая отличается сильно неравномерным производством энергии. Одним из видов аккумулирующих энергию устройств являются накопители энергии сжатого воздуха (Compressed Air Energy Storage, CAES). Эта технология характеризуется высокой надежностью и экономичностью, низким воздействием на окружающую среду, при этом допускает создание как малых, так и крупномасштабных хранилищ высокой энергоемкости [1]. Перспективным развитием уже существующих CAES являются накопители энергии сжатого воздуха адиабатического типа (Advanced Adiabatic Compressed Air Energy Storage, AA-CAES), в которых процессы сжатия и расширения газа происходят адиабатически, то есть тепло сжатого воздуха не теряется и остается в процессе использования при выработке электроэнергии. Адиабатичность AA-CAES может быть достигнута за счет использования в них накопителей тепловой энергии (Thermal Energy Storage, TES) на основе капсулированного теплоаккумулирующего материала с фазовым переходом (Phase Change Materials, PCM).

В случае относительно малого размера капсул с PCM, TES могут быть представлены как насыщенные газом пористые среды и моделироваться с использованием методов механики сплошных гетерогенных сред [2]. В задачах такого типа невозможно поставить классическую задачу Стефана из-за отсутствия четко выделенной границы фазового перехода, следовательно, невозможно использовать широкий класс известных численных методов для решения задач плавления/кристаллизации [3]. Поэтому в настоящей работе на основе предложенных в [4] модели и численного метода для расчета течений газа через пористые саморазогревающиеся объекты разработана численная модель для описания нестационарных течений газового теплоносителя через слой капсулированного PCM. Фазовый переход учитывается в уравнении энергии твердой среды в виде слагаемого с неизвестной функцией  $f$ , которая равна степени фазового превращения в рассматриваемой точке среды. Предлагаемая модель может описывать процессы, когда фазовые превращения происходят не мгновенно, то есть не требует наличия четкой границы фазовых переходов, как в классической задаче Стефана. Разработанный алгоритм не требует выделения зоны фазового перехода во время вычислений, автоматически рассчитывая ее в процессе сквозного счета.

Проведено сравнение проведенных расчетов течения газа че-

рез слой капсулированного РСМ с экспериментальными данными [5,6], показано хорошее совпадение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00103-а), ДВО РАН (проект 15-I-4-021).

### Литература

1. Venkataramani G., Parankustan P., Ramalingam V., Wang J. *A review on compressed air energy storage – a pathway for smart grid and polygeneration*. Renewable and Sustainable energy reviews. 2016. Vol. 62. Pp. 895-907.
2. Нигматулин Р. И. *Основы механики гетерогенных сред*. М.: Наука, 1978. 336 с.
3. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Вычислительная теплопередача*. М.: Эдиториал УРСС, 2003, 784 с.
4. Луценко Н. А. *Нестационарные режимы охлаждения пористого тепловыделяющего элемента*. Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 3. С. 120-128.
5. Izquierdo-Barrientos M. A., Sobrino C., Almendros-Ibanez J. A. *Thermal energy storage in a fluidized bed of PCM*. Chemical Engineering Journal. 2013. Vol. 230. Pp. 573-583.
6. Peng H., Li R., Ling X., Dong H. *Modeling on heat storage performance of compressed air in a packed bed system*. Applied Energy. 2015. Vol. 160. Pp. 1-9.

### Численное исследование течения в плоском канале с конфузуром

<sup>1</sup>В. Г. Луцник, <sup>2</sup>М. С. Макарова, <sup>3</sup>А. И. Решмин

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

<sup>1</sup>lukas@newmail.ru

<sup>2</sup>mariaa.makarova@gmail.com

<sup>3</sup>alexreshmin@rambler.ru

Продольный градиент давления является параметром, который оказывает существенное влияние на турбулентное течение, приводя в пределе в случае отрицательного градиента давления к

ламинаризации пограничного слоя. В инженерной практике проточный тракт энергоустановок состоит из участков как постоянного, так и переменного сечения, в частности, и из конфузورных участков. Знание режима течения на этих участках проточного тракта имеет большое значение при определении гидравлических характеристик энергоустановки.

Целью настоящей работы является численное исследование течения с отрицательным градиентом давления в плоском канале с конфузором при постоянном числе Рейнольдса. Для решения задачи использовались уравнения неразрывности и движения в приближении узкого канала и трехпараметрическая дифференциальная модель турбулентности.

Рассмотрен плоский конфузор, в котором было реализовано течение с отрицательным градиентом давления. Входу в конфузор предшествовал участок стабилизации, на котором устанавливалось развитое турбулентное течение при заданном числе Рейнольдса. Далее следовал конфузор с горизонтальной нижней стенкой и наклонной верхней стенкой с линейно изменяющейся высотой, в котором при любом угле наклона стенки число Рейнольдса  $Re$  оставалось постоянным. За конфузором следовал участок постоянного сечения и высотой, равной высоте конфузора на выходе, на котором устанавливалось развитое турбулентное течение при заданном числе Рейнольдса. Расчеты проведены для чисел Рейнольдса  $Re = 3000, 5000$  и  $10000$ . Параметрами задачи являются: тангенс угла наклона верхней стенки конфузора, число Рейнольдса  $Re$  и так называемый параметр ламинаризации потока (безразмерный градиент давления) в конфузоре  $K$ .

Получены продольные и поперечные распределения интегральных и локальных характеристик течения. Показано, при каких условиях наступает ламинаризация потока в конфузоре и далее в канале постоянного сечения режим ламинарного течения сохраняется. Проведенное численное исследование показало, что для рассмотренного конфузора длиной 200 мм ламинаризация наступает при значении параметра  $K = 2 \cdot 10^{-5}$ . Дальнейшее уменьшение параметра  $K$ , при котором наступает ламинаризация, связано с увеличением длины конфузора, т.е. увеличением времени воздействия отрицательного градиента давления на течение.

Работа поддержана РФФИ (№17-08-00115) и Советом по грантам Президента РФ (№МК-6025.2016.8).

# Эффективный метод математического моделирования клинических процедур для определения механических характеристик глаза

<sup>1</sup>Г. А. Любимов, <sup>2</sup>И. Н. Моисеева, <sup>3</sup>А. А. Штейн

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

<sup>1</sup>GA\_Lubimov@bk.ru

<sup>2</sup>moiseeva.ir@yandex.ru

<sup>3</sup>stein.msu@bk.ru

Глаз представляет собой сложную механическую систему, включающую различные ткани и жидкости. Для решения многих задач глазное яблоко может быть схематично представлено деформируемой оболочкой, состоящей из роговицы и склеры и расширяемой изнутри давлением заключенной в ней жидкости. Внутриглазное давление оказывает существенное влияние на протекающие в глазу процессы, и его оценка имеет большое значение для диагностики. В клинике внутриглазное давление оценивается косвенно на основании различных методов тонометрии, базирующихся на измерении упругого отклика глазной оболочки, обычно роговицы, на внешние воздействия. Упругие свойства глазных тканей демонстрируют существенную пространственную неоднородность и анизотропию, и их точное определение в опыте затруднительно. Кроме того, они существенно различаются для разных индивидуумов, что делает осредненные данные малоприменимыми для корректной интерпретации клинических измерений. Поэтому требующие задания множества параметров громоздкие численные расчеты не дают эффективного решения практических задач.

Многие задачи механики глаза, включая задачи тонометрии, рассматривают процессы, в основном разыгрывающиеся в области роговицы, тогда как склеральная область вовлечена в них лишь через перераспределение внутриглазной жидкости. Кроме того, данные экспериментов и анализ структуры роговицы дают основание предполагать, что она слабо сопротивляется изгибу. В соответствии с этим нами разработана максимально упрощенная модель, в которой роговица представлена безмоментной (мягкой) упругой поверхностью, а склеральная область заменяется упругим элементом, откликающимся изменением объема на изменение давления. Если считать роговицу линейно упругой и по упругим

свойствам пространственно однородной и изотропной, такая модель характеризуется лишь тремя упругими константами. Речь идет, конечно, лишь о свойствах роговицы как поверхности: третье измерение в модели отсутствует. В задачах с нагружением, не слишком отклоняющимся от изотропного, основных определяющих констант оказывается еще меньше: две.

Простота модели позволяет эффективно ставить и решать задачу об определении в клинических испытаниях как истинного внутриглазного давления (т.е. давления в не нагруженном извне глазу), так и индивидуальных упругих характеристик, которые, как показывают клинические исследования, имеют самостоятельную диагностическую ценность. Замена трехмерного тела поверхностью делает метод не применимым к задачам, характерный масштаб которых сопоставим с толщиной роговицы, что имеет место, например при популярном методе тонометрии по Гольдману.

Зависимости, рассчитанные на основе предложенной модели, хорошо согласуются с осредненными по множеству глаз эмпирическими зависимостями, полученными в результате исследований, направленных на тарировку тонометров Маклакова (нагружение плоским тяжелым штампом) и Шиотца (нагружение тонким стержнем роговицы, предварительно нагруженной вогнутым штампом). Вместе с тем, они существенно меняются при значительном отклонении упругих констант от средних значений.

Показано, что надежная оценка истинного внутриглазного давления и индивидуальных упругих констант с помощью статических тонометров одного типа (хотя бы и с разными нагружающими весами) невозможна, что связано с близостью зависимости давления от веса груза к линейной функции. Для этого необходимо использование комбинации тонометров, осуществляющих нагружение существенно различным образом, например, плоского и сильно выпуклого штампов или плоского штампа и тонометра Шиотца.

Первоначально при расчетах мы считали роговицу линейно упругой, изотропной в тангенциальном направлении и пространственно однородной, а склеральный элемент линейно упругим. В большинстве случаев такое приближение достаточно для описания статической тонометрии. Между тем, применяемый метод позволяет отказываться от частных допущений по мере необходимости в соответствии с решаемой задачей при сохранении общего

подхода. В числе возможных обобщений: учет нелинейности упругого поведения (при большом внутривязном давлении); быстрой фойгтовской и медленной максвелловской вязкоупругости (для изучения нестационарного нагружения измерительными устройствами и длительных перестроечных процессов соответственно); пространственной неоднородности роговицы (как в норме, так и возникающей в результате хирургического воздействия).

Работа поддержана РФФИ (проект № 17-01-00380).

## **Напряжения и деформации в растущей диффузионной зоне при пайке стекла со сталью**

**О. Н. Любимова, А. В. Морковин**

*Дальневосточный федеральный университет*

**berms@mail.ru**

В работе предлагается к рассмотрению моделирование технологических процессов изготовления слоистого композиционного материала — стеклометаллокомпозита на основе стекла и стали [1,2]. Не смотря на то, что этот материал является спаем сжатия, технология изготовления которых известна в электротехнике, температурный режим получения стеклометаллокомпозита на основе стекла и стали имеет особенности, например, при разных технологических режимах соединение стекла с металлом может варьироваться от соединения внахлест до спаивания с развитой диффузионной зоной на границе контакта. Экспериментально доказано, что высокими прочностными характеристиками обладают экспериментальные образцы с развитой диффузионной зоной на границе соединения стекла и стали [3]. При проведении экспериментальных исследований замечено также, что причиной и непосредственным участником диффузионных процессов является оксидный слой на стальной поверхности, образование соединения стекло-сталь включает формирование полного физического контакта и диффузионные процессы, связанные с растворением оксидного слоя на стали в стекле и последующей диффузией железа в стекло [2,3]. Математическому моделированию диффузионных процессов посвящено огромное количество работ, однако, для каждой технологической задачи при оптимизации экспериментальных исследований актуальной остается проблема выбора соответствующей модели и ее корректировки.

Целью данной работы является математическое моделирование диффузии и эволюции напряженно-деформированного состояния при изменяющихся свойствах диффузионной зоны при соединении стекла и стали.

Задача моделирования усложняется тем, что температурная обработка и разница в коэффициентах линейного температурного расширения стекла, диффузионной зоны и стали могут быть причиной пластических деформаций в стали, которую необходимо учитывать, как и реологические особенности стекла и диффузионной зоны. В диффузионной зоне при описании деформаций следует учитывать не только вязкоупругие и температурные деформации, но и концентрационное расширение. Поскольку температурный режим содержит температуры размягчения и стеклования, формирование уравнений состояния в стекле и диффузионной зоне усложняется необходимостью учета структурных изменений, связанных со стеклованием.

На первых итерациях при моделировании такой сложной и многоплановой задачи предлагается решать сопряженную термовязкоупругопластическую задачу, на основе алгоритмов метода Тула-Нарайанасвами-Мойнихана-Мазурина в теории стеклования (стекло и диффузионная зона) и классического метода теории пластичности, с использованием условия пластического течения Треска–Сен-Венана (сталь).

### Литература

1. Пиккуль В.В. Перспективы создания слоистого композита на основе стекломатериалов // Перспективные материалы. 1999. №1. С. 34-42.
2. O. N. Lyubimova, E. V. Lyubimov, E. P. Solonenko, A. V. Morkovin and S. A. Dryuk Research of Structure, Mechanical and Operation Properties of Glass-Metal Composites // International Conference on Advanced Materials with Hierarchical Structure for New Technologies and Reliable Structures.-2016.-Vol. 1783.-020141-1 20141-4.
3. Любимова О.Н., Морковин А.В., Дрюк С.А. Особенности структуры зоны соединения стекла и стали в технологии получения стекломатериалокompозита // Материаловедение.-2017,-№4.- С.3-7.

# Структура катящихся волн в длинных каналах с податливыми стенками

<sup>1</sup>В. Ю. Ляпидевский, <sup>2</sup>А. А. Чесноков

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН  
Новосибирский государственный университет*

<sup>1</sup>liapid@hydro.nsc.ru

<sup>2</sup>chesnokov@hydro.nsc.ru

Изучение течения жидкости в каналах с упругими стенками представляет прикладной (задачи биомеханики) и теоретический интерес. Достаточно подробный обзор основных приложений и математических моделей приведен в работе Neil & Jensen, 2003. Одной из основных задач теории описания совместного движения жидкости и канала с податливыми стенками является моделирование распространения пульсовой волны. Для исследования подобных волновых процессов широко распространено применение одномерной модели, сходной по своей структуре с уравнениями теории мелкой воды и газовой динамики. Замыкающим соотношением («уравнением состояния») в этом случае служит связь давления с площадью поперечного сечения просвета канала. Для канала круглого сечения при положительной разности давлений в жидкости и окружающей среде уравнение состояния является выпуклым и газодинамическая модель достаточно адекватно описывает распространение пульсационных волн (Formaggia, Lamponi & Quarteroni, 2003). Однако при отрицательном перепаде давлений возможно резкое схлопывание трубки и развитие автоколебаний большой амплитуды.

В представленном докладе основное внимание уделяется изучению возникновения и развития режима течения, соответствующего катящимся волнам (квазипериодическое движение, в котором плавные участки течения разделены сильными разрывами). Особенностью таких течений является переход от докритического течения к сверхкритическому режиму в системе координат, движущейся вместе с волной. Несмотря на давние исследования в этой области, остается ряд открытых вопросов, связанных с формированием квазипериодических режимов течения в рамках моделей с невыпуклым уравнением состояния.

Нелинейные уравнения газодинамического типа

$$h_t + (uh) = 0, \quad (uh)_t + (u^2h + P(h))_x = \alpha h - cfu^2 \quad (1)$$

при  $P = (gh^2/2) \cos \varphi$  и  $\alpha = g \sin \varphi$  сводятся к модели движения тонкого слоя жидкости в открытом наклонном канале с учетом турбулентного трения, в рамках которой была построена математическая теория катящихся волн (Dressler, 1949). Уравнения вида (1) с невыпуклой, как правило, функцией  $P(h)$  используются для описания течений в каналах и трубках с тонкими упругими стенками (см. Педли, 1983; Brook, Falle, Pedley, 1999). Особый интерес представляет моделирование автоколебаний большой амплитуды и схлопывания трубки. При выполнении критерия Уизема для постоянных начальных данных, соответствующих состоянию равновесия ( $\alpha h_0 = cf u_0^2$ ), в процессе эволюции течения формируются квазипериодические волны конечной амплитуды.

В работе изучается структура и свойства катящихся волн, описываемых системой (1) с используемой в гемодинамике зависимостью давления от нормированного сечения канала вида  $p = h^{10} - h^a$  при  $a = -3/2$ , а также при  $a = -5/2$ , что соответствует невыпуклой функции  $p(h)$ . Между двумя рассматриваемыми случаями имеется отличие, состоящее в том, что в терминах переменной  $\tau = 1/h$  функция  $\hat{P}(\tau) = P(h)$ , связанная с давлением в жидкости  $p$  соотношением  $P'(h) = hp'(h)$ , является выпуклой при  $a = -3/2$  и невыпуклой при  $a = -5/2$ . Это обстоятельство приводит к совершенной различному типу решений уравнений (1). Результаты аналитического и численного исследования показывают, что в первом случае реализуются регулярные катящиеся волны (Dressler, 1949). Для невыпуклой функции  $\hat{P}$  формируется аномальный квазипериодический режим течения, в котором форма катящейся волны существенно отличается от классической. Возможность существования таких режимов течения в открытых каналах произвольной формы показана в работе Boudlal & Ljapidevskii, 2004, но для течений в эластичных трубках они исследованы аналитически и реализованы в численных расчетах впервые. В классе бегущих волн построено двухпараметрическое семейство периодических решений, соответствующих регулярным и аномальным катящимся волнам. Получены диаграммы катящихся волн, определяющие возможные допустимые параметры потока, при которых могут формироваться квазипериодические режимы течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00156) и в рамках программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-8146.2016.1).

# Почти предельные внутренние волны на границе раздела двух жидкостей

<sup>1</sup>Д. В. Маклаков, <sup>2</sup>Р. Р. Шарипов

*Казанский федеральный университет*

<sup>1</sup>dmak1ak@kpfu.ru

<sup>2</sup>info@5354.ru

Разработан новый метод расчета внутренних гравитационных волн, основанный на сведении задачи к определению кусочно-аналитической функции с неизвестной линией скачка, на которой одновременно задаются условия задачи о скачке и условия задачи Гильберта. Метод применен к расчету внутренних периодических волн, возникающих на границе раздела двух безграничных сред разной плотности.

С помощью леммы Хопфа строго доказано, что максимальный угол наклона  $\theta_{\max}$  линии раздела внутренних волн меньше  $180^\circ$ , а предельная величина  $\theta_{\max} = 180^\circ$  является недостижимой. Рассчитаны почти предельные конфигурации внутренних волн, для которых  $\theta_{\max}$  почти равен  $180^\circ$ . Одна из таких почти предельных конфигураций, когда отношение плотностей в слоях  $\rho_1/\rho_2 = 0.1$  и  $\theta_{\max} = 179,99^\circ$  показана на рис. 1.

На рис. 2 для  $\rho_1/\rho_2 = 0.1$  приведена зависимость параметра  $\mu = 2\pi c^2/\lambda$ , определяющего скорость распространения волны  $c$ , от крутизны волны  $s = (y_{\max} - y_{\min})/\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны,  $y_{\max}$  и  $y_{\min}$  максимальное и минимальное возвышения линии раздела, соответственно. Для сравнения на рис. 3 приведен аналогичный график, заимствованный из статьи [1]. Сравнение показывает полное рассогласование в полученных результатах для крутых волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-06029).

## Литература

1. Turner R. E. L., Vanden-Broeck J.-M. The limiting configuration of interfacial gravity waves. Phys. Fluids. 1986. V. 29, № 2. P. 372–375.

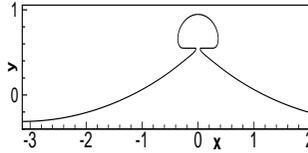


Рис. 1

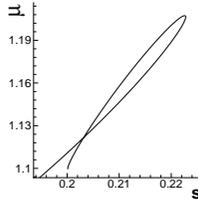


Рис. 2

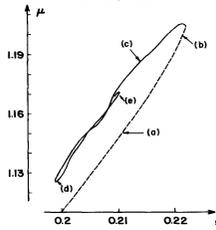


Рис. 3

## Распространение волн под ледяным покровом: результаты натурных измерений, физические механизмы диссипации энергии и моделирование

**А. В. Марченко**

*Университетский центр на Свальбарде, Норвегия*

*Государственный океанографический институт имени Н.Н. Зубова,  
Россия*

При распространении волн из свободных ото льда областей океана в области, находящиеся под ледяным покровом, происходит изменение спектра волн и затухание их амплитуды. Воздействие волн на сплошной лед может привести к его разделению на небольшие льдины на достаточно обширной площади в течение нескольких часов. По сравнению со сплошным льдом битый лед

менее устойчив к термическому воздействию и более подвижен. Эти эффекты вызывают интерес в связи с уменьшением площади льда в Арктике и прилегающих морях, освоением арктического шельфа и развитием навигации в высоких широтах.

Регистрация волн проводилась в нескольких экспедициях в Баренцево море с 2004 года по настоящее время. Измерения проводились с помощью акустического измерителя скоростей частиц воды (ADV SonTek, 5 MHz), закрепленного на дрейфующем льду, на глубине порядка 1 м подо льдом. В экспериментах использовалась частота измерений от 1 до 10 Гц. Дополнительные измерения проводились двумя датчиками давления воды (SBE-39), подвешенными на тросе на различной глубине, и с помощью закрепленных на льду акселерометров, измеряющих углы отклонения их осей от вектора магнитной индукции Земли, угловые скорости и линейные ускорения в собственной системе координат. Частота измерений давления — 1 Гц, частота измерений акселерометров — 5 Гц. Измерения, проведенные тремя методами, показывают аналогичные спектральные характеристики измеряемых величин.

По результатам натурных измерениям восстанавливается амплитуда, частота и длина волн в точке измерений. Высокочастотные измерения скоростей воды в подледном слое дают возможность расчета напряжений Рейнольдса и коэффициента вихревой вязкости в подледном слое. Характерные периоды волн, наблюдавшихся в Баренцевом море под ледяным покровом, находились в интервале 10–12 секунд соответствующем волнам зыби. Максимальные амплитуды волн не превышали 30 см и, как правило, были меньше 10 см. Коэффициенты вихревой вязкости изменялись в широких пределах. При этом их максимальные значения превышали  $100 \text{ см}^2/\text{с}$ . Корреляция между амплитудой волн и вихревой вязкостью не замечена. Установлено, что вихревая вязкость и кинетическая энергия флуктуаций средних течений в подледном слое пропорциональны средней скорости дрейфа льда относительно воды. Высокие значения вихревой вязкости были получены для районов интенсивного дрейфа льда в Баренцевом море, возникающего вследствие воздействия ветра и приливов.

Влияние упругости льда на волны периодом 10–12 секунд мало, когда толщина льда менее 1 м (в Баренцевом море толщина дрейфующего льда обычно не превышает 60 см). Поэтому основное влияние на изменение спектра и амплитуд волн оказывает процесс диссипации энергии в пограничном слое воды около льда.

Простейшая модель состоит в использовании решения Стокса, описывающего пограничный слой около осциллирующей пластины. В случае волн решение вне пограничного слоя описывается известным решением, описывающим линейную гравитационную волну, а решение внутри пограничного слоя зависит от коэффициента вихревой вязкости и движения льда относительно воды. Использование этой модели объясняет затухание высокочастотных волн и смещение спектрального максимума в область низкочастотных волн с периодом порядка 10 секунд и более.

При распространении волн в более толстых льдах влияние вязкости льда на затухание волн может оказаться существенным. Для оценок использованы результаты экспериментов по циклическому нагружению образцов льда, показывающие, что энергия диссипации не превышает 5 процентов упругой энергии льда при напряжениях сжатия-растяжения меньших 0.5 МПа. Эта оценка обычно выполняется для напряжений, вызванных изгибом льда, не приводящим к его разрушению.

### Литература

1. Collins, C.O., Rogers, W.A., Marchenko, A., Babanin, A.V., 2015. In situ measurements of an energetic waves event in the Arctic marginal ice zone. *Geoph. Res. Letters*, 42, 6, 1863–1870.
2. Marchenko, A.V., Gorbatsky, V.V., Turnbull, I.D., 2015. Characteristics of under-ice ocean currents measured during wave propagation events in the Barents Sea. POAC15-00171, Trondheim, Norway, 11 pp.
3. Marchenko, A.V., Morozov, E.G., 2016. Surface manifestation of the waves in the ocean covered with the ice. *Russian Journal of Earth Sciences*, Vol. 16, ES1001, doi:10.2205/2016ES000561.
4. Marchenko, A., 2016. Damping of surface waves propagating below solid ice. *Proceedings of the Twenty-sixth International Ocean and Polar Engineering Conference ISOPE*, Rhodes, Greece, 16TPC-0680, 8pp.
5. Marchenko, A., Rabault, J., Sutherland, G., Collins III, C.O., Wadhams, P., Chumakov, M., 2017. Field observations and preliminary investigations of a wave event in solid drift ice in the Barents Sea. POAC17-087, 13pp.
6. Marchenko, A., Cole, D., 2017. Three Physical Mechanisms of Wave Energy Dissipation in Solid Ice. POAC17-086, 9pp.

## О механизме пристенной турбулентности

**Н. В. Никитин, В. О. Пиманов**

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

*nvnikitin@mail.ru*

Движение жидкости и газа в окружающей природе, а также в большом числе технических устройств происходит при больших скоростях, при которых реализуется турбулентный режим течения. Турбулентность характеризуется наличием случайных во времени и в пространстве пульсаций гидродинамических параметров, большим разбросом динамически важных масштабов вовлеченных в движение вихрей. Переход к турбулентности сопровождается как правило кардинальным изменением основных характеристик потока. Например, при течении вдоль твердой поверхности происходит многократное повышением сопротивления трения. Существуют оценки, согласно которым до 20% всей вырабатываемой в мире энергии расходуется в конечном итоге на преодоление турбулентного трения в транспортных системах и в магистральных трубопроводах. Нет сомнений, что появление средств снижения турбулентного трения сулило бы в мировом масштабе невероятную по объему экономию энергии, повышение производительности огромного числа технических устройств, улучшение экологической обстановки. Поиск средств снижения турбулентного трения и, что более обще, поиск методов описания, предсказания и прогнозирования свойств турбулентных потоков активно ведется во многих странах.

Серьезный импульс исследование турбулентности получило с появлением мощных компьютеров и, в частности, многопроцессорных вычислительных систем. Появилась возможность численного моделирования турбулентных течений на основе решения основных уравнений движения вязкой жидкости — уравнений Навье—Стокса. Если в конце 20 века основным в численных расчетах было доказательство пригодности детерминированной системы уравнений Навье—Стокса для описания стохастических турбулентных процессов, то в наши дни, прямое численное моделирование заслужило статус равноправного и надежного инструмента исследования турбулентности и все шире применяется для расчета конкретных течений, а главное для изучения фундаментальных свойств турбулентности, недоступных для исследования более традиционными экспериментальными методами.

В докладе будут представлены последние результаты численного исследования механизма самоподдержания турбулентного течения вблизи твердой стенки. Удивительно, что несмотря на почти полуторавековую историю изучения явление пристенной турбулентности на сегодняшний день в значительной степени остается непонятым. Мы не можем теоретически обосновать даже простейшие, хорошо известные из экспериментов зависимости, такие, например, как турбулентный закон сопротивления в круглой трубе. Основная проблема состоит в том, что среднее течение в пристенных потоках оказывается устойчивым к малым возмущениям, таким образом, передача энергии пульсационному движению является сугубо нелинейным процессом. Со времен первых экспериментов О.Рейнольдса известно, что турбулентность в трубах на пороге своего возникновения проявляется в виде локализованных в пространстве структур, разделенных участками ламинарного потока. Мы называем такие структуры турбулентными порывами. Турбулентный порыв может рассматриваться как своеобразная единица турбулентности, содержащая внутри себя все необходимые элементы для выживания и самоподдержания. В этом отношении турбулентный порыв является уникальным объектом для исследования. Турбулентный порыв адекватно реализуется в численных расчетах. Однако, несмотря на свою локализованность в пространстве, он все же остается чрезвычайно сложным для исследования из-за стохастичности происходящих внутри него процессов. Нам удалось численно реализовать решения уравнений Навье—Стокса в некотором смысле аппроксимирующие турбулентный порыв, однако обладающие гораздо более простой пространственно-временной структурой. Благодаря этому мы смогли полностью изучить механизмы их самоподдержания, в частности, выявить способ передачи энергии от среднего течения к пульсационному. Мы надеемся, что найденные нами механизмы ответственны за возникновение и поддержание турбулентности в пристенных течениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ(гранты 17-01-00140-а и 16-31-00522-мол-а). Расчеты проводились на суперкомпьютерах МГУ "Чебышев" и "Ломоносов".

# Негладкие модели упругости композитов

**А. И. Олейников**

*ЦАГИ имени профессора Н.Е. Жуковского*

*aleksandr.oleynikov@tsagi.ru*

Развиваются модели гетерогенно–упругих изотропных и анизотропных сред в механике композитов [1,2]. Исследуется взаимосвязь между моделями и возможность предельных переходов по параметрам, характеризующих влияние типа напряженно-деформированного состояния и перекрестных эффектов. Приведены аналитические расчетные зависимости оценки жесткостей и прочности пакета монослоев, представлены результаты сходимости расчетных и экспериментальных данных, проведено сравнение с существующими критериями разрушения. Установлено влияние зависимости жесткостей от вида напряженного состояния на эффекты симметричного и сбалансированного армирования. Проанализированы результаты расчета стадий послойного разрушения углепластика в условиях растяжения, сжатия и сдвига. Паспортные характеристики упругости монослоев современных композитов указывают на неравенство продольных и поперечных модулей на сжатие и растяжение. Необходимость учета данного неравенства возникает при обеспечении высокоточного решения, например, для прецизионной интерпретации испытаний на изгиб при определении из них жесткости на изгиб или прочности на сжатие композита. В зависимости от способа задания упругих характеристик монослоев–на сжатие, растяжение или с учетом данных неравенств–расходимость расчетных оценок прочности пакета может достигать более 20% [3]. Прямой учет данных отклонений от закона Гука приводит к негладкой модели упругого тела. Дается общая постановка задачи о структуре негладких материальных функций и разложении потенциала напряжений вблизи естественного ненапряженного состояния. Для случая квазиизотропного армирования разложение представляет собой ряд Фурье по системе сферических функций и обеспечивает вывод в главном приближении закона Гука и одновременно в следующих приближениях, которые являются негладкими, дает поправки, систематически учитывающие влияние типа деформации. При неустойчивости волокон или разрушении матрицы некоторые жесткости композита при определенном типе

деформации обращаются в ноль, что приводит к нестрого выпуклым потенциалам напряжений. При этом напряжения подчиняются определенным внутренним связям–предельным условиям [1,4]. Развита теория двойственности невогнутых негладких потенциалов, которая дает уравнение предельной поверхности и принцип минимума. Предложены негладкие определяющие соотношения моделей упругости трансверсально-изотропных и ортотропных композитов, некрратные собственные значения тензора жесткости которых зависят от знаков коэффициентов разложения тензора напряжений в базисе собственных тензоров. Обсуждается и предлагается классификация негладких моделей упругости по структуре определяющего соотношения, параметрам типа напряженно-деформированного состояния и вида перекрестных эффектов между его инвариантами. Развиваются и экспериментально обосновываются простейшие аналитические расчетные зависимости приближенной оценки жесткостей и прочности ортотропного симметричного пакета монослоев, в которых основной вклад в жесткость дает модуль упругости вдоль волокон, а прочность обусловлена прочностью волокон на разрыв или их неустойчивостью, и также прочностью связующего. Даны критерии разрушения монослоя при сложном напряженном состоянии пакета. Обсуждаются некоторые приложения построенных моделей в механике авиационных конструкций.

### Литература

1. Мясников В.П., Олейников А.И. Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. Владивосток: Дальнаука, 2007. 172 с.
2. Олейников А.И. Оценка жесткости и прочности слоистых композитов // *Композиты и наноструктуры*, 2017, т.9, N 2, с. 77–79.
3. Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И. Прочность и устойчивость элементов и соединений авиационных конструкций из композитов. М.: Физматлит, 2013. 272 с.
4. Олейников А.И. О модели разномодульной среды с ограничениями// *Доклады РАН*, 1994, т.334, N 3, с. 314–316.

## К обоснованию теории мелкой воды

**В. В. Остапенко**

*Институт гидродинамики СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный университет  
ostapenko\_vv@ngs.ru*

Уравнения теории мелкой воды выведены [1] из уравнений неразрывности и Эйлера в рамках длинноволнового приближения  $H/L \ll 1$ , где  $H$  – характерная глубина потока, а  $L$  – характерная длина поверхностных волн. В то же время уравнения этой теории используются не только для описания медленно меняющихся течений с гладкой свободной поверхностью (таких как паводковые течения в реках), но также широко применяются для моделирования быстро протекающих волновых процессов, связанных с распространением гидравлических боров, возникающих при разрушении плотины гидросооружения [2] или при выходе крупных морских волн типа цунами на мелководье и наклонный берег [3]. В последнем случае эти уравнения используются в форме гиперболической системы законов сохранения с выпуклым расширением, допускающей разрывные решения с ударными (прерывными) волнами [4], которыми моделируются гидравлические боры реального течения. Однако на фронтах ударных волн пространственная производная уровня свободной поверхности жидкости  $h_x = \infty$ , что противоречит условию длинноволнового приближения [2], в силу которого  $|h_x| \ll 1$ . Для разрешения этого противоречия в рамках классической теории необходимо считать, что ударными волнами описываются переходные области, ширина которых  $L_0$  много больше характерной глубины потока [5]. Однако натурные наблюдения и результаты лабораторного моделирования показывают [2,3,5–8] что поперечные размеры реальных гидравлических боров сравнимы с характерными глубинами рассматриваемых потоков, в силу чего соответствующие им переходные области, как правило, не удовлетворяют условию длинноволнового приближения  $H/L_0 \ll 1$ .

Поэтому в [9] предлагается другой подход для преодоления данного противоречия теории мелкой воды. Этот подход связан с выводом базисных уравнений этой теории из многомерных интегральных законов сохранения массы и полного импульса. Возникающие при этом ограничения на параметры течения имеют

интегральную форму и непосредственно не связаны с классическим условием длинноволнового приближения  $H/L \ll 1$ . В настоящей работе вводится гидростатическое приближение  $w^2/c^2 \ll 1$ , где  $w$  — вертикальная скорость жидкости, а  $c = \sqrt{gh}$  — скорость распространения малых возмущений в фиксированной точке рассматриваемого течения. Понятие гидростатического приближения является локальным, обобщает понятие длинноволнового приближения и применяется для обоснования применимости теории мелкой воды при моделировании волновых течений жидкости с гидравлическими борами.

### Литература

1. Friedrichs K. O. *On the derivation of shallow water theory*. Comm. Pure Appl. Math. 1948. V. 1. P. 109–134.
2. Стокер Дж. Дж. *Волны на воде. Математическая теория и приложения*. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
3. Yeh H., Liu P., Synolakis C. E. *Long-wave runup models*. Singapore: World Sci. Publ., 1996.
4. Lax P. D. *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*. Philadelphia: SIAM, 1972.
5. Остапенко В. В. *Модифицированные уравнения теории мелкой воды, допускающие распространение прерывных волн по сухому руслу*. ПМТФ. 2007. Т. 48. № 6. С. 22–43.
6. Stansby P. K., Chegini A., Barnes T. C. *The initial stages of dam-break flow* J. Fluid Mech. 1998. V. 374. P. 407–424.
7. Букреев В. И., Гусев А. В., Остапенко В. В. *Распад разрыва свободной поверхности жидкости над уступом дна канала*. Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 72–83.
8. Гусев А. В., Остапенко В. В., Мальшева А. А., Мальшева И. А. *Волны в открытом канале, образующиеся при прохождении прерывной волны над ступенькой дна*. ПМТФ. 2008. Т. 49. № 1. С. 31–44.
9. Остапенко В. В. *О законах сохранения теории мелкой воды*. Докл. АН. 2015. Т. 464. № 5. С. 558–561.

## Установление поверхностных волн в слое жидкости конечной глубины

<sup>1</sup>Е. Б. Павельева, <sup>2</sup>А. С. Савин

*Московский государственный технический университет имени Н.Э.*

*Баумана*

<sup>1</sup>*e.pavelyeva@yandex.ru*

<sup>2</sup>*assavin@list.ru*

В работе [1] Л. Н. Сретенский рассмотрел задачу о пульсирующем источнике, находящемся в жидкости конечной глубины. В предположении о существовании установившегося волнового режима, Л. Н. Сретенский получил некоторое множество решений этой задачи. Он также выписал решение, которое назвал истинным, считая, что именно это решение является решением задачи об установлении поверхностных волн в слое жидкости конечной глубины. В конце работы Л. Н. Сретенский отметил, что поставленная им задача о волнах, возбуждаемых пульсирующим источником, не имеет единственного решения. Для выделения единственного решения следует рассмотреть задачу о неустановившемся волновом движении, которое создаётся в покоящейся жидкости источником, начинающим свою работу в некоторый момент времени. Предельное течение жидкости по истечении большого промежутка времени следует считать истинным решением задачи. В заключение своего анализа Л. Н. Сретенский заметил, что поставленная таким образом задача вызывает большие трудности при своем решении.

Истинная природа таких трудностей была выявлена позже [2,3]. Оказалось, что предельный переход в решении некоторых нестационарных задач об установлении волнового режима не может быть осуществлен в рамках математического аппарата классической гидродинамики, для решения этих задач потребовалось привлечь теорию обобщенных функций. В настоящей работе с помощью обобщенных функций получено корректное решение задачи Л. Н. Сретенского о пульсирующем источнике в слое жидкости конечной глубины. Это решение получено как предел в бесконечном будущем волнового режима, вызываемого источником, который в некоторый момент времени начинает совершать пульсации в изначально неподвижной жидкости.

### Литература

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. // М.: Наука. – 1977. – 815 с.
2. Савин А. С. Установление поверхностных волн, вызываемых гидродинамическими особенностями в плоском потоке // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2002. – №3. – С. 78-81.
3. Ильичев А. Т., Савин А. С. О характере процесса установления поверхностных волн в плоском потоке. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2004. – №4. – С. 75-83.

## **Влияние эффекта Онзагера на пристеночные заряженные слои в течениях слабопроводящей жидкости в плоских каналах**

**И. Л. Панкратьева, В. А. Полянский**

*НИИ Механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

`ilpan@imec.msu.ru`

Рассматривается влияние сильных неоднородных электрических полей на образование нескомпенсированного объемного заряда (электризацию) слабопроводящих жидкостей при их течениях в плоских микроканалах. Анализируются эффекты, обусловленные непосредственным воздействием поля на диссоциацию нейтральных молекул среды на положительные и отрицательные ионы, так называемый эффект Онзагера.

Интерес к электрогидродинамике течений в каналах микро и нано размеров связан с потребностью управлять поведением сверхмалых объемов жидкостей в устройствах, применяемых в биологических исследованиях, медицине, фармацевтике, биотехнологии и т. д.

Доклад посвящен исследованию влияния сильных неоднородных электрических полей на объемную электрохимическую кинетику в слабопроводящих жидких смесях при их течениях в плоских микроканалах. Рассматриваются умеренные числа Дебая, когда дебаевское расстояние имеет порядок характерного

гидродинамического размера. Электрическое поле в слабопроводящих химически реагирующих средах может влиять на ионизацию как непосредственно, за счет увеличения кинетической скорости ионизации, так и косвенно, путем перераспределения реагирующих заряженных компонент. В первом случае в пристеночных слоях с сильной неоднородностью поля образуются биполярные структуры нескомпенсированного объемного заряда, которыми можно управлять приложенным электрическим полем. При этом в продольном поле наличие слоев с разными знаками объемного заряда обуславливает появление точек перегиба в профиле скорости течения среды. Это может привести к неустойчивости течения и тем самым способствовать перемешиванию жидкости в микро канале.

Рассматривается двумерное течение многокомпонентной жидкой среды, содержащей заряженные частицы двух сортов: с положительным и отрицательным знаком заряда. Учитывается диффузия и дрейф в электрическом поле каждого сорта частиц с зарядом, объемные реакции ионизации и рекомбинации, а также поверхностные электрохимические процессы с рождением и поглощением заряженных частиц [1]. Зависимость объемного источника ионов от поля теоретически исследовалась в [2,3]. В представленных в докладе расчетах используется соотношение Френкеля. Обсуждается механизм электризации среды в неоднородных электрических полях при учете эффекта Онзагера.

Проведенное исследование структуры межэлектродного пространства в плоском канале с заданной между стенками разностью электрических потенциалов показывает, что влияние поля на скорость диссоциации молекул среды на положительные и отрицательные ионы существенно перераспределяет концентрации этих частиц. При этом в областях сильного неоднородного индуцированного поля вблизи стенок могут возникать биполярные структуры с локальными экстремумами поля. В этих структурах кулоновские силы имеют противоположные направления. Это обстоятельство можно использовать для объяснения механизма образования экспериментально наблюдавшихся микровихрей вблизи стенок канала.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-01-00157.

## Литература

1. Панкратьева И.Л., Полянский В.А. Моделирование электрогидродинамических течений в слабопроводящих жидкостях. // ПМТФ, 1995, т. 36, № 4, с. 36–44.
2. Френкель Я.И. К теории электрического пробоя в диэлектриках и электронных полупроводниках. // ЖЭТФ, 1938, т. 8, № 12, с. 1292–1301.
3. Onsager L. Deviation from Ohm's law in weak electrolytes. // J. Chem. Phys., 1934, V. 2, N 9, pp. 599–615.

## **Нелинейные колебания маятника на пружине при резонансе 1:1:2. Теория, эксперимент и физические аналогии**

**А. Г. Петров**

*ИИПМех им. А.Ю. Ишлмского РАН*  
petrovipmech@gmail.ru

Рассматриваются нелинейные пространственные колебания материальной точки на невесомом упругом подвесе (маятник на пружине - рис. 1). Частота вертикальных колебаний предполагается равной удвоенной частоте качаний (резонанс 1:1:2). В этом случае колебания по вертикали неустойчивы, что приводит к перекачке энергии вертикальных колебаний в энергию качаний маятника. Колебания материальной точки по вертикали прекращаются, и через определенный период времени маятник начинает совершать качания в некоторой вертикальной плоскости. Эти качания также неустойчивы, что приводит к обратной перекачке энергии в вертикальную моду колебаний. Опять повторяются колебания по вертикали. Однако после вторичной перекачки энергии вертикальных колебаний в энергию качания видимая плоскость качания поворачивается на некоторый угол. В проекции на горизонтальную плоскость точка маятника движется по траектории близкой к отрезкам прямых, расположенных под постоянным углом друг к другу (рис. 2). Эти эффекты описаны аналитически: найден период перекачки энергии, получены зависимости от времени амплитуд обеих мод и угла видимой плоскости колебаний.

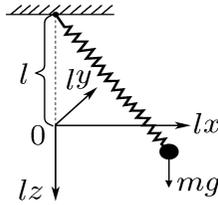


Рис. 1: Маятник на пружине

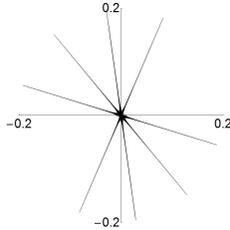


Рис. 2: Проекция орбиты на горизонтальную плоскость

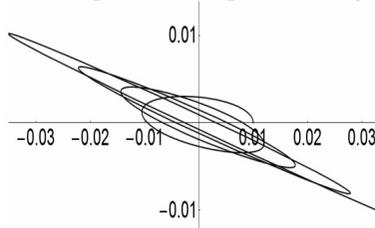


Рис. 3: Переход от вертикальных колебаний к горизонтальным

Асимптотическое решение для траектории материальной точки построено путем точного интегрирования уравнений в элементах орбиты. В проекции на горизонтальную плоскость материальная точка движется по траектории, близкой к эллиптической. Полуоси эллипса медленно меняются со временем так, что их произведение остается постоянным, а большая полуось совершает медленное вращение с постоянной секториальной скоростью (рис. 3). Найденные аналитические зависимости полуосей эллипса и угла прецессии от времени с большой точностью согласуются с проведенными численными расчетами и подтверждаются продемонстрированным во время доклада экспериментом [1].

Установлена аналогия свободных и вынужденных колебаний пружинного маятника с нелинейными колебаниями газового пу-

зырька в жидкости под действием переменного давления. Вибрации точки подвеса маятника соответствует переменное давление в жидкости, вертикальной моде колебаний – колебания радиальной моды пузырька, а горизонтальной моде колебаний – колебания деформационной моды, которая находится в соответствующем резонансе с радиальной модой. При перекачке энергии радиальных колебаний происходит аномальное увеличение амплитуды резонансной деформационной моды. Этот эффект позволяет раздробить пузырек в жидкости при достаточно малых энергетических затратах на подачу переменного внешнего поля давления [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-01-00901).

### Литература

1. Петров А.Г. О повороте видимой плоскости колебаний маятника на пружине при резонансе 1:2:2// Изв. РАН, МТТ. 2017 г. №3. С. 18-30.
2. Вановский В.В., Петров А.Г. Пружинная аналогия свободных и вынужденных нелинейных колебаний газового пузырька в жидкости при резонансе//ПММ. 2017г. Т. 81. Вып. 4.

## Конечные деформации в материалах с памятью формы

<sup>1</sup>А. А. Роговой, <sup>2</sup>О. С. Столбова

*Институт механики сплошных сред УрО РАН – филиал Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН, Пермь*

<sup>1</sup>rogovoy@icmm.ru

<sup>2</sup>sos@icmm.ru

Определяющие соотношения для сложных сред при малых деформациях могут быть построены, используя простой, но эффективный подход, основанный на возможности представить полную деформацию суммой упругих, неупругих и температурных деформаций. Аналогичный подход может быть положен в основу построения определяющих соотношений термо-упруго-неупругих

процессов при конечных деформациях. Для этого необходимо ввести, помимо начальной и текущей конфигураций, еще и промежуточную конфигурацию, близкую к текущей и трактовать термоупруго-неупругий процесс как упругий с напряженной отсчетной конфигурацией. В качестве последней принимается промежуточная упругая конфигурация, близкая к текущей, и получающаяся из последней малой упругой разгрузкой. Формализацией указанной близости является введение малого положительного параметра у вектора перемещения, определяющего положение точек в текущей конфигурации по отношению к промежуточной. Это позволяет представить все кинематические величины в виде рядов по этому малому параметру с удержанием только линейных слагаемых и, в результате, построить для любого закона упругости определяющие уравнения с начальными напряжениями и функциями отклика материала на малые упругие деформации относительно промежуточной конфигурации. Последние определяются как разность между малыми полными деформациями и малыми температурными и неупругими деформациями, переводящими промежуточную конфигурацию в близкую текущую.

Для всех, рассмотренных ниже материалов, малые температурные деформации описываются законом линейного температурного расширения.

Неупругие деформации в сплавах с памятью формы — это деформации аустенитно-мартенситного фазового перехода. При этом, в результате охлаждения в определенном температурном интервале, происходит сдвиг атомной плоскости, приводящий к перестройке исходной атомной решетки и возникновению деформаций превращения высокотемпературной фазы (аустенита) в низкотемпературную фазу (мартенсит). Такой переход называется прямым. Последующий нагрев (обратный переход) возвращает атомную решетку в первоначальное состояние (память формы) в другом более высоком температурном интервале (наблюдается гистерезис превращения).

В полимерах с памятью формы неупругие деформации — это деформации высокоэластичной фазы, «замороженные» в процессе релаксационного перехода из высокоэластичного состояния в застеклованное при охлаждении материала. При этом деформации, возникающие в застеклованной фазе при дальнейшем деформировании, накладываются на эти «замороженные». При нагревании последние постепенно «размораживаются».

В настоящей работе построены определяющие уравнения для конечных деформаций материалов, испытывающих аустенитномартенситный фазовый переход (сплавы с памятью формы), ферромагнитных материалов, испытывающих фазовый переход аустенит — мартенсит, вызванный магнитным полем (ферромагнитные сплавы с памятью формы) и полимеров, испытывающих релаксационный переход из высокоэластичного состояния в застеклованное (полимеры с памятью формы). Полученные соотношения аттестованы на задачах о конечных деформациях простых конструкций при прямом и обратном переходах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00080 и № 16-31-00161 мол\_а).

## **Численное исследование свойств неоднородных жидкостей при обтекании ими кругового цилиндра**

**Т. И. Рождественская**

Поскольку течения неоднородной жидкости очень часто встречаются в природе и в технике, необходимо их тщательное изучение, для которого одних экспериментальных методов недостаточно. Поэтому для более глубокого их исследования необходимо создание численных методов, и, в частности, методов визуализации структуры и особенностей таких течений.

При визуализации результатов вычислительного эксперимента удаётся выявить такие особенности течений неоднородной жидкости, какие не всегда возможно, а иногда и вообще невозможно увидеть в обычном эксперименте.

В работе исследуются двумерные и трёхмерные течения неоднородной жидкости около кругового цилиндра с помощью созданного автором представленной работы комплекса программ для численного моделирования и визуализации течений жидкостей с различной степенью стратификации. Данный вычислительный комплекс был разработан для машин с параллельной архитектурой.

Для программной реализации этого метода был создан эффективный механизм параллельного счёта. Для двумерных течений впервые были численно промоделированы слои повышенной

плотности за телом, возникающие при обтекании его неоднородной жидкостью. Ранее они были обнаружены только экспериментально. Другие особенности течений неоднородной жидкости (застойная зона - блокировка жидкости перед препятствием) и возникновение внутренних волн тяжести), не свойственные течениям однородной жидкости, так же были промоделированы. Результаты численных расчётов находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными. Кроме того, обнаружена необычная, в виде «гребня», форма линий равной солёности в опережающем возмущении течения перед цилиндром, и застойные зоны в следе за цилиндром при малых скоростях течения.

В трёхмерных течениях при отсутствии экспериментальных данных были обнаружена зависимость размера области, занятой внутренними волнами в набегающем потоке вверх от передней критической точки цилиндра, от скорости течения (в данной постановке задачи - от числа  $Re$ ).

## **Одномерные течения суспензий в пористых средах с образованием конечного скачка пористости**

**Е. И. Рощин**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*  
evg.roschin@gmail.com

Настоящая работа посвящается численному изучению одномерных течений малоцентрированных суспензий через пористые материалы при оседании взвешенных частиц на пористый скелет с образованием подвижного сильного разрыва — скачка концентрации и малого конечного скачка пористости. Такие явления встречаются, например, в нефтепромысловой области (изменение свойств околоскважинной зоны пласта под воздействием технологических жидкостей), гидрогеологии (утилизация содержащих загрязняющие вещества промышленных отходов в подземных резервуарах; отток жидкости через дно водоемов с учетом кольматации), промышленной водоподготовке и фильтрации (очистка загрязненных флюидов; транспорт вирусов, бактерий и простейших в водоносных горизонтах).

В некоторых имеющихся работах (Santos A., Bedrikovetsky P., 2004, DOI: 10.1590/S0101-82052004000200009; Altoé J.E. et al., 2004, SPE 90083), связанных с этой тематикой, отмечается отставание передней границы распространения взвешенных частиц от передней границы несущей их жидкости. Одним из возможных вариантов математического описания этого явления является односкоростная (скорость несущей среды и переносимой фазы совпадают) гиперболическая модель с малым конечным скачком пористости (Леонтьев Н.Е., 2009, DOI: 10.3103/S0027133009050070).

В настоящей работе решается задача об одномерном прямолинейно-параллельном потоке суспензии при ее закачке в первоначально незагрязненный пористый пласт в рамках классического феноменологического подхода (Herzig J.P., Leclerc D.M., Le Goff P., 1970, DOI: 10.1021/ie50725a003).

Численное решение задачи строится с применением метода явного выделения скачка (shock-fitting method), при этом используется деформирующаяся система координат, связанная с положением разрыва. Преимущество такого подхода по сравнению с широко распространенными методами сквозного счета заключается в отсутствии нефизичных и трудноинтерпретируемых («размазывание» разрыва) результатов (Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю., Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений, 2001).

В гладкой области исходные нелинейные уравнения аппроксимируются схемой с центральной разностью, имеющей второй порядок точности по временной и пространственной переменной.

Предложенная методика применима для течений, описываемых произвольными уравнениями, задающими кинетику засорения пласта. Для корректности вычислений при начале расчета используется метод разложения решения в степенные ряды по пространственной и временной переменной.

Для случая нулевого и малого конечного скачка пористости приводятся численные решения для пористости и концентрации, строятся закон и скорость движения фронта засорения. Показывается наличие теоретически предсказанного замедления движения скачка и дается возможная физическая интерпретация возникновения данного явления.

Для верификации результатов производится сравнение численного решения с известными аналитическими (Леонтьев Н.Е.,

2009) в рамках простейшей кинетики засорения. Демонстрируется высокая точность вычисления параметров за фронтом.

В завершении приводится возможный путь обобщения данной задачи — рассмотрение двухскоростной гиперболической модели, в которой скорости несущей среды и переносимой фазы не совпадают (Леонтьев Н.Е., 2017, DOI: 10.1134/S0015462817010161).

Автор выражает благодарность Леонтьеву Н.Е. за полезные замечания и обсуждение данной работы.

## **Математический анализ разрушения для вариационной модели механики композитов**

<sup>1</sup>Е. М. Рудой, <sup>2</sup>В. В. Щербаков

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН  
Новосибирский государственный университет*

<sup>1</sup>rem@hydro.nsc.ru

<sup>2</sup>victor@hydro.nsc.ru

В последние десятилетия широкое распространение в авиации, космонавтике, автомобилестроении получили искусственные материалы — волокнистые композиты, состоящие из упругой матрицы, армированной высокопрочными тонкими волокнами. Использование композиционных материалов обусловлено их уникальными свойствами: высокой прочностью, малым весом, большой сопротивляемостью агрессивным средам. Опыт показывает, что уже на стадии изготовления или же на ранней стадии эксплуатации волокнистых композитов в них появляются трещиноподобные дефекты, которые оказывают существенное влияние на прочностные характеристики материалов и механизмы их разрушения.

В докладе представлены результаты исследования нелинейной краевой задачи о равновесии композита, армированного тонким упругим волокном при наличии трещины отслоения. Для описания вертикальных прогибов волокна используется полулинейное уравнение типа Кирхгофа — Бергера с нелокальным коэффициентом. На берегах трещины задаются краевые условия, имеющие вид равенств и неравенств и исключающие взаимное проникание точек упругой матрицы и волокна, что приводит к слабой постановке задачи в виде эллиптического вариационного неравенства. На основе метода малых регулярных возмущений формы

области развит математический аппарат, позволяющий проанализировать зависимость решения от длины трещины и получить формулы для скорости высвобождения энергии при продвижении трещины вдоль направления армирования. Показано, что в случаях, соответствующих локальному сдвигу и растяжению трещины, формулы для скоростей высвобождения энергии допускают представление в виде инвариантных интегралов, не зависящих от гладких замкнутых кривых, окружающих одну или обе вершины трещины. Тем самым, найдены аналоги основополагающих понятий механики разрушения (формулы Гриффитса,  $J$ -интеграла Эшелби — Черепанова — Райса и  $M$ -интеграла Ноулса — Стернберга) и установлена их связь друг с другом. Необходимо отметить, что полученные формулы отличаются от классических наличием слагаемых, зависящих от перемещений волокна. Кроме того, предложен итерационный алгоритм численного решения задачи, основанный на методе декомпозиции области и алгоритме Удзавы решения вариационных неравенств. Приведены результаты расчетов, иллюстрирующие эффективность предложенного алгоритма. Наша работа продолжает исследования, начатые в [1,2,3].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (№ 17-71-10171).

## Литература

1. Хлуднев А. М., Щербakov В. В. Сингулярные инвариантные интегралы для упругих тел с тонкими упругими включениями и трещинами // Доклады Академии наук. 2016. Т. 471, № 4. С. 425–429.
2. Khludnev A. M., Shcherbakov V. V. Singular path-independent energy integrals for elastic bodies with Euler–Bernoulli inclusions // Mathematics and Mechanics of Solids. Published ahead of print 29 August 2016. DOI 10.1177/1081286516664208.
3. Rudoy E. Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition // ESAIM: Mathematical Modeling and Numerical Analysis. 2016. Vol. 50, No. 4, pp. 99–1009.

# Спиральные течения на плоскости потенциала

А. И. Рылов

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН*

rylov@math.nsc.ru

Рассматривается плоское потенциальное спиральное течение Толлмина, в котором, как известно, изобары являются логарифмическими спиралями [1]. Важной особенностью работы [1] как раз и является то, что в качестве одного из семейств координатных линий изначально использовались логарифмические спирали. В настоящей же работе принципиальной особенностью является использование плоскости потенциала и возможных точных решений на этой плоскости.

В основе доклада лежит относительно мало известная система уравнений газовой динамики

$$kU_\varphi - V_\psi = 0, \quad U_\psi + V_\varphi = 0 \quad (1)$$

Эта система создавалась в свое время для анализа линий уровня нулевых компонент вектора ускорения [2,3]. Соответственно, зависимые переменные системы (1) являются некоторыми комбинациями производных от газодинамических параметров, взятых вдоль линии тока. Детали построения системы (1) и соответствующие обозначения приведены в [2,3].

В рассматриваемом случае система (1) интересна тем, что она имеет очевидное частное решение для произвольной постоянной  $\mu$

$$U = \mu\psi, V = -\mu\varphi \quad (2)$$

Совместный анализ системы (1) и решения (2) показывает, что на плоскости потенциала решению (2) отвечает веер лучей (он же веер изобар)  $\lambda = \psi/\varphi$ , что достаточно очевидно. Но более детальный анализ показывает, что на физической плоскости каждому из этих лучей отвечает своя логарифмическая спираль.

При переходе от луча к лучу производная  $z_\lambda$  имеет вид

$$z_\lambda = \frac{dz}{d\lambda} = -\frac{1}{\mu(k\lambda^2 + 1)} \quad (3)$$

Здесь

$$z = z(q) = \int \frac{\rho}{q} dq, \quad k = k(z) = \frac{1 - M^2}{\rho^2}$$

Равенство (3) полезно как при анализе особенностей рассматриваемого спирального течения, так и при численном анализе. В частности, на предельном луче, на котором  $z_\lambda = \pm\infty$ , имеем:  $M > 1$ ,  $k < 0$ , а также

$$k\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda^2 = -k^{-1}$$

Детали изложены в недавней статье [4].

### Литература

1. W.Tollmien, Z. angew. Math. Mech. 17 (1937), pp. 117-136.
2. Рылов А.И. Сибирский журнал индустриальной математики. 1998. Т.1. №2. С.169-174.
3. Рылов А.И. Прикладная математика и механика (ПММ), 2006, Т.70. В. 3. С. 400-411.
4. Рылов А.И. ДАН, 2017, том 472, №2.

## Циклы Пуанкаре и неравновесная термодинамика

**Т. В. Сальникова**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*  
tatiana.salnikova@gmail.com

Анри Пуанкаре рассматривает бесстолкновительную сплошную среду на отрезке прямой с упругими отражениями от концов отрезка - одномерный газ. Независимо от начального распределения газ необратимо стремится равномерно заполнить интервал. Каждая молекула газа возвращается к своему начальному состоянию бесконечно много раз. Однако эта индивидуальная возвращаемость не является равномерной, что приводит к необратимому поведению рассматриваемой системы.

Пусть к находящемуся в равновесии одномерному газу приближено гравитирующее тело, а после того, как газ снова придет в состояние равновесия, тело убирается. После этого газ снова

стремится равномерно заполнить интервал. Итак, газ осуществляет замкнутый цикл, который В.В.Козлов определил как цикл Пуанкаре, подобно циклу Карно. Но в отличие от цикла Карно цикл Пуанкаре неравновесный и необратимый.

Мы рассматриваем начальную функцию плотности вероятности распределения по скоростям, пропорциональную квадрату скорости. В частности, распределение Максвелла не удовлетворяет этому условию. Добавим силовое поле и подождем, пока система придет в состояние равновесия. Затем уберем силовое поле и снова дождемся равновесного состояния. Повторяя эти циклы, мы получим различные промежуточные типы плотности и ее асимптотическое поведение. Оказывается, что при многократном повторении циклов Пуанкаре плотность распределения вероятности необратимо стремится к распределению Максвелла.

## **Обтекание гиперзвуковых летательных аппаратов в условиях поверхностного разрушения**

**Н. И. Сидняев**

*МГТУ имени Н.Э. Баумана*

*sidn\_ni@mail.ru*

В работе рассматривается влияние продуктов разложения различных компонентов несущей поверхности летательных аппаратов, движущихся в воздухе с гиперзвуковой скоростью, на течение в ударном слое в достаточно широком диапазоне чисел Рейнольдса. При этом учитываются такие важные физические эффекты, как неравновесные физико-химические превращения, торможение газа в головной ударной волне, неоднородность внешнего потока. Представлены современные подходы к решению проблемы полета гиперзвуковых летательных аппаратов, основанные на совместном рассмотрении задач динамики, аэромеханики и теплообмена. Разработаны математические модели, численные алгоритмы для расчета газодинамических параметров пристеночного слоя обтекаемых поверхностей высокоскоростных летательных аппаратов в условиях поверхностного теплообмена. Показана существенная роль эффекта поверхностного массообмена

при определении аэродинамических характеристик комбинированных тел вращения. При этом учитываются такие важные физические эффекты, как неравновесные физико-химические превращения, торможение газа в головной ударной волне, неоднородность внешнего потока. Предложены физические и математические модели исследуемых многофазных течений с учетом физико-химических превращений и разработаны численные методы расчета стационарного и нестационарного сверхзвукового обтекания тел различных конфигураций в условиях теплообмена.

В докладе сформулированы и обоснованы основные требования, предъявляемые к управляющим системам, когда массообменный эффект отесняет пограничный слой. Созданы методики расчета при теплообмене, позволившие провести оптимизацию нестационарных динамических характеристик. Исследовано обтекание различных моделей тел сложной геометрической формы с учетом физико-химических превращений, распределений давлений и тепловых потоков по их поверхности, а также газодинамических характеристик тел как в условиях распределенного поверхностного массообмена, так и при сосредоточенном.

Автором представлены исследования по обтеканию различных тел гиперзвуковым потоком газа, испытывающих значительный аэродинамический нагрев, различные способы защиты от нагрева и соответствующие физические модели, обусловленные разнообразием конструкций теплонагруженных поверхностей. Математические модели, численные алгоритмы и методы решения уравнений газовой динамики, основанные на разностном представлении уравнений, и соответствующие расчеты характеристик ударного и пограничного слоев при обтекании комбинированных тел вращения в условиях разрушения поверхности. Методики и программы численной реализации задачи сверхзвукового обтекания сублимирующей стенки с истекающей газовой струей, основанная на построении разностной схемы, а также результаты исследований газодинамических характеристик взаимодействия системы "сублимирующая стенка - сверхзвуковой поток - струя" для установившихся движений. Математические модели обтекания колеблющегося в потоке гиперзвукового летательного аппарата в рамках системы уравнений Навье-Стокса с учетом влияния распределенного массообмена на динамическую устойчивость осесимметричных тел вращения, распределение давления по поверхности комбинированных тел и на вращательные произ-

водные с учетом амплитуды колебаний модели [1] на различных углах атаки. Математические модели обтекания затупленных тел, основанные на совместном рассмотрении задач гиперзвукового течения газа и гетерогенных каталитических процессов в рамках теории пограничного слоя. Результаты численного моделирования по определению параметров пограничного слоя в дозвуковом и сверхзвуковом потоках для затупленных тел при произвольных скоростях химических реакций с учетом массообмена различных компонентов через поверхность тела, обтекаемого высокотемпературным газом.

### **Литература**

1. Сидняев Н.И. Метод расчета нестационарного обтекания тела вращения с поверхностным массообменом в рамках параболизированных уравнений Навье-Стокса // Математическое моделирование. -2004, т.16, №5, С.55-65.

## **Осаждение частиц при течении суспензии через пористые среды**

**Д. А. Сидорова**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*  
d.tatarenkova@mail.ru

Доклад посвящен изучению процесса фильтрации взвеси твердых частиц при течении в пористой среде. Интерес к этой тематике связан с тем, что фильтрация суспензий встречается в различных областях жизнедеятельности человека, в частности в нефтяной индустрии, гидрогеологии и в задачах промышленной очистки жидкостей [Шехтман Ю.М. Фильтрации малоконцентрированных суспензий. М.: Изд-во АН СССР, 1961; Herzig J.P., Leclerc D.M., Le Goff P. Flow of suspensions through porous media. Application to deep filtration // Industrial and Engineering Chemistry, 1970, Vol. 62, No. 5, P. 8–35].

Рассмотрена задача о засорении пористого пласта при закачке малоконцентрированной суспензии с учетом оседания частиц на

скелет. Получено общее аналитическое решение начальной задачи Коши для нелинейной системы, описывающей одномерные (с плоскими волнами) течения. Указан ряд решений, выражающихся в элементарных функциях [Леонтьев Н.Е., Татаренкова Д.А. Точные решения нелинейных уравнений течения суспензии в пористой среде // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2015, № 3, с. 49–54]. Кроме этого, в докладе обсуждаются некоторые вопросы, связанные с численным решением задачи с учетом образования скачка концентрации. Описываются вариант конечно-разностной схемы для расчета одномерных течений и результаты ее тестирования (численная оценка порядка сходимости, тестирование на точных решениях).

## О точных решениях уравнений термодиффузии при различных зависимостях плотности

**И. В. Степанова**

*Институт вычислительного моделирования, Красноярск*  
stepiv@icm.krasn.ru

Работа посвящена построению и анализу точных решений уравнений термодиффузионной конвекции, описывающих однонаправленные стационарные течения бинарных смесей. Течения такого типа могут быть реализованы в достаточно протяженных вертикальных и горизонтальных слоях, границы которых поддерживаются при разных постоянных или меняющихся по заданному закону температурах.

**Математическая модель.** Рассматривается бинарная смесь с уравнением состояния

$$\rho = \rho_0 F(T, C),$$

где  $\rho_0$  — плотность смеси при средних значениях температуры  $T_0$  и концентрации  $C_0$ ,  $T$  и  $C$  — отклонения от средних значений. Предполагается, что  $C$  — концентрация легкой компоненты. Уравнения движения при заданном уравнении состояния имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\rho_0^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + F(T, C) \mathbf{g}, \\ T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \chi \Delta T, \quad C_t + \mathbf{u} \cdot \nabla C = D \Delta C + D_T \Delta T, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В системе (1) все обозначения стандартны,  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $D$ ,  $D_T$  – коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, диффузии и термодиффузии соответственно. При нормальной (аномальной) термодиффузии легкий компонент накапливается в более нагретой (более холодной) области, что соответствует  $D_T < 0$  ( $D_T > 0$ ).

**Точные решения системы (1).** Поскольку в уравнениях (1) содержится произвольная функция  $F(T, C)$ , система становится незамкнутой. Для конкретных расчетов можно использовать экспериментальные зависимости или, следуя работам Л.В. Овсянникова [1] и его учеников, искать функцию  $F$  с помощью техники группового анализа. Так, в работе автора [2] посредством метода симметрий вычислены возможные представления функции  $F$  допускаемые при этих зависимостях преобразования переменных в системе (1). Вычисленные преобразования позволяют уменьшить число зависимых и/или независимых переменных в системе и, сведя ее к более простому виду, построить точные решения.

В данной работе представлены два класса решений. Первый – для описания стационарного однонаправленного течения в вертикальном слое в случае линейной зависимости силы плавучести от концентрации и произвольной от температуры. Общее решение уравнений (1) построено в квадратурах. Для случая, когда зависимость  $F$  от температуры квадратичная, решение поставленной краевой задачи демонстрирует конвективное течение, состоящее из трех частей разной интенсивности: вблизи стенок жидкость опускается вниз, в центре понимается вверх, что соответствует большим у стенок и малым в центре значениям функции  $F$ . Второй класс решений соответствует описанию горизонтальных течений при заданных законах распределения температуры на твердых стенках. Рассмотрены обобщения решения Остроумова–Бириха [3] на случай экспоненциального и квадратичного распределения температуры на стенках. Такая постановка граничных условий налагает ограничения на вид функции  $F$ . Для обеих зависимостей построены точные решения поставленных краевых задач, проанализированы возникающие частные случаи. Показано, что полученные режимы конвективного течения являются обобщениями известных ранее решений, описывающих течения с постоянным продольным градиентом температуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-4519.2016.1).

## Литература

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Stepanova I. V.* Group classification for equations of thermodiffusion in binary mixture// Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 18, 2013, P. 1341–1346.
3. *Бирих Р.В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости// ПМТФ, 3, 1966, С. 69–72.

## Движение области поверхностного давления в условиях неоднородного ледяного покрова

<sup>1</sup>И. В. Стурова, <sup>2</sup>Л. А. Ткачева

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,  
Новосибирск*

<sup>1</sup>sturova@hydro.nsc.ru

<sup>2</sup>tkacheva@hydro.nsc.ru

Задача о поведении ледяного покрова под действием движущейся нагрузки изучается с одной стороны с целью разрушения ледяного покрова с помощью судов на воздушной подушке [1], а с другой – использования ледяного покрова в качестве переправ и плавающих платформ различного назначения. В последнем случае необходимо знать несущую способность ледяного покрова. В настоящее время наиболее полно изучена задача о движении внешней нагрузки по безграничному однородному ледяному покрову [2]. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной, плавающей на поверхности воды. Однако в реальных условиях ледяной покров не является однородным, так как может покрывать не всю верхнюю границу жидкости, а только ее часть, а также в нем могут существовать трещины и разводья. Влияние таких сложных граничных условий на поведение волнового движения находится в начальной стадии изучения.

Ранее в двумерной постановке исследованы волновые движения, возникающие при колебаниях погруженного горизонтально-го цилиндра в случаях ледяного покрова как конечной, так и

полубесконечной ширины, а также разводя между двумя полубезграничными ледовыми полями с различными свойствами [3,4]. Получены аналитические решения трехмерных задач о поведении полубесконечного ледяного покрова, а также бесконечного ледяного покрова с прямолинейной частично смерзшейся трещиной под действием локализованной периодической по времени внешней нагрузки [5].

В данной работе представлено решение трехмерной стационарной задачи о поведении полубесконечного ледяного покрова под действием локализованной внешней нагрузки, движущейся с постоянной скоростью вдоль его прямолинейного края. Рассмотрены три случая: 1) вне ледяного покрова поверхность жидкости является свободной, 2) две полубесконечные ледяные пластины с различными свойствами и свободными краями разделены трещиной, 3) жидкость ограничена твердой вертикальной стенкой и край ледяного покрова, примыкающий к стенке, может быть как заземленным, так и свободным. Задача решается в линейной постановке, жидкость предполагается идеальной и несжимаемой, а ее движение – потенциальным.

Решения получены с использованием преобразования Фурье двумя способами: методом Винера–Хопфа и сращиванием разложений по вертикальным собственным функциям. Сопоставление результатов показало их хорошее согласование. Определены возвышения ледяного покрова и свободной поверхности при различных скоростях движения внешней нагрузки прямоугольной формы. Исследовано влияние скорости нагрузки на характер волнового движения при докритическом и сверхкритическом режимах, а также на силы и момент, действующие на внешнюю нагрузку.

### Литература

1. *Экспериментально-теоретические исследования зависимости параметров распространяющихся в плавающей пластине изгибно-гравитационных волн от условий их возбуждения.* Под ред. В. М. Козина. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2016.
2. Squire V. A., Hosking R. J., Kerr A. D., Langhorne P. J., *Moving Loads on Ice Plates.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
3. Sturova I. V. *Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya.* J. Fluid Mech. 2015. V. 784. P. 373–395.

4. Ткачева Л. А. *Колебания цилиндрического тела, погруженного в жидкость, при наличии ледяного покрова*. ПМТФ. 2015. Т. 56. №. 6. С. 173–186.
5. Ткачева Л. А. *Краевые волны в жидкости под ледяным покровом с трещиной*. ДАН. 2017. Т. 473. №. 5. С. 545–551.

## **Эволюция фазово-структурной деформации в охлаждающемся пакете стержней из сплава с памятью формы**

**К. А. Тихомирова**  
*ИМСС УрО РАН, Пермь*  
tikhomirova.k@icmm.ru

Рассматривается задача об охлаждении пакета стержней из сплава с памятью формы, находящихся изначально в недеформированном аустенитном состоянии при температуре  $T_1$  и имеющих одинаковую длину. Стержни расположены горизонтально друг над другом, их края соединены шарнирно с жесткими стенками, ограничивающими пакет. Учтена возможность воздействия на боковые стенки управляющей нагрузки (продольная сила, изгибающий момент). Предполагается, что трение между стержнями и поперечные усилия отсутствуют, а деформация изменяется линейно по высоте пакета, что соответствует возможности жесткого горизонтального смещения и поворота боковых стенок. При этом каждый стержень испытывает одноосное растяжение или сжатие. Охлаждение происходит через поверхность крайнего стержня за счет теплообмена с окружающей средой (граничные условия III рода), имеющей температуру  $T_2$ , такую что после установления теплового равновесия все стержни находятся в мартенситном состоянии. Остальные поверхности теплоизолированы. Считается, что в процессе охлаждения температура одинакова внутри каждого стержня и изменяется от стержня к стержню по высоте пакета, при этом переход каждого стержня в мартенситное состояние осуществляется постепенно в интервале температур прямого превращения. Теплота, выделяемая в процессе фазового перехода, также оказывает влияние на изменение температурного

поля. Неоднородность поля температур приводит к неравномерному распределению фазовой деформации по высоте пакета, что, в свою очередь, вызывает перераспределение усилий в стержнях и может приводить к структурному деформированию образовавшегося ранее мартенсита.

Для расчета используется феноменологическая модель [1], являющаяся отчасти интегральным аналогом дифференциальной модели А.А. Мовчана [2], но по-иному описывающая процессы структурного деформирования, ориентированного превращения и обратного фазового перехода. Интегральная модель [1] позволяет учесть полную историю деформирования материала, что важно при описании явлений, связанных с фазовым переходом под действием изменяющегося напряжения. Учитывается возможность протекания в стержнях следующих процессов: образование температурного мартенсита (при охлаждении) и мартенсита напряжения (при возрастании нагрузки), а также смещение характерных температур превращения от действия напряжения; полное или частичное обратное превращение при снижении нагрузки; структурное превращение при увеличении (по модулю) нагрузки того же знака или при изменении знака нагрузки; ориентированное превращение при охлаждении под снизившейся (по модулю) нагрузкой. Кроме того, учтена асимметрия накопления фазово-структурной деформации в сплавах с памятью формы при растяжении и сжатии.

Задача решена методом конечных разностей, проведено практическое исследование сходимости численного решения. При вычислении деформации используется суммирование упругой и фазово-структурной ее составляющих. В результате получена зависимость напряжения и фазово-структурной деформации для каждого стержня от времени, а также распределение напряжений и деформаций по высоте пакета в каждый момент времени в процессе охлаждения. Сделан вывод о необходимости учета деформации структурного и ориентированного превращения при анализе эволюции напряженно-деформированного состояния конструкции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №16-31-00161-мол\_а).

## Литература

1. Тихомирова К.А. Разработка и численная реализация одно-

мерной феноменологической модели фазовой деформации в сплавах с памятью формы // Вычисл. мех. сплош. сред. - 2016. - Т. 9, № 2. - С. 192-206.

2. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // Изв. РАН. МТТ. - 2014. - № 1. - С. 37-53.

## Об использовании Ньютоновского потенциала, равного константе внутри односвязной области, при моделировании струй идеальной несжимаемой жидкости

**Н. А. Трубаев**

*Российский университет транспорта (МИИТ)*

trubaevn@umail.ru

Представление гармонической функции, равной константе внутри односвязной области, Ньютоновским потенциалом простого слоя  $V(\xi)$  (1), заданным на поверхности  $S$ , являющейся границей области, единственно [1]:

$$V(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\xi(q)}{r(p,q)} dS_q, \quad (1)$$

где  $r(p, q)$  - расстояние между точками  $p$  и  $q$ ,  $\xi$  - функция плотности.

Предельные значения (1) изнутри области (индекс '+') и снаружи области (индекс '-'):

$$\left[ \frac{\partial V(\xi)}{\partial n} \right]^\pm = \pm \xi(p) + \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\xi(q)}{r(p,q)} \right) dS_q. \quad (2)$$

Из (2) очевидно, что если  $V(\xi)$  равен константе внутри области, то предельные значения изнутри области равны нулю, а снаружи области - удвоенной плотности  $\xi$  с обратным знаком.

Пусть нужно смоделировать поток идеальной несжимаемой жидкости вблизи трехмерной незамкнутой поверхности  $\hat{S}$ , на которой нужно обеспечить выполнение условия непротекания - равенства нулю нормальной к поверхности компоненты скорости

потока. Если мы дополним поверхность  $\widehat{S}$  до поверхности некоторой односвязной области, на которой задан потенциал  $V(\xi)$ , равный внутри области константе, так чтобы предельные значения на  $\widehat{S}$  его нормальной производной снаружи области имели величины нормальной компоненты скорости невозмущенного потока, то разность гармонической функции, градиент которой - скорость невозмущенного потока, и потенциала  $V(\xi)$ , будет задавать функцию, градиент которой - скорость потока обтекающей поверхность  $\widehat{S}$ .

В докладе приводится геометрический способ построения функции плотности  $\xi$  потенциала  $V(\xi)$ , равного константе внутри произвольной односвязной области, и обобщение способа на плоский случай для логарифмического потенциала. Указываются особенности поведения искомой функции плотности вблизи угловых и конических точек. Приводятся примеры применения способа при моделировании задач: о падении косої струи на плоскость, о затопленной струе, об обтекании угловой стенки с завихренной зоной вблизи вершины угла.

### Литература

1. Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. —М.Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1946.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. —М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973.
3. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. — М.: Мир, 1964.

### Численный анализ устойчивости контактного разрыва в задаче о взрыве

Ю. В. Туник

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

tunik@imec.msu.ru

Задача о взрыве впервые была поставлена и решена Л.И. Седовым в предположении о точечном источнике инициирования и

высокой интенсивности ударной волны [1,2]. В последующих работах изучаются различные аспекты взрывных процессов. История теории взрыва подробно изложена в [3,4]. Появление конечно-разностных численных методов сквозного счета позволило моделировать разрывные решения уравнений гидродинамики и способствовало развитию исследований. В настоящее время задача о взрыве стала рассматриваться в качестве одной из тестовых для современных численных схем высокого порядка точности. Выполненные на их основе расчеты с учетом противодействия и конечной области инициирования взрыва указывают на развитие неустойчивости контактного разрыва (см., например, [5]). Утверждается, что это проявление неустойчивости Рихтмайера - Мешкова [6].

В данной работе для решения задачи о цилиндрическом взрыве с учетом противодействия и конечного размера области инициирования используются разработанные модификации схемы С.К. Годунова, повышающие точность расчетов по пространственным переменным. Применительно к системе уравнений распространения плоских звуковых волн эти схемы исследуются на неубывание энтропии, что позволяет надеяться на получения физически обоснованных численных решений. Решены тестовые задачи о распаде разрыва в трубе и о трансформации неоднородности в потоке невязкого газа.

Анализ численных решений задачи о взрыве в полярной системе координат не подтверждает развития неустойчивости контактного разрыва, имеющего форму окружности в начальный момент (рис. 1). В случае первоначально возмущенного контактного разрыва изменение его формы обусловлено, в основном, неустойчивостью Тейлора [7] (рис. 2), а не Рихтмайера - Мешкова.

## Литература

1. Седов Л.И. Теория подобия и размерности в механике. 3-е изд. Гостехиздат. 1954. 328 с.
2. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука. 1967. 428 с.
3. Коробейников В.П. Задачи теории точечного взрыва. М.: Наука. Гл. редакция физико-математической литературы. 1985. 400с.

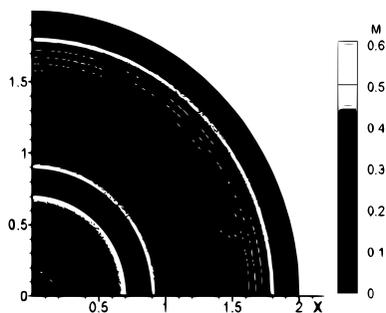


Рис. 1: Изохоры на фоне числа Маха при круговой форме контактного разрыва в начальный момент времени

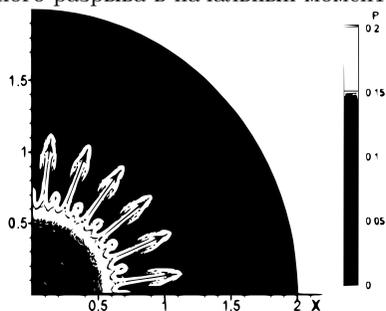


Рис. 2: Изохоры на фоне давления в случае синусоидального возмущения контактного разрыва в начальный момент времени

4. Седов Л.И., Коробейников В.П., Марков В.В. Теория распространения взрывных волн. Теоретическая и математическая физика. Сборник обзорных статей 3. Труды МИАН СССР. 175. 1986. С. 178-216.
5. Liska R., Wendroff B. Comparison of several different schemes on 1D and 2D test problem for the Euler equations. SIAM Journal on Scientific Computing. (Society for Industrial and Applied Mathematics). 2003. V. 25. No. 3. Pp. 995-1017.
6. Мешков Е.Е. Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной. Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. №5. С. 151-158.
7. Taylor J. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I. Proc. Roy Soc. J. Lond. 1950. Ser. A, vol. 201. No 1065. Pp. 192-196.

## Неустановившееся электровращение капли в постоянном электрическом поле

А. Н. Тятюшкин

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

*tan@imec.msu.ru*

Теоретически исследуется изменение формы капли вязкой слабопроводящей поляризуемой жидкости, взвешенной в несмешивающейся с ней вязкой слабопроводящей поляризуемой жидкости, в постоянном электрическом поле. Под действием приложенного электрического поля в капле и в окружающей ее жидкости возникают электрогидродинамические течения. Кроме того, при определенных условиях имеет место электровращение капли. В результате в постоянном электрическом поле капля, деформируясь, либо стремится принять некоторую стационарную форму, либо совершает деформационные колебания.

Аналитически решается задача о неустановившемся электрогидродинамическом течении внутри и вне капли и ее электровращении в приложенном однородном постоянном электрическом поле с учетом влияния как поверхностного тока проводимости, так и поверхностного конвективного электротока. Отношение вязкости капли к вязкости окружающей жидкости считается достаточно большим. Рассматриваются малые нестационарные деформации с достаточно большим характерным временем, для которых можно считать каплю сферической и использовать приближения квазистационарного электрического поля и квазиустановившегося течения при расчете поля и течения.

Напряженность электрического поля, а также скорость и давление в электрогидродинамическом течении найдены для случая произвольного отношения вязкости капли к вязкости окружающей жидкости в виде рядов с коэффициентами, зависящими от времени, для которых получены соотношения, позволяющие их определить. С использованием этих соотношений коэффициенты ищутся в виде асимптотических разложений по малому параметру, соответствующему большому отношению вязкости жидкости капли к вязкости окружающей ее жидкости. Установлено, что с точностью до членов нулевого порядка электрическое поле определяется дипольным моментом капли, а поправки первого порядка к полю определяются поправкой первого порядка к дипольному моменту и октупольным моментом. Получены соотношения

для членов нулевого, первого и второго порядков асимптотических разложений коэффициентов, определяющих электрическое поле. Для асимптотических разложений коэффициентов, определяющих течение и форму капли, получены соотношения для членов нулевого, первого и второго порядка. В частности получены дифференциальные уравнения, позволяющие найти с точностью до членов первого порядка электрические дипольный и октупольный моменты капли и угловую скорость электровращения, и дифференциальные уравнения, определяющие форму капли с точностью до членов второго порядка. Найдены в явном виде стационарные решения этих уравнений и исследована их устойчивость.

Установлено, что кроме всегда существующего стационарного решения без электровращения при выполнении определенных условий существуют также и стационарные решения с электровращением, которые определены с точностью до направления вектора угловой скорости электровращения. Если выполняются условия существования решений с электровращением, то все эти решения являются устойчивыми, а решение без электровращения — неустойчиво. Если же условия существования решений с электровращением не выполняются, то решение без электровращения является устойчивым. Таким образом, всегда существует устойчивое стационарное решение. Отсюда можно сделать вывод о том, что при выполнении условий применения используемых при решении задачи приближения малых деформаций и приближения квазиустановившегося течения наблюдавшегося в экспериментах перехода к деформационным колебаниям не происходит.

Установлено, что с точностью до членов первого порядка стационарная форма капли представляет собой эллипсоид общего вида, средняя ось которого направлена вдоль вектора угловой скорости капли, а малая и большая образуют с вектором напряженности приложенного электрического поля некоторые углы. Получены явные выражения для этих углов. С точностью до членов второго порядка капля принимает форму, которая описывается уравнением четвертого порядка.

Работа частично поддержана РФФИ (проекты № 16-01-00157-а и № 14-01-00056-а).

# Трехволновой резонанс в задачах газовой динамики

Д. В. Украинский

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*  
d.v.ukrainskiy@gmail.com

В гиперболических системах уравнений с низшей квадратичной степенью нелинейности характерной является проблема взаимодействия трех бегущих волн с медленно изменяющимися амплитудами и фазами, сумма «гармонических» фаз которых точно равна нулю [1,2]. В рамках изэнтропического движения совершенного идеального газа на постоянном однородном фоне решаются следующие две задачи: одномерная нестационарная задача с плоскими волнами и двумерная стационарная задача с потенциальным сверхзвуковым полем скорости. Возмущения фона считаются относительно малыми. Волны вызываются подходящими краевыми условиями: специальным движением поршня или формой обтекаемой поверхности. Выведены уравнения изменения амплитуд и фаз волн, проведены аналитические исследования их решений. В общем случае решение представляется в эллиптических функциях или, при определенных условиях, — в элементарном виде. Ключевым является эффект резонансного взаимодействия амплитуд и фаз мод. Как правило, данный процесс периодичен. Решения существуют на временах движения частиц газа, обратно пропорциональных амплитуде волны. В стационарном случае решение задачи соответствует известным экспериментальным картинам. В одномерной нестационарной задаче обсуждаются вопросы, связанные с неоднородностью фона. Автор выражает благодарность профессору А.Н. Голубятникову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

## Литература

1. Филлипс О.М. Взаимодействия волн // Нелинейные волны. Под редакцией С. Лейбовича, А. Сибасса. Перевод с английского языка под редакцией А.В. Гапонова, Л.А. Островского. М.: Мир. 1977. Глава 7. Страницы 197–220.
2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. Перевод с английского языка В.И. Мацаева, В.П. Гурария, под редакцией А.Б. Шабата. М.: Мир. 1988.

# Анализ возможностей нелинейного соотношения наследственности Работнова и линейного соотношения вязкоупругости

А. В. Хохлов

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

andrey-khokhlov@ya.ru

Исследуются линейное определяющее соотношение (ОС) вязкоупругости Больцмана-Вольтерры с произвольной функцией ползучести  $\Pi(t)$  и обобщающее его нелинейное соотношение Ю.Н. Работнова [1,2] с двумя материальными функциями (МФ)

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) \varphi'(\varepsilon(t)) d\varepsilon(\tau) \quad (1)$$

с целью уточнения и сравнения их областей применимости, спектров моделируемых ими реологических эффектов, наблюдаемых в испытаниях реономных материалов, и способов идентификации, настройки и верификации. При минимальных ограничениях на МФ  $\Pi$  и  $\varphi$  ОС (1) (для линейного ОС  $\varphi(u) = u$ ) выведены и аналитически изучены [3-7] уравнения семейств порождаемых этими двумя ОС базовых квазистатических кривых: кривых релаксации и ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, ползучести при ступенчатых нагружениях, длительной прочности, диаграмм деформирования и разгрузки при постоянных и кусочно постоянных скоростях деформирования (или нагружения) и при циклическом нагружении и др. Исследованы общие свойства кривых в зависимости от МФ и параметров программ нагружения: интервалы монотонности и выпуклости, скачки и изломы, асимптотики и двусторонние оценки, характер сходимости семейств кривых при стремлении параметров программ нагружения (скорости деформирования или нагружения, длительности начальной стадии и др.) к нулю и бесконечности, условия затухания памяти, влияние перестановки ступеней нагружения на асимптотику кривых и остаточную деформацию и т.п.

На основе сопоставления общих свойств теоретических кривых ОС с набором основных качественных свойств типичных экспериментальных кривых вязкоупругоупругих материалов (с целевым списком моделируемых эффектов) выведены минимальные необходимые ограничения на МФ, обеспечивающие адекватное описание кривых испытаний, изучено влияние характеристик

МФ на свойства теоретических кривых, которыми можно управлять. Выявлены эффекты, которые ОС (1) принципиально не может описать ни при каких МФ (например, убывание диаграммы деформирования, отрицательная скоростная чувствительность), и эффекты, которые могут быть описаны при определённых дополнительных ограничениях, наложенных на МФ (наличие точек перегиба на кривых ползучести и деформирования, ускоряющаяся ползучесть, эффект Кольрауша, затухание памяти, асимптотическая коммутативность, (не)ограниченное накопление пластической деформации при циклических нагружениях и т.п.).

Проведённый анализ позволил очертить область применимости и арсенал возможностей нелинейного ОС (1) по описанию поведения реономных материалов, сопоставить его с арсеналом линейного ОС вязкоупругости, указать как наследуемые свойства, так и дополнительные возможности нелинейного ОС по сравнению с линейным и выявить характерные особенности поведения кривых ОС (1), которые могут служить индикаторами применимости ОС, удобными для экспериментальной проверки.

*Работа поддержана РФФИ (грант № 17-08-01146 а)*

## Литература

1. Работнов Ю.Н. Некоторые вопросы теории ползучести // Вестник МГУ. 1948. № 10. С. 81-91.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Хохлов А.В. Кривые ползучести и релаксации нелинейного определяющего соотношения Работнова для вязкоупругопластичных материалов // Проблемы прочности и пластичности. 2016. Вып. 78. № 4. С.452-466.
4. Хохлов А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 3. С.93-123.
5. Хохлов А.В. Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов // Изв. РАН. МТТ (в печати).

6. Хохлов А.В. Характерные особенности семейств кривых деформирования линейных моделей вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Вып. 77. № 2. С.139-154.
7. Хохлов А.В. Качественный анализ общих свойств теоретических кривых линейного определяющего соотношения вязкоупругости // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. №5. С.187-245.  
<http://technomag.edu.ru/doc/840650.html>.
8. Khokhlov A.V. General properties of relaxation curves in the case of the initial stage of strain with a constant rate in the linear heredity theory // Moscow University Mechanics Bulletin. 2017. Vol. 72, no. 3. P. 55–58.

## Моделирование влияния температуры на кривые нагружения, ползучести и релаксации нелинейной модели типа Максвелла

**А. В. Хохлов**

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова*

andrey-khokhlov@ya.ru

Доклад продолжает цикл статей [1–5] по системному исследованию физически нелинейного определяющего соотношения (ОС)

$$\varepsilon(t) = E^{-1}F(\sigma(t)) + \eta^{-1} \int_0^t V(\sigma(\tau))d\tau, \quad t > 0, \quad (1)$$

для изотермических процессов деформирования реономных материалов: по аналитическому изучению общих свойств кривых релаксации, ползучести, длительной прочности и циклического нагружения, порождаемых ОС (1), комплекса моделируемых им реологических эффектов, способов идентификации и настройки.

ОС (1) содержит две материальные функции (МФ):  $F(x)$ ,  $V(x)$ ,  $x \in (\omega_-, \omega_+)$ ,  $\omega_- < 0$ ,  $\omega_+ > 0$ ;  $F$  задаёт упругую деформацию,  $V$  – вязкопластическую. Минимальные ограничения на МФ:  $F(x)$  – непрерывная строго возрастающая кусочно-гладкая

функция,  $V(x)$  – непрерывная (нестрого) возрастающая функция,  $V(0) = 0$ ,  $F(0) = 0$ . Они обеспечивают, в частности, возрастание кривых нагружения и ползучести, убывание кривых релаксации и длительной прочности и положительность работы напряжения и неотрицательность диссипации в произвольном процессе деформирования [1,2]. Параметры  $E > 0$  и  $\eta > 0$  выделены из МФ для удобства учёта влияния температуры в форме  $E(T)$  и  $\eta(T)$ .

В результате анализа свойств кривых ползучести, релаксации и нагружения ОС (1) и их сравнения с типичными свойствами кривых квазистатических испытаний вязкоупругопластичных материалов при разных температурах (свидетельствующих о возрастании податливости, скорости диссипации и скоростной чувствительности с ростом  $T$ ) выявлены ограничения на  $E(T)$  и  $\eta(T)$ . Доказано [3], что кривые, порождаемые ОС (1), ведут себя качественно так же, как и кривые испытаний большинства стабильных материалов на ползучесть, релаксацию, нагружение с постоянной скоростью, усталость и рэтчетинг, лишь при условии, что  $E$ ,  $\eta$  и  $\tau = \eta/E$  – *убывающие функции температуры*. Из их убывания следует, что рост температуры вызывает следующие изменения в поведении модели (1) [3]: 1) мощность диссипации и работа напряжения для любой программы нагружения возрастают; 2) скорости релаксации и ползучести растут; 3) кривые ползучести ОС (1) при растяжении смещаются вверх; 4) кривые релаксации и нагружения (с постоянными скоростями деформирования или нагружения) смещаются вниз, касательный модуль и предел текучести убывают, а скоростная чувствительность усиливается; 5) напряжение течения и мгновенный модуль (при фиксированной скорости деформирования) понижаются; 6) накопленная пластическая деформация возрастает; 7) рэтчетинг ускоряется.

Анализ показал [1–5], что ОС (1) можно применять для описания комплекса реологических эффектов, типичных для материалов с памятью и положительной скоростной чувствительностью, для которых характерны ползучесть с постоянной скоростью, выраженная площадка текучести на диаграммах деформирования, неограниченное нарастание пластической деформации при циклическом нагружении (рэтчетинг без стабилизации и приспособляемости) и увеличение податливости, скоростной чувствительности, скоростей диссипации, релаксации, ползучести и рэтчетинга с ростом температуры. Подобное поведение демонстрируют многие полимеры, их расплавы и растворы, твёрдые топлива,

асфальтобетоны, льды, титановые и алюминиевые сплавы, материалы в режимах сверхпластического деформирования.

### Литература

1. Khokhlov A.V. Properties of a Nonlinear Viscoelastoplastic Model of Maxwell Type with Two Material Functions. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2016. Vol. 71, no. 6. P. 132–136.
2. Хохлов А.В. Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования поврежденности при ступенчатых нагружениях. *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки*. 2016. 20, № 3. С. 524–543.
3. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: моделирование влияния температуры на кривые деформирования, релаксации и ползучести. *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки*. 2017. Т.21. № 1. С. 160–179.
4. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: скорость накопления пластической деформации при циклических нагружениях. *Деформация и разрушение материалов*. 2017. № 7. С. 7–19.
5. Хохлов А.В. Идентификация нелинейной модели упруговязкопластичности типа Максвелла по кривым ползучести с начальной стадией нагружения. Часть 2. Методики. *Деформация и разрушение материалов*. 2017. № 10. С. 2–9.

## Моделирование крутильных колебаний трехслойной цилиндрической оболочки

**Х. Худойназаров**

*Ташкентский гос. техн. университет, Узбекистан*  
khayrullakhudoynazrov@gmail.com

В цилиндрической системе координат рассматривается трехслойная круговая цилиндрическая оболочка бесконечной длины

из вязкоупругого материала. При этом, в общем случае, материалы слоев – разные. Ось  $Oz$  направлена по оси симметрии оболочки и слои пронумерованы в порядке 1, 0, 2 от центра поперечного сечения. Пусть  $r_1, r_2$  – внутренний и внешний радиусы оболочки, а  $r_1^*, r_2^*$  – внутренний и внешний радиусы слоя-заполнителя;  $\mu_m$  – упругие постоянные материалов слоев;  $\rho_m$  – плотности слоев. При крутильных колебаниях оболочки отличными от нуля будут только смещения  $U_\theta^{(m)} = U_\theta^{(m)}(r, z, t)$  и напряжения  $\sigma_{r\theta}^{(m)} = \sigma_{r\theta}^{(m)}(r, z, t)$ ,  $\sigma_{z\theta}^{(m)} = \sigma_{z\theta}^{(m)}(r, z, t)$  которые для точек каждого слоя должны удовлетворять волновым уравнениям относительно потенциальных функций  $\psi_m$

$$M_m(\Delta\psi_m) = \rho_m \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial r^2}, (m = 0, 1, 2). \quad (1)$$

При этом зависимости напряжений от деформаций в точках слоев оболочки описываются линейными операторами в виде интегральных соотношений Больцмана-Волтерра [1].

Предполагается, что при  $t < 0$  оболочка находилась в покое, а в момент  $t = 0$  к ее граничным  $r = r_i$ , ( $i = 1, 2$ ) поверхностям прикладываются динамические воздействия

$$\sigma_{r\theta}^{(i)}(r, z, t) \Big|_{r=r_i} = f_{r\theta}^{(i)}(z, t); \quad \sigma_{r\theta}^{(i)}(r, z, t) \Big|_{r=r_i} = f_{r\theta}^{(i)}(z, t), \quad (2)$$

а на поверхностях  $r = r_i^*$ , ( $i = 1, 2$ ) между слоями должны выполняться условия жесткого контакта

$$U_\theta^{(0)} \Big|_{r=r_i^*} = U_\theta^{(i)} \Big|_{r=r_i^*}; \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} \Big|_{r=r_i^*} = \sigma_{r\theta}^{(i)} \Big|_{r=r_i^*}. \quad (3)$$

Начальные условия задачи считаются нулевыми.

Для решения задачи функции внешних воздействий представлены в виде

$$f_{r\theta}^{(i)}(z, t) = \int_0^\infty \left. \begin{array}{l} \sin kz \\ -\cos kz \end{array} \right\} dk \int_{(l)} f_{r\theta}^{(i0)}(k, p) e^{pt} dp, (i = 1, 2) \quad (4)$$

где  $f_{r\theta}^{(i0)}(k, p)$ , ( $i = 1, 2$ ) регулярные и аналитические функции в некоторой области, определенной [2].

Представив потенциальные функции  $\psi_m$  также как (4) и подставив их в уравнения (1) для преобразованных  $\psi_m^{(0)}$  получены

обыкновенные дифференциальные уравнения Бесселя, через общие решения которых выражены преобразованные по (4) смещения слоев.

За искомые величины приняты смещения и напряжения в точках промежуточной поверхности срединного слоя оболочки [3].

Представив выражения для преобразованного смещения срединного слоя в виде степенных рядов по степеням радиальной координаты  $r$ , ограничиваясь нулевым приближением в разложениях введены две новые функции, через которые, используя контактные условия, выражены все постоянные интегрирования. Подстановка полученных выражений постоянных интегрирования в граничные условия (2) приводит к двум общим уравнениям колебания гиперболического типа, относительно двух искомым функций, которые являются главными частями смещений точек промежуточной поверхности срединного слоя.

Считая выполненными условия [1], при которых можно ограничиться конечным числом слагаемых бесконечных рядов в полученных общих уравнениях колебания, выписаны интегро-дифференциальные уравнения в нулевом приближении.

Полученные уравнения учитывают внешние усилия, приложенные к поверхностям оболочки  $r = r_i$ , ( $i = 1, 2$ ), а также комбинации вязкоупругих операторов  $M_m$  ( $m = 0, 1, 2$ ). При  $M_m = \mu_m$  из них следуют уравнения для упругой оболочки. При  $r_1 = 0$  из них следует уравнение крутильных колебаний трехслойного вязкоупругого круглого стержня.

Наряду с уравнениями колебания разработан алгоритм, позволяющий по результатам решения разрешающих уравнений однозначно определить напряженно-деформированное состояние точек произвольного сечения оболочки для любого момента времени. На основе полученных уравнений колебания решена задача о свободных колебаниях трехслойной цилиндрической оболочки.

## Литература

1. Худойназаров Х.Х. Нестационарное взаимодействие круговых цилиндрических упругих и вязкоупругих оболочек и стержней с деформируемой средой. – Ташкент: «Изд-во им. Абу Али ибн Сино», 2003. – 325с.
2. Петрашень Г.И., Хинен Э.В. Об инженерных уравнениях колебаний неидеально-упругих пластин // Труды МИАН. Т. 95. – Л.: Наука, 1968. – С. 151 – 183.

3. Филиппов И. Г., Худойназаров Х. Уточнение уравнений продольно-радиальных колебаний круговой цилиндрической вязкоупругой оболочки // Прикл. механика. – 1990. – 26, №2. С. 63 –71.

## **Неустойчивость легкой жидкости над тяжелой в пористой среде**

**Г. Г. Цыпкин**

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН*  
tsyarkin@ipmnet.ru

Движение воды и пара в почвах и грунтах имеют определяющее значение для многих природных процессов и жизнедеятельности. В последние годы растущий интерес к таким задачам фильтрации обусловлен ухудшением экологической обстановки во многих регионах Земли. Изменение климата меняет также режим испарения грунтовых вод, перенос и выпадение в осадок растворенной примеси, динамику уровня грунтовых вод и т.д., что может приводить к экологическим катастрофам. Такие явления, зачастую, связаны с неустойчивостью процессов переноса, протекающих в грунтах.

В настоящей работе методом нормальных мод исследуется устойчивость поверхностей испарения и конденсации грунтовых вод, когда легкая жидкость (влажный воздух) находится над тяжелой (вода). Представлено базовое стационарное решение с поверхностью фазового перехода, соответствующее испарению или конденсации. Показано, что в режиме испарения существует только одно стационарное решение, а в режиме конденсации – два решения для положения поверхности фазового перехода.

Найдено, что поверхность испарения может быть неустойчивой только при существовании градиента капиллярного давления. В этом случае реализуется единственный тип перехода к неустойчивости, когда дестабилизация происходит одновременно при всех волновых числах. Результаты расчетов показывают, что незначительные градиенты и абсолютные величины капиллярного давления вызывают неустойчивость конфигурации, когда легкая жидкость находится над тяжелой.

В режиме конденсации одно решение, соответствующее меньшей глубине, всегда неустойчиво. Другое решение может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Найдены два сценария развития неустойчивости поверхности раздела. Первый сценарий характеризуется переходом к неустойчивости при всех волновых числах и качественно аналогичен переходу при испарении. При реализации второго сценария происходит сближение и слияние двух решений и в сверхкритической области решение стационарной задачи перестает существовать. В этом случае при слиянии решений потеря устойчивости происходит при нулевом волновом числе. Последний сценарий реализуется также в нейтральной среде с нулевым капиллярным давлением.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 16-11-10195.

## **Медленные, быстрые и сверхбыстрые компоненты процессов формирования и эволюции пространственно упорядоченных структур течений жидкостей**

**Ю. Д. Чашечкин**

*ИПМех РАН*

chakin@ipmnet.ru

Пространственно-упорядоченные структуры в картинах распределения вещества и других физических свойств сплошных сред, включающих жидкости, газы и плазму, наблюдаются во всем доступном для регистрации диапазоне масштабов – от микроскопических до галактических. Структуры непрерывно эволюционируют, меняются их геометрические характеристики, в них появляются новые компоненты и исчезает часть старых. Одна часть структурных элементов (волны) существует продолжительное время, позволяющая провести классификацию форм, другая быстро развивается и исчезает. Типичные примеры структурированных сред – стратифицированная атмосфера и со струйными течениями, вихрями (облаками), волнами различной природы и гидросфера Земли.

Развиваемый универсальный подход к описанию неравновесных систем проводится в модели «сплошной среды», которая характеризуется неоднородным и непрерывным распределением всех физических величин: термодинамических (потенциалов и их производных – плотности, давления, энтропии, температуры, концентрации), кинетических (коэффициентов переноса), динамических (плотности – здесь мера инерции и гравитационного притяжения, импульса, полной и внутренней энергии). Атомно-молекулярное строение вещества в модели учитывается при параметризации процессов на макро- и микромасштабах. На больших масштабах характерные времена изменчивости процессов определяются механическими и диффузионными параметрами течений. В структурных элементах малых масштабов (порядка размеров атомно-молекулярных кластеров – см или атомных слоев толщиной – см) темп обменов определяется атомно-молекулярными взаимодействиями, которые обеспечивают сверхбыстрое преобразование доступной потенциальной энергии (в слоях с градиентами концентрации – доступной химической энергии, на контактных границах – поверхностной потенциальной энергии) в тепловую и механическую энергию движения.

Основу теоретического анализа и принципов построения методик опытов составляют уравнения состояния (выражения для термодинамических потенциалов, эмпирические формулы связи между плотностью, давлением, температурой, концентрацией составляющих веществ, характеризующие изучаемые среды), а также дифференциальные уравнения переноса вещества (неразрывности), импульса (Навье – Стокса, энергии или температуры (Фурье), концентрации (Фика), которые описывают динамику и структуру течений в выбранном диапазоне параметров. Уравнения дополняются физически обоснованными начальными и граничными условиями на контактных поверхностях. Анализ проводится с учетом условия совместности, определяющего ранг нелинейной системы уравнений, порядок ее линеаризованной формы, степень характеристического (дисперсионного) уравнения. Система уравнений с начальными и граничными условиями характеризуется набором собственных временных и пространственных масштабов, отношения которых образуют безразмерные комбинации, включающие как традиционные (числа Рейнольдса, Фруда, Пекле в задачах обтекания препятствий или Рэлея, Прандтля, Нуссельта в задачах конвекции), так и новые, не вошедшие

в традиционные описания. Медленные процессы в слабодиссипативных средах, к которым относятся многие жидкости и газы, анализируются методами теории сингулярных возмущений, позволяющими одновременно изучать и крупные, слабо затухающие компоненты, размеры которых задаются геометрией и динамикой задачи, и тонкие компоненты, характеризующие границы структурных элементов. Малые масштабы определяются значениями кинетических коэффициентов и характерной частотой или скоростью процесса. Поскольку характерные скорости или частоты могут достигать больших значений, тонкие масштабы могут быть весьма малыми и приближаться к кластерным (атомарным) размерам. Влияние таких локализованных интенсивных возмущений (к которым, в частности, принадлежат, линейные предшественники ударных или детонационных волн) на перенос энергии и вещества нуждается в тщательном изучении с учетом и макро-, и микрокомпонент течений.

В рамках единого подхода теоретически (аналитически и численно) и экспериментально изучены процессы установления и эволюции таких течений, как "индуцированные диффузией на топографии"– возникающих на покоящихся препятствиях различной формы, погруженных в неподвижную стратифицированную жидкость; генерации, распространения, отражения и нелинейного взаимодействия пучков внутренних волн; обтекания препятствий в диапазоне переходных и нестационарных режимов; свободной многокомпонентной конвекции над источниками тепла различной размерности (точка, линия, плоскость). Впервые экспериментально изучен процесс формирования структур в первоначально однородной суспензии при развитии собственных колебаний (мод) в прямоугольном сосуде с гладкими и деформированными стенками, в составном вихре, а также при падении капель в принимающую жидкость. В течениях во всех случаях происходит филаментизация (расщепление на волокна) компактных объемов растворимых примесей. Аналитические, численные и экспериментальные результаты независимо выполненных работ согласуются количественно и качественно.

Обсуждается возможности стандартизации описания течений жидкостей, экстраполяции полученных данных на условия атмосферы, гидросферы и некоторые объекты техносферы, включая аэродинамические трубы и экспериментальные установки для изучения управляемых термоядерных реакций.

## Литература

1. Chashechkin Yu. D. Differential fluid mechanics – harmonization of analytical, numerical and laboratory models of flows. // Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Springer Series “Computational Methods in Applied Sciences” V. 40. 2016. P. 61-91. DOI: 10.1007/978-3-319-23564-6-5.
2. Димитриева Н.Ф., Чашечкин Ю.Д. Структура индуцированных диффузией течений на клине с искривленными гранями // Морской гидрофизический журнал. 2016. № 3. С. 77-86. DOI: 10.22449/0233-7584-2016-3-77-86.
3. Кистович А.В. и Чашечкин Ю.Д. Тонкая структура конического пучка периодических внутренних волн в стратифицированном океане и атмосфере // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. №. 1. С. 117-125. DOI: 10.1134/S1028335814010017.
4. Ильиных А.Ю., Чашечкин Ю.Д. Гидродинамика погружающейся капли: линейчатые структуры на поверхности венца // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 2. С. 152–165. DOI: 10.1134/S0015462817020144.
5. Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. Акустика и гидродинамика удара капли о водную поверхность // Акустический журнал. 2017. Т. 63. No. 1. С. 38–49. DOI: 10.1134/S1063771016060038.
6. Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. Структура первичного звукового сигнала при столкновении свободно падающей капли с поверхностью воды // ЖЭТФ. 2016. Т. 149. № 4. С. 864-875. DOI: 10.1134/S1063776116020175.
7. Загуменный Я.В., Чашечкин Ю.Д. Нестационарная вихревая картина обтекания пластины с нулевым углом атаки (двумерная задача) // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 3. С. 48–65. DOI: 10.7868/S056852811603018X.

# Осесимметричное растекание пленки вязкой жидкости вдоль супергидрофобной поверхности

И. С. Чичерин

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
chicherin-ivan@rambler.ru

Исследуется нестационарное растекание тонкого слоя тяжелой вязкой несжимаемой жидкости вдоль горизонтальной супергидрофобной поверхности с учетом поверхностного натяжения. На твердой поверхности используется условие Навье [1]. Рассматривается растекание жидкости из точечного источника с заданным массоподводом. Исследуется осесимметричное течение вдоль главного направления тензора скольжения супергидрофобной поверхности, когда соответствующая компонента является степенной функцией пространственной координаты. Получено уравнение толщины пленки с учетом поверхностного натяжения, зависящего от пространственной координаты. Решена задача групповой классификации. Для специального вида коэффициента поверхностного натяжения построены автомодельное и инвариантное решения для соответственно степенного и экспоненциального по времени законов массоподвода. Проведено сравнение полученных решений с решениями для случая отсутствия поверхностного натяжения [2]. Показано, что поверхностное натяжение оказывает существенное влияние на характер растекания.

## Литература

1. Bazant M.Z., Vinogradova O.I. Tensorial hydrodynamic slip // J. Fluid Mech. 2008. V. 613. P. 125–134.
2. Агеев И.А., Осипцов А.Н. Автомодельные режимы растекания тонкого слоя жидкости вдоль супергидрофобной поверхности // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 3. С. 516–520.

# Автомодельное решение задачи о течении неньютоновской жидкости вдоль наклонной плоскости

А. Д. Чичерина

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
0650646@gmail.com

Задача о движении тонкого слоя тяжелой вязкой жидкости по наклонной плоскости решена в [1]. Однако в различных приложениях возникает необходимость рассматривать движения неньютоновских жидкостей. Такие жидкости часто встречаются в природе и используются в химической промышленности. Примерами аномально вязких жидкостей могут быть сели, вулканическая лава, нефть, краски и лаки, растворы и расплавы полимеров. Реологически сложные жидкости характеризуются тем, что скорость сдвига в каждой точке жидкости является нелинейной функцией напряжения сдвига в той же точке. Одно из первых описаний основных положений ламинарного движения неньютоновских сред дано в [2]. Обзор реологических уравнений для различных материалов представлен в [3].

В настоящей работе, следуя [1], рассматривается медленное течение движущейся по наклонной плоскости пленки несжимаемой неньютоновской жидкости под действием силы тяжести при заданном локализованном массопроводе. Поверхностное натяжение не учитывается. В качестве реологического уравнения состояния выбран степенной закон для трехмерных течений, сформулированный в инвариантной форме [3]. Получено эволюционное уравнение толщины слоя жидкости. Найдено автомодельное решение задачи.

## Литература

1. *P.C. Smith*. A similarity solution for slow viscous flow down an inclined plane // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 58. P. 257–288.
2. *Шульман З.П., Байков В.И.* Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях. Минск: Наука и техника. 1979.
3. *Малкин А.Я., Исаев А.И.* Реология: концепции, методы, приложения. Пер. с англ. СПб: Профессия. 2007.

# Особый вихрь в релятивистской газовой динамике

<sup>1</sup>А. П. Чупахин, <sup>2</sup>А. А. Янченко

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН  
Новосибирский государственный университет*

<sup>1</sup>alexander190513@gmail.com

<sup>2</sup>arseny@protonmail.com

Уравнения релятивистской газовой динамики имеют вид [1]

$$\begin{aligned}(\Gamma\rho)_t + \nabla \cdot (\Gamma\rho\vec{u}) &= 0, \\(\Gamma^2\rho w\vec{u})_t + \nabla \cdot (\Gamma^2\rho w\vec{u} \times \vec{u}) + \nabla p &= 0, \\(\Gamma^2\rho w - p)_t + \nabla \cdot (\Gamma^2\rho w\vec{u}) &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

В (1)  $\vec{u}$  — скорость газа в лабораторной системе отсчета,  $p, \rho$  — давление и плотность,  $w = 1 + \frac{\gamma}{\gamma-1}(p/\rho)$  — энтальпия,  $\Gamma = (1 - |\vec{u}|^2)^{-1/2}$  — фактор Лоренца являются функциями времени  $t$  и пространственных координат  $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ . Единицы измерения выбраны так, что скорость света  $c = 1$ ,  $|\vec{u}| = (\sum_{i=1}^3 u^i)^2)^{1/2} < 1$ .

В работе получено точное решение уравнений (1), являющееся частично инвариантным [2] относительно группы вращений  $SO(3)$  в пространстве  $\mathbb{R}^3(\vec{x}) \times \mathbb{R}^3(\vec{u})$ , допускаемой системой (1). Это решение обобщает для релятивистской газовой динамики соответствующее решение типа «особый вихрь» (вихрь Овсянникова), открытое в [2] и исследованное в [3,4].

В работе получено представление решения «релятивистский особый вихрь» (РОВ), приведена в инволюцию переопределенная система, показано, что система для не инвариантной функции интегрируется в конечном виде. Доказано существование обобщенного потенциала решения, такого что имеет место представление всех инвариантных функций (радиальной компоненты скорости и модуля касательной, фактора Лоренца и термодинамических функций).

Обобщенный потенциал  $h$  в случае стационарного РОВ является решением неявного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}F(R, h, p; m_0, s_0) &\equiv q^{3/2} - R^2 p \left( 3m_0 + s_0 \frac{p^2}{1+h^2} \right) q + \\ &3m_0^2 R^4 p^2 q^{1/2} - m_0^3 R^6 p^3 = 0,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $R = R_0|\vec{x}| > 1$ ,  $s_0 > 0$ ,  $0 < m_0 < 1$  — нормализованное расстояние, постоянные характеризующие физику задачи;  $q(R, h, p) = R^2(R^2 - 1)p^2 - (1 + h^2)^2$ ,  $p = dh/dR$ . Теория неявных уравнений изложена в [5,6]. Аналитическое исследование уравнения (2) представляет значительные трудности. Для его анализа используются программы символьных и численных вычислений.

Исследована геометрия поверхности уравнения (2)  $F = 0$ , задающая многообразие, на котором расположены интегральные кривые уравнения. Найдено многообразие ветвления решений уравнения (2), называемое кривантой. Оно определяется кривой  $F = F_p = 0$  в  $\mathbb{R}^3(R, h, p)$ . Доказано, что на криванте всегда находится так называемая сложенная особая точка уравнения (2) типа фокус. Исследовано поведение интегральных кривых уравнения (2), дается физическая интерпретация решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 17-11-01156.

### Литература

1. Landau L D, Lifshitz E M 1959 *Fluid Mechanics, Course in theoretical physics Vol. 6* (Pergamon press)
2. Ovsyannikov L V 1982 *Group analysis of Differential Equations* (New York: Academic Press)
3. Ovsyannikov L V 1995 *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **36** 3 45-52
4. Cherevko A A, Chupakhin A P 2005 *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS Preprint N 1*
5. Arnold V I 2006 *Ordinary differential equations* (Universitext, Springer-Verlag Berlin Heidelberg)
6. Remizov A O 2006 *Contemp. Math. Fundam. Direct.* **19** 131-170

## Негладкие первые интегралы в динамике твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой

**М. В. Шамолин**

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

shamolin@rambler.ru

shamolin@imec.msu.ru

Настоящая работа посвящена развитию качественных методов в теории неконсервативных систем, возникающих, например, в таких областях науки, как динамика твердого тела, взаимодействие с сопротивляющейся средой, теория колебаний и др. В принципе, данный материал может быть интересен как специалистам по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, динамики твердого тела, так и механики жидкости и газа, поскольку в работе используются свойства движения твердого тела в среде в условиях струйного обтекания.

Получен ряд случаев полной интегрируемости неконсервативных динамических систем, описывающих динамику твердого тела в сопротивляющейся среде. При этом во многих случаях каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих и отталкивающих фокусов).

Получены новые семейства фазовых портретов систем с переменной диссипацией на маломерных и многомерных многообразиях. Обсуждаются вопросы их абсолютной или относительной грубости. Обнаружены новые интегрируемые случаи движения твердого тела, в том числе в классической задаче о движении сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды.

Понятие интегрируемости, вообще говоря, достаточно расплывчатое. При его построении необходимо учитывать в каком смысле оно понимается, в классе каких функций ищутся первые интегралы и т.д. В данной работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причем элементарные. Здесь трансцендентность понимается не в смысле теории элементарных функций (например тригонометрических), а в смысле наличия у них существенно особых точек (в силу классификации, принятой в теории функций комплексного переменного, когда функция имеет существенно особые точки) [1].

В [1,2] уже была показана полная интегрируемость уравнений

пространственного движения тела в сопротивляющейся среде, когда у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского диска.

В данной работе сначала рассматривается геодезический поток на касательном расслоении гладкого двумерного многообразия (система в отсутствие внешнего поля сил). Строится переход к удобным координатам касательного пространства. В дальнейшем сначала вводятся внешние силовые поля, которые являются потенциальными, и рассматриваемые системы четвертого порядка обладают полным набором (тремя) гладких первых интегралов. А затем в таких системах вводятся дополнительные члены, в результате чего системы перестают быть консервативными, а точнее, становятся системами со знакопеременной диссипацией [1,2,3]. При этом при некоторых условиях они обладают полным набором (негладких) трансцендентных первых интегралов, в ряде случаев выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

К примеру, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент  $bg(\alpha)$ ,  $b > 0$ , в первом уравнении системы (1) (при  $b = 0$  рассматриваемая система является консервативной и обладает полным набором (тремя) гладких независимых первых интегралов). Рассматриваемая система на касательном расслоении  $T_*M^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$  примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_2 + bg(\alpha), \quad \dot{z}_2 = F(\alpha) + \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)f^2(\alpha)z_1^2, \\ \dot{z}_1 &= \left[ 2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2, \quad \dot{\beta} = z_1 f(\alpha). \end{aligned} \quad (1)$$

При некоторых естественных условиях система (1) обладает полным набором (тремя) независимых трансцендентных первых интегралов.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект №15-01-00848.

## Литература

1. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14. — Вып. 3. — С. 3–237.

2. Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техники. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — Т. 125. — М.: ВИНТИ, 2013. С. 5–254.
3. Шамолин М.В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фундам. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20. — Вып. 4. — С. 3–231.

## **Моделирование отклика упруго-вязко-пластического несжимаемого цилиндрического слоя на существенно нестационарные граничные воздействия**

**В. И. Штука**

*Институт автоматизации и процессов управления*  
onslice@mail.ru

С целью адекватного описания поведения несжимаемого упруго-вязко-пластического материала при существенных граничных воздействиях была избрана модель больших необратимых деформаций [1], которая позволила определить напряжённо-деформированное состояния цилиндрического слоя за движущимися поверхностями разрывов деформаций (ударными волнами) с помощью модифицированного метода лучевых рядов и специальной расчётной схемы. Условие пластичности (расширенный критерий Губера-Мизеса) выполняется непосредственно с началом нагружения, чему способствует предварительное состояние слоя. Ввиду означенных факторов рассматривать ударные волны необходимо только в зоне вязко-пластического ядра, граница которой совпадает с положением волны нагрузки.

Условия совместности, выполняющиеся на поверхностях разрывов, различий с упругой задачей [2] не проявляют за счёт непрерывности необратимых деформаций, поэтому волновая картина выглядит следующим образом: впереди движется волна нагрузки, обуславливая появление необратимых деформаций (за

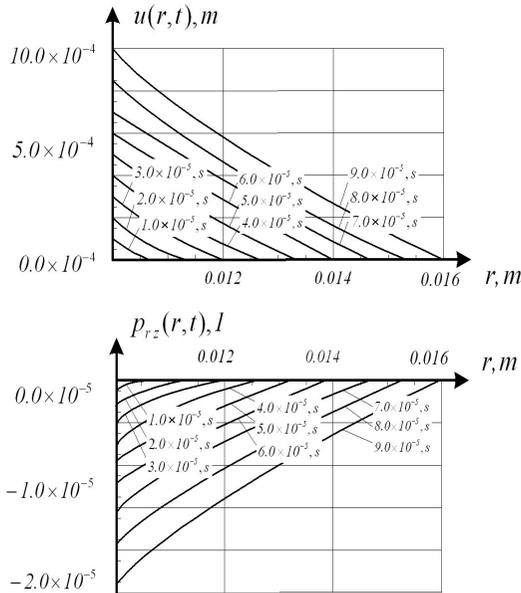


Рис. 1: Результаты численного моделирования для упруго-вязко-пластического цилиндрического слоя с предварительными скручивающими деформациями

счёт возникновения разрыва скоростей необратимых деформаций), следом – волна круговой поляризации. Вязкость существенным образом влияет на качественные характеристики такого динамического процесса, снижая уровень интенсивностей волн.

На рис. 1 представлены эпюры (всего 10 штук, с указанием моментов времени, для которых они показаны) осевого смещения  $u$ , компоненты тензора необратимых деформаций  $p_{rz}$ , полученные по результатам численного моделирования отклика слоя с предварительными скручивающими деформациями на интенсивное антиплоское воздействие [3]. Геометрия слоя, краевые условия и упругие характеристики материала избраны аналогичными [4], вязкие –  $K = 1.01\mu$ ,  $\eta = 2,6 \cdot 10^6$  Па/с.

### Литература

1. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые де-

- формации и упругое последствие. Владивосток : Дальнаука, 2013. – 312 с. ISBN 978-5-8044-1423-9.
2. Буренин А. А., Севастьянов Г. М., Штука В. И. О выделении разрывов в расчётах динамики несжимаемой упругой среды // Вычислительная механика сплошных сред, 2016. – Т 9, № 4. С. 400–411. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.33.
  3. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М. : Наука, 1980. – 512 с.
  4. Штука В. И. Применение лучевого метода в задаче определения напряжённо-деформированного состояния предварительно деформированного упругого слоя // Учёные записки КнАГТУ, 2017. – № II – 1 (30). С. 40–44.