

**Russian Foundation for Basic Research
Saint-Petersburg State Technical University**

**The Second International Conference
DIFFERENTIAL EQUATIONS AND
APPLICATIONS**

**June 15-20, 1998
Abstracts**

**Российский фонд фундаментальных исследований
Санкт - Петербургский государственный технический
университет**

**Вторая международная конференция
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ
ПРИМЕНЕНИЯ**

**15-20 июня 1998
Тезисы докладов**



Санкт - Петербург

**Russian Foundation for Basic Research
Saint-Petersburg State Technical University**

**The Second International Conference
DIFFERENTIAL EQUATIONS AND
APPLICATIONS**

**June 15-20, 1998
Abstracts**

**Российский фонд фундаментальных исследований
Санкт - Петербургский государственный технический
университет**

**Вторая международная конференция
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ
ПРИМЕНЕНИЯ**

**15-20 июня 1998
Тезисы докладов**

Санкт – Петербург

Издательство СПбГТУ

This book is a collection of abstracts of talks presented by the participants of the Second International Conference "Differential Equations and Applications" held by the Saint-Petersburg State Technical University and supported by the Russian Foundation for Basic Research from June 15 to June 20, 1998. More than one hundred scientists from Saint-Petersburg, other cities of Russia and abroad participate in the Conference.

The abstracts reflect results in the fields of qualitative theory of differential equations, dynamical systems, control systems, and others. The abstracts cover a wide range of problems relating both to traditional areas of differential equations theory (stability theory, bifurcations, equations of mathematical physics, stochastic differential equations, etc.) and to areas that attract considerable recent attention (systems with chaotic behavior, chaotic control systems, analytic, numeric, and computer-oriented methods of analysis of dynamical systems, etc.). Much attention is perceived to pay to the study of model dynamical systems that are of great importance in physics, biology, ecology, economics, and industry.

Theses are published in authors wording.

Conference Chairman
Prof. Dr. G.S. Osipenko

Co-chairman
Ph.D. E.K. Ershov

Secretary
Ph.D. A.A. Moiseev

Saint-Petersburg, June 1998

Сборник содержит тезисы докладов участников Второй Международной Конференции "Дифференциальные уравнения и их применения", проводимой Санкт-Петербургским государственным техническим университетом при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в период с 15 по 20 июня 1998 г. В конференции принимают участие более ста ученых из Санкт-Петербурга, других городов России, а также ряд зарубежных ученых.

В приведенных тезисах докладов отражены результаты работ в области качественной теории дифференциальных уравнений, динамических систем и систем управления. Тезисы охватывают широкий круг проблем как традиционно относящихся к области дифференциальных уравнений (теория устойчивости движения, теория бифуркаций, интегральные многообразия, уравнения математической физики, стохастические дифференциальные уравнения и др.), так и к областям, которые привлекают пристальное внимание специалистов в последнее время (системы с хаотическим поведением и управление хаосом, численно-аналитические и компьютерно-ориентированные методы анализа и др.). Большое внимание на конференции предполагается уделить исследованию модельных динамических систем, имеющих важное значение в физике, биологии, экологии, экономике и промышленности.

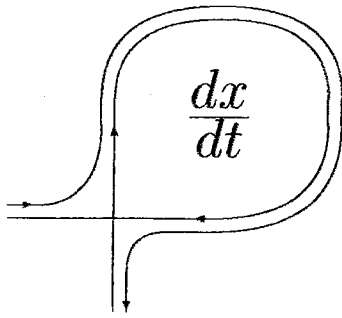
Тезисы публикуются в авторской редакции.

Председатель оргкомитета
д.ф.м.н., профессор
Г.С.Осипенко

Зам. председателя
к.ф.м.н., доцент
Е.К.Ершов

Секретарь
к.ф.м.н., доцент
А.А.Моисеев

Санкт-Петербург, июнь 1998



*DIFFERENTIAL EQUATIONS
AND
CONTROL PROCESSES
Electronic Journal,
reg. N P23275 at 07.03.97*

*http://www.neva.ru/journal/
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru*

ELECTRONIC JOURNAL “DIFFERENTIAL EQUATIONS and CONTROL PROCESSES”

The rapid development and wide application of computer technologies in scientific research, education, and business together with organizing and intense operating of global computer nets make possible to organize and use absolutely new sources of scientific and technical data. Electronic scientific and technical journals are examples of these sources.

Electronic publishing has many advantages over traditional publishing. Namely, it ensures the rapidity of publication, admits practically unlimited volume of matters and does not require large expenses. An important point is that the reader gets information directly at the working place. Electronic publications can be easily transformed in traditional ones. In addition, electronic publications can be distributed through computer nets as well as through various media (floppy disks, CD-ROMs, etc). These advantages appeared to be the stimulus for organizing a great number of electronic journals in Europe and America. At present an intense process of establishing electronic journals occurs in Russia.

The decision for publishing the electronic journal "Differential Equations and Control Processes" was taken at the First International Conference "Differential Equations and Applications" which was held in 1996 at the Saint-Petersburg State Technical University.

The aim of the journal is publishing of

- theoretical and applied results;
- information on software related to the journal scope;
- methods of higher education teaching;
- information on scientific and education activities;
- information on books and other printed matters.

The Saint-Petersburg Technical University is the journal promoter. The electronic address of the journal is

<http://www.neva.ru./journal/>

The journal is a part of the computerized information system "Differential Equations and Dynamical Systems", supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFFI), Grant No. 97-07-90088. The journal is partially supported by INTAS program (Grant EMNET/Nis).

The Editorial Board consisting of leading Russian scientists on the journal scope will govern publishing policy of the journal. The main aspects of the journal policy are as follows.

The Journal publishes original contributions, review articles, conference proceedings, monographs, lectures and courses of lectures, theses and author's abstracts, and other matters with a detailed exposition of results, proofs, and examples. It is assumed to publish information on scientific and education activities related to the journal scope. All matters submitted to the journal will be subjected to the reviewing process. Papers published in the journal will have the same status as the ones published in a traditional way and will be reviewed. In particular, these papers will be recognized by the Higher Attestation Committee as publications suitable for thesis and by the Russian Foundation for Basic Research (RFFI) as publications suitable for scientific reports on grants.

The Journal is viewed as a telecommunication and organizing center for collaboration of scientists and scientific teams both in Russia and abroad interested in the close cooperation. Programs of seminars on the journal scope and most interesting scientific reports given will be published in the journal. Academic councils are recommended to submit information on forthcoming thesis defenses. Matters published in the Journal may be used by the author in other publications. The journal has a free access in the INTERNET. All matters published in the journal are available in the electronic form under request (e-mail, floppy disks, CD-ROMs, etc). Publishing House of the Saint-Petersburg Technical University can produce a high-quality hard copy of publication at a low price.

The Journal accepts for publication papers and other matters on

- Ordinary differential equations
- Nonlinear oscillations
- Differential-difference equations
- Dynamical systems on manifolds
- Bifurcation
- Symbolic dynamics
- Integro-ordinary differential equations
- Group analysis of differential equations
- Differential equations with randomness
- General control problems
- Adaptive and robust control
- Control problems in nonlinear and sophisticated systems
- Filtration and identification
- Synchronization of oscillatory and chaotic processes
- Optimal control
- Numerical methods

- Computer modeling in dynamical and control systems
- Computer software for the investigation of differential equations, dynamical systems, and control processes
- Applications to physics, electrotechnics, and electronics
- Dynamical systems in medicine, biology, ecology, and chemistry
- Dynamic economic models
- Educational courses and software on journal subjects; materials on teaching methods
- Information about monographs, textbooks, theses, software, seminars, conferences etc.

The Editorial Board also accepts matters in other fields related to the journal scope.

We invite scientists and scientific teams both as authors and readers of the Journal and for collaboration in the realization of joint scientific and publishing projects.

WELCOME
to the **NEW ELECTRONIC JOURNAL !**

G.S.Osipenko
Editor-in-Chief
E-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

O.Yu.Kulchitskii
Managing Editor
E-mail: kulo@mcsd.hop.stu.neva.ru

EFFECTIVENESS OF SEMI-STATISTICAL METHOD: THEORY AND NUMERICAL RESULTS

By Dmitry G. Arsenjev, Vladimir M. Ivanov, Oleg Yu. Kulchitsky

St.Petersburg State Technical University

E-mail: ivm@mail.imop.csa.ru

Introduction. Last years many works on use of stochastic techniques in the finite elements method [5,6] were published. This paper presents another method of numerical solution of integral equations on a random grid. Authors have named their method semi-statistical, because it uses both determinate and statistic operations [3,4].

Like when using determinate methods, the problem is reduced to solving a set of algebraic equations. But approximation of the integral by finite sum is to be performed by means of the Monte Carlo method. Such an approach provides some algorithmic advantages, which are in abilities:

- to increase a grid density by any number of knots (for example, by one knot) for obtaining the required accuracy;
- to control accuracy of approximate solution in computation process and to design stop conditions for it;
- to optimize automatically the structure of a grid on the basis of preliminary estimation results.

The semi-statistical method has been applied to several integral equations in order to make a comparison with well-known methods and to explore the efficiency of proposed one.

The semi-statistical algorithm can be interpreted as a Galerkin algorithm with the solution, decomposed on partly-constant (indicator) functions. Galerkin method with decomposition on Chebyshev functions has been investigated by Delves and Mohamed in 1988; according to them, its accuracy can be achieved by the formal increase of number of basis functions.

It is necessary to mention the following obvious property of a Galerkin method: its efficiency hardly depends on a happy choice of basis functions. In particular, if solution turns out to coincide with one of them, other do not matter. The main peculiarity of semi-statistical method is the fact,

that the basic functions are not fixed rigidly, and their form varies with the results of calculations, i.e. the basis can be adapted.

References.

1. *Delves L.M., and Mohamed J.L.* (1988). Computational methods for integral equations. Cambridge University Press.
2. *Ermakov S.M.* (1973). The Monte-Carlo method and other problems. Nauka, Moscow, Russia (in Russian).
3. *Ivanov V.M., and Kulchitsky O.Yu.* (1990) "The method of the numerical solution of integral equations on the random grid". Differential equations, Minsk, Belorussia, vol. 26, 2, 333-341 (in Russian).
4. *Arsenjev D.G., Ivanov V.M., and Kulchitsky O.Yu.* (1996) Adaptive methods of computing mathematics and mechanics: Stochastic variant. Moscow. Nauka. (in Russian).
5. *Lawrence M.A.* (1987) "Basic random variables in finite elements analysis". International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24, 1849- 1863.
6. *Spanos P.D., and Ghanem R.* (1989) "Stochastic finite elements expansion for random media". Journal of Engineering Mechanics, vol. 115, 5, May, ASCE, New York, 1035-1053.

ON NONLINEAR WAVES WITH DISSIPATION

A.M.Balonishnikov (a), V.E.Khartsiev (b), N.Yu.Kuz'min (c)

(a) St.Petersburg State Academy for Engineering and Economics, 197198, St.Petersburg, Russia;

(b) A.F.Ioffe Physical-Technical Institute, Russ.Acad.of Sc.,194021, St.Petersburg, Russia; e-mail: kharv@les.ioffe.rssi.ru;

(c) Physical Mechanical Department, St.Petersburg State Technical University, 1945256, St.Petersburg, Russia

The excitation of a solid body at its boundary by a power short mechanical pulse produces nonlinear wave in the volume. Usually such type waves are studied in conditions when dissipation effects can be neglected. Many solutions were obtained in the forms of solitons and solitary waves for such nonlinear situations (see, for example, [1]). We consider nonlinear dissipative wave propagation processes in plane geometry for function $u(x, t)$ with using analytical and numerical methods for the equations of the type

$$T(\partial_t)u - X(\partial_x)u = -\epsilon F(\partial_x, \partial_t, \varphi(u)) + \mu P(\partial_x, \partial_t)u,$$

where T and X are operators, the contributions F and P take into account nonlinear dissipation and dispersion effects with using model functions $F(z_1, z_2, z_3)$, $\varphi(u)$ and polynoms $P(z_1, z_2)$; ϵ and μ are dimensionless parameters. The boundary conditions have in particularly the form of a set pulses

$$u_0(t) = u(x = 0, t) = \sum_m \mu(2\pi q_m(t - t_m))$$

with function $\mu(z) = 1 - \cos z$ and $0 \leq z \leq 2\pi$.

The nonlinear wave propagation processes considered are of essential interest for modelling the conditions which correspond to various acoustical and shock techniques used in studying of properties of solids (metals, semiconductors and other materials).

The work was partially supported by grants: Russian Foundation for Basic Research (96-01-01207a) and European Community (INTAS-97-2142).

[1] R.K.Dodd et al. Solitons and nonlinear wave equations, Acad.Press, Inc., 1984

Real solutions of real differential equations

Zbigniew Bartosiewicz*
 Politechnika Białostocka
 Wiejska 45
 Białystok, Poland

e-mail: bartos@cksr.ac.bialystok.pl

Abstract

An ordinary differential equation or a system of ordinary differential equations defined over the field \mathbf{R} of real numbers may have no real solutions. We use the language of differential algebra and real algebra to give conditions that guarantee that such phenomenon does not take place. For simplicity we study polynomial differential equations.

Let $\mathbf{R}\langle y \rangle$ denote the ring of polynomials over \mathbf{R} in infinitely many variables $y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}, \dots$. We introduce the *derivation* operator $D : \mathbf{R}\langle y \rangle \rightarrow \mathbf{R}\langle y \rangle$ by $Da = 0$ for $a \in \mathbf{R}$, $Dy_i^{(k)} = y_i^{(k+1)}$, and extending it to the entire ring via linearity and the Leibniz rule. This makes $\mathbf{R}\langle y \rangle$ a differential ring [Ka]. An ideal I in $\mathbf{R}\langle y \rangle$ is a *differential ideal* if $D(I) \subset I$. For any subset S of $\mathbf{R}\langle y \rangle$, $\langle S \rangle$ denotes the differential ideal generated by S . It is the intersection of all differential ideals containing the set S . A differential ideal I is *finitely (differentially) generated* if $I = \langle S \rangle$ for some finite subset S of $\mathbf{R}\langle y \rangle$.

By a system of differential equations in y_1, \dots, y_n we mean a finite set of equations:

$$F_k(y, \dots, y^{(m_k)}) = 0, \quad k = 1, \dots, r, \quad (1)$$

where $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y^{(i)} = (y_1(i), \dots, y_n(i))$ for $i \geq 1$ and the functions F_k are polynomials of appropriate number of variables, with real coefficients. By a solution of (1) we shall mean an analytic function $y : (-a, a) \rightarrow \mathbf{R}^n$, for some $a > 0$, that satisfies (1) on the interval $(-a, a)$. We may call it a *real solution* as it takes on real values.

The system (1) may be represented by a differential ideal I in $\mathbf{R}\langle y \rangle$, generated by the polynomials F_1, \dots, F_r . It is an ordinary ideal in $\mathbf{R}\langle y \rangle$ generated by F_1, \dots, F_r and all their derivatives. Conversely, any finitely generated differential ideal give rise to a system of finitely many ordinary differential equations in variables y_1, \dots, y_n . We want to describe properties of I that would guarantee existence of (real) solutions.

*Supported by KBN under a Technical University of Białystok grant No. W/IMF/1/96

Let R be a commutative ring with an identity. An ideal J in R is called *real* if for any $k \geq 1$ and for any $a_1, \dots, a_k \in R$, the following implication holds

$$a_1^2 + \dots + a_k^2 \in J \Rightarrow a_i \in J \text{ for } i = 1, \dots, k.$$

The ideal J is real iff the quotient ring R/J is *real*, i.e. for any $k \geq 1$ and any $b_1, \dots, b_k \in R/J$

$$b_1^2 + \dots + b_k^2 = 0 \Rightarrow b_1 = \dots = b_k = 0.$$

The *real radical* of the ideal J , denoted by $\sqrt[\mathbb{R}]{J}$, is the set of all $c \in R$ such that

$$c^{2m} + a_1^2 + \dots + a_k^2 \in J$$

for some $m \geq 1$, $k \geq 1$, and $a_1, \dots, a_k \in R$. It can be shown that J is real iff $\sqrt[\mathbb{R}]{J} = J$ [BCR]. In general, differential ideals in $\mathbf{R}\langle y \rangle$ may not be finitely generated. But we have the following result:

Proposition 1 *Any real differential ideal in $\mathbf{R}\langle y \rangle$ is finitely (differentially) generated.*

Proposition 1 allows us to consider arbitrary differential ideals as long as we stick to the real ideals. This property is essential in our main result:

Theorem 2 *If I is a real ideal in $\mathbf{R}\langle y \rangle$ then the system (1) has a solution.*

Theorem 2 may be extended to the case when the functions F_i are analytic and depend on the independent variable x . The notion of solution may be generalized as well. Instead of functions $x \mapsto y_i(x)$ let us consider implicit functions of the form $\Phi_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0$, $i = 1, \dots, s$. We say that $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_s) = 0$ defines a solution of the system corresponding to the ideal I if $I \subset \langle \Phi \rangle$ and this solution is real if $\langle \Phi \rangle$ is a real ideal.

References

- [BCR] J. Bochnak, M. Coste and M-F. Roy, *Géométrie Algébrique Réelle*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [Ka] I. Kaplansky, *An Introduction to Differential Algebra*, Hermann.

Shadowing of numerical trajectories for a flow on a hyperbolic set

E.N.Begun,
S.-Petersburg, S.-Petersburg Institute of Cinema and TV,
sp@spil.usr.pu.ru(for E.N.Begun)

Let Λ be a hyperbolic invariant set for a system of differential equations

$$\dot{x} = X(x), \tag{1}$$

where $x \in \mathbf{R}^s$. Let $\Xi(t, x)$ be the flow of system (1).

It is known [1] that there exists a number $\alpha \in (0, 1)$ such that the stable and unstable spaces of the hyperbolic structure on Λ are Hölder with exponent α .

We consider a one-step numerical method of order n with step $h > 0$ and denote by $\Psi_{kh}(x)$ the approximate solution with the initial value $(0, x)$ at time $t_k = kh$.

Theorem. *Assume that $n \geq 2$ and*

$$n\alpha > 1.$$

There exist positive constants h^, L^* such that if $h \leq h^*$, and the inclusions*

$$\Psi_{kh}(x) \in \Lambda$$

hold for $k \geq 0$, then there exists a point p and numbers t_k with the property

$$|\Psi_{kh}(x) - \Xi(t_k, p)| \leq L^* h^n, \quad k \geq 0.$$

References

1. A. Katok, B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. EMA, Vol. 54, Cambridge Univ. Press (1995).

Problem of local identifiability from discrete observations

N.A. Bodunov,
S.-Petersburg, S.-Petersburg State Electrotechnical University,
nick@bodunov.usr.etu.spb.ru

Problem. We consider a dynamical system

$$x = F_p(t, x_0),$$

where $x \in X$ and $p \in P$, and X, P are topological spaces. Here p is a parameter to be determined from observations of trajectories with fixed initial value

$$F_p(0, x_0) = x_0,$$

or of some functions on these trajectories.

We fix a discrete set of values of t ,

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$$

(finite or infinite), a set of functions G_n , and observe the corresponding set

$$V(p) = \{G_n(F_p(t_n, x_0))\}.$$

We say that a value of parameter p_0 is locally identifiable from observations on the set T if there exists a neighborhood U of p_0 such that

$$V(p) \neq V(p_0) \text{ for } p \in U \setminus \{p_0\}.$$

Results.

Case 1. The dynamical system $F_p(t, x_0)$ is generated by an autonomous system of ordinary differential equations,

$$\dot{x} = f(x, p).$$

Solutions are observed at a finite set of times

$$T = \{t_1, \dots, t_m\} \subset [0, t^*],$$

and the parameter $p(t)$ is constant on the segments $[t_i, t_{i+1}]$. A function α is fixed, and the values $y_i(p) = \alpha(x(t_i, p))$ are observed.

In this case, the following results were obtained:

- 1.1 first order conditions of local identifiability were found (in terms of ranks of some matrices);
- 1.2 higher order conditions were given (in terms of special Newton diagrams);
- 1.3 conditions of local identifiability for quasilinear systems were given in terms of linear approximations;
- 1.4 identification algorithm based on gradient minimization method was suggested.

Case 2. The system $F_p(t, x_0)$ is generated by a semilinear parabolic equation

$$u_t = u_{\xi\xi} + f(u), \quad \xi \in [0, 1],$$

with the set $T = \{n\tau : n > 0\}$. Uniform grids on $[0, 1]$ are fixed with steps $h_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$; $G_n(F_p)$ is the set of values of F_p at the grid nodes.

The set of initial values x_0 for which the parameter is locally identifiable was described.

Case 3. Identifiability under observations with refinement. Autonomous systems of ordinary differential equations are considered. The set $T = \{n\tau : n > 0\}$. A sequence $V(p) = \{y_n(p)\}$ is observed such that the observation errors

$$\delta_n(p) = |F_p(\tau, y_{n-1}(p)) - y_n|$$

tend to 0 as $n \rightarrow \infty$.

Some conditions of local identifiability were obtained by application of the shadowing theory.

Stability of Solutions of Some Types Partial Differential Equations

I.V.Boikov

Penza Technical State University,
Krasnaya str., 40, Penza, 440017, Russia
(e-mail: cnit@diamond.stup.ac.ru)

Problems of stability of solutions of partial differential equations are the important direction in the theory of differential equations. As a rule the second Liapunov method is used for investigation of stability [1,2]. In the [3] and [4] the stability criteria for solutions of systems of differential equations in the critical case of one zero root, based on analysis of spectrum of the Jacobi matrix for the right-hand side of the equation in a neighborhood of the solution is received. This method was generalized in the paper [5] for investigation of stability of differential and difference equations in a Banach spaces and in all possible critical cases. In the paper [6] this generalization was used for investigation of a domain of stability of systems of differential equations. In the paper [7] the Aizerman's problem was decided for a self-adjoint matrix.

In this presentation we diffuse these methods for proof of some sufficient conditions of stability of linear and nonlinear systems of partial differential equations of the following types

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1(t, x_1, x_2)}{\partial t} = a_{11}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + a_{12}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \\ + a_{13}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + a_{14}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + g_1(t, x, u), \\ \frac{\partial u_2(t, x_1, x_2)}{\partial t} = a_{21}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + a_{22}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \\ + a_{23}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + a_{24}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + g_2(t, x, u) \end{array} \right. \quad (1)$$

with starting conditions

$$u(t_0; x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2). \quad (2)$$

and

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial t^2} = a_{11}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + a_{12}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \\ + a_{13}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + a_{14}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + g_1(t, x, u), \\ \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial t^2} = a_{21}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + a_{22}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \\ + a_{23}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + a_{24}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + g_2(t, x, u) \end{array} \right. \quad (3)$$

with starting conditions

$$u(t_0; x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2); \quad (4)$$

and equations

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = f \left(t, x, u, \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \right) \quad (5)$$

with starting conditions

$$u(t_0, x) = u_0(x) \quad (6)$$

Now we shall mention of typical result for stability of system (1),(3),(5). For simplicity we are restricted to system (1) with starting conditions (2).

Let us fix an arbitrary value $T, t_0 \leq T < \infty$, and introduce the matrix

$$A(t, \omega_1, \omega_2) = \begin{pmatrix} -a_{11}(T)\omega_1^2 - a_{12}(T)\omega_2^2 & -a_{13}(T)\omega_1^2 - a_{14}(T)\omega_2^2 \\ -a_{21}(T)\omega_1^2 - a_{22}(T)\omega_2^2 & -a_{23}(T)\omega_1^2 - a_{24}(T)\omega_2^2 \end{pmatrix},$$

where $-\infty < \omega_i < \infty, i = 1, 2$.

Let

$$G(t, x_1, x_2, u) = (g_1(t, x_1, x_2, u), g_2(t, x_1, x_2, u))$$

and

$$\|G(t, x_1, x_2, u)\| \leq \beta \|u\|, \quad (7)$$

where

$$\|u(t, x)\| = \max_{i=1,2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u_i(t, x)|^2 dx_1 dx_2 \right]^{1/2},$$

the constant β is independent from t .

Theorem. Let the following conditions are occur: 1) for any fixed values (t, ω_1, ω_2) ($t_0 \leq t < \infty, -\infty < \omega_1, \omega_2 < \infty$) logarithmic norm of matrix $A(t, \omega_1, \omega_2)$ satisfy to the inequality $\Lambda(A(t, \omega_1, \omega_2)) \leq -\alpha, \alpha > 0$; 2) inequality (7) occur; 3) $-\alpha + \beta < 0$. Then trivial solution of system of equations (1) is asymptotical stable.

References

1. Sirazetdinov T.K. Stability of systems with distributed parameters. Moscow: Nauka. 1987. [In Russian]
2. Shestakov A.A. Generalized direct Liapunov method for systems with distributed parameters. Moscow: Nauka. 1990. [In Russian]
3. Vinograd R. A notes a critical case of stability on plate. // Dokladi Akademii nauk USSR. 1953.-V.101.-P.209-212 [In Russian]
4. Krasovskii N.N. A stability of motions in critical case of one zero root. // Matematicheskii sbornik 1955.-V.37, N1. P.83-88 [In Russian]
5. Boikov I.V. On the stability of solutions of differential and difference equations in critical cases. // Soviet Math. Dokl. 1991.-V.42, 2.-P.630-632.
6. Boikov I.V. An one method of definition of stability domains of systems of automatic regulation. // Technicheskay Kibernetika.- 1993, N2.-P.20-24.
7. Boikov I.V. Aizerman's problem. // Prikl. Math. Mekh.-1994.-V.58, N4.-P.52-55.

To Aizerman's Problem

I. V. Boikov
 Penza Technical State University,
 Krasnaya Str., 40, Penza,
 440017, Russia
 cnit@diamond.stup.ac.ru

In n -space R_n we consider a non-linear system

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k + f(x_1), \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k, \quad i = 2, \dots, n \quad (1)$$

and together with it the linear system obtained from (1) when $f(x_1) = bx_1$.

Aizerman's problem [1] is as follows: if it is known that the trivial solution of the linear system is asymptotically stable for all b satisfying the condition $\alpha < b < \beta$, will the trivial solution of the non-linear system (1) be stable in the large of the following condition is satisfied

$$\alpha < f(x_1)/x_1 < \beta \quad (2)$$

This problem has inspired much research. It has been shown that condition (2) is not sufficient for stability in second-order [2] and third-order [3] systems.

In the paper [4] Aizerman's problem was solved in the affirmative in the case when the right-hand of the differential equation is a self-adjoint matrix.

This note presents a study of stability for systems of non-linear equations of a more general form than (1)

$$\frac{x(t)}{dt} = Ax + F(x) \quad (3)$$

from which it follows cases when Aizerman's problem has a positive solution. Here $x = (x_1, \dots, x_n)$, $A = \{a_{ik}\} (i, k = 1, 2, \dots, n)$,

$$F(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Our stability analysis will be carried out in the spaces R_n, E_n , where E_n is Euclidean space. We shall use the following notation:

$$R(a, r) = \{x \in R_n : \|x - a\| \leq r\}, S(a, r) = \{x \in R_n : \|x - a\| = r\},$$

$$ReK = K_R = (K + K^*)/2, \Lambda(K) = \lim_{h \rightarrow 0} (\|I + hK\| - 1)h^{-1},$$

where $\Lambda(K)$ is the logarithmic norm of the linear operator K [5].

Consider set of a matrix $B = \{b_{ik}\}, i, k = 1, 2, \dots, n$, that has been chosen so that

$$\operatorname{Re}\sigma(A+B) \leq -c, c = \text{const} > 0, \quad e^{(A+B)t} \leq e^{-ct}. \quad (4)$$

The set of matrices B for which condition (4) holds will be denoted by G .

We will fix an arbitrary element $z = (z_1, \dots, z_n) \in R_n$ and associate with it the matrix $C(z) = \{c_{ik}\}(i, k = 1, 2, \dots, n)$, whose elements are $c_{ik} = f_i(z_1, \dots, z_n)(mz_k)^{-1}$ if $z_k \neq 0$, $c_{ik} = d_{ik}$ if $z_k = 0$, where $d_{ik} = \lim_{z_k \rightarrow 0} f_i(z_1, \dots, z_n)z_k^{-1}$ if the limit exists, $d_{ik} = 0$ if the limit does not exist, and m is the number of non-zero elements $z_k(k = 1, 2, \dots, n)$ of the vector z .

Theorem 1. Suppose that for any $z \in R_n$ the matrix $C(z)$ is in the set G , the functions $f_i(z_1, \dots, z_n)(i = 1, 2, \dots, n)$ are continuous and $f_i(0, \dots, 0) = 0(i = 1, 2, \dots, n)$. Then the solution of the system of equations (3) is stable in the large.

Theorem 2. Suppose that the linear system obtained from system (1) when $f(x_1) = bx_1$ is asymptotically stable for any b such that $b \in [\alpha, \beta]$, for matrix $\bar{A} = \{\bar{a}_{ij}\}, \bar{a}_{11} = a_{11} + b, \bar{a}_{ij} = a_{ij}$ if $(i, j) \neq (1, 1)$ the inequality $e^{\bar{A}t} \leq e^{\max \operatorname{Re}\sigma(\bar{A})t}$ occur for $b \in [\alpha, \beta]$, function $f(x)$ is continuous, conditions (2) hold and $\alpha > -\infty, \beta < \infty$. Then the non-linear system (1) is stable in the large.

References.

1. Aizerman M.A. On a problem concerning stability "in the large" of dynamical systems. // *Uspekhi Mat.Nauk* 4,4,187-188, 1949.
2. Krasovskii N.N. Theorems on the stability of motions defined by a system of two equations. // *Prikl. Math. Mekh.*16,5,547-554, 1952.
3. Pliss V.A., Some Problems of the Stability of Motion in the Large, *Izd. Leningrad. Gos. Univ., Leningrad*, 1958.
4. Boikov I.V. Aizerman's problem. // *Prikl. Math. Mekh.*58, 4,52-55,1994.
5. Daletskii Yu.L. and Krein M.G. Stability of solution of differential equations in Banach space, "Nauka", Moscow, 1970; English transl. , Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1974.

A SIMPLE MODEL OF THE CHAOTIC IMMUNE RESPONSE

Beograd, Department of Physics and Mathematics, Faculty of Pharmacy,
Vojvode Stepe 450, Beograd, Yugoslavia

Abstract

Experimental data showing the immune state of patients often look rather irregular or stochastic. The appropriate quantities which characterize the immune state in these examples generate apparently unpredictable, stochastic time series. Current approach in modeling such systems with complex behavior is based on the common wisdom of the modern theory of dynamical systems, that the variety of behaviors, including erratic ones, can be modeled by low dimensional, but sufficiently nonlinear, dynamical systems, with only a few variables and a simple mathematical formulation [1],[2], [3].

Recently Mayer *et al* [3] proposed a very simple model of the typical immune response, which, in the same time, is capable to describe a variety of possible situations. The model consists of only two ordinary differential equations (ODE), describing the evolution of a target population T (for example bacteria, viruses, tumor cells etc . . .) in interaction with the relevant host immunocompetent agents, denoted by E . The reach variety of qualitatively different solutions of the model is due to the highly nonlinear terms in the equations, which describe the production rates of E , and to the nonlinear interaction term. However, since the model consists of only two ODE it has only regular solutions, such as fixed points, periodic orbits and orbits asymptotic to these. As Mayer *et all* pointed out the model can not describe, frequently observed, irregular or chaotic behavior.

We present and analyze a minimal extension of the model of Mayer *et all* which is biologically plausible and capable of describing the chaotic behavior.

As the starting point in this paper we used the two-dimensional system of Mayer *et all* , which represents the basic model of the immune response. This model does not show any chaotic behavior, but can be minimally extended in various directions so that the chaotic behavior is possible. We analyzed the three-dimensional extension of this model which is obtained by supposing that the necessary number of the parameters vary periodically with time. Simple bifurcation analyses is used to indicate the presence of the bifurcation from the periodic limit cycle into the quasi-periodic oscillations in the model. As the amplitude of the perturbation parameter is increased the torus with the quasi-periodic orbits breaks up into a complicated invariant set with chaotic orbits. This is illustrated by phase plots, the Fourier power spectra and the propagation of errors of the typical orbits.

Our main conclusions can be summarized as follows. The extended model with sinusoidal time dependence of the parameters shows chaotic behavior. However, in order to have well and quickly developed chaotic solutions with only one time-dependent parameter the amplitude of the corresponding perturbation has to be quite large. On the other hand, well developed chaos can be generated by small sinusoidal variations of two parameters.

The possibility to describe various features of the immune response by considering only a few and the

most relevant variables is useful from the theoretical as well as the practical standpoint. Our work presents a modest contribution towards a better understanding of the modeling of the immune dynamics with the irregular output. It would be interesting to see how the model presented here compares with the real immunological studies with the sufficient experimental data showing the irregular behavior.

1.) A survey can be found in: Y.. Romanovski, N.V. Stepanova and D.S. Černaevski, *Mathematical Biophysics*, Nauka, Moskow 1984.) ; see also the references in [2] and [3].

2.) M.A. Novak and C.R.M. Bangham, " Population dynamics of immune responses to persistent viruses", *Science* **272**, 74 (1996).

3.) H. Mayer, K.S. Zaenker and U. an der Heiden, " A basic mathematical model of the immune response," *Chaos* **5** 155-161 (1995).

ADAPTIVE ACTIVE CONTROL FOR ENGINE SPEED OSCILLATION DAMPING

I.V. Burkov*, A.T. Zaremba**

*St. Petersburg Technical University, 195251 St. Petersburg, Russia; email iburkov@ford.com

**Automated Analysis Corporation, Ann Arbor, MI 48104, USA; email azaremba@ford.com

1 Introduction

The periodic fuel combustion processes and nonlinear engine geometry result in engine crankshaft speed oscillations. Usually a passive flywheel is used for reducing the pulsation of crankshaft speed. In this paper we consider the idea of using a reversible alternator for engine speed damping to improve vehicle driveline performance. Another potentiality of proposed system is active engine idle speed regulation.

2 Dynamic Model of an Active Flywheel

The engine torque T_e is, in general, a function of time; however, the geometry of the engine imposes a periodicity with respect to the crankshaft angle φ [1]. Making assumption that all the engine processes are band-limited we can represent T_e in terms of a truncated Fourier expansion

$$T_e(\varphi) = T_0 + \sum_{i=1}^N [a_i \cos(mi\varphi) + b_i \sin(mi\varphi)] \quad (1)$$

where T_0 is a dc component of engine torque, N is a number of harmonic we account for, and m is a number of strokes (firings) during one crankshaft rotation ($m = 2$ for a four-stroke cycle engine).

Periodic engine torque (1) generates crankshaft speed oscillations which, in turn, deteriorate the vehicle driveline performance.

The goal of the controller is to track given speed reference $r(t)$ and reject periodic disturbance. The signal $r(t)$ can be a given engine speed (e.g. engine idle speed) or crankshaft average speed over cycle. In the first case we consider the problem of idle speed regulation together with crankshaft speed pulsation attenuation. When we use as a reference engine average speed then system works in the regime of active flywheel and performs a function of engine speed oscillation damping.

3 Adaptive control in the case of ideal actuator

The active flywheel system may be described in the state-space form

$$J\dot{\omega} + b\omega = M_a + T_e, \quad \dot{\varphi} = \omega \quad (2)$$

and by the formula (1). Here M_a is the control input, $J > 0$ is a moment of inertia, $b > 0$ is a damping coefficient.

The following adaptive control is proposed

$$M_a = -\alpha(\omega - r) - \sum_{i=1}^N [\hat{a}_i \cos(mi\varphi) + \hat{b}_i \sin(mi\varphi)] - \hat{a}_0 \quad (3)$$

$$d\hat{a}_0/dt = \alpha_0(\omega - r), \quad d\hat{a}_i/dt = \alpha_i \cos(mi\varphi)(\omega - r), \quad d\hat{b}_i/dt = \beta_i \sin(mi\varphi)(\omega - r) \quad (4)$$

$$i = 1, \dots, N$$

where r is the constant reference signal (the desired velocity), $\alpha, \alpha_i, \beta_i$ are constant positive gain coefficients. The differential equations (4) have to be solved by the microprocessors or other way during the process of regulation. It may be proved by Lyapunov technique that the closed-loop system (1)-(4) is globally asymptotically stable for all positive gain coefficients, i.e., ω tends to r when time tends to infinity. The system was numerically modeled, that have confirmed the theoretical consideration.

Using the ideas of the paper [2] the control scheme may be generalized to the case of non-ideal actuator and to the case of non-ideal velocity sensor. It is proposed also to apply learning (repetitive) control to attenuate periodic disturbances [3].

References

1. G. Rizzoni "Estimate of Indicated Torque from Crankshaft Speed Fluctuations: A Model for the Dynamics of the IC Engine", IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 38, N. 3, pp. 168-179, 1989.
2. A.T. Zarembo "Adaptive Control of Flexible Link Manipulators Using a Pseudolink Dynamic Model," Dynamics and Control, vol. 6, pp. 179-198, 1996.
3. A.T. Zarembo, I.V. Burkov "Active Damping of Engine Speed Oscillations Based on Learning Control", in Proc. Amer. Control Conf. (Philadelphia), 1998.

THE PROGRAMMED ITERATIONS METHOD IN SYSTEMS WITH A VARYING STRUCTURE

Chentsov A.G., Morina S.I. and Zobnin B.B.

Institute of Mathematics and Mechanics
Ural Branch of Russian Academy of Sci.,
16 Kovalevskaya St., 620219 Ekaterinburg Russia
e-mail: chentsov@ous.imm.intec.ru"

Consider the complex of controllable systems

$$\dot{x}(t) = f^{(i)}(t, x, u), \quad (1)$$

functioning on a finite time interval $I \triangleq [t_0, \vartheta_0]$ ($t_0 < \vartheta_0$); here $u \in P$ is an obstacle vector, $i \in \overline{1, s}$, P is a nonempty compact in the space \mathbf{R}^p . The vector functions $f^{(1)}, \dots, f^{(s)}$ satisfy the natural conditions corresponding to [1]. Suppose that systems (1) are commuted when the phase trajectory gets into "blocks" of the stand space $\mathbf{D} \triangleq I \times \mathbf{R}^n$, where \mathbf{R}^n is a phase space of each of the systems (1). These "blocks" correspond to an a priori partition of the above mentioned stand space. We shall reduce the complex of the systems (1) to one common conflict-control system [1, 2]

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, v \in Q, \quad (2)$$

where P and Q are nonempty compact sets in finite-dimensional spaces, f satisfies the above-mentioned conditions of [1]. In the capacity of a concrete variant of Q we can choose a finite set of all vectors $v \in \mathbf{R}^s$ with components from $\{0; 1\}$; all coordinates of these vectors are equal to zero, except one which is equal to 1. In other words, in our case Q is the union of basis vectors of \mathbf{R}^s : $Q \triangleq \{v^{(i)} : i \in \overline{1, s}\}$. In these designations the passage to the system(1) with the number $i \in \overline{1, s}$ can be treated as switching on the control $v^{(i)} \in Q$ in the system (2), where the right hand side is determined in the following way: $\forall t \in I \forall x \in \mathbf{R}^n \forall u \in P \forall v \in Q$

$$f(t, x, u, v) \triangleq \sum_{i=1}^s v^{(i)} f^{(i)}(t, x, u). \quad (3)$$

We switch the systems (1) with the goal to guarantee the retention $(t, x(t)) \in$

\mathcal{D} , $t_0 \leq t \leq \vartheta_0$, where \mathcal{D} is an open subset of \mathbf{D} . This problem has sense of the viability [5, 6] of trajectories of (1).

For system (2) a differential pursuit-evasion game [1] are determined by the couple $M \triangleq \mathbf{D} \setminus \mathcal{D}$ and $N \triangleq \mathbf{D}$. In a more general case the set N can be a subset of \mathbf{D} with t -section $N(t) \triangleq \{x \in \mathbf{R}^n | (t, x) \in N\}$ closed in \mathbf{R}^n . The solution of this game is the set of the positional absorption W , $W \subset \mathbf{D}$, or the largest u -stable brige [1, 4] for the (M, N) -guidance problem. Constructing W can be realized on the basis of the programmed iterations method [3, 4], a variant of which is given in [7, p. 60–63] (see also [4, p. 233] in terms of the operators $A_M^{(v)}$, $v \in Q$. This variant connected with reducing 2 to a “collection” of v -systems; moreover, in this case we have only a finite number of such systems. Then W is realized in the form of a monotone limit of the sequence W_i ($i = 0; 1; 2; \dots$) such that $W_0 = \mathbf{D}$ and W_i is the intersection of all the sets $A_M^{(v)}(W_{i-1})$, $v \in Q$. On the other hand, W can be determined as a fixed point for all the operators $A_M^{(v)}$, $v \in Q$ simultaneously; besides W is the largest such “universal” fixed point. Moreover, for each $v \in Q$ the family of all possible fixed points of $A_M^{(v)}$ is $\{A_M^{(v)}(H) : H \in \mathcal{D}\}$, where \mathcal{D} is the family of all subsets of \mathbf{D} . It is useful to note that for constructing the set W as an universal fixed point we may took only the intersection for $v \in Q$ of images (under the operator $A_M^{(v)}$) of the family of all subsets of N , closed in N in the topology of a subspace of \mathbf{D} .

References

- [1] Krasovskii N.N. and Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. Springer-Verlag, 1988.
- [2] Krasovskii N.N. *Game problems on meeting of motions*. Nauka, Moscow, 1970.
- [3] Chentsov A.G. On a game problem of guidance. *Soviet. Math. Dokl.*, 1976, Vol. 17, no.1, p. 73–77.
- [4] Subbotin A.I. and Chentsov A.G. *Optimization of guarantee in control problems*. Nauka, Moscow, 1981.
- [5] Aubin J.-P. *A viability Theory*. Boston: Birkhauser, MA, 1991.
- [6] Kurzhanskii A.B. and Filippova T.F. On the discription of the viability set for trajectories of a differential inclusion. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 289, no. 1, p.38–41.
- [7] Chentsov A.G. *The programmed iteration method for a differential pursuit-evasion game*. Dep. in VINITI, no. 1933-79, Sverdlovsk, 1979.

ON MULTI-DIMENSIONAL OPIAL-TYPE INEQUALITIES

Wing-Sum Cheung
 The University of Hong Kong
 Hong Kong
 Email: wscheung@hkucc.hku.hk

Abstract

Since the birth of the celebrated integrodifferential inequality of Z. Opial in 1960, many have devoted much time and effort to the improvement of the original proof, the application of the inequality in differential and integral equations, and the generalization of the inequality to various situations, for instance, to the case involving higher order derivatives, and the case involving many functions of many variables. By now, the study of Opial-type inequalities has grown into a substantial field of research with many important applications in the study of qualitative as well as quantitative properties of solutions of differential and integral equations. In fact, it should not be too much an exaggeration to say that the study of Opial-type inequalities has triggered the study of integral inequalities in general to become a central role in mathematical analysis and its applications.

The original Opial's inequality reads as follows.

Theorem (Opial) *If $f \in C^1[0, h]$ satisfies $f(0) = f(h) = 0$ and if $f(x) > 0$ on $(0, h)$, then*

$$\int_0^h f(x)|f'(x)|dx \leq \frac{h}{4} \int_0^h |f'(x)|^2 dx .$$

In this work, we shall give the following new Opial-type inequalities involving many functions of many variables which improve and generalize existing results along this line in the literature.

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a fixed rectangular region, $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a positive continuous weight function and $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a positive function with $\rho^{-1} \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Let

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \{ & f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} | f_1, f_{12}, \dots, \dot{f} \text{ are defined and continuous on } \Omega , \\ & \text{and } f(a_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1, a_2, x_3, \dots, x_n) = \dots \\ & = f_{1\dots(n-1)}(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) = 0 \text{ for all } (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \} , \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \{ & f \in \mathcal{S} | f(b_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1, b_2, x_3, \dots, x_n) = \dots \\ & = f_{1\dots(n-1)}(x_1, \dots, x_{n-1}, b_n) = 0 \text{ for all } (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \} , \end{aligned}$$

where, for simplicity, we have used the abbreviation \dot{f} for $f_{1\dots n}$.

Theorem 1. For any $f^\alpha \in \mathcal{S}$, $q_\alpha \geq 1$, $\alpha = 1, \dots, m$, and $r \geq 0$, if we write $q := \sum_\alpha q_\alpha$, $q' := q - \min_\alpha \{q_\alpha\}$, and if w is non-increasing in each variable, then

$$\begin{aligned} & \int_\Omega w \left(\prod_\alpha |f^\alpha|^{q_\alpha} \right)^r \sum_\beta \left[\left(\prod_{\alpha \neq \beta} |f^\alpha|^{q_\alpha} \right) |f^\beta|^{q_\beta} \right] dx \\ & \leq \frac{1}{m(r+1)} C^{-q(r+1)} V(\Omega)^{q'+qr-1} \cdot \int_\Omega \rho^{-1} dx \cdot \sum_\alpha C^{mq_\alpha(r+1)} \int_\Omega \rho w |f^\alpha|^{mq_\alpha(r+1)} dx \end{aligned}$$

for any constant $C > 0$.

Theorem 2. For any $f^\alpha \in \mathcal{S}$, $q_\alpha \geq 1$, $\alpha = 1, \dots, m$, and $r \geq 0$, if we write $q := \sum_\alpha q_\alpha$, $q' := q - \min_\alpha \{q_\alpha\}$, and if $0 < A \leq w(x) \leq B$ for all $x \in \Omega$, then

$$\begin{aligned} & \int_\Omega w \left(\prod_\alpha |f^\alpha|^{q_\alpha} \right)^r \sum_\beta \left[\left(\prod_{\alpha \neq \beta} |f^\alpha|^{q_\alpha} \right) |f^\beta|^{q_\beta} \right] dx \\ & \leq \frac{1}{m(r+1)} C^{-q(r+1)} \left(\frac{B}{A} \right)^{\frac{m(r+1)-1}{m(r+1)}} V(\Omega)^{q'+qr-1} \\ & \quad \cdot \int_\Omega \rho^{-1} dx \cdot \sum_\alpha C^{mq_\alpha(r+1)} \int_\Omega \rho w |f^\alpha|^{mq_\alpha(r+1)} dx \end{aligned}$$

for any constant $C > 0$.

Theorem 3. For any $f^\alpha \in \mathcal{T}$, $q_\alpha \geq 1$, $\alpha = 1, \dots, m$, and $r \geq 0$, if we write $q := \sum_\alpha q_\alpha$, $q' := q - \min_\alpha \{q_\alpha\}$, and if $0 < A \leq w(x) \leq B$ for all $x \in \Omega$, then

$$\begin{aligned} & \int_\Omega w \left(\prod_\alpha |f^\alpha|^{q_\alpha} \right)^r \sum_\beta \left[\left(\prod_{\alpha \neq \beta} |f^\alpha|^{q_\alpha} \right) |f^\beta|^{q_\beta} \right] dx \\ & \leq \frac{1}{m(r+1)} C^{-q(r+1)} \left(\frac{B}{A} \right)^{\frac{m(r+1)-1}{m(r+1)}} \left[\frac{V(\Omega)}{2^n} \right]^{q'+qr-1} \cdot M \cdot \sum_\alpha C^{m(q_\alpha+1)} \int_\Omega \rho w |f^\alpha|^{m(q_\alpha+1)} dx \end{aligned}$$

for any constant $C > 0$, where

$$M = \max \left\{ \int_{\Omega_k} \rho^{-1} dx : k = 1, \dots, 2^n \right\}$$

and the Ω_k 's are the 2^n rectangular sub-regions of Ω determined by the planes $x_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$, $i = 1, \dots, n$.

REFERENCES

- [1] W.S. Cheung, *Opial-type inequalities with m functions in n variables*, *Mathematika* **39** (1992), 319-326.
- [2] B.G. Pachpatte, *On Opial-type inequalities in two independent variables*, *Proc. Royal Soc. Edin.* **100A** (1985), 263-270.

SYNTHESIS OF THE OPTIMAL DIVIDENT AND INVESTMENT POLICY IN A DYNAMIC MODEL OF THE FIRM

N.M. Dmitruk

Institute of Mathematics

National Academy of Sciences

Surganovstr. 11, Minsk 72, Belarus, 220072

dmitruk@im.bas-net.by

The dynamic model of the firm [1] over the finite planning horizon $T = [0, z]$ is under consideration. The firm produces a homogeneous output $Q = Q(t) = qK(t)$ where $K = K(t)$ is capital, q is capital productivity. We assume that the firm operates at an imperfect market. This leads to well known concavity properties of the sales function $S = S(Q) : S(0) = 0, S'(Q) > 0, S''(Q) < 0, Q > 0$. Capital $K(t)$ consists of the stock of equity $X = X(t)$ and the amount of debt $Y = Y(t)$:

$$K(t) = X(t) + Y(t), t \in T.$$

The amount of debt is supposed to be positive and not exceed some part of equity

$$0 \leq Y(t) \leq kX(t), t \in T; 0 < k < 1. \quad (1)$$

Evolution of capital is described by

$$\dot{K} = -aK + I, \quad (2)$$

where a is the depreciation rate, I is the level of gross investment.

The difference between income of the firm $S(Q(t))$ and its expenditures which consist of depreciation $aK(t)$, interest on debt $rY(t)$, wage payments $wL(t)$ (w is the wage rate, $L(t) = lK(t)$ is the amount of labor employed), and dividend pay-out $D(t)$ is retained by the firm to raise its equity. Thus the amount of equity changes according to the equation

$$\dot{X} = S - aK - rY - wL - D = rX + S - (a + r + wl)K - D. \quad (3)$$

Variables X, K will be treated as state variables, D, I will be considered as control variables.

Piecewise continuous functions $D(t), I(t), t \in T$, which satisfy the inequalities

$$0 \leq D(t) \leq D_{max}, I_{min} \leq I(t) \leq I_{max}, t \in T, \quad (4)$$

and generate the trajectories $X(t), K(t), t \in T$, of (2), (3) satisfying due to (1)

$$X(t) \leq K(t) \leq (1 + k)X(t), t \in T.$$

are called admissible open-loop controls.

Admissible open-loop controls $D^0(t), I^0(t), t \in T$, providing maximum to the sum of the discounted with the rate i terminal equity and the amount of the discounted dividends over T are called

the optimal open-loop controls. Thus the mathematical model of the problem is given by the optimal control problem with state constraints:

$$\begin{aligned} V(D, I) &= e^{-iz} X(z) + \int_0^z e^{-it} D(t) dt \rightarrow \max, \\ \dot{X} &= rX + S - (a + r + wl)K - D, \quad X(0) = X_0, \\ \dot{K} &= -aK + I, \quad K(0) = K_0, \\ 0 &\leq D(t) \leq D_{\max}, \quad I_{\min} \leq I(t) \leq I_{\max}, \\ X(t) &\leq K(t) \leq (1 + k)X(t), \quad t \in T. \end{aligned} \quad (5)$$

We define the optimal feedback controls as

$$D^0(\tau, P, R) = D^0(\tau|\tau, P, R), \quad I^0(\tau, P, R) = I^0(\tau|\tau, P, R), \quad (P, R) \in \Omega_\tau, \tau \in T, \quad (6)$$

where $D^0(t|\tau, P, R), I^0(t|\tau, P, R), t \in [\tau, z]$, are the open-loop controls for position (τ, P, R) ; Ω_τ is a set of initial states (P, R) for which these controls exist.

The paper is devoted to the synthesis of the optimal dividend and investment policy, i.e. the construction of the functions (6).

We only consider the case when $i < r$. At first, on the base of the sufficient optimality condition [2], the optimal open-loop solution of the problem (5) is constructed. This solution is formed with the help of several auxiliary problems derived from (5) by removing a part of restrictions (4). Problem (5) without any constraint (4) is called the null level problem. The optimal trajectories of this problem are $X(t) \equiv K(t) \equiv K_*, t \in T$, where K_* is determined from $S'(K) = a + i + wl$. The optimal consumption and investment policy is $D(t) \equiv S(K_*) - (a + wl)K_*, I(t) \equiv aK_*, t \in T$. Problem (5) with only one of the constraints (4) is called the first level problem. The final part of the optimal trajectory of each first level problem is the same as one of the null level problem is. Similarly, the solutions of the second level problems, i.e. problems with two simple constraints, contain the optimal trajectories of the corresponding first level problems. Combining the solutions of the second level problems, we obtain the optimal trajectories of original problem (5).

It is shown that if the planning horizon z is a sufficiently large then the optimal feedback controls (6) do not depend on τ : $D^0(\tau, P, R) = D^0(0, P, R) = D^0(P, R), I^0(\tau, P, R) = I^0(0, P, R) = I^0(P, R), (P, R) \in \Omega_*$.

This work has been done under support from the Byelorussian Foundation for Basic Research (grant F96-011) and the State Programme for Basic Research of Belarus.

References

1. O. van Hilten, P.M. Kort, P.J.J.M. van Loon *Dynamic policies of the firm*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.
2. R. Gabasov, F. M. Kirillova. *The Qualitative Theory of Optimal Control Processes*. New York: Marcel Dekker Inc., 1976.

QUASIFUNCTIONALS AS AN APPROACH
TO ANALYZING SYSTEMS OF ODE'S

P.B.Dubovski

Institute of Numerical Mathematics,
Russian Academy of Sciences
8 Gubkin str., 117951, GSP-1, Moscow
e-mail: dubovski@inm.ras.ru

To demonstrate the method, we consider, as an example, the following infinite system of ordinary differential equations, arising, e.g., in chemical kinetics:

$$\begin{aligned} \frac{du_i(t)}{dt} &= a_i(t)u_{i+1}(t) + b_i(t)u_i(t), \quad t > 0, \quad 1 \leq i < \infty, \\ u_i(0) &= u_i^{(0)}, \quad 1 \leq i < \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

The coefficients $a_i(t)$, $b_i(t)$ are supposed to be known. To analyse (1) we consider for some fixed $T > 0$ and $k \geq 1$ the following adjoint system:

$$\begin{aligned} -\frac{dv_{k,i}(t)}{dt} &= a_{i-1}(t)v_{k,i-1}(t) + b_i(t)v_{k,i}(t), \quad t < T, \quad 1 \leq i < \infty, \\ v_{k,i}(T) &= c_{k,i}, \quad 1 \leq i < \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Here we set $v_0 = a_0 = 0$. It is possible to observe that

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i^{(0)} v_{k,i}^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(T) c_{k,i}. \quad (3)$$

We treat the right-hand side of (3) as a quasifunctional of u_i yielding the most difficult term in (1), i.e., $u_{i+1}(T)$, in the following way:

$$u_{i+1}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{i+1,j} u_j(t)$$

(prefix "quasi" shows that we deal with a function $\sum_{j=1}^{\infty} c_{k,j} u_j(t)$ dependent on k and t).

To estimate $u_2(T)$ we take $c_{2,j} = \delta_{2,j}$ with $\delta_{i,j} = 1$ at $i = j$ and zero otherwise. Then we solve (2) for $k = 2$, find values $v_{2,i}^{(0)}$, $i \geq 1$, and from (3)

obtain $u_2(T)$ for any $T > 0$. Substituting u_2 in (1) gives us immediately the solution $u_i(t)$, $i \geq 1$.

This way enables us to solve system (1) analytically for the case of constant coefficients a_i , b_i . For time-dependent coefficients we apply numerical computing and also arrive at the solution. Quasifunctional approach also gives some useful results for usual finite systems of ODE's.

As a concrete demonstration let us for simplicity set in (1) $b_i = 0$ and $a_i = \text{const.} \neq 0$, $i \geq 1$. Then (2) yields

$$v_{2,1}(t) \equiv 0, \quad v_{2,2} \equiv 1,$$

$$v_{2,i}(t) = \int_t^T a_{i-1}(s) v_{2,i-1}(s) ds, \quad i \geq 3.$$

Since $a_i(s) = a_i$, then we obtain

$$v_{2,i}(t) = \prod_{j=2}^{i-1} a_j \frac{(T-t)^{i-2}}{(i-2)!}, \quad i \geq 2, \quad t \leq T.$$

Particularly,

$$v_{2,i}(0) = \prod_{j=2}^{i-1} a_j \frac{T^{i-2}}{(i-2)!}, \quad i \geq 2.$$

Recalling (3), we arrive at the desired expression

$$u_2(t) = \sum_{i=2}^{\infty} u_i^{(0)} \frac{t^{i-2}}{(i-2)!} \prod_{j=2}^{i-1} a_j, \quad t \geq 0.$$

We set here by definition $\prod j = 2^1 = 1$. Then we finally obtain the solution

$$u_i(t) = \sum_{j=i}^{\infty} u_j^{(0)} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} \prod_{k=i}^{j-1} a_k, \quad i \geq 1.$$

References

- [1] Marchuk, G. I., *Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems*, Moscow: Nauka, 1992.
- [2] Marchuk, G. I., Agoshkov, V. I., and Shutyaev, V. P., *Adjoint Equations and Perturbation Algorithms in Nonlinear Problems*, Boca Raton: CRC Press, 1996.

COUPLED MAP LATTICE SIMULATION OF EPILEPTOGENESIS IN THE HIPPOCAMPAL SLICES.

A. O. Dudkin[†], V. I. Sbitnev[‡]

[†]: *Molecular & Radiation Biophysics Division,
St. Petersburg Nuclear Physics Institute, Russian Academy of Sciences,
188350 Gatchina, Russia, Email: dudkin@omrb.pnpi.spb.ru*

[‡]: *Condensed State Research Department,
St. Petersburg Nuclear Physics Institute, Russian Academy of Sciences,
188350 Gatchina, Russia, Email: sbitnev@hep486.pnpi.spb.ru*

Bioelectric activity of a nervous tissue and its synchronization with forming epileptiform bursts are simulated by a coupled map lattice. Located in the lattice sites, the functional units of the map represent neural masses which consist of current sources and sinks. The sources yield depolarization of neurons and sinks provide hyperpolarization. The map describes single variable – the bioelectric potential. This potential is created by interplay of all current sources and sinks in the neural masses. The neural masses are diffusively coupled with each other both by electrotonic influence and synaptic coupling. Both mentioned mechanisms are suggested to be essential for formation of the synchronous bursts. Transition from chaotic activity to the bursts have been studied.

Coordinates near an invariant manifold of a smooth differential equations system

Eugene Ershov

St.Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering

198005 St. Petersburg, Russia

e-mail: ershov@eug.usr.abu.spb.ru

George Osipenko

St.Petersburg State Technical University

195251 St. Petersburg, Russia

e-mail: math@math.hop.stu.neva.ru

Let us consider a C^1 system of ordinary differential equations defined in R^n :

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

where F is a C^1 vector field. Assume that system (1) has a C^1 closed (compact and without boundary) invariant manifold M_0 , $\dim M_0 = m$, $0 \leq m < n$. Let M , $\dim M = m$, be a C^1 closed manifold which is C^1 near to M_0 . Needless to say, there exists a C^1 diffeomorphism $\varphi : U \rightarrow R^n$, where U is a neighborhood of M_0 in R^n , which takes M_0 to M . In coordinates $y = \varphi(x)$, system (1) takes the form

$$\dot{y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\varphi^{-1}(y))F(\varphi^{-1}(y)), \quad y \in R^n. \quad (2)$$

Clearly, system (2) is only C^0 smooth, in general. The aim is to prove that there exists a C^1 diffeomorphism $\varphi : U \rightarrow R^n$ which takes M_0 to M and preserves the smoothness of a system, that is, system (2) is C^1 . More precisely, we obtain the following result.

Theorem. *Let M_0 be a closed C^1 invariant manifold of system (1). Assume that M is a C^1 closed manifold which is C^1 near to M_0 . There exists a C^1 diffeomorphism $\varphi : U \rightarrow R^n$, defined in a neighborhood U of M_0 , which takes M_0 to M and such that system (2) is C^1 .*

The construction of such a diffeomorphism uses the averaging method (see, for example, [1], where this method was applied in a similar situation) and is based on the following facts:

1. An invariant manifold possesses an "additional" smoothness along trajectories of a system;
2. One can approximate a C^1 mapping by a C^∞ one, and this approximation holds not only for the derivatives with respect to spatial variables but also for the derivative along trajectories of a system.

The obtained result may be useful in treating the problem of perturbation of invariant manifolds of ordinary differential equations (see, for example, [2] and [3]).

References

- [1] D. V. Anosov. *Geodesic flows and closed Riemannian manifolds with negative curvature*. Proc. Steklov Inst. Math., **90**, 1967.
- [2] G. S. Osipenko and E. K. Ershov. *Perturbations of invariant manifolds of ordinary differential equations*. in "Six Lectures on Dynamical Systems" (Eds. B. Aulbach and F. Colonius). World Scientific: Singapore, New Jersey, London, HongKong, 213–265, 1995.
- [3] G. S. Osipenko, E. K. Ershov, and J. H. Kim. *Lectures on invariant manifolds of perturbed differential equations and linearization*. St. Petersburg State Tech. Univ.: St. Petersburg, 1996.

THE MATHEMATICAL THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS,
ARISING IN DYNAMICS OF SYSTEMS WITH DRY FRICTION

I.A. Finogenko

Department of Mathematics, Irkutsk State University, Irkutsk 664003, Russia

E-mail: fn@icc.ru

The dynamics equations of mechanical system with forces of sliding friction are considered. These equations for generalized coordinates $q = (q^1, \dots, q^k)$ written in Lagrangian form have the type

$$A(t, q)\ddot{q} = g(t, q, \dot{q}) + Q^A(t, q, \dot{q}) + Q^T(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (1)$$

Here $A(t, q) = [a_{ij}]_1^k$ is the continuously differentiable, symmetric, positive matrix of the coefficients of inertia; $Q^A(t, q, \dot{q})$, $g(t, q, \dot{q})$ are continuous functions representing the active forces, generalized gyroscopic forces, the transferred forces of inertia and other one. The generalized forces of friction are expressed by the formula

$$Q_s^T(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{cases} -f_s(t, q^s, \dot{q}^s) | N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) | \operatorname{sgn} \dot{q}^s, & \text{if } \dot{q}^s \neq 0 \\ f_s(t, q^s, 0) | N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) | \operatorname{sgn} Q_s^{T0}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}), & \text{if } \dot{q}^s = 0, \\ & | Q_s^{T0}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) | > f_s(t, q^s, 0) | N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) |_{\dot{q}^s=0} \\ Q_s^{T0}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}), & \text{if } \dot{q}^s = 0, \\ & | Q_s^{T0}(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) | \leq f_s(t, q^s, 0) | N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) |_{\dot{q}^s=0} \end{cases}$$

where $f_s(t, q^s, \dot{q}^s) > 0$ are the coefficients of friction, $| N_s(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) |$ are the absolute values of the normal reactions, $Q_s^{T0}(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$ are the forces of friction at relative rest.

The solvability with respect to \ddot{q} and reducibility of the equation (1) to the form

$$\ddot{q} = G(t, q, \dot{q}) \quad (2)$$

with, generally speaking, discontinuous function $G : \Omega \rightarrow R^k$ are investigated. The general mathematical theory for equation (1) in the form (2) is developed: existence, continuability, uniqueness, a dependence of initial conditions and parameters of right-hand solutions, stability of equilibrium states. The results are delivered from the well-known P.Painleve's paradoxes connected with "nonuniqueness" or "impossibility" of motion by the mathematical methods only.

This research was carried out with support from the Russian Fund for Fundamental Research (96-01-00327).

ABOUT SYNTHESIS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR GROUPS

A.V.FLEGONTOV

Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Science

14-th Line, 39, 199178, St.-Petersburg, Russia

E-mail : afleg@ias.spb.su

Differential equations admitting the basic forms of analytical representation of the solutions in a class of polynomial functions are considered. Invariants of continuous and discrete groups of transformations are resulted. New methods of synthesis of differential equations with a priori symmetry are considered. The methods of invariant synthesis of ordinary differential equations are based on engineering of representation of integrated manifold above a differential ring of polynomials [1,2]. Differentiating basic manifold some times, we'll get "differential bush" of equations of the senior orders connected among themselves.

The problems of synthesis and of analysis in doing so are formulated as follows:

1. The invariant synthesis. Construct a system ODE with a priori symmetry properties on a given pair of functions $(\phi(\tau), \psi(\tau))$ of a determined structure.
2. The invariant analysis. The problem of analysis is put as return to 1. On a system ODE to restore integrated manifold in a given class of functions with by symmetry properties.

Examples of systems of differential equations of the superior orders are given.

The work is executed at financial support RFBR, project N 97-07-90088.

References

- [1] Flegontov A.V. (1996). Invariant synthesis of modelly equations. *The algebraic and analytical methods in the theory of differential equations*. Oryol: OGU. p. 64-66. (in russ.)
- [2] Flegontov A.V. (1998). Synthesis of differential equations and their groups on manifolds. *Computer Algebra in Scientific Computing. Extended abstracts of the International Conference CASC-98*. St. Petersburg. - p. 42-47.

STABILITY AND ROBASTNESS OF LINEAR DIFFERENCE AND DIFFERENTIAL
SYSTEMS. ¹

Math. and Mech Dept,
St.-Petersburg State University

With a computer in a control chain, we imply that a discrete (impulse) control signal is formed, even if a plant acts in continuous time. In the present work an optimization problem with the quadratic optimality criterion is considered solely for a linear feedback. The optimal control problem of a linear plant in continuous time with discrete feedback and equidistant discrete instants at which an observable variable is measured was investigated in [1], and in this case the problem was solved adequately.

Here the optimal control problem with nonequidistant observation instants is discussed. The frequency of control observation instants that ensures the stability of a closed-loop system is established. The continuous dependence (robustness) of the optimality criterion on small variations of observation instants is proved. The problem is investigated for two classes of controls: programmed closed and closed controls. The first implies that having the information gained about the plant's state, we have no prior knowledge of whether or not a new information will be obtained after a time. In the second case not only it is known that such an information will be gained but the instant at which it happens is known as well. The first problem is solved by two steps. In the first stage the estimation of the plant's state from discrete observations of the outputs of the plant is performed and then the optimal programmed control is designed. The second problem is solved in terms of transfer operators of closed-loop control systems defined on a Hilbert resolution space. These methods are exemplified.

References

1. Somova A.A., V.N. Fomin (1996). Discrete control of linear continuous plants. *Manuscript deposited with VINITI, Moscow*. No 483-B96, 14 February.

¹supported by the Russian Foundation Highest Education State Committee, grant G-94-1.5-75

AUTO-OSCILLATIONS IN PULSE-MODULATED CONTROL SYSTEMS

St.Petersburg State University, St.Petersburg State Marine Technical University

The two types of auto-oscillating systems can be considered [1]. The first one involves systems for which an auto-oscillation is the main operating mode. For such systems the term "auto-oscillation" designates a stable periodic solution [2]. The second class includes systems for which auto-oscillations are undesirable and opposed to stability. For such systems it is inconvenient to consider auto-oscillation as a periodic mode, because an unstable solution does not need to be periodic. For these systems we shall employ the notion of auto-oscillation due to V.A. Yakubovich [3, 4].

Suppose that a system is described with the equations

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bf(t), \quad \sigma = c^*x, \quad f = M\sigma. \quad (1)$$

Here A is a constant $m \times m$ matrix, b, c are constant m -vectors, $\sigma(t)$ and $f(t)$ are the modulator input and the modulator output respectively, M is a nonlinear operator which describes the operation of the pulse modulator. It is supposed that there exists a sequence of times t_0, t_1, \dots such that t_n is independent of $\sigma(t)$ for $t > t_n$ and the estimate $0 < \kappa_0 T \leq t_{n+1} - t_n \leq T$ holds, with κ_0 and T being positive constants. Assume that $f(t)$ is a piecewise continuous function bounded for $t > 0$, it is independent of $\sigma(\tau)$ when $\tau > t$, and does not change its sign on every sampling interval (t_n, t_{n+1}) .

Let a_1, a_2 be some positive numbers. A solution $x(t), \sigma(t)$ of (1) will be called $[-a_1, a_2]$ -auto-oscillation, if it is bounded when $t \geq t_0$, $\sigma(t) \not\rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$, and $\sigma(t)$ changes its sign infinitely many times as t increases. (To be more formal, there exist two sequences $t_n^{(1)} \rightarrow +\infty, t_n^{(2)} \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow \infty$, such that $\sigma(t_n^{(1)}) < 0, \sigma(t_n^{(2)}) > 0$.) In addition, $\sigma(t)$ infinitely many times leaves the interval $[-a_1, a_2]$ as t increases. (To be more formal, there exists a sequence $t_n^{(0)} \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow \infty$, such that for any n either $\sigma(t_n^{(0)}) < -a_1$ or $\sigma(t_n^{(0)}) > a_2$.)

Introduce notations

$$W(s) = c^*(A - sI_m)^{-1}b, \quad \kappa = \lim_{s \rightarrow \infty} sW(s), \quad \rho = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s),$$

$$\chi(s) = sW(s) - \kappa, \quad \kappa_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} s\chi(s), \quad v_n = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt.$$

Suppose the transfer function $W(s)$ to be nondegenerate. Along with the transfer function $W(s)$ we shall consider the unit impulse response of CLP $w(t) = -c^* \exp(At)b$.

It is assumed that there exists a piecewise continuous function (an equivalent nonlinearity) $\varphi(\sigma)$ such that for every n there exists a number $\tilde{t}_n \in [t_n, t_{n+1}]$ for which $v_n = \varphi(\sigma(\tilde{t}_n))$.

Assume that there exist such numbers μ_1, μ_2 that $0 < \mu_1 \leq \mu_2$ and the inequality

$$\mu_1 \leq \varphi(\sigma)/\sigma \leq \mu_2$$

takes place for all $\sigma \neq 0, -a_1 \leq \sigma \leq a_2$ (here a_1, a_2 are some positive numbers). Suppose also that for any n the estimate

$$\left| \int_{\tilde{t}_n}^{t_{n+1}} w(\tilde{t}_n - t) f(t) dt \right| \leq \min\{a_1, a_2\}$$

holds.

Theorem 1 Assume the matrix A is Hurwitz, there exists a number μ_0 , $\mu_1 \leq \mu_0 \leq \mu_2$, such that the matrix $A + \mu_0 bc^*$ is anti-Hurwitz, and there exist positive numbers τ , ε , ε_3 such that:

- (a) the inequalities $\tau + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \kappa^2 < 1$, $\mu_1 \mu_2 > \varepsilon_3$ hold;
 (b) for all real numbers ω , $0 \leq \omega \leq +\infty$, the frequency-domain inequality

$$1 - \tau - \varepsilon_2 - \frac{T^2}{3\tau} \left[(1 - \tau - \varepsilon_2) \alpha(i\omega) + \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{4} \right] |\chi(i\omega)|^2 + (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{Re} W(i\omega) - \alpha(i\omega) |W(i\omega)|^2 > 0$$

takes place. Here $\alpha(i\omega) = \varepsilon_3 - \mu_1 \mu_2 + \varepsilon_1 \omega^2$ where ε_1 , ε_2 given by the formulas

$$\varepsilon_1 = \frac{4T^2 \beta}{\pi^2} + \frac{T^2}{\pi^2 \varepsilon} (2T|\kappa|\beta + \mu_1 + \mu_2)^2, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon + T|\kappa|(\mu_1 + \mu_2) + \beta T^2 \kappa^2, \quad \beta = \mu_1 \mu_2 \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\varepsilon_3} - 1 \right).$$

Moreover, let one of the following conditions take place:

- (1) $W(0) \geq 0$;
 (2) $W(0) < 0$, and the equivalent nonlinearity $\varphi(\sigma)$ satisfies the inequality

$$\sup_{-\infty < \sigma < \infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \frac{1}{\alpha_1(T) - W(0)}$$

with

$$\alpha_1(T) = \frac{3}{2} T |\kappa| + T^2 |\kappa_1| + T \int_0^{+\infty} \left| \frac{dw(t)}{dt} \right| dt + T^2 \int_0^{+\infty} \left| \frac{d^2 w(t)}{dt^2} \right| dt.$$

Then all the solutions of (1), save the solution $x(t) \equiv 0$, are $[-a_1, a_2]$ -auto-oscillations.

The proof employs the averaging method developed in [5].

The work is supported by Russian Foundation of Basic Researches (project 96-01-00405).

References

- [1] A.A. Voronov. *Foundations of Theory of Automatic Control. Peculiar Linear and Nonlinear Systems*. Énergoizdat, Moscow, 1981. (Russian).
 [2] A.A. Andronov, A.A. Witt, and S.E. Chaikin. *Theorie der Schwingungen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1965. (Transl.).
 [3] V.A. Yakubovich. Frequency-domain criteria for oscillations in nonlinear systems with one stationary nonlinear component. *Siberian Math. J.*, 14(5):768–788, 1973. (Transl. 1974).
 [4] V.A. Yakubovich. Frequency conditions of oscillations in nonlinear control systems with one single-valued or hysteresis-type nonlinearity. *Automat. Remote Control*, 36(12):1973–1985, 1976. (Transl.).
 [5] A.Kh. Gelig and A.N. Churilov. *Oscillations and Stability of Nonlinear Impulsive Systems*. St. Petersburg State Univ., St. Petersburg, 1993. (Russian).

Grigoriev V. V., Mikhailov S. V., Ryukhin V.Y., Mansurova O. K.

*Saint-Petersburg State Institute of Fine Mechanics and Optics (Technical University). Department of
Automatics and Remote Control.*

197101 Sablinskaya st., 14, Saint-Petersburg, Russia.

ANALYSIS AND SYNTHESIS METHODS BASED ON LYAPUNOV'S METHOD

Modern control systems are used in different industries. That systems provide solutions of several control problems from simple stabilization problem to complex problem of multivariable control. Any problem of automatic control gets its solution according to quality characteristics.

The most important problems in automatic control are analysis and synthesis problems. For solution of these problems many well-known frequency domain and time domain methods are used. Any method is connected with some qualitative characteristic (transient time ex.). Every method used in automatic control has positive and negative sides for using.

Lyapunov's method discussed here is based on exponential and asymptotic stability. First of these two kinds of stabilities with correctly chosen Lyapunov's function allows to design optimal control procedures.

Qualitative exponential stability (QES) states relations between parameters of QES and characteristics of transient process quality.

Let's consider definitions of QES for continuous time and discrete time systems.

1. Continuous time case:

Let a behavior of dynamic system is described by differential equation $\dot{x}(t) = F(x(t)) x(t)$ and $x(t)$ is a dynamic system state vector.

Position of stability $x(t) = 0$ is called qualitative exponential stable if for $\forall x(t) : x(0) \in R^n$ $\exists r > 0, \beta > 0, \rho \geq 1$ and $\beta - r > 0$ so that for any time moment t next inequality is satisfied:

$$\|x(t) - e^{-\beta t} x(0)\|_v \leq \rho \left(e^{-(\beta+r)t} - e^{-\beta t} \right) \|x(0)\|_v \quad (1)$$

$$\|x\|_v = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^v \right]^{\frac{1}{v}} \quad (2)$$

Exponential stability follows from qualitative exponential stability in particular, so that next inequality is fulfilled:

$$\|x(t)\|_v \leq \rho e^{-\alpha t} \|x(0)\|_v \quad (3)$$

It's can be shown that $\alpha = \beta - r$.

2. Discrete time case:

Let a behavior of dynamic system is described by difference equation $x(m+1) = F(x(m)) x(m)$ and $x(m)$ is a state vector of that dynamic system.

Position of stability $x(m) = 0$ is called quantitative exponential stable if for $\forall x(m) : x(0) \in R^n \exists r > 0, \rho \geq 1, \beta : -1 < \beta + r < 1$ so that for any discrete time moment $m, m = 0, 1, 2, \dots$ the next equation is satisfied:

$$\|x(m) - \beta^m x(0)\|_v \leq \rho [(\beta + r)^m - \beta^m] \|x(0)\|_v \quad (4)$$

Exponential stability follows from QES as particular case if $\beta = 0$ and $r = \alpha$. In that case next inequality is fulfilled:

$$\|x(m)\|_v \leq \rho \alpha^m \|x(0)\|_v \quad (5)$$

Definition of rate in that case is equal to expression for continuous time case (2). In both cases β, r and v parameters mean next sense:

β defines convergence velocity of movement trajectory for all of coordinates.

r determines deflection of system movement from middle trajectory.

v defines power of rate (2).

The analysis and synthesis methods based on introduction of Lyapunov's functions, local optimization method and QES spread not only on continuous time and discrete time linear systems. That methods are can be used for analysis and synthesis of nonlinear and stochastic systems.

ESTIMATING PARAMETERS IN NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH APPLICATION TO PHYSIOLOGICAL DATA

Freiburger Zentrum für Datenanalyse und Modellbildung, Germany

Abteilung für Angewandte Physiologie, Universität Ulm, Germany

horbelt@fdm.uni-freiburg.de

Fitting parameters in systems of nonlinear ordinary differential equations (ODEs) is a difficult task. The goal is to find those parameters \mathbf{p} that minimize the objective function $\chi^2(\mathbf{p})$ globally. Starting from some initial values for the trial trajectory, the model equations are usually solved over the whole fitting interval and $\chi^2(\mathbf{p})$ is calculated. Then, the parameters are iteratively adjusted in order to bring the solution closer to the data. Since $\chi^2(\mathbf{p})$ shows a nonlinear dependence on \mathbf{p} , it will usually have several local minima apart from the global one. Ill-chosen initial estimates of the parameters can even preclude most routines from yielding any solution at all. Additionally, observational noise destabilizes most algorithms.

To circumvent these problems we implemented a strategy called multiple shooting. The basic idea is to partition the fitting interval into many subintervals. The ODE system is solved separately on each subinterval, using the measurements as starting guesses for the initial values of the sub-trajectories. This approach leads to an initially discontinuous trajectory, which is, however, close to the measurements. The algorithm minimizes errors in the data while forcing the final trajectory to be continuous. The freedom of intermediate discontinuity allows the method to stay close to the observed data, prevents divergence of the numerical solution and reduces the problem of local minima.

We confirmed the benefits of our algorithm by application to a physiological problem. In muscle cells an electric activation leads to the release of Ca^{2+} ions from a Ca^{2+} reservoir into the cell plasma and binding to various compounds. One of the state variables is observed experimentally by optical measurements. The underlying reaction scheme can be modeled by a set of nonlinear ODEs. The goal is to determine the release rate time course. In order to achieve this, some kinetic parameters must be estimated from the measurements. This could be done satisfactorily with the algorithm described above, even when the conditions regarding noise and starting guesses were so difficult that other algorithms failed.

At the convergence point the algorithm supplies information about the identifiability of the parameters. This was used to evaluate different reaction schemes with respect to their ability to calculate the correct release rates and to optimize the design of the experiment.

TWO-SEX MODEL FOR TREATMENT OF HIV AND BEHAVIOUR CHANGE IN A GROWING POPULATION

Ying-Hen Hsieh

Department of Applied Mathematics

National Chung-Hsing University

Taichung, Taiwan

e-mail: hsieh@amath.nchu.edu.tw

Abstract

In this work, we propose a two-sex model for heterosexual transmission of HIV/AIDS in a population of varying size. We also consider a community treatment program for the infecteds which reduces the contact rates and/or transmission probabilities of the treated individuals. We make use of the conservation of sexual contacts to reduce the two-sex model to a simpler one-sex formulation. Analytical results will be given for the case where the number of treated individuals increases nonlinearly as the infected population increases. Thresholds are obtained for the persistence of disease, the persistence of total populations, and the persistence of infective populations. We will compare the results with those obtained in Hsieh (1996, *IMA J. Math. Appl. Med. Biol.*) for a similar model with linear treatment rate.

THE CAPTURE OF HYDRODYNAMICAL SHOCK IN THE CASE OF THE NONLINEAR WAVE EQUATION

Timișoara, Romania, University of West, Faculty of Mathematics,
e-mail: iordan@tim1.uvt.ro

ABSTRACT:

This paper presents a shock-capturing method using Greenberg's results [2] and the representation of the trajectories of shocks.

In our considerations we concern the one-dimensional nonlinear wave equation

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma(\frac{\partial \chi}{\partial x})}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

where the function $\sigma : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$ is of class C^1 and satisfies : there exists $\lambda \in (0, 1)$ such that $\lambda(\xi) < 0$ for $\xi \in (0, \lambda)$, $\sigma(\xi) = 0$ for $\xi \geq \lambda$, $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} = -\infty$, σ is strictly increasing on $(0, \lambda)$ and

the potential energy $U(\xi) = \int_{\lambda}^{\xi} \sigma(s) ds$ satisfies condition $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} = +\infty$.

For to find a weak approximation of the solution of the nonlinear wave equation, we consider the infinite system of differential equation

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1, \frac{1}{N} \dot{v}_1 = \sigma(N(x_2 - x_1)) - \sigma(2Nx_1) \\ \dot{x}_k = v_k, \frac{1}{N} \dot{v}_k = \sigma(N(x_{k+1} - x_k)) - \sigma(N(x_k - x_{k-1})), k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2)$$

This system is obtained by difference method and it was studied by P.Lax in the paper [3] and by J.M.Greenberg [2] under various hypothesis.

The construction of a solution for the system (2) is based on the periodic solution of the two dimensional nonlinear first order ordinary differential system:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = v \\ \frac{1}{N} \dot{v} = -\sigma(2N\xi) + \sigma(2N(\beta - \xi)) \end{cases} \quad (3)$$

($N > 0$ integer, $\beta > 0$ real) which satisfies the initial conditons $\xi(0) = \xi_0$, $\xi_0 \in (0, \lambda/2N)$ and $v(0) = 0$, see [1]. In [1], we showed that a solution of the system (1) with the initial conditions:

$$\begin{cases} x_1(0) = \xi_0 \in (0, \lambda/2N), v_1(0) = 0 \\ x_k(0) = (k-1)\beta + \frac{\lambda}{2N} + v_0(\frac{(k-1)T}{2} - t_1), v_k(0) = v_0, k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4)$$

is the family of functions $(x_k(t), v_k(t))$, $k = 1, 2, \dots$ defined for $t \geq 0$ by the formulas

$$x_1(t) = \xi(t), v_1(t) = v(t) \text{ and for } k = 2, 3, \dots$$

$$\begin{cases} x_k(t) = (k-1)\beta + \frac{\lambda}{2N} + v_0\left(\frac{(k-1)T}{2} - v_0 t\right) \\ v_k(t) = -v_0 \end{cases} \text{ for } 0 \leq t \leq \frac{(k-1)T}{2} - t_1 \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_k(t) = (k-1)\beta + \xi\left(t - \frac{(k-1)T}{2}\right) \\ v_k(t) = -v\left(t - \frac{(k-1)T}{2}\right) \end{cases} \text{ for } t \geq \frac{(k-1)T}{2} - t_1 \quad (6)$$

For each integer N , we introduce the functions:

$$\chi^N(x, t) = \begin{cases} 2Nx_1(t)x, & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{1}{2N} \\ x_k(t) + N(x_{k+1}(t) - x_k(t))\left(x - \frac{2k-1}{2N}\right), & \text{for } \frac{2k-1}{2N} \leq x \leq \frac{2k+1}{2N} \end{cases} \quad (7)$$

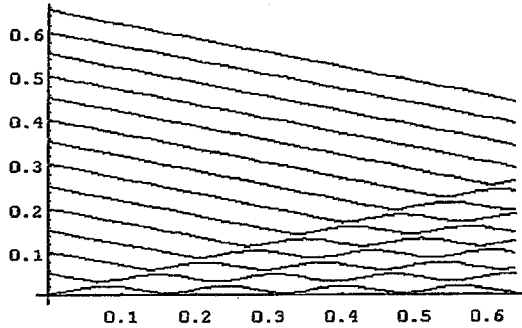
$$\gamma^N(x, t) = \frac{\partial \chi^N}{\partial x}(x, t), v^N(x, t) = \frac{\partial \chi^N}{\partial t}(x, t) \text{ and } \sigma^N(x, t) = \sigma(\gamma^N(x, t)) \quad (8)$$

and we prove that these functions converge weakly to the functions χ^∞ , γ^∞ , v^∞ and σ^∞ . We obtain the limit motion $\chi^\infty(x, t)$ as the pointwise limit of the individual trajectories $x_k(t)$ as $N \rightarrow \infty$ along with $x = k/N$ fixed.

The founded solutions generate the trajectories of shock, being all the lines of equations:

$$x = \frac{2v_0}{\alpha - \lambda_1(v_0)} t. \quad (9)$$

For various choices of v_0 and α , we represent the trajectories of particles.



References

- [1] Balint, Șt., Balint, A.M., Bălțean, D.G., Iordan, V., Hydrodynamical shock problems and nonlinear oscillations,(I,II,III), BAM, 1259/96,1260/96,1261/96,(LXXX).
- [2] Greenberg, J.M., The Shock Generation Problem for a Discrete Gas with Short-Range Repulsive Forces, Comm. Pure Appl. Math., Vol. XLV, 1992, pp. 1125-1139.
- [3] Hou, T.Y., Lax, P.D., Dispersive approximations in fluid dynamics, Comm. Pure Appl. Math. 44, 1991, pp.1-40.

KEYWORDS: nonlinear wave equation, hydrodynamical shock, a shock-capturing method, trajectories of shocks.

A MATHEMATICAL MODEL OF MULTIPARTY POLITICAL SYSTEM

Qamar J. A. KHAN

Department of Mathematics and Statistics
College of Science, Sultan Qaboos University
P.O. Box 36 al-Khod, Postal Code 123, Sultanate of Oman

ABSTRACT

A general model of a political system with three parties i.e. ruling, opposition and third party having less members than opposition is considered. The model consists of a system of three ordinary differential equations where members of the third party will switch over towards ruling party and after lapse of some time become an active member of that party. Taking time delay as bifurcation parameter it has been shown that Hopf bifurcation could occur.

I. INTRODUCTION: Switching is a topic of considerable interest in ecology. In prey-predator environment, the predator prefer to feed itself in a habitat for some duration and then changes its preference to another habitat. This preferential phenomenon of change of habitat by the predator is called switching. There may be several reasons of switching. For example -

The predator prefers to find prey in a habitat where prey is in abundance but after some duration when the prey population starts declining, the predator changes its preference to another habitat where prey is in abundance. For instance, the intertidal snail *nucella lapillus* preferably feed on barnacles when they are in abundance but when mussels dominate, the later are preferred (see Fisher-Piette 1934). Similarly Trinidadian guppies, either juveniles or adults may be more vulnerable, depending on which dominant predator a particular population faces (see Renzick 1982). This preferential phenomenon where predator feeds most numerous prey species is called switching due to abundance. The mathematical models involving one predator and two prey species have been generally studied, in which the predator feeds more intensively on the more abundant species. One can refer to Holling 1961, Takahashi 1964, May 74, Murdoch and Qaten 1975, Raughgarden 1975, Tansky 1976, 78, Prajneshu and Holgate 1987, McNair 1987, Khan et al 1994.

Prey species of large size like wildebeest, Zebra, Thomson gazelle lives in huge herds and are more likely dependent upon self-defense, group defense, group alertness and to consolidate themselves to fight back or scarce away the predator. Here the predator will switch over the habitat where prey are in less number. Pairs of musk-oxen can be successfully attacked by wolves but groups are rarely attacked (Tener 1965). There are many examples of group defense (see Yang and Humphry 1975, May and Robinson 1985. Mathematical models of prey-predator interaction where prey exhibits group defense are studied by Freedman and Walkowicz, 1986. Ruan and Freeman, 1991 and Freedman and Ruan, 1992 etc.

In the light of prey-predator switching models we studied a mathematical model for the interaction of political parties in the democratic countries. India, Pakistan, Bangladesh, SriLanka and many other Afro-Asian countries have multiparty political system. Majority party rules the country and next to this sit in opposition. The other small parties and

independent elected members are considered as a third party in our model. The third party members switch over towards ruling party to enjoy power and to get benefits by many ways which are not available if they stay in their own party. The switching of the third party members will be towards opposition party whenever it comes to power to rule the country due to some reasons. The migration between ruling and opposition parties will be little due to ideological differences. The main migration from ruling and opposition parties is towards third party whenever there is infighting in their own parties and they are immediately accepted by third party because by this migration third party survives. The members of the third party after switching towards ruling party become an active member of that party after lapse of some time. Switching is a big problem in these countries and some countries have enacted laws to discourage it.

In this model ruling and opposition parties will behave as predator species and third party as prey species. Here third party members (prey) will switch over towards ruling and opposition parties (predator) which is vice-versa in previous models. In prey-predator models predator is always harmful for the growth of prey species but here when ruling and opposition party members enter into third party they strengthen it.

We are considering the continuous model because members of the parties are the members of parliament, state assemblies, union territories, corporations, towns, villages etc. These parties are grass rooted and have a large number of memberships. The results of parliament and assemblies elections directly affect the total membership of the parties. These Afro-Asian countries have large population and so have large membership in political parties.

We studied Hopf bifurcation of a non-zero equilibrium by taking time delay as bifurcation parameter. In general, it has been found that introduction of a time delay is a destabilizing process, in the sense that increasing the time delay could cause the population to fluctuate. Hopf bifurcation has helped us in finding the existence of a region of instability in the neighbourhood of a non-zero equilibrium where the population will survive undergoing regular fluctuation.

Tansky, 1978 considers a general volterra type two prey-one predator model may be expressed as follows

$$\frac{dx_1}{dt} = \left(r_1 - \frac{b_1 y}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^n} \right) x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \left(r_2 - \frac{b_2 y}{1 + \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^n} \right) x_2$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(-d + \frac{r_1 x_1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n} + \frac{b_2 x_2}{1 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n} \right) y \quad (2.1)$$

where $x_1(t)$, $x_2(t)$ and $y(t)$ denote the abundances of prey species 1 and 2 and predator species respectively. The functions $\frac{b_1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n}$ and $\frac{b_2}{1 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n}$ possess the characteristic property of switching through functional response of relative abundance of species. For $n = 1$, (2.1) represents simple multiplicative effect whereas $n > 1$ the effect of these functions is stronger than simple multiplicative effect (Prajneshu and Holgate, 1987).

The model of multiparty political system is given by the following system of autonomous ordinary differential equation:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1 x_1 - d_1 x_1 + \frac{c_1 \beta_1 x_1^2 x_3 (t - \tau)}{x_1 + x_2} + d_2 p_{21} x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_2 x_2 - d_2 x_2 + \frac{c_2 \beta_2 x_2^2 x_3 (t - \tau)}{x_1 + x_2} + d_1 p_{12} x_1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_3 x_3 - d_3 x_3 + \frac{\beta_1 x_1^2 x_3}{x_1 + x_2} - \frac{\beta_2 x_2^2 x_3}{x_1 + x_2} + d_1 p_{13} x_1 + d_2 p_{23} x_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

where,

- x_i - are the numbers of ruling, opposition and third party members at time t .
- a_i - are the rates by which members enter into ruling, opposition and third party respectively by various ways.
- d_i - are the rates by which member of the ruling, opposition and third party leave the politics at all or enter into other parties.
- $x_i(t - \tau)$ - are the members of ruling, opposition and third party who leave their respective party at time $t - \tau$ and enter into new party at time t .
- p_{ij} - are the probabilities of successful transition from i^{th} to j^{th} (where $i \neq j$)
- β_i - are the conversion rates of the number of third party to ruling party x_1 and opposition party x_2

An asymptotic analysis of differential equations

Julka Knežević–Miljanović
Matematički fakultet, Beograd

The purpose of this article is to determinate the asymptotic form of the nonoscillatory solutions and the existence of positive, monotonic, unbounded solutions of the equations

$$(r(x)y^{(n)})^{(n)} = \pm yf(x, y)$$

$$(r(t)y')' = y(t)F(t, y(t)).$$

We obtain necessary and sufficient conditions for the existence of different classes of these solutions.

Local identifiability of a parabolic equation from discrete observations

S.A. Kolbina,
S.-Petersburg Electrotechnical University, S.-Petersburg,
sp@spil.usr.pu.ru (for S.A. Kolbina)

We consider a semilinear parabolic equation

$$u_t = u_{xx} + \lambda f(u), \quad u \in \mathbf{R}, \quad x \in [0, \pi],$$

with the Dirichlet boundary conditions. Here λ is a nonnegative parameter to be found from discrete observations of a solution $u_\lambda(x, t)$ with fixed initial value

$$u_\lambda(x, 0) = u_0(x).$$

It is assumed that the nonlinearity f is of class C^2 and satisfies the Chaffee-Infante conditions [1].

We fix a natural number T , and for every natural n we choose a natural number $m(n)$ so that $m(n) \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$.

Denote by $V_\lambda(n)$ the set

$$V_\lambda(n) = \left\{ u_\lambda \left(\frac{k\pi}{m(n)}, Tn \right) : 0 < k < m(n) \right\}.$$

It is shown that if $\lambda_0 > 1$ and $\lambda_0 \neq n^2$ for an integer n , then, for a function u_0 from an open and dense subset of $H_0^1(0, \pi)$, the problem is locally identifiable, i.e., there exists $\epsilon > 0$ such that for any λ with $0 < |\lambda - \lambda_0| < \epsilon$ there is n_0 with the property

$$V_\lambda(n) \neq V_{\lambda_0}(n) \text{ for } n \geq n_0.$$

This result was obtained together with N.A. Bodunov and S.Yu. Pilyugin.

References

1. N. Chaffee and E. Infante. A bifurcation problem for a nonlinear parabolic equation. *J. Appl. Anal.*, 4 (1974), pp. 17–37.

TRAVELLING WAVE SOLUTIONS
OF NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS

E. V. KRISHNAN

Department of Mathematics and Statistics
College of Science, Sultan Qaboos University
P.O. Box 36 Al-Khod, Postal Code 123, Sultanate of Oman

Travelling wave solution is a solution of constant form moving with a fixed velocity. In wave phenomena, one of the fundamental objects of study is the travelling wave solution which is obtained by solving a reduced equation in one less number of independent variables. The travelling wave solutions for a one-dimensional wave equation in space variable x and time variable t are found by solving an associated ordinary differential equation. The solitary waves, the localized travelling waves, the periodic waves and the waves which rise or descend from one asymptotic state to another known as kink waves are the three types of travelling waves.

Direct methods are the most convenient ones for explicit solutions of nonlinear evolution equations. Among the direct methods are the direct method of Hirota, the direct integration and the direct algebraic method or the real exponential approach. In the latter method the solution of a given nonlinear partial differential equation is developed as a summable infinite series of real exponential functions which solve the linear part. A direct method using the properties of hyperbolic tangent function has also been proposed for finding the solitary wave and kink-antikink solutions of nonlinear evolution and wave equations.

It is more natural to derive the periodic wave solutions of evolution equations and then deduce the solitary wave or kin-antikink solutions which are the infinite period counterparts. Nakamura has obtained periodic wave solutions of some nonlinear evolution equations in terms of Riemann's θ -functions using Hirota's direct method. The exact bounded periodic solutions using the properties of Weierstrass elliptic function and their relation to jacobian

elliptic function have been investigated in the case of many nonlinear dispersive wave equations for which the solitary wave limits with infinite periods were also found. The method used in this paper is based on the properties of Jacobian sine or cosine elliptic function. We balance the highest nonlinear term and the derivative term for some combination of cn functions, say, and then equate the coefficients of like powers of the function on both sides of the equation. As an example, we assume a solution in the form

$$u(z) = \sum_{i=0}^m A_i cn^i(\mu z) \quad (1.1)$$

where the expansion coefficients $A_i, i = 0, 1, 2, \dots, m$ order of expansion m and wave number μ are to be determined. The $(2n)^{th}$ derivative of $u(z)$, namely u_{2nz} has highest power in $cn(\mu z)$ of $m + 2n$ and the highest nonlinear term, say, u^h , has the highest power of mh in $cn(\mu z)$. Thus balancing the two terms, we get

$$m + 2n = mh \quad \text{or} \quad m = \frac{2n}{h - 1}. \quad (1.2)$$

In this paper, we consider the magma equation

$$u_t = [u^n \{(u^{-m} u_t)_x - 1\}]_x, \quad (1.3)$$

where x and t denote vertical space coordinate and time coordinate, respectively, and $u(x, t)$ is mean volume fraction of liquid phase which should be nonnegative for any x and t . The parameters n and m denote the dependency of permeability and effective viscosity respectively. Takahashi and Satsuma have derived periodic wave solutions and the solitary wave solutions which are their infinite period counterparts for different values of parameters n and m . Here, we shall derive (i) a periodic wave solution for the case $n = 4, m = 0$ which does not reduce to a solitary wave solution and (ii) a periodic wave solution and a solitary wave solution for the case $n = 2, m = 1/2$.

NUMERICAL AND ASYMPTOTIC APPROXIMATION OF A SINGULAR BOUNDARY-VALUE PROBLEM

P.M.Lima and M.Carpentier

Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

Av.Rovisco Pais,1096 LISBOA CODEX

PORTUGAL

e-mail : plima@math.ist.utl.pt

Abstract

In the present paper we consider the second-order boundary-value problem

$$y'' = \frac{1}{q} x y^q, \quad 0 < x < 1. \quad (1)$$

with $q < 0$. We search for a solution of (1) which satisfies the boundary conditions

$$y'(0) = y(1) = 0$$

This problem arises in boundary layer equations for the flow of a power-law fluid over an impermeable, semi-infinite flat plane [1]. Since q is negative, the considered problem has a singularity at $x = 1$. The purposes of the present work are to analyse the asymptotic behavior of the solution near the singularity and to introduce efficient numerical methods for computing accurate approximations. Based on the results of a previous work [2], we use iterative schemes to prove some asymptotic properties of the solution. A substitution of variable is applied in order to avoid the effect of singularity and extrapolation methods are used to accelerate the convergence of the discretization scheme. Numerical results for different values of q are given and compared with the results obtained by other authors.

References

- [1] C.D. Luning and W.L.Perry, An iterative method for solution of a boundary value problem in non-newtonian fluid flow. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics* 15 (1984) 145–154.
- [2] P.Lima and M.Carpentier, Iterative methods for a nonlinear singular boundary-value problem, submitted to *J. Comp. Appl. Math.*

Identification of parameters of technical systems on the basis of deterministic chaos theory

St- Petersburg, Russia, State Institute for Fine Mechanics And Optics (TU)

Introduction

In many technical systems is observed deterministic- chaotic behaviour, the supervision of which gives the information about its behaviour as a whole. To such systems any devices concern, in which is available for example convection. This behavior can be the necessary phenomenon, can also be the interfering phenomenon of which it necessary to reduce. Necessary the chaotic movement is in devices with a fluidized bed, in drying furnaces. For these devices determining and necessary is the chaotic movement in a turbulence mode, which is traditionally characterized in such parameter, as number of Reynolds. The determination of Reynolds number is more often than not connected to difficulties. These difficulties are increased for systems with distributed in space parameters. which are listed objects, it is necessary to determine Reynolds number depending on space coordinates. Such opportunity is given with application of the theory of determined chaos, on the basis of which it is possible to make any conclusions about real dynamic system.

This paper presents two examples of technical chaotic systems: fluidized bed and optical stand for optical instruments installation with natural convection flows.

Chaotic, turbulence mode is necessity in fluidized beds and in drying furnaces, because it promotes high intensity of processes of heat and mass transfer. For an optical bench on the contrary this mode is undesirable , as causes optical distortions.

Method

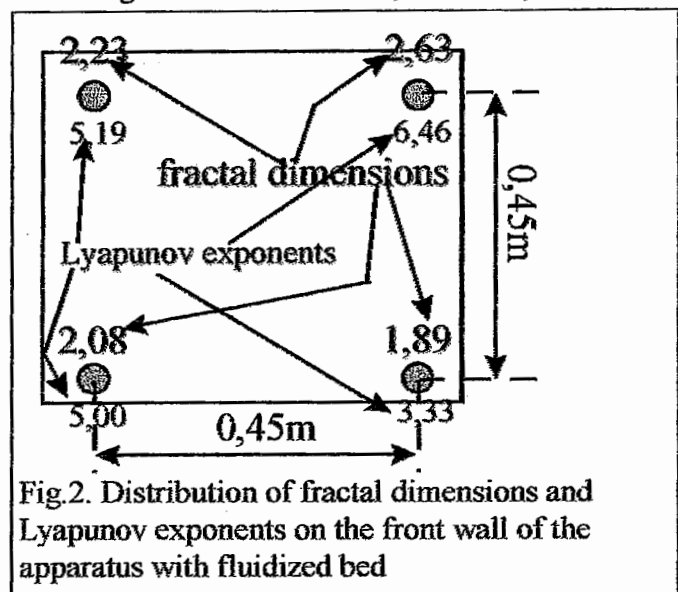
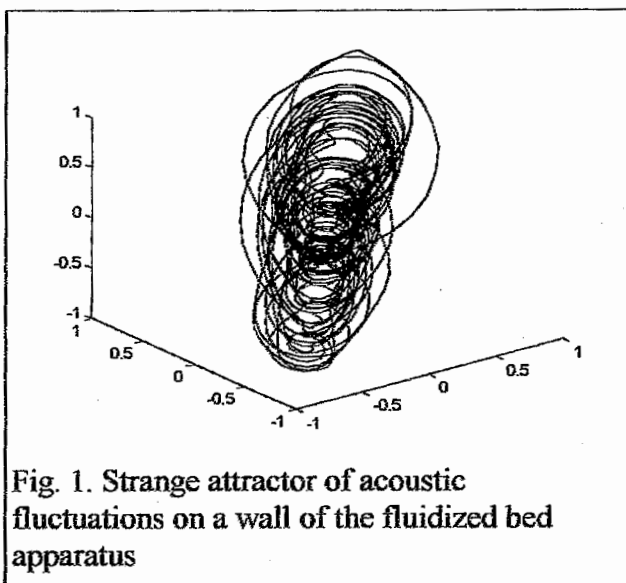
The identification begin with the construction of the topological equivalent of the real dynamical system with method of delays [1] from the time series of a single variable of the system. The equivalent is strange attractor in reconstructed state space plot. From reconstructed attractor some chaotic invariants of the real system such as correlation dimensions, Lyapunov exponents and Kolmogorov entropy are calculated. The identification of flows fluctuation parameters is realized on the basis of the analysis of

correlation dimension, which is an estimation of fractal dimension of phase plot (strange attractor). For identification of parameters of fluctuations the following rules were used:

1. The zero dimension of a phase trajectory signify laminar mode of a flow or oscillations.
2. If fractal dimension of the strange attractor d_f for the objects space point is $1 < d_f < 2$, the fluctuations proceed in transitive mode.
3. If fractal dimension of the strange attractor d_f for the objects space point is $2 < d_f < 3$, the fluctuations proceed in turbulence mode.

The Lyapunovs exponents characterize state of chaos of the phase trajectory and for strange attractor are positive.

Example of strange attractor for fluctuations in fluidized bed is given in fig. 1 and the distribution of the fractal dimensions and Lyapunov exponents is given on the fig.2. The dimension 1,89 means, that



fluctuations in this point have transitive character, in its vicinity there is the stagnant zone for liquidation of which it is necessary to change controlling influence.

Conclusions:

- Methods of the theory of deterministic chaos allow to identify such parameters as modes of fluctuations;
- Distribution of these modes on volume of objects is for the first time received, that allows to see stagnant zones in this volume and to undertake control, influencing to these zones.

Literature:

1. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors. Physica 9D, 189,1983.

COMPUTER ENVIRONMENT FOR NUMERICAL ODE SOLVERS

Timișoara, Romania, University of West, Faculty of Mathematics, e-mail: petcu@lalescu.uvt.ro

EXTENDED ABSTRACT:

Differential equations are one of the important mathematical methods used for simulations in the area of natural sciences and engineering. Although many efforts are today concentrated in effectively exploiting the huge potential of computer power, it is a fact that there is very little high-performance software available for the numerical solution of initial value problems of ordinary differential equations. Software applications were constructed in the idea to help the practitioners, like engineers, in solving real problems without consulting a mathematician (instead an *expert* application, like [1], [2], [3], [5], [6], [9]). The problems which are very simple can be easily solve with these applications.

The *number of numerical methods* which we can select in order to approximate the ODEs exact solution is very large [4]. The main question is which one is *adequate* to the given problem. The answer depends on what *quality level* we request for the approximation, the *time* in which we want to obtain the approximation, and the *knowledge* of the solving method class.

Most of the numerical software products for ordinary differential equations are constructed with a fixed method database including the most used numerical methods, like Euler's method or standard Runge-Kutta method. Simple problems can be solved using these applications. Troubles come when we want to solve problems with many number of equations or which cannot be solved with the classical methods. Take, for example, a software product with only explicit methods and a problem of stiff nature. If the application is not open to new methods, then we must search another product which satisfied us. If the application is *open to new methods* (for example, in Maple, we can construct a procedure to solve with a specific method the given problem), with a little effort, we can find an approximation of the exact solution. In this case, the user must pay attention to the application language in order to describe correctly the numerical method and the control procedure of the computational process. The application for describing the new method must be closed to the mathematical language in which are usually described the numerical methods (this is not the case if we use a collection of programs in a programming language, like Fortran for [5]). Tools with variable method database permit to test a new method and to compare it with the classical ones in similar computational conditions (for example, if we want to test the new methods proposed in [7], [10] or [11]).

A hard problem is also the *selection* of an adequate method from the method database. A correct selection can be done only knowing the *problem properties*. The method database must be organized in *method classes* depending on the properties of the problems for which the methods are working.

Very *large systems* of ODEs arise in solution methods for time dependent PDEs; such problems are not solvable in a reasonable time on a serial machine because of this magnitude. It is widely believed that the only feasible means of solving many important computationally intensive problems in science and engineering is to use *parallel computers* and *distributed systems* effectively [12]. In order to be efficient, the specific software should be based on algorithms that are well turned to the new architectures (see, for example the algorithms proposed in [8], [13] or [14]).

The design of a new tool for solving ODEs was based on the above remarks. Thus, EPODE (ExPert system for Ordinary Differential Equations) is a *problem-solving environment* that provides the computational facilities necessary to find a numerical solution of the following class of problems:

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

where $t \in [t_0, t_0 + T]$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

EPODE proposes the following facilities: *friendly user interface for problem specification*, automatic detection of the *problem properties* like linearity, separability, the greatest and the lowest eigenvalues of the Jacobian matrix at the initial value (symbolic computation of the system Jacobian), stiffness ratio, estimated time for the evaluation of the right side of (1), *friendly user interface for a difference method specification*, automatic detection of the *method properties* like explicit/implicit schema, method accuracy, stability properties, one-step/ multistep, one-stage/ multistage, one-derivative/ multiderivative method, estimated time for solving the test problem $y' = \lambda y$ with $\text{Re}\lambda < 0$. It establish the *matching* between the problem properties and the method properties, adequate *integration step*, approximate *computation time*, *estimated error*, and then *apply* the numerical method and *supervise* the error. It is possible to create a *list/graphic* of approximate solution values (two- or three-dimensional graphs). It is also possible to solve the problem without the specification of a particular method: (i) *choosing an appropriate method* from a database of classical methods (the selection is based on a classification of the methods, and the database can be enlarged introducing new methods using the above mentioned front-end); (ii) select a new method when the previous one generates unreasonable errors; (iii) in the case of a large number of equations the expert recommends the use of the numerical codes combined with PVM procedures (Parallel Virtual Machine) in the idea to *distribute the computations* on some processors of a local network.

The main thrust of EPODE is its *automated identification* of problem properties and method properties. The first version of EPODE was designed especially for the numerical solution of ordinary differential equations of *stiff* type (many software packages can not integrate such equations). EPODE is independent from any other computer application. Moreover, in EPODE, no supplementary code will be generated when a new method will be added.

Three actual versions of EPODE 1.0 are available: for Windows '95, for X Windows under Linux and Sun Solaris.

REFERENCES:

- [1] K. Briggs, *ODE - A program for the interactive solution of systems of ordinary differential equations*, <http://archives.math.utk.edu>
- [2] J. Buchanan, *MDEP-Midshipmen Differential Equations Program*, <http://archives.math.utk.edu>
- [3] H. Gerlach, *Reverse communication and the ODE solver STRIDE*, *Annals of Numerical Mathematics* 1 (1994), J.C. Bltzer A.G. Science Publishers, 399-410
- [4] E. Hairer, P.P. Norsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*, 1987 and *II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, 1991, Springer Verlag.
- [5] A.C. Hindmarsh, *Brief Description of ODEPACK - A Systematized Collection of ODE Solvers*, <http://netlib.org//odepack>.
- [6] M.S. Kamel, K.S. Ma, W.H. Enright, *ODEXPRT: An expert system to select numerical solvers for initial value ODE systems*, *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 19, no. 1, 1993.
- [7] D. Petcu, *One-step Methods for the Numerical Solution of Stiff Ordinary Differential Systems*, *Revue Roumaine D'Analyse Numérique et de Théorie de L'Approximation*, Tome 23, no. 2, 1994, pp. 197-216.
- [8] D. Petcu, *Implementation of some multiprocessor algorithms for ODEs using PVM*, *Lectures Notes in Computer Science 1332: Recent Advances in Parallel Virtual Machine and Message Passing Interface*, 4th European PVM/MPI Users' Group Meeting, Krakow, Poland, 03-05 November 1997, *Proceedings*, eds. Marian Bubak, Jack Dongarra, Jerzy Wasniewski, Springer-Verlag Berlin, 375-383.
- [9] D. Petcu, V.Negru, T.Jebelean, *EPODE, a prototype ExPert system for solving initial value problems of ODEs*, *SNADE '97*, Prague, 11-17 June 1997.
- [10] D. Petcu, R. von Schwerin, *On the Integration of Stiff Systems Using Split Adams-Moulton Methods*, Preprint Universität Heidelberg IWR 43-93.
- [11] D. Petcu, *Multistep Methods for Stiff Initial Value Problems* (short presentation of the Ph.D. thesis), *Mathematical Monographs* 50, Typography of Timișoara's University of West, 1995.
- [12] D. Petcu, *Parallel Numerical Algorithms. Part I. Solving systems of linear, nonlinear or differential equations*, *Mathematical Monographs* 60, Typography of Timișoara's University of West, 1996.
- [13] D. Petcu, *A distributed implementation of Runge-Kutta methods*, *Fifth International Colloquium on Numerical Analysis*, Plovdiv, Bulgaria, 13-17 august 1996, to appear.
- [14] D. Petcu, *A parallel algorithm for stiff ordinary differential equations*, *Informatica*, Vilnius, 1994, vol.5, no. 3-4, 373-384.

KEYWORDS: initial value problems, first order differential equations, mathematical software, difference methods, expert systems.

AMS CLASSIFICATION: 34-04, 65L05-65L07, 65L20, 65Y05, 65S05, 68T20, 68T35

Shadowing near the global attractor for a semilinear parabolic equation

S. Yu. Pilyugin,
S.-Petersburg, S.-Petersburg University, sp@spil.usr.pu.ru

Let $S(t)$ be the semigroup in $H_0^1(0, 1)$ generated by a semilinear parabolic equation

$$u_t = u_{xx} + f(u), \quad u \in \mathbf{R}, \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

with the Dirichlet boundary conditions.

We assume that the semigroup $S(t)$ has Morse-Smale structure on its global attractor A (it is known that this property holds for a C^2 -generic nonlinearity f). It is shown that in this case $S(t)$ has a Lipschitz shadowing property in a neighborhood of A .

This result allows us to obtain explicit estimates (in terms of time and space steps) for differences between approximate solutions (given by discretizations) and exact solutions on unbounded time intervals.

Consider a semiimplicit discretization of (1) with time step $h = 1/K$ and space step $D = 1/N$, where K and N are natural. Let H_D be the subspace of $H_0^1(0, 1)$ consisting of continuous functions linear on any segment $[kD, (k+1)D]$, where $k = 0, \dots, N-1$. Denote by Σ the dynamical system on H_D generated by the discretization.

It is shown that there exists a neighborhood W of A and numbers L , h_0 , and D_0 with the following property. For any $h \leq h_0$ and $D \leq D_0$ there is a number $m = m(h+D)$ such that for any $v \in H_D \cap W$ there exists u satisfying

$$|S(nh)u - \Sigma^{m+n}(v)| \leq L(h+D) \text{ for } n \geq 0$$

(here $|\cdot|$ is the norm of $H_0^1(0, 1)$).

This result was obtained together with S. Larsson (Sweden).

Weak shadowing in two-dimensional diffeomorphisms

O.B.Plamenevskaya

S.-Petersburg, S.-Petersburg University,

Olga.Plamenevskaja@pobox.spbu.ru

We study the weak shadowing property [1,2] for an Axiom A diffeomorphism of the two-dimensional torus with finite nonwandering set.

To give an example of a rather delicate conditions appearing, we consider a diffeomorphism $\phi : T^2 \rightarrow T^2$ such that $\Omega(\phi) = \{o, p, q, q\}$, where the point s is asymptotically stable, o is completely unstable, and p and q are saddles. We assume that there is a separatrix $W^s(q) = W^u(p)$ joining the saddlepoints, the eigenvalues of $D\phi(p)$ are $-\mu, \nu$ with $\mu > 1, 0 < \nu < 1$, and the eigenvalues of $D\phi(q)$ are $-\lambda, \kappa$ with $0 < \lambda < 1, \kappa > 1$.

We show that the diffeomorphism ϕ has the weak shadowing if and only if the number $\frac{\log \lambda}{\log \mu}$ is irrational.

The diffeomorphism ϕ does not have the “strong” shadowing. It is known that the necessary and sufficient conditions for a two-dimensional Axiom A diffeomorphism can be given in simple geometric terms of C^0 -transversality [3].

The value $\frac{\log \lambda}{\log \mu}$ appeared in the qualitative theory of dynamical systems as a functional modulus of local topological conjugacy in a neighborhood of a heteroclinic curve joining two saddles [4].

References

1. S. Yu. Pilyugin. *The Space of Dynamical Systems with the C^0 -Topology*. Lect. Notes in Math., **1571**, Springer-Verlag (1994).
2. R. Corless and S. Yu. Pilyugin. Approximate and real trajectories for generic dynamical systems. *J. Math. Anal. Appl.*, **189** (1995), pp. 409–423.
3. K.Sakai. Shadowing property and transversality condition. In: *Dynamical Systems and Chaos* (Tokio, Japan, 23–27 May, 1994), **2**, World Scientific (1995), pp. 233–238.
4. W. de Melo. Moduli of stability of two-dimensional diffeomorphisms. *Topology*, **19** (1980), pp. 9–21.

**"SPIRAL WAVE – TRAVELING CLUSTERING"
INTERMITTENCY AND $1/f$ -NOISE IN A 2D COUPLED
MAP LATTICE.**

Mark A. Pustovoit,
E-mail: markp@hep486.pnpi.spb.ru

Valery I. Sbitnev
E-mail: sbitnev@hep486.pnpi.spb.ru

‡: *Condensed State Research Department,
St. Petersburg Nuclear Physics Institute, Russian Academy of Sciences,
188350 Gatchina, Russia.*

Intermittency of checkerboard spiral waves and traveling clusterings originating from sudden shrinking of the strange attractor of the 2D CML in the neighborhood of the saddle-node bifurcation boundary is found [1]. A power-law probability density for lifetimes in the spiral wave (laminar) phase is observed, while in the checkerboard clusterings (bursting) phase the above quantity exhibits an exponential decay. This difference can be interpreted through the self-organized behavior of the spiral waves, and the passive relaxation of the disordered checkerboard clusterings. Formation of coherent modes in the low-frequency region is an attendant feature of the self-organization. The power spectrum exhibits a universal law $1/f^\delta$ ($0.8 < \delta < 1.4$) as f approaches zero, that is common in dynamic systems demonstrating the intermittency [2]. The same picture has been observed under the intermittency of the spiral wave and traveling clustering phases.

- [1]. Sbitnev V. I., "Checkerboard spiral waves in a 2D coupled map lattice", *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1997, V. 7, No.11, pp. 2569–2575.
- [2]. Anishchenko V. S., Neiman, A. B., Chua L. O., "Chaos-chaos intermittency and $1/f$ noise in Chua's circuit", *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 1994, V. 4 No.1, pp, 99–107.

Homoclinic Points for Dissipative \mathbb{E}^n -automorphism

Dmitry W. Serow

†: *Molecular & Radiation Biophysics Division,
St. Petersburg Nuclear Physics Institute, Russian Academy of Sciences,
188350 Gatchina, Russia, Email: dimus@rec03.pnpi.spb.ru*

Smooth dynamical systems on the Euclidian arithmetical space \mathbb{E}^n , it also is C^r -differentiable action of integer numbers group \mathbb{Z} on \mathbb{E}^n being the homomorphism $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}^r(\mathbb{E}^n)$, $r > 0$, $k \mapsto \psi_k$, such that inducing $\Psi: \mathbb{Z} \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ map, defining by equality $\Psi(k, x) = \psi_k(x)$, belongs to class C^r , a $\text{Aut}^r(\mathbb{E}^n)$ is C^r -automorphisms group of the space \mathbb{E}^n .

Theorem 1 *Let $\psi_k \in \text{Aut}(\mathbb{E}^n)$ dissipative action on \mathbb{E}^n . Assume all fixed points p_ν , $\#p = m$ of ψ_k are saddle whose stable $W^s(p_\nu)$ and unstable $W^u(p_\nu)$ manifolds are transversal and $\text{Clos} \left(\bigcup_{\nu < m+1} W^u(p_\nu) \right)$ is connected. Then following statements are equivalent:*

- (1) $W^s(p_\nu) \cap W^u(p_\nu) \setminus \{p_\nu\} \neq \emptyset, \forall \nu$;
- (2) nonwandering set $\Omega(\psi)$ be compact being pseudoarc.

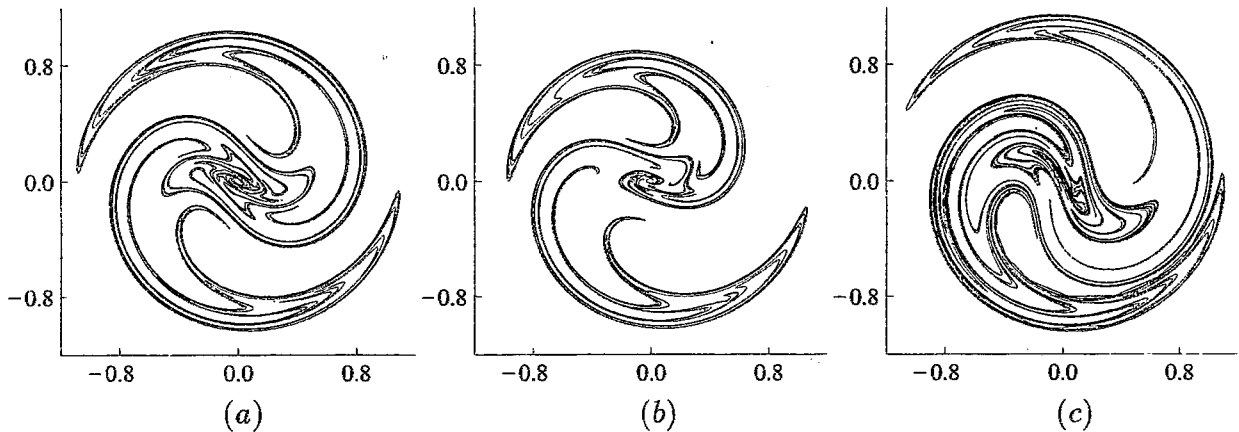
In fact, $\Omega(\psi)$ is connected union of indecomposable continua. If $n = 2$ then $\Omega(\psi)$ is either an indecomposable continuum or the union of two indecomposable continua.

Theorem 2 *Let \mathcal{X} be compact being common boundary for infinite number of regions on the plane \mathbb{E}^n . Then dissipative action $\psi_k \in \text{Aut}(\mathbb{E}^n)$ exists, such that all fixed points p_ν , $\#p = m$ of ψ_k are saddle whose stable $W^s(p_\nu)$ and unstable $W^u(p_\nu)$ manifolds are transversal intersected at some point $q_\nu \neq p_\nu$, $\text{Clos} \left(\bigcup_{\nu < m+1} W^u(p_\nu) \right)$ is connected, and $\Omega(\psi) = \mathcal{X}$.*

The simple example of a \mathbb{E}^2 -automorphism

$$\left(y + i \frac{\sin \pi y + \alpha x}{3/2 + |\alpha|} \right) \exp(i\pi y^2 + \beta(y+1)) \mapsto x + iy$$

possessing a homoclinic point property obviously demonstrates essential topological peculiarity of nonwandering point set structure.



These pictures illustrate homoclinic situations (theorem 1): the nonwandering point set is a indecomposable continuum (fig. b, c ($\beta = \pm\pi$)) or union of two indecomposable continua (fig. a ($\beta = 0$)).

NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS WITH IMPULSE STRUCTURE*

A.N.Sesekin

Ural State Technical University

620002, Ekaterinburg, Russia

e-mail: sesekin@sna.imm.intec.ru

* This work was supported by the Grant (96-01-00120) of the Russian Fundamental Research Foundation and Ministry for General and Professional Education of Russian Federation under Grant (97-1.8-22).

We consider differential equations

$$\dot{x} = f(t, x, v) + B(t, x, v)\dot{v}(t), \quad x(t_0) = x^0$$

with distributional derivatives of functions of bounded variation $v(t)$ at the right-hand sides. We define discontinuous solutions by means of closing the absolutely continuous solutions set. It is shown that solutions defined in such a way satisfy some integral inclusion. The case in which such an inclusion turns into an integral equation is considered. A Cauchy formula for the discontinuous solutions to bilinear systems is obtained.

The attainability set for a dynamic system with impulsive integrally bounded control is shown to be compact and continuously dependent on the parameters and a control resource. Although such a set may consist of discontinuous trajectories, it turns out to be continuous as a multivalued mapping. The connectedness property for attainability sets is proven. Some methods to determine such sets are presented. For a particular class of bilinear systems, the number of control impulses needed for the system to pass to a given point of the attainability set is estimated.

References

- [1] Zavalishchin S.T., Sesekin A.N., Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1997).

Melnikov's Method for Random Dynamical Systems

Oliver Steinkamp
 Institute for Dynamical Systems
 University of Bremen , P.O. Box 330 440
 28334 Bremen, Germany
 email: ollis@math.uni-bremen.de

Homoclinic points, i.e. points in the intersection of the stable and unstable manifold of a hyperbolic fixed point of a diffeomorphism play an important role in the dynamics of a dynamical system. The heavy winding of the global invariant manifolds leads to sensitive dependence on initial conditions in a neighborhood of the fixed point, i.e. the existence of homoclinic points tends to promote erratic behaviour of the system. Due to the Smale-Birkhoff Theorem it is well known, that diffeomorphisms with transversal homoclinic points show a chaotic dynamical behaviour, more precise, such points imply that a Bernoulli shift could be embedded into the dynamics of the diffeomorphism on a compact invariant Cantor-like set.

Melnikov [3] and in the following many others considered periodic perturbations of two-dimensional autonomous differential equations where the unperturbed system has a hyperbolic fixed point with a homoclinic orbit through it, and have shown, with suitable conditions on the perturbation, that the Poincaré map for the perturbed system has transversal homoclinic points. The so-called Melnikov-function measures the distance between the stable and unstable manifold of the perturbed system along a homoclinic orbit of the corresponding unperturbed system. If the Melnikov-function has simple zeroes the existence of transversal homoclinic points can be shown.

Palmer presents in [5] a completely different approach to obtain the results of Melnikov. The technique of exponential dichotomies is used to characterize transversal homoclinic points and with help of an extension of the implicit function theorem in Banach spaces a certain bifurcational equation is obtained which turned out to be the Melnikov-criterion. A generalization to almost-periodically perturbed systems was given by Meyer and Sell [4].

Up to now, the Melnikov-method is one of the few analytical tools to detect the existence of transversal homoclinic points in deterministic dynamical systems with small perturbations. Since in many real systems the presence of noise can not be neglected a stochastic approach is desirable and necessary. The availability of a random version of the Smale-Birkhoff Theorem makes it reasonable to go beyond periodic and almost-periodic perturbations, and allows the consideration of random differential equations, i.e. ordinary differential equations perturbed by a stationary stochastic process.

The Smale-Birkhoff Theorem was generalized by Gundlach [2] to the case of random diffeomorphisms $\varphi(\omega)$, i.e. in each time-step a mapping is randomly chosen due to a fixed selection mechanism. Now the role of a fixed point with a homoclinic orbit is played by a hyperbolic stationary solution with so-called random homoclinic points, which are random variables with values in the state space, whose forward and backwards orbits under φ approach the stationary solution. Analogously to the deterministic case such random homoclinic points imply the existence of sets invariant under some iterates of the random dynamical system generated by φ and exhibiting irregular behaviour which can be described in terms of random symbolic systems. In other words, the dynamics in a neighborhood of a hyperbolic stationary solution

of a random dynamical system is conjugated to a random subshift of finite type, which is the random analogue of the Bernoulli shift.

The stochastic influence of random differential equations is modelled by a metric dynamical system (in the sense of ergodic theory) which is a family of measure preserving transformations of a probability space. This concept covers a wide class of perturbations, e.g. all stationary stochastic processes with (piecewise) continuous trajectories. An appropriate framework to study this kind of differential equations, as well as products of random diffeomorphisms and stochastic differential equations, is the one of *Random Dynamical Systems* (cf. Arnold [1]).

This talk presents recent results of the speakers thesis on Melnikov's method for random dynamical systems generated by random differential equations:

Employing the theory of invariant manifolds for random dynamical systems (cf. Arnold [1]) random homoclinic points are defined as random variables such that the forward and backward orbits of each realization tend — under the dynamics of the random differential equation — to the random analogue of a hyperbolic fixed point. Following Palmers approach using a random version of the theory of exponential dichotomies to characterize transversality of random homoclinic points we use an random extension of Palmers implicit function theorem on Banach spaces to obtain a Melnikov criterion to determine the existence of transversal random homoclinic orbits for random differential equations.

Beside others, we consider a classical example in Melnikov theory: The Duffing oscillator with small random forcing. Consider, e.g.,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 + \varepsilon (\gamma \arctan(Z_t(\omega)) - \delta y)\end{aligned}$$

with a small real parameter ε , damping factor δ and noise intensity γ , where Z_t is an Ornstein-Uhlenbeck process. In this two-dimensional Hamiltonian case the Melnikov function can be evaluated to

$$M(t, \omega) = -\frac{4}{3} \delta - \sqrt{2} \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(s-t) \tanh(s-t) \arctan(Z_s(\omega)) ds,$$

such that $M(t, \omega)$ can be used for numerical computations showing the existence of simple zeroes and hence transversal random homoclinic points for a certain range of the parameter values.

References

- [1] L. Arnold. *Random dynamical systems*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1998. (To appear)
- [2] V. M. Gundlach. Random homoclinic orbits. *Rand. & Comput. Dynamics*, 3(1 & 2):1–33, 1995.
- [3] V. Melnikov. On the stability of the center for time periodic perturbations. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 12:1–57, 1963.
- [4] K. R. Meyer and G. R. Sell. Melnikov transforms, bernoulli bundles and almost periodic perturbations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 314(1):63–105, 1989.
- [5] K. J. Palmer. Exponential dichotomies and transversal homoclinic points. *J. Diff. Eq.*, 55:225–256, 1984.

NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN DISTRIBUTIONS FOR TRANSPORT MANIPULATORS IN A VISCOUS MEDIUM*

Ekaterinburg, Ural State Technical University – UPI

*This work is financially supported by Russian Fundamental Research Foundation under Grant 96-01-00120 and Ministry for General and Professional Education of Russian Federation under Grant 97-1.8-22

The report deals with explanation of nonlinear effects arising in a model of many-link transport manipulators (MTM)s in a viscous medium. It consists of axially symmetric links. Every two sequential links are supposed to be united with the help of a joint at the centre of mass of the preceding link. The rotation of the k -th link about the centre of mass of the $(k - 1)$ -th link and the motion of the transport carrier along the horizontal are caused by an angular momentum U_k and a force F parallel to the horizontal respectively. Let $q_k = \varphi_k$ be the angle between the vertical line and k -th link, q_0 be the horizontal coordinate of the transport carrier. We wish to transfer our object of control from a given initial state q_r to another one, q_e , in a given time, t_e , arriving with the minimum work done on the system in such a displacement. The work just mentioned is required to overcome the drag and gravity forces and can be calculated from the formula for the power

$$\dot{A} = \dot{q}^\top U, \quad A(\tau) = A_r, \quad (1)$$

where q is the vector $(q_0, \dots, q_n)^\top$ and U is the vector $(F, U_1, \dots, U_n)^\top$. It is easily seen that the problem just stated is singular. In addition an impulse control moment U_k leads to a discontinuous change in the angular velocity of the k -th link. Hence we need a procedure of multiplication of an impulse moment by the corresponding discontinuous angular velocity such that Equation (1) makes sense. We are going to apply the approach given in [1]. Namely, we determine

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} D^2 q = DT - \frac{\partial T}{\partial q} \dot{q}, \quad \left(D \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} D^2 q = D \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right), \quad (2)$$

where T is the kinetic energy of the MTM, D is a derivative in the sense of the theory of distributions. These enable us to eliminate the control U between (1)

and the equations of motion for the MTM ($A(q) = (a_{ij})$, $B(q) = (b_{ij})$, $C(q) = (c_{ij})$)

$$A(q)D^2q + \sum_{j=0}^n \dot{q}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial q} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_j}{\partial q} \right) \right) = B(q)P - CS + U, \quad (3)$$

$$a_{00} = \sum_{k=0}^n m_k, \quad a_{0j} = -\sum_{k=j}^n m_k l_j \cos \varphi_j, \quad a_{ij} = \sum_{k=j}^n m_k l_j l_i \cos(\varphi_j - \varphi_i), \quad (1 \leq i < j \leq n);$$

$$b_{0j} = 0 \quad (0 \leq j \leq n), \quad b_{ij} = 0 \quad (0 \leq j < i \leq n), \quad b_{ij} = l_i \sin \varphi_i \quad (1 \leq j \leq i \leq n);$$

$$c_{ij} = 0 \quad (i > j), \quad c_{ij} = l_i \quad (i \leq j).$$

Here m_k is the mass of the k -th link, l_k the distance between the centre of mass of the k -th link and the preceding joint, P the vector $(m_0g, \dots, m_n g)^\top$, S the vector $(S_0, \dots, S_n)^\top$ of the drags. As a result we obtain a new representation for the work $A = T + \Pi + Y$, where Π is the potential energy and Y is a solution of the equation $\dot{Y} = \dot{q}^\top CS$.

Then the calculus of variations yields the following result. The optimal motion for the MTM is the solution to the boundary-value problem $q(t_e) = q_e$ for the system

$$\dot{q} = \omega, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{Y}}{\partial \omega} \right) = \frac{\partial \dot{Y}}{\partial q}. \quad (4)$$

We will now introduce several restrictions which endow the drag with a structure which renders the relevant extremum problem amenable to analytical investigation. First, the viscous medium is assumed to be incompressible. Second, the MTM moves in a volume of liquid which is either very extended or is enclosed within rigid boundaries. Under these conditions the drag is a function of the angle attack and the Reynolds number only. Third, the drag is suggested to be a homogeneous function. Then Equations (4) have the following first integrals of the motion $\dot{Y} = C_1$, $\frac{\partial \dot{Y}}{\partial q_0} = C_2$.

Let $\omega_k(\tau + 0) = \omega_k^0(\tau, q_\tau)$, $k = 2, \dots, n$ and $C_k = C_k^0(\tau, q_\tau)$ generate the solution to the above mentioned boundary-value problem. Then the integrals with $C_k = C_k^0(t, q)$ and the equations $\omega_k = \omega_k^0(t, q)$, $k = 2, \dots, n$, define the singular manifold for the optimal problem considered.

REFERENCES

- [1] S.T.Zavalishchin, A.N.Sesekin: *Dynamic Impulse Systems. Theory and Applications*. Kluwer academic publishers, The Netherlands, 1997, 268 pp.

LOCAL TIME STEPPING ALGORITHMS FOR SOLVING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Department of Mathematics, Mississippi State University, Mississippi State, MS 39762, U. S. A.

For many computational problems in science and engineering, it is often necessary to calculate the numerical solutions of the following system of ordinary differential equations

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{f}(\mathbf{u}, t), & t > 0, \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\mathbf{u}, \mathbf{f}, \mathbf{b} \in R^N$, \mathbf{b} is known and \mathbf{f} is usually nonlinear. Eq. (1) arises naturally from many applications, such as electric circuit simulations, chemical reaction processes, and numerical solution of partial differential equations. In the last case, Eq. (1) is obtained by first discretizing the spatial derivatives in the relevant PDEs using the method of lines.

The numerical solution of (1) can be obtained using various time integration algorithms. The explicit method is easy to implement, particularly for nonlinear problems, and is well-suited for parallel computers. However, they are only conditionally stable. The stability criterion usually imposes an upper bound on the time step size allowed for time integration.

To improve the efficiency of explicit time stepping algorithms, there has been extensive research effort focusing on the selection of time steps based on various error estimates or stability criteria. Most of the existing algorithms use a uniform step size Δt to compute all components u_i in $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_N\}^T$ at each time step. This is global time stepping. To further improve the efficiency of the explicit time integration method, we will discuss the local time stepping algorithm in this paper. The basic idea is to use different step sizes Δt_i to advance different solution components u_i , instead of using a uniform step size Δt for all solution components. The local time step size Δt_i should be selected based on the accuracy requirement for each component u_i or the local stability property of the component equation $u_i' = f_i(\mathbf{u}, t)$. For example, in the simulation of chemical reactions, different substances may react at very different rates, and it is often known in advance which chemical substances react faster than the others based on their chemical properties. Similarly, local stability requirement may impose different limits on step sizes for different equations. For example, if two of the equations in system (1) are in the forms of $u_2' = u_1 - 2u_2 + u_3 + q_2(t)$, and $u_8' = 20u_7 - 40u_8 + 20u_9 + q_8(t)$, then the stability criteria will impose different limits on step sizes for integrating u_2 and u_8 . This also frequently happens when non-uniform spatial grids are used to solve PDEs. The stability criterion usually requires that the solution components be updated using a smaller time step size in the region where spatial grid points are closer to each other.

In many applications, only a small percentage of all solution components or equations require extremely small time steps, most of the other solution components can be calculated using larger time steps. However, without proper handling of the transitions between solution components computed using different time step sizes, the order of accuracy of the time integration algorithm will be lost. For example, a third order Runge-Kutta algorithm (R-K algorithm) may produce results that are only first order accurate.

Although the local time stepping algorithm has been used in several different areas, no general analysis on the complexity and order of accuracy of the R-K method with local time stepping is available, particularly in regard to the handling of transitions between solution components updated using different step sizes. In this paper we will discuss local time stepping algorithms with proper handling of transitions to maintain the order of accuracy. We will prove that the order of accuracy of the popular Runge-Kutta time integration algorithms of various orders can be preserved by using interpolations between solution components with different time step sizes. For the Euler algorithm and the second order Runge-Kutta algorithm, we prove that the order of accuracy can be maintained even without interpolations, thereby significantly simplifying the algorithm implementations, particularly for parallel computers. Complexity analysis, implementation issues, and numerical examples will also be discussed in the paper.

Self-oscillations in Hysteresis Systems

Sergey V. Zubov

Dept of Appl Math & Control Processes, St.-Petersburg State University,
2 Bibliotechnaya Sq, Stariy Peterhof, St.-Petersburg, 198904, Russia.

Telephone: 7-812-428-7169, 7-812-428-7179, 7-812-428-4157;

Fax: 7-812-428-7189, 7-812-218-1346, 7-812-428-4677.

E-mail: zubov@vrm.apmath.spbu.ru zubov@dc2.ff.phys.spbu.ru

Consideration of some control problems for various engineering installations often calls for investigation of the hysteresis systems of ordinary differential equations. In particular, central to this is the problem of stable or asymptotically stable periodic solutions of such systems, and the necessity to study conditions for their emergence. The relay hysteresis nonlinearity encountered in mathematical models for automatic control systems provides a physical description of the existing spatial lagging of elements or units in control systems [1 – 9]. Hysteresis is introduced into the controlled systems that are optimal in the sense of damping the functions or functionals, which ensures feasibility of program motions in these systems [8]. In relay stabilization of program modes in controlled systems, hysteresis is used to perform small oscillations in some neighborhood of the modes [8, 9]. The presence of periodic oscillations in a hysteresis system makes it possible to discuss the quality of the relevant engineering installation and its behavior. Consideration is being given here to existence and stability of nonlinear periodic solutions in autonomous hysteresis systems of ordinary differential equations [9].

Suppose there is a system

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + c + (\mathbf{B}x + d)f(\sigma), \quad \sigma = \Gamma^*x, \quad (1)$$

where $x, c, d, \Gamma \in E_n, n \geq 2$, \mathbf{A}, \mathbf{B} are $(n \times n)$ -constant matrices, c, d, Γ are constant vectors, $*$ is the transposition sign, and $f(\sigma)$ is the hysteresis function,

$$f(\sigma) = \begin{cases} +1 & \sigma > -l, \\ -1 & \sigma < +l, \end{cases}$$

the constant $l > 0$. A solution to (1) is defined as follows.

Definition 1. For all given $t \geq 0$ and continuous in t , the function $x(t, x_0, \alpha)$ with its values in E_n ($x(0, x_0, \alpha) = x_0, \alpha = \pm 1$) is called the solution of system (1), if for any $T > 0$ there is a finite collection of numbers $t_0 = 0, t_1, \dots, t_m = T$ ($t_k < t_{k+1}, k = 0, \dots, m-1$) such that:

- 1) $\sigma(t_k, \sigma_0, \alpha) = (-1)^k \alpha l, k = 1, \dots, m-1,$
- 2) $\sigma(t, \sigma_0, \alpha)(-1)^k \alpha > -l, t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, \dots, m-1,$
- 3) $x(t, x_0, \alpha)$ is differentiable with respect to t for $t \in (t_k, t_{k+1}),$

$$\dot{x} = \dot{x}(t, x_0, \alpha) = \mathbf{A}x(t, x_0, \alpha) + c + (-1)^k \alpha (\mathbf{B}x(t, x_0, \alpha) + d), \quad k = 0, \dots, m-1,$$

where $\sigma(t, \sigma_0, \alpha) = \Gamma^*x(t, x_0, \alpha), \sigma_0 = \Gamma^*x_0 = \sigma(0, \sigma_0, \alpha)$. The numbers t_1, \dots, t_{m-1} are called the switching moments of the solution $x(t, x_0, \alpha)$. Here we get $\alpha = 1$ for $\sigma_0 \geq l, \alpha = -1$ for $\sigma_0 \leq -l$, while for $|\sigma_0| < l$ we get $\alpha = 1$ or $\alpha = -1$.

Denote for $\epsilon > 0, x \in E_n, M \subset E_n$

$$\|x\| = \sqrt{x^*x}, \rho(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|, S(M, \epsilon) = \{y : y \in E_n, \rho(y, M) \leq \epsilon\}.$$

The matrix norm $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \{\mathbf{A}\}_{i,j}^2}$. Let $M(x_0, \alpha) = \{y : y \in E_n, y = x(t, x_0, \alpha), t \geq 0\} \subset E_n$ be an orbit of the solution $x(t, x_0, \alpha)$.

Definition 2. The solution $x(t, x_0, \alpha)$ is called stable in Lyapunov's sense if for any $t_1 \geq 0, \epsilon > 0$ there is $\delta = \delta(t_1, \epsilon) > 0$ such that for any $x_1 \in S(x(t_1, x_0, \alpha), \delta)$ it is possible to choose $\beta = \beta(x_1), \beta = \pm 1$ such that for all $t \geq 0$ we get $\|x(t, x_1, \beta) - x(t + t_1, x_0, \alpha)\| \leq \epsilon$. In addition, if $\|x(t, x_1, \beta) - x(t + t_1, x_0, \alpha)\| \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$, then the solution $x(t, x_0, \alpha)$ is called asymptotically stable in Lyapunov's sense.

Definition 3. The solution $x(t, x_0, \alpha)$ is called orbitally stable if for any $\epsilon > 0$ there is $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ such that for any $x_1 \in S(M(x_0, \alpha), \delta)$ it is possible to choose $\beta = \beta(x_1), \beta = \pm 1$ such that for all $t \geq 0$ we get $x(t, x_1, \beta) \in S(M(x_0, \alpha), \epsilon)$. In addition, if $\rho(x(t, x_1, \beta), M(x_0, \alpha)) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$, then the solution $x(t, x_0, \alpha)$ is called orbit-asymptotically stable.

Definition 4. The orbit-asymptotically stable solution $x(t, x_0, \alpha)$ is said to have an asymptotic phase if there is $\delta > 0$ such that for any $x_1 \in S(M(x_0, \alpha), \delta)$ it is possible to choose numbers $\tau = \tau(x_1), \beta = \beta(x_1), \beta = \pm 1$ such that $\|x(t + \tau, x_1, \beta) - x(t, x_0, \alpha)\| \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$.

Definition 5. The periodic solution $x(t, x_0, 1)$ ($\sigma_0 = l$) is called periodic with two switching if there are $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$ such that the switching moments for the solution $x(t, x_0, 1)$ are the numbers $\tau_1 + pT$ and $(p + 1)T$, where $T = \tau_1 + \tau_2, p = 0, 1, \dots$, and $x(T, x_0, 1) = x_0$.

For $y \in E_n, t \in (-\infty, +\infty)$ we introduce the following notation:

$$X_1(y, t) = \exp(t(\mathbf{A} + \mathbf{B}))y + \int_0^t \exp((t - s)(\mathbf{A} + \mathbf{B}))(c + d)ds,$$

$$X_2(y, t) = \exp(t(\mathbf{A} - \mathbf{B}))y + \int_0^t \exp((t - s)(\mathbf{A} - \mathbf{B}))(c - d)ds.$$

From the above definitions it follows that the system (1) has a periodic solution with two switching if and only if the following system is solvable

$$\Gamma^* x_0 = l, x_1 = X_1(x_0, t_1), \quad (2)$$

$$\Gamma^* x_1 = -l, x_0 = X_2(x_1, t_2),$$

where $t_1 > 0, t_2 > 0, x_0, x_1 \in E_n$.

Theorem 1 Let system (2) be solvable in the above sense and the following inequalities hold

$$\Gamma^*((\mathbf{A} + \mathbf{B})x_1 + c + d) < 0, \Gamma^*((\mathbf{A} - \mathbf{B})x_0 + c - d) > 0, \quad (3)$$

$$\|\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1\| < 1, \quad (4)$$

where

$$\mathbf{A}_1 = \left(\mathbf{E} - \frac{((\mathbf{A} + \mathbf{B})x_1 + c + d)\Gamma^*}{\Gamma^*((\mathbf{A} + \mathbf{B})x_1 + c + d)} \right) \exp(t_1(\mathbf{A} + \mathbf{B})),$$

$$\mathbf{A}_2 = \left(\mathbf{E} - \frac{((\mathbf{A} - \mathbf{B})x_0 + c - d)\Gamma^*}{\Gamma^*((\mathbf{A} - \mathbf{B})x_0 + c - d)} \right) \exp(t_2(\mathbf{A} - \mathbf{B})).$$

Then the periodic solution $x(t, x_0, 1)$ of system (1) is orbit-asymptotically stable, has an asymptotic phase and is stable in Lyapunov's sense.

Theorem 2 Suppose in system (1) $\mathbf{B} = \nu \mathbf{A}, |\nu| < 1$, all the eigenvalues of the matrix \mathbf{A} have negative real parts ($\text{Re}\lambda_i(\mathbf{A}) < 0, i = 1, \dots, n$) and the following inequalities hold

$$\Gamma^* \mathbf{A}^{-1}(c + d) > (\nu + 1)l, \Gamma^* \mathbf{A}^{-1}(c - d) < (\nu - 1)l. \quad (5)$$

Then in system (1) there is a periodic solution with two switchings lying in a bounded region of the phase space E_n .

Theorem 3 *Let us consider the system*

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + g(x) + (\nu \mathbf{A}x + h(x) + d)f(\sigma), \quad \sigma = \Gamma^*x, \quad (6)$$

where the functions $g(x)$, $h(x)$ satisfy the Lipschitz condition with respect to x in a neighborhood of the point $x = 0$, $\|g(x)\| = o(\|x\|)$, $\|h(x)\| = o(\|x\|)$ as $\|x\| \rightarrow 0$, and the remaining are as in system (1). Suppose that

$$\operatorname{Re}\lambda_i(\mathbf{A}) < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad |\nu| < 1,$$

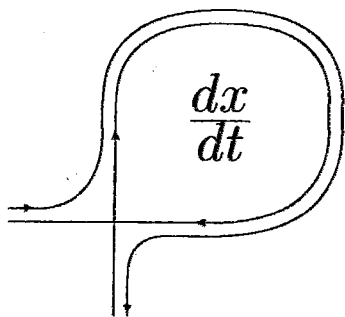
and the constant $(n \times n)$ -symmetric matrix \mathbf{V} is a solution to Lyapunov's matrix equation $\mathbf{A}^*\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{A} = -\mathbf{E}$. Then for $\Gamma = -\kappa \mathbf{V}d$ (the constant $\kappa > 0$) with all sufficiently small $l = 0$ in system (6) there is the two-switching periodic solution lying in a neighborhood of the point $x = 0$. This neighborhood can be made arbitrarily small by choosing a sufficiently small l . In this case, the period T of the above periodic solution is such that

$$\frac{1}{l}T \rightarrow \frac{4}{\kappa d^* \mathbf{V} d} \quad \text{as } l \rightarrow +0.$$

Remark. If the assumption $\operatorname{Re}\lambda_i(\mathbf{A}) < 0, i = 1, \dots, n$ is abandoned and it is assumed that $\nu = 0$ and the vectors $d, \mathbf{A}d, \dots, \mathbf{A}^{n-1}d$ are linearly independent, then the statements of Theorem 3 hold. In this case we should take the matrix \mathbf{V} to be a solution to Lyapunov's matrix equation $(cd^* + \mathbf{A}^*)\mathbf{V} + \mathbf{V}(\mathbf{A} + dc^*) = -\mathbf{E}$, where the constant vector $c \in E_n$ is such that $\operatorname{Re}\lambda_i(\mathbf{A} + dc^*) < 0, i = 1, \dots, n$.

References

- [1] Aizerman, M. A. *Theory of Automatic Control*, p. 452. 3-d ed., Nauka, Moscow, 1966.
- [2] Andronov, A. A., Witt, A. A. and Khaikin, S. E. *Theory of Oscillations*, p. 915. Fizmatgiz, Moscow, 1959. Available in German: *Theorie der Schwingungen*, vol. 1, p. 492, vol. 2, p. 414. Akademie - Verlag, Berlin, 1965 (vol. 1), 1969 (vol. 2).
- [3] Lur'ye, A. I. *Some Nonlinear Problems in the Theory of Automatic Control*, p. 216. Gos-tekhteorietizdat, Moscow - Leningrad, 1951. English translation available: Her Majesty's Stationery Office, 1957.
- [4] Popov, E. P. *Dynamics of Automatic Control Systems*, p. 799. Gostekhizdat, Moscow, 1954. Available in German: *Dynamik Automatischer Regelsysteme*, p. 780. Akademie - Verlag, Berlin, 1958.
- [5] Popov, E. P. and Pal'tov, I. P. *Approximate Methods for Investigation of Nonlinear Automatic Systems*, p. 792. Fizmatgiz, Moscow, 1960. Available in German: *Näherungsmethoden zur Untersuchung Nichtlinearer Regelungssysteme*, p. 786. Akademie - Verlag - Gesst & Portig, Leipzig, 1963.
- [6] Tsypkin, Ya. Z. *Automatic Relay Systems*, p. 575. Nauka, Moscow, 1974.
- [7] Zubov, V. I. *Oscillations in Nonlinear and Controlled Systems*, p. 631. Sudpromgiz, Leningrad, 1962.
- [8] Zubov, V. I. *Theory of Optimal Control*, p. 352. Sudostroyeniye, Leningrad, 1966.
- [9] Zubov, V. I. *Lectures on Control Theory*, p. 496. Nauka, Moscow, 1975. Available in French: *Théorie de la Commande*, p. 469. Mir, Moscow, 1978.



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

<http://www.neva.ru/journal/>
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

ЭЛЕКТРОННЫЙ ЖУРНАЛ “ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ”

Быстрое развитие и широкое применение компьютерной техники в научных исследованиях, системе образования и деловой сфере, а также создание и интенсивная эксплуатация глобальных компьютерных сетей позволяют создавать и использовать принципиально новые источники научно-технической информации. Одними из них являются электронные научно-технические журналы.

Такие издания имеют ряд преимуществ перед традиционными. В частности, они обеспечивают рекордную быстроту публикации при ее неограниченном объеме. Издание электронного журнала не требует больших текущих материальных затрат при этом читатель получает необходимую информацию непосредственно на своем рабочем месте независимо от его географического расположения. Электронные публикации легко преобразуются в традиционные публикации. При этом электронная информация может распространяться как по компьютерным сетям, так и на различных носителях (дискеты, компакт-диски т.д.). Эти преимущества явились, по-видимому, толчком к организации в Европе и Америке большого числа электронных журналов. В настоящее время в России также идет интенсивный процесс создания электронных журналов.

Решение об издании электронного журнала “Дифференциальные уравнения и процессы управления” было принято на первой международной конференции “Дифференциальные уравнения и их применение”, которая состоялась в 1996 году на базе Санкт-Петербургского технического университета.

Целью журнала является публикация:

- результатов теоретических исследований и их различных приложений;
- сообщений о программных продуктах по тематике журнала;
- научно-методических разработок в области высшего образования;
- информации о научных и образовательных мероприятиях;
- информации о книгах и другой печатной продукции.

Учредителем журнала является Санкт-Петербургский государственный технический университет. Журнал имеет следующий электронный адрес:

<http://www.neva.ru./journal/>

Журнал является частью информационной системы "Дифференциальные уравнения и динамические системы", которая поддержана РФФИ, грант 97-07-90088. Частично журнал получил поддержку по программе INTAS, грант EMNET/NIS. Издательскую и редакционную политику журнала будут определять издательский совет и редакционная коллегия, в которые вошли ведущие специалисты России по тематике журнала. Основные идеи этой политики состоят в том, что журнал предполагает публикацию статей, обзоров, лекций и курсов лекций, монографий, диссертаций и их авторефератов, а также других работ с подробным изложением результатов, доказательств и примеров. Предполагается также информировать о научных и методических мероприятиях, связанных с тематикой журнала. Все публикации журнала будут проходить рецензирование. Публикации журнала будут реферироваться в реферативных журналах и иметь статус публикаций в обычных журналах. В частности, эти публикации признаются РФФИ в отчетах о результатах научных исследований при выполнении грантов. Мы рассматриваем журнал как телекоммуникационный и организационный центр для работы по научным проектам творческих коллективов ученых, находящихся в различных городах России и других стран и желающих активно сотрудничать. Представляется целесообразным публиковать в журнале программы научных семинаров и докладов. Мы предлагаем Ученым Советам публиковать у нас сообщения о предстоящих защитах диссертаций. Опубликованные в журнале материалы могут быть использованы для публикаций в других изданиях. Журнал будет иметь свободный доступ в сети INTERNET. Все опубликованные материалы можно получить на дискетах или компакт-дисках. Издательство Санкт-Петербургского технического университета готово выполнить публикацию в традиционном (бумажном) виде при небольших затратах и высоком качестве. Журнал принимает для публикации работы по следующим направлениям:

- теория обыкновенных дифференциальных уравнений;
- теория нелинейных колебаний;
- дифференциально-разностные уравнения;
- динамические системы на многообразиях;
- теория бифуркаций;
- символическая динамика;
- интегро-дифференциальные системы;
- групповой анализ дифференциальных уравнений;
- стохастические дифференциальные уравнения;
- общая теория управления;
- адаптивное и робастное управление;
- управление в нелинейных и сложных системах;
- фильтрация и идентификация;
- управление колебаниями и хаосом;

- стохастическое управление;
- численные методы;
- компьютерное моделирование динамических и управляемых систем;
- программные продукты предназначенные для исследования дифференциальных уравнений и процессов управления;
- приложения в физике, электротехнике и электронике;
- динамические системы в медицине, биологии, экологии, химии и других науках;
- модели экономической динамики и управления;
- учебные курсы и программные продукты обучения по тематике журнала;
- материалы по методике и формам преподавания;
- информация об изданной литературе, диссертациях, программных продуктах, семинарах, конференциях и прочее.

Возможны публикации по другим смежным научным направлениям.

Мы приглашаем к сотрудничеству творческие коллективы и отдельных ученых как в качестве читателей и авторов, так и для выполнения совместных научных и издательских проектов.

**ДОБРО ПОЖАЛОВАТЬ
В НОВЫЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ ЖУРНАЛ !**

Г.С.Осипенко

Главный редактор

E-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

О.Ю.Кульчицкий

Заместитель главного редактора

E-mail: kulo@mcsd.hop.stu.neva.ru

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ СРАВНЕНИЙ МИНИМАЛЬНОЙ ДОСТАТОЧНОСТИ

Акунова А., Акунов Т. А., Ушаков А. В.

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (технический университет). Эл.почта myk@beam.ifmo.ru

В докладе ставится задача оценки качества решений системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t); x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x \in R^n$; $g \in R^m$; $G \in R^{n \times m}$, $F \in R^{n \times n}$, матрица F — гурвицева и простой структуры. Конструирование оценок в классе решений минорирующей и мажорирующей скалярных экспоненциальных систем сравнения (СЭСС) минимальной достаточности проводится как для однородной версии системы (1) при $g(t) \equiv 0$, $x_0 \neq 0$, так и для неоднородной при $x_0 \equiv 0$ и конечномерном экзогенном вынуждающем воздействии $g(t)$ ограниченной нормы, формируемом с помощью системы однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = \Gamma z(t), z(0) = z_0, g(t) = Pz(t),$$

здесь $z \in R^l$, $\Gamma \in R^{l \times l}$, $P \in R^{m \times l}$. Результаты, приводимые в докладе, опираются на систему концепций и утверждений, составляющих сущность *прямого способа* конструирования СЭСС минимальной достаточности.

Концепция 1. Пусть элементы линейной алгебраической задачи (ЛАЗ)

$$\kappa(t) = \Pi(t)\chi(0), \quad (2)$$

параметризованы переменной t , при этом $\kappa \in R^{n_\kappa}$, $\chi \in R^{n_\chi}$, $\Pi \in R^{n_\kappa \times n_\chi}$, $\forall t$. Тогда для ЛАЗ (2) в евклидовых векторных нормах оказываются справедливыми оценочные неравенства.

$$\alpha_m \{ \Pi(t) \} \| \chi(0) \| \leq \| \kappa(t) \| \leq \alpha_M \{ \Pi(t) \} \| \chi(0) \|, \forall t, \quad (3)$$

где $\alpha_m \{ \Pi(t) \}$, $\alpha_M \{ \Pi(t) \}$ — экстремальные для $\forall t$ элементы алгебраического спектра сингулярных чисел матрицы $\Pi(t)$. Оценки $\alpha_m \{ \Pi(t) \} \| \chi(0) \|$, $\alpha_M \{ \Pi(t) \} \| \chi(0) \|$ являются соответственно минорирующей и мажорирующей эллипсоидными оценками векторного процесса $\kappa(t)$.

Концепция 2. Относительные вариации элементов ЛАЗ (2) связаны с числом обусловленности $C \{ \Pi(t) \}$, $\forall t$ в силу неравенства

$$\delta_\kappa(t) \leq C \{ \Pi(t) \} \left(\delta_{\chi(0)} + \delta_{\Pi(t)} + \delta_{\Pi(t)} \delta_{\chi(0)} \right)$$

где $\delta_{(*)} = \frac{\Delta}{\| \Delta \{ \Delta \} \|} \| \Delta \{ \Delta \} \|$ относительная вариация элемента $(*)$ ЛАЗ (2).

Утверждение 1. Общее решение $x(t) = x[t, x(0), g(t)]$ системы (1) удовлетворяет неравенствам (3), в которых вектор $\kappa(t)$ принимает смысл $x(t)$, вектор $\chi(0)$ записывается в форме $\chi(0) = [x^T(0), z^T(0)]^T$, а матрица $\Pi(t)$ имеет представление

$$\Pi(t) = [\exp(Ft) \quad T \exp(\Gamma t) \exp(Ft) T]$$

где T удовлетворяет матричному уравнению Сильвестра

$$TT' - FT = GP.$$

При оценке качества решений $x(t) = x[t, x(0)]$ однородной версии системы (1) в форме (3) следует положить $\chi(0) = x(0)$ и $\Pi(t) = \exp(Ft)$. При оценке качества решений $x(t) = x[t, g(t)]$ системы (1) при $x_0 \equiv 0$ необходимо положить $\chi(0) = z(0)$ и $\Pi(t) = T \exp(Gt) - \exp(Ft)T$, если при этом в качестве воздействия $g(t)$ ограниченной нормы используется ступенчатое, то $\Pi(t) = F^{-1}(I - \exp(Ft))G$, а $\chi(0) = Pz(0)$

Утверждение 2. Пусть $\zeta_M(t)$ — решение однородной мажорирующей СЭСС

$$\dot{\zeta}_M(t) + \mu_M \zeta(t) = 0, \zeta_M(0) \geq \beta_M \|x(0)\|, \quad (4)$$

а $\zeta_m(t)$ — минорирующей

$$\dot{\zeta}_m(t) + \mu_m \zeta(t) = 0, \zeta_m(0) \leq \beta_m \|x(0)\| \quad (5)$$

Тогда справедливы оценочные неравенства для решений $x(t, x(0))$ однородной версии системы (1)

$$\zeta_m(t) \leq \alpha_m \{ \exp(Ft) \} \|x(0)\| \leq \|x(t, x(0))\| \leq \alpha_M \{ \exp(Ft) \} \|x(0)\| \leq \zeta_M(t),$$

при этом экспоненциальные оценки $\zeta_M(t)$ и $\zeta_m(t)$ обладают минимальной достаточностью, то есть максимальной близостью к своим эллипсоидным, если параметры СЭСС (4) и (5) определены соотношениями

$$\mu_M = \min_i |\operatorname{Re}(\lambda_i)|, \beta_M = C\{M\}; \mu_m = \max_i |\operatorname{Re}(\lambda_i)|, \beta_m = C^{-1}\{M\}, M: \|M_i\| = 1$$

где λ_i, M_i — соответственно собственные значение и вектор F , $C\{M\}$ — число обусловленности матрицы M .

Утверждение 3. Число обусловленности $C\{M\}$ матрицы собственных векторов может быть использовано для оценки колебательности решений $x(t, x(0))$ однородной версии системы (1).

Утверждение 4. Пусть $\zeta_M(t)$ решение неоднородной мажорирующей СЭСС

$$\dot{\zeta}_M(t) + \mu_M \zeta_M(t) = \gamma_M \mu_M \|g(t)\|, \zeta_M(0) \equiv 0,$$

а $\zeta_m(t)$ — минорирующей

$$\dot{\zeta}_m(t) + \mu_m \zeta_m(t) = \gamma_m \mu_m \|g(t)\|, \zeta_m(0) \equiv 0,$$

тогда для решений $x(t, g(t))$ системы (1) при ступенчатом экзогенном воздействии $g(t) = g_0 = Pz(0)$ фиксированной нормы $\|g(t)\| = \|g_0\|$ оказывается справедливой цепочка оценочных неравенств

$$\zeta_m(t) \leq \alpha_m \{ F^{-1}(I - \exp(Ft))G \} \|g(t)\| \leq \|x(t, g(t))\| \leq \alpha_M \{ F^{-1}(I - \exp(Ft))G \} \|g(t)\| \leq \zeta_M(t),$$

при этом экспоненциальные оценки $\zeta_M(t)$ и $\zeta_m(t)$ обладают минимальной достаточностью, если параметры СЭСС (4) и (5) определены соотношениями

$$\mu_M = \min_i |\operatorname{Re}(\lambda_i)|, \beta_M = C\{M\}; \mu_m = \max_i |\operatorname{Re}(\lambda_i)|, \beta_m = C^{-1}\{M\},$$

$$\gamma_M = \beta_M \left(\min_i |\lambda_i| \right)^{-1} \|G\| \left(1 + \left(\exp\left(-\pi \mu_M / \max_i (Jm \lambda_i) \right) \right) (1 + \mu_M / \mu_m) \right); \quad \gamma_m = \beta_m \left(\max_i |\lambda_i| \right)^{-1} \alpha_m \{G\}$$

Доклад содержит доказательства выдвинутых положений, они с незначительной модификацией могут быть распространены на случай матрицы F произвольной структуры. Приводятся примеры.

НАХОЖДЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОЧЕК В ОКРЕСТНОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ КРИВЫХ ОТОБРАЖЕНИЯ ГАРДИНИ

Н.Б.Ампилова

Санкт-Петербургский государственный Университет

e-mail:nataly@is1483.spb.edu

Пусть $T = T_{\lambda, \mu}$ отображение расширенной плоскости $\tilde{R}^2 = R^2 \cup \infty$ в себя:

$$T : \begin{cases} x_1 = (1 - \lambda)x + \lambda f_\mu(y), \\ y_1 = (1 - \lambda)y + \lambda f_\mu(x), \end{cases} \quad (1)$$

где λ, μ – вещественные параметры, f_μ – логистическая функция – имеет вид

$$f(t) = f_\mu(t) = \mu t(1 - t). \quad (2)$$

Топология на \tilde{R}^2 предполагается индуцированной топологией сферы Римана, т.е. окрестностями бесконечно удаленной точки являются дополнения всевозможных компактов. Мы предполагаем, что ∞ является неподвижной точкой, тогда T непрерывно.

В работе [1] были описаны простейшие свойства и исследованы особые точки отображения Гардини $T_{\lambda, \mu}$ без ограничения на параметры. Также были построены диаграммы локальных бифуркаций на плоскости параметров λ, μ . Целью настоящей работы является исследование бифуркаций инвариантных кривых в окрестности внедиагональных неподвижных точек указанного отображения с помощью исследования его периодических точек.

1. Неподвижные точки

Согласно [1], исследуемое отображение обладает следующими неподвижными точками: $O_0(0, 0)$ и $O_1(1 - \frac{1}{\mu}, 1 - \frac{1}{\mu})$ – диагональные, $O_2(p, q)$ и $O_3(q, p)$ – внедиагональные, где

$$p = \frac{1 + \mu - \sqrt{(\mu - 1)^2 - 4}}{2\mu}, \quad q = \frac{1 + \mu + \sqrt{(\mu - 1)^2 - 4}}{2\mu}. \quad (3)$$

Точки O_2, O_3 являются фокусами при $\mu \geq 1 + \sqrt{5}$ или $\mu \leq 1 - \sqrt{5}$ и узлами в противном случае.

2. Бифуркация Хопфа

В случае, когда точки O_2, O_3 являются фокусами, справедливо следующее предложение.[2]

Предложение 1 Пусть $\lambda > 0$ и $\mu \geq 1 + \sqrt{5}$. Существует $\mu^* = \mu^*(\lambda)$ такое, что для $\mu \leq \mu^*$ точки O_2, O_3 являются устойчивыми фокусами. Пусть $\lambda^* = \lambda(\mu^*)$. Тогда $\forall \epsilon \geq 0 \exists \delta \geq 0$ что при $\lambda \in (\lambda^*, \lambda^* + \delta)$ в ϵ -окрестностях точек O_2, O_3 существуют замкнутые инвариантные кривые.

В [2] с помощью численного моделирования были определены значения параметра λ , соответствующие возникновению и разрушению этих кривых.

3. Периодические точки

Соответственно терминологии, введенной в работе [3], на инвариантной кривой возникает резонанс, если существуют две периодические орбиты периода q , одна – состоящая из седловых точек, вторая – из устойчивых. Если число вращения орбит равно $\frac{p}{q}$, то говорят о $\frac{p}{q}$ - резонансе. При фиксированных значениях параметров (λ, μ) поиск периодических точек заданного периода k в окрестности инвариантной кривой может быть осуществлен в два этапа:

1. Локализация. Пусть инвариантная кривая принадлежит некоторой области G . Рассмотрим прямоугольник $R \supset G$ и сетку на нем с достаточно малым шагом h . Пусть $z^* = (x^*, y^*)$ - координаты одной из точек сетки. Если $\rho(T^k(z^*), z^*) < \epsilon$, где ϵ - некоторое достаточно малое число, то точка z^* - подозрительная на периодическую точку периода k для отображения T .

Замечание. Достаточно брать ϵ порядка $10^{-2} - 10^{-3}$. Задание слишком большой точности на шаге локализации иногда просто не позволяет найти начальных приближений к периодическим точкам.

2. Уточнение. Каждая из найденных на предыдущем шаге точек проверяется на периодичность с помощью метода Ньютона. Для полученных в результате итераций точек определяется число вращения и тип. В случае нахождения седловой периодической точки строятся ее неустойчивые сепаратрисы. Построение сепаратрис седловых периодических точек при различных значениях параметров позволяет обнаружить момент разрушения инвариантной кривой и появления хаотических движений.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства общего профессионального образования России в области фундаментального естествознания (математика, N 97-1.8-50).

Л и т е р а т у р а

- [1] *Н. Ампилова, А. Осипов* Локальные бифуркации для полного отображения Гардини. *ВИНИТИ*, 14.06.96, N 1969-B96.
- [2] *Н. Ампилова* Численное исследование поведения инвариантных кривых в окрестности неподвижных точек отображения Гардини. *Нелинейные динамические системы. вып.1. сб. статей под редакцией Г.А. Леонова*, С.-Петербург, изд. С.-Петербургского университета, 1997, стр.5-13.
- [3] *D.G.Aronson, M.A.Chory, G.R.Hall, and R.P.McGehee* Bifurcation from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane: a computer-assisted study. *Commun.Math.Phys.* 83,3(1982), p.303-354.

УПРАВЛЕНИЕ ДВУХМАССОВЫМИ СИСТЕМАМИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Москва, Институт проблем механики
Российской академии наук

При помощи методов теории устойчивости движения решаются задачи об управлении двухмассовыми системами с неизвестными параметрами.

В одном случае система представляет собой две массы, соединенные пружиной и расположенные на горизонтальной прямой. В другом случае обе массы также соединены пружиной, но вторая масса лежит на первой (груз на тележке). Обе массы испытывают действие сил сухого трения с переменными, зависящими от положения коэффициентами. Предполагается, что массы, жесткость пружины и коэффициенты трения неизвестны, но лежат в заданных пределах. К первой (несущей) массе приложена ограниченная управляющая сила. Решается задача о приведении несущей массы в заданное терминальное положение за конечное время (состояние другой массы в этот момент произвольно).

Третья исследуемая система также состоит из двух масс: к несущему телу, перемещающемуся вдоль горизонтальной прямой, подвешено другое тело (маятник на тележке). Исходные предположения и цель управления – те же, что и в предыдущих случаях.

Предложены законы управления, основанные на алгоритме, разработанном в [1] для управления нелинейной лагранжевой динамической системой общего вида с неизвестной матрицей кинетической энергии: используется линейная обратная связь по обобщенным координатам и скоростям, коэффициенты усиления которой являются кусочно-постоянными функциями. Коэффициенты возрастают и стремятся к бесконечности по мере приближения траектории к терминальному множеству, однако управляющие силы остаются ограниченными и удовлетворяют наложенным условиям.

Подход обоснован при помощи второго метода Ляпунова.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (N 96-01-01137).

[1] Ананьевский И. М. Управление механической системой с неизвестными параметрами посредством ограниченной силы // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1.

БИФУРКАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ДВУХ ЧИСТО-МНИМЫХ И ДВУХ НУЛЕВЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет
Basov@VB2674.spb.edu, 196233, С-Петербург, пр. Космонавтов, 90-54

Пусть $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, ε – малый положительный параметр, переменные x_1, x_2, y_1 имеют 1-й порядок малости, а y_2, ε – второй, $j = 1, 2$; $X_j^{[k]}(x, y)$, $Y_j^{[k]}(x, y)$ – формы k -го, в указанном смысле, порядка.

Рассмотрим автономную систему 4-х дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + X_1^{[2]}(x, y) + \varepsilon\eta_1 + X_1^{[3]}(x, y) + \varepsilon X_1^{[1]}(x, y) + X_1^*(x, y, \varepsilon), \\ \dot{x}_2 = x_1 + X_2^{[2]}(x, y) + \varepsilon\eta_2 + X_2^{[3]}(x, y) + \varepsilon X_2^{[1]}(x, y) + X_2^*(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y}_1 = y_2 + Y_1^{[3]}(x, y) + \varepsilon Y_1^{[1]}(x, y) + Y_1^*(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y}_2 = -y_1^3 + Y_2^{[4]}(x, y) + \varepsilon Y_2^{[2]}(x, y) + \varepsilon^2\sigma + Y_2^*(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (1)$$

где X_j^*, Y_j^* – достаточно гладкие функции x_j, y_j, ε , причем разложения функций X_j^*, Y_1^* начинаются не ниже, чем с 4-го, а Y_2^* – с 5-го порядка.

Не уменьшая общности, будем считать, что

$$X_j^{[2]}(0, y) \equiv 0, \quad X_j^{[2]}(x, 0) \equiv 0, \quad \eta_j = 0, \quad (2)$$

и предположим, что коэффициенты форм $X_j^{[2]}$ удовлетворяют условию:

$$X_1^{(1,0,1,0)} + X_2^{(0,1,1,0)} = 0. \quad (3)$$

Для коэффициентов остальных форм $X_j^{[k]}, Y_j^{[k]}$, входящих в систему (1), введем обозначения:

$$\begin{aligned} a_1 &= (3X_1^{(3,0,0,0)} + 3X_2^{(0,3,0,0)} + X_1^{(1,2,0,0)} + X_2^{(2,1,0,0)})/8, \\ b_1 &= (X_1^{(1,0,2,0)} + X_2^{(0,1,2,0)})v/2, \quad c_1 = (X_1^{(1,0,0,0)} + X_2^{(0,1,0,0)})/2; \\ a_2 &= (Y_1^{(2,0,1,0)} + Y_1^{(0,2,1,0)} - Y_2^{(2,0,0,1)} - Y_2^{(0,2,0,1)})/6, \\ b_2 &= (3Y_1^{(0,0,3,0)} - Y_2^{(0,0,2,1)})v/5, \quad c_2 = (Y_1^{(0,0,1,0)} + Y_2^{(0,0,0,1)})/3, \end{aligned}$$

где $v = (2\omega)^{-1} \int Cs^2\theta d\theta$, а $Cs\theta$ – это 2ω -периодическая функция, введенная А. М. Ляпуновым.

Предположим что выполняются следующие неравенства:

$$(b_1c_2 - b_2c_1)/(a_1b_2 - a_2b_1) > 0 \quad \text{и} \quad (a_2c_1 - a_1c_2)/(a_1b_2 - a_2b_1) > 0; \quad (4)$$

$$a_1\alpha_0^2 + b_2\beta_0^2 \neq 0 \quad \text{или} \quad a_1b_2 - a_2b_1 < 0, \quad (5)$$

где $\alpha_0 = \sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)/(a_1b_2 - a_2b_1)}$, $\beta_0 = \sqrt{(a_2c_1 - a_1c_2)/(a_1b_2 - a_2b_1)}$.

Т Е О Р Е М А. Предположим, что для системы (1) выполняются условия (2) – (5), тогда при любом достаточно малом положительном значении параметра ε в системе (1) происходит бифуркация рождения двумерного инвариантного тора с частотами $\omega_1 = 1 + O(\varepsilon^{1/2})$, $\omega_2 = \beta_0\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon)$.

В ходе доказательства после полярной замены

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad y_1 = \rho C s \theta, \quad y_2 = -\rho^2 S n \theta,$$

расщепляющей замены

$$r = \varepsilon^{1/2}(\alpha + u), \quad \rho = \varepsilon^{1/2}(\beta + v)$$

и ряда осредняющих замен строится система бифуркационных уравнений, имеющая при условии (4) единственное положительное решение α_0, β_0 , и система (1) приводится к системе, у которой согласно Леммы Смейла при всех достаточно малых положительных значениях параметра существует двумерное инвариантное многообразие.

З а м е ч а н и е. Строго говоря, бифуркация инвариантного тора происходит в системе (1) при дополнительных ограничениях: $X_j(0, 0, \varepsilon) = Y_j(0, 0, \varepsilon) \equiv 0$, $\sigma = 0$, так как тогда при любом достаточно малом положительном ε помимо инвариантного тора система (1) имеет положение равновесия $x = x(\varepsilon)$, $y = 0$.

Полученный результат имеет непосредственное прикладное значение, так как частным случаем системы (1) является система двух уравнений второго порядка с малым положительным параметром

$$\ddot{x} + x = X(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \varepsilon), \quad \ddot{y} + y^3 = Y(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \varepsilon), \quad (6)$$

описывающая колебания двух слабосвязанных осцилляторов с линейной и кубической восстанавливающими силами. Характерная особенность системы (6) заключается в том, что невозмущенные колебания одного из осцилляторов имеют конечную частоту, а частота колебаний другого осциллятора бесконечно мала при стремлении к нулю амплитуды колебаний.

Настоящее исследование поддержано грантом РФФИ 96-01-00404.

ОДНОЗНАЧНОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЧИЗОТТИ

Казань, Казанский государственный университет

Доклад развивает идеи работ [1,2]. Получены условия однозначности интеграла Чизотти [3] для отображения круга с полярными особенностями.

Теорема. Пусть $s, m \geq 1$, функция $\gamma: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $\gamma(\tau+0) = \gamma(\tau)$, $|\gamma(\tau) - \gamma(\tau-0)| < \pi$, и заданы параметры $|c_j| < 1$ ($j=1, \dots, s-1$). Для $|\zeta_k| < 1$ ($k=1, \dots, m$) положим

$$S_k(\zeta_1, \dots, \zeta_m) = (1 - |\zeta_k|^2) \cdot \left[\frac{f''(\zeta_k)}{f'(\zeta_k)} - 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m-1} B(\zeta_k; \zeta_j) + \sum_{j=1}^{s-1} B(\zeta_k; c_j) \right],$$

где $B(\zeta; z) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \ln \Phi(\zeta; z)$, $\Phi(\zeta; z) = (\zeta - z)(1 - \bar{z} \cdot \zeta)$,
 $f'(\zeta) = \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(e^{i\varphi} - \zeta \right) \cdot d\gamma(\varphi) \right]$.

1) Если точки $|b_j| < 1$ ($j=1, \dots, m$; $b_j \neq b_k \neq c_\ell$, $\forall j \neq k$ и $\forall \ell$) такие, что

$$|S_k(b_1, \dots, b_m)| > 2 \quad (k=1, \dots, m), \quad v_1 = \dots = v_m, \quad (1)$$

где $v_k = \frac{u_k + b_k}{1 + \bar{b}_k \cdot u_k}$, $u_k = \frac{\bar{S}_k}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{|S_k|} \left(|S_k|^2 - 4 \right)_+^{1/2} \right]$ ($k=1, \dots, m$), то интеграл

$$F(z) = \int_{z_0}^z f'(\zeta) \cdot \prod_{j=1}^m \Phi(\zeta; b_j)^{-2} \cdot \prod_{j=1}^s \Phi(\zeta; c_j) \cdot d\zeta \quad (|z| < 1) \quad \text{не имеет}$$

логарифмических особенностей в точках b_1, \dots, b_m только при $c_s = v_m$.

2) Если в (1) нарушено хотя бы одно условие, то уравнения $\operatorname{res} F'(\zeta) = 0$ ($k=1, \dots, m$) неразрешимы относительно c_s .
 $\zeta = b_k$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Г.Бильченко Обратная задача для одного обобщенного интеграла Кристоффеля-Шварца. // I междунар. научно-практич. конф. "Дифф. уравнения и их применения", Тез. докл., Санкт-Петербург, 3-5 декабря 1996г., С.31.
2. Л.А.Аксентьев, Г.Г.Бильченко К обратной задаче для интегралов Кристоффеля-Шварца. // Изв. ВУЗов. Математика. - 1997. - №3. - С.72-76.
3. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат Методы теории функций комплексного переменного. - 5-е изд. - М.: Наука, 1987. - 688с.

ОБ ОСОБОЙ РОЛИ ГРУППЫ ПЕРЕНОСОВ ПО НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Казань, Казанский государственный технический университет

В рамках точных уравнений движения жидкости задача оптимального управления ламинарным пограничным слоем на проницаемой поверхности впервые была поставлена Т.К. Сиразетдиновым в 1968г. Теоретико-групповой подход к ее решению был предложен в 1971г. К.Г. Гараевым. Было показано, что расширенный функционал остается инвариантным относительно группы, допускаемой уравнениями Прандтля. При этом основная алгебра Ли раскладывается в прямую сумму $L^\infty \oplus L^4$ своего бесконечного идеала L^∞ , состоящего из операторов

$$X_\infty = \varphi(x) \frac{\partial}{\partial y} + u\varphi'(x) \frac{\partial}{\partial v},$$

и четырехмерной подалгебры L^4 с базисом

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u} + 2p \frac{\partial}{\partial p} + w \frac{\partial}{\partial w}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_3 = y \frac{\partial}{\partial y} - 2u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v} - 4p \frac{\partial}{\partial p} - 3w \frac{\partial}{\partial w}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial p},$$

где $\varphi(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Им же были построены законы сохранения на всех операторах; при этом было доказано, что первый интеграл для сопряженной системы получается только на бесконечномерном операторе.

В 1988г. поставлена и решена задача оптимизации тепломассообмена на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое совершенного газа; в 1994г. – для случая электропроводящего газа; в 1995г. – для случая равновесно диссоциирующего газа, в 1996г. – для случая неравновесно диссоциирующего газа. И во всех случаях первые интегралы удалось построить только на соответствующих бесконечномерных операторах.

Удивительным обстоятельством при этом явилось то, что эти интегралы в точности совпали с соответствующими первыми интегралами, построенными на операторах переноса по независимой переменной (поперек пограничного слоя). В этом и заключается особая роль однопараметрической группы переносов в задачах оптимального управления ламинарным пограничным слоем.

ГРУППОВОЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ АРГУМЕНТОМ

Близоруков М.Г., Логинова Е.В.

620083, Россия, Екатеринбург, пр.Ленина, 51,
Уральский государственный университет, математико-механический факультет
E-mail: Mikhael.Blizorukov@usu.ru

Настоящая работа посвящена нахождению полугруппы операторов для линейной системы разностных уравнений с непрерывным аргументом и рассмотрению некоторых ее свойств. Показано, что эта полугруппа является сильно непрерывной и не является равномерно непрерывной. Построен инфинитезимальный оператор этой полугруппы.

Рассматривается система

$$x(t) = Ax(t-1), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, A — матрица размера $n \times n$ с постоянными коэффициентами, t — действительный аргумент; $x(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-1, 0]$, где $\varphi(t) \in C[-1, 0]$ — заданная начальная вектор-функция. Решения $x(t)$ системы (1) может быть определено по шагам: $x(t) = A^{[t]+1}\varphi(\{t\}-1)$, где $[t]$ — целая часть, $\{t\}$ — дробная часть. Используя подход, разработанный в [1, гл.6], не трудно заметить [2], что: $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta) = (T(t)\varphi)(\vartheta)$, где $\vartheta \in [-1, 0]$, $T(t) : C[-1, 0] \rightarrow C[-1, 0]$ — операторнозначная функция. Для рассматриваемой системы разностных уравнений она имеет вид:

$$(T(t)\varphi)(\vartheta) = \begin{cases} A^{[t+\vartheta]+1}\varphi(\{t+\vartheta\}-1), & t \geq 1, \quad \vartheta \in [-1, 0], \\ A\varphi(t+\vartheta-1), & t \in [0, 1), \quad -t < \vartheta \leq 0, \\ \varphi(t+\vartheta), & t \in [0, 1), \quad -1 \leq \vartheta \leq -t. \end{cases} \quad (2)$$

Установлено, что в области $t \geq 0, s \geq 0$: $(T(t+s)\varphi)(\vartheta) = (T(t)T(s)\varphi)(\vartheta)$ и $(T(0)\varphi)(\vartheta) = \varphi(\vartheta)$, то есть $T(0) = I$ — тождественный оператор. Это позволяет утверждать, что $T(t)$ является полугруппой операторов.

Дальнейшее рассмотрение проводится для $T(t)$, которые определены на сужении $C[-1, 0]$ до $\tilde{C}[-1, 0]$, задаваемом следующим равенством [3]: $\tilde{C}[-1, 0] = \{\varphi \in C[-1, 0], \varphi(0) = A\varphi(-1)\}$. Пространство $\tilde{C}[-1, 0]$ является банаховым. Показано, что оператор $T(t)$ ограничен и линеен, а функция $T(t)\varphi$ непрерывна по t на R^+ при любом $\varphi \in \tilde{C}[-1, 0]$, причем условие $\varphi(0) = A\varphi(-1)$ является существенным.

На основании указанных результатов показана справедливость следующей теоремы:

Теорема 1. Семейство операторов $\{T(t)\}$, заданных (2), где $T(t) : \tilde{C}[-1, 0] \rightarrow \tilde{C}[-1, 0]$, является сильно непрерывной полугруппой операторов.

Для доказательства того, что рассматриваемая полугруппа операторов не является равномерно непрерывной полугруппой достаточно найти такую начальную функцию, для которой условие равномерной непрерывности не будет выполняться. Такая функция $\varphi(t) \in \tilde{C}[-1, 0]$ была сконструирована. Это позволяет утверждать, что справедлив следующий результат:

Теорема 2. Полугруппа операторов $\{T(t)\}$, заданных (2), где $T(t) : \tilde{C}[-1, 0] \rightarrow \tilde{C}[-1, 0]$, не является равномерно непрерывной полугруппой.

По [4], инфинитезимальный оператор определяется соотношением: $A\varphi = \lim_{h \rightarrow 0} A_h\varphi$, где для любого $h \in R^+$ $A_h\varphi = \frac{T(h)\varphi - \varphi}{h}$, $\varphi \in \tilde{C}[-1, 0]$. Для рассматриваемой полугруппы операторов $\{T(t)\}$, заданных (2), имеем:

$$A_h\varphi = \begin{cases} \frac{A^{[h+\vartheta]+1}\varphi(\{h+\vartheta\}-1) - \varphi(\vartheta)}{h}, & h \geq 1, \quad \vartheta \in [-1, 0], \\ \frac{A\varphi(h+\vartheta-1) - \varphi(\vartheta)}{h}, & h \in [0, 1), \quad -h < \vartheta \leq 0, \\ \frac{\varphi(h+\vartheta) - \varphi(\vartheta)}{h}, & h \in [0, 1), \quad -1 \leq \vartheta \leq -t. \end{cases}$$

Инфинитезимальный оператор данной полугруппы операторов определяется следующим равенством:

$$(A\varphi)(\vartheta) = \begin{cases} \varphi'(\vartheta), & \vartheta \in [-1, 0), \\ A\varphi'(-1), & \vartheta = 0. \end{cases}$$

Рассмотрен также случай L_p , т. е. $\varphi, x \in L_p[-1, 0]$, $p \geq 1$, а $T(t): L_p[-1, 0] \rightarrow L_p[-1, 0]$. Как и в предыдущем случае, (когда $\varphi, x \in C[-1, 0]$), показано, что оператор $\{T(t)\}$ ограничен, линейен, а функция $T(t)\varphi$ непрерывна по t на R^+ при любом $\varphi \in L_p[-1, 0]$. Условие, существенное для сильной непрерывности данной полугруппы операторов, $\varphi(0) = A\varphi(-1)$ в случае пространства $L_p[-1, 0]$ тоже сохраняется, и дальнейшее рассмотрение проводится для $\{T(t)\}$, определенных на сужении $L_p[-1, 0]$ до $\tilde{L}_p[-1, 0]$: $\tilde{L}_p[-1, 0] = \{\varphi \in L_p[-1, 0], \varphi(0) = A\varphi(-1)\}$.

Теоремы 1 и 2 можно переформулировать и для случая пространства $\tilde{L}_p[-1, 0]$.

Теорема 3. Полугруппа операторов $\{T(t)\}$, заданных (2), где $T(t): \tilde{L}_p[-1, 0] \rightarrow \tilde{L}_p[-1, 0]$, является сильно непрерывной полугруппой.

Теорема 4. Полугруппа операторов $\{T(t)\}$, заданных (2), где $T(t): \tilde{L}_p[-1, 0] \rightarrow \tilde{L}_p[-1, 0]$, не является равномерно непрерывной полугруппой.

На основании [4] можно утверждать, что рассматриваемая полугруппа операторов может быть приближена с какой угодно точностью семейством равномерно непрерывной полугруппы операторов.

Литература.

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движений. М., 1959.
2. Долгий Ю.Ф., Леонтьева Т.Б. Устойчивость разностных систем с непрерывным временем. Свердловск, 1984, деп. в ВИНТИ, No 4765 - 84.
3. Близоруков М.Г. К вопросу о построении решений линейных разностных систем с непрерывным временем // Дифференц. уравнения. 1996. Т.32. No 1. с. 127-128.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. М., 1962.

Некоторые задачи робастной устойчивости

И.А. Бобылев, С.К. Коровин

В докладе рассматриваются следующие задачи.

1. Дана устойчивая система $\dot{x} = Ax$, требуется оценить норму возмущения матрицы D , при котором устойчива система $\dot{x} = (A + D)x$.

2. Пусть $x = 0$ устойчивое равновесие системы $\dot{x} = f(x)$, требуется описать класс функций $g(x)$ таких, что $g(x) = 0$ и нуль устойчивое равновесие системы $\dot{x} = f(x) + g(x)$.

3. Пусть $x = 0$ - строгий локальный минимум функции $V(x)$, требуется описать класс возмущений $W(x)$ таких, что система

$$\dot{x} = -\text{grad}[V(x) + W(x)]$$

устойчива в нуле.

4. Пусть $(0,0)$ - точка строгого локального минимума гладкого гамильтониана $H(x,y)$, требуется описать класс возмущений $G(x,y)$ таких, что устойчивое равновесие системы

$$\dot{x} = \frac{\partial(H+G)}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial(H+G)}{\partial x}.$$

5. Пусть $x = 0$ - строгий локальный минимум $V(x)$, требуется описать класс возмущений $W(x)$ таких, что $x = 0$ - устойчивое равновесие системы

$$\dot{\tilde{x}} = -\text{grad}[V(x) + W(x)].$$

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И.Я. Богатушин

Россия, С-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, duke@mail.iias.spb.su.

Множество неизвестных функций $Y(t)$ систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся решениями этих уравнений, может быть найдено в результате численного интегрирования систем при известных начальных данных и при использовании новых специальных форм дискретизации производных или путем представления искомым функций в виде слагаемых из известных функций и быстро сходящихся рядов по некоторой полной системе функций или в квадратурах.

Для всякой нелинейной системы решаемых дифференциальных уравнений (РДУ) можно найти соответствующие ей системы модельных интегралов (МИ) и модельных дифференциальных уравнений (МДУ), в которые наряду с искомыми функциями из множества $Y(t)$ будут входить также скрытые функции из множества $F(t)$, описывающие переменные коэффициенты систем МДУ. Приравнивая коэффициенты и параметры какой-либо системы РДУ и соответствующей ей системы МДУ, получим систему уравнений связи (СУС) между двумя названными видами уравнений, содержащую только скрытые функции из множества $F(t)$ и не содержащую ни одной функции из множества $Y(t)$.

Осуществив один раз численное интегрирование с необходимой точностью СУС на некотором интервале (a,b) при произвольных начальных значениях скрытых функций, выполнив затем аппроксимации эти функций с заданной точностью на этом же интервале и подставив найденные аппроксимации в систему МИ, получим систему алгебраических или трансцендентных явных или неявных относительно функций из множества $Y(t)$ уравнений, обеспечивающих нахождение этих функций в дальнейшем без осуществления процедуры численного интегрирования системы РДУ и при любых допустимых начальных значениях функций из множества $Y(t)$ в произвольной точке t , принадлежащей интервалу (a,b) .

Если на функции из множества $Y(t)$ и их производные накладываются условия в различных точках интервала (a,b) , то для решения такой обобщенной краевой задачи достаточно найти соответствующие этим условиям значения произвольных постоянных системы МИ, считая, что эти МИ получены описанным выше способом. При нахождении произвольных постоянных, обеспечивающих решение обобщенной краевой задачи, возможны случаи, когда система модельных интегралов является несовместной при заданных условиях. Это легко устанавливается в процессе нахождения значений произвольных постоянных и производится изменение условий обобщенной краевой задачи с целью достижения совместности системы МИ. Описанный подход является альтернативным известному методу прогонки и позволяет находить решение обобщенной краевой задачи со значительно меньшими вычислительными затратами. Если обобщенная краевая задача решается не многократно, а лишь один раз, то можно не делать аппроксимацию скрытых функций и воспользоваться массивами их численных значений в конечном числе точек, полученных в процессе численного интегрирования системы уравнений связи.

При нахождении функций из множества $Y(t)$ или $F(t)$ иногда целесообразно представить каждую из них в виде двух слагаемых, одно из которых является главной частью функции, выраженной в квадратурах, а второе является произведением известной функции на бесконечный быстро сходящийся ряд. Этот подход применим, в частности, к дифференциальному уравнению Бесселя.

В случае, когда скрытыми функциями являются неизвестные частные решения системы РДУ и когда коэффициенты РДУ выражаются через эти частные решения, можно задавать разного рода связи между частными решениями, выражая одни из них как функции других, что позволит вывести условия связи между коэффициентами системы РДУ и указать случаи интегрирования рассматриваемой системы РДУ в квадратурах.

В отдельных случаях системы РДУ имеют такие коэффициенты, при которых функции системы могут быть найдены в квадратурах. Для получения таких решений функций из множества $Y(t)$ необходимо представить их в виде дробно-линейных функций, числители и знаменатели которых состоят из сумм произведений скрытых функций или суперпозиций скрытых функций или в виде интегралов, зависящих от параметров. Подставляя указанные представления функций в систему РДУ и разбивая методом перебора вариантов полученную систему на такие подсистемы, которые связывают только одну скрытую функцию, можно построить систему нелинейных алгебраических уравнений, решение которой позволит найти частные решения искомых функций. Для получения общих решений систем РДУ необходимо воспользоваться системой МИ, в которой в качестве скрытых функций используются частные решения функций из множества $Y(t)$.

Удобный способ сведения задачи нахождения частных решений системы РДУ к некоторой другой системе, которую иногда можно легко решить, состоит в умножении уравнений системы РДУ на интегрирующие множители, рассматриваемые как функции одного аргумента, вычисления частных интегралов от полученных уравнений и приравнивания их друг другу с последующим исключением операций интегрирования путем дифференцирования.

Построение систем МИ и систем МДУ возможно также и для нелинейных систем РДУ в частных производных. В докладе приводится ряд таких систем РДУ и соответствующие им системы МИ и МДУ. В качестве аналога неизвестных произвольных постоянных, входящих в системы МИ, соответствующих системам обыкновенных дифференциальных уравнений в случае МИ для РДУ в частных производных выступают произвольные функции от нескольких аргументов. Наличие произвольных функций обеспечивает возможность удовлетворения граничным условиям разного рода.

Задавая связи между переменными систем РДУ в частных производных, можно перейти к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающих решение исходной системы на гиперповерхностях, заданных уравнениями связи. Изменяя уравнения связи, можно покрыть некоторой сетью область искомого решения, определяемого как решения множества систем ОДУ.

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.И. Бойкова

Пензенский государственный технический университет,
Россия, 440017, Пенза, ул. Красная, д.40
(cnit@diamond.stup.ac.ru)

Известно, что во многих задачах анализа и математической физики ортогональные полиномы являются собственными функциями соответствующих операторов. Поэтому представляет интерес построение интерполяционных полиномов, являющихся линейными комбинациями ортогональных полиномов, и применение этих полиномов к вычислению интегралов и решению дифференциальных и интегральных уравнений.

1. Интерполяция функций одной переменной

Рассмотрим множество ортонормированных с некоторым весом $p(x)$ многочленов n степени $P_n(x)$. Обозначим через $\mu_k (k = 0, 1, \dots, n)$ узлы полинома $P_{n+1}(x)$. Многочлен

$$\psi_k(\mu) = \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=0}^n P_i(\mu_k) P_i(\mu),$$

где $\gamma_k = \sum_{i=0}^n P_i^2(\mu_k)$, является фундаментальным многочленом для узла μ_k .

Следовательно, полином

$$L_n f = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=0}^n P_i(\mu_k) P_i(\mu) f(\mu_k) \quad (1)$$

является интерполяционным полиномом степени n , интерполирующим функцию $f(\mu)$ по узлам $\mu_k (k = 0, 1, \dots, n)$ полинома $P_{n+1}(\mu)$.

Теорема 1.1. Погрешность интерполяции функции $f(x)$ интерполяционным полиномом $L_n f$ оценивается неравенством

$$\| f(x) - L_n f(x) \|_C \leq A E_n(f) \lambda_{n+1}.$$

где T_n — полином наилучшего равномерного приближения степени n к функции f , $E_n(f)$ — величина отклонения $T_n(x)$ от $f(x)$, λ_{n+1} — константа Лебега по узлам полинома $P_{n+1}(x)$.

2. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

Применение построенных выше интерполяционных полиномов к приближенному решению дифференциальных уравнений изложим на примере уравнения Лежандра.

Ставится задача нахождения частного решения уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dt}\left\{(1-t^2)\frac{dx}{dt}\right\} + ax(t) = f(t), \quad (2)$$

где $f(t) \in W^r(1)$, a — константа, причем $a \neq l(l+1)$, $l = 1, 2, \dots$.

Обозначим через μ_k ($k = 0, 1, \dots, n$) узлы полинома Лежандра $P_{n+1}(\mu)$ степени $n+1$. Многочлен

$$L_n f = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=0}^n \frac{2i+1}{2} P_i(\mu_k) P_i(\mu) f(\mu_k) \quad (3)$$

где $P_i(\mu)$ — полином Лежандра порядка i ,

$$\gamma_k = \sum_{i=0}^n \frac{2i+1}{2} P_i^2(\mu_k)$$

является интерполяционным полиномом степени n по переменной μ , интерполирующим функцию $f(\mu)$ в узлах μ_k .

Приближенное значение частного решения уравнения (2) имеет вид

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{\gamma_k} \left(\sum_{l=0}^N \frac{2l+1}{2} \frac{1}{a-l(l+1)} P_l(t_k) P_l(t) \right) f(t_k) \quad (4)$$

и справедлива оценка $\|x^*(t) - x_N(t)\| \leq AN^{-r+1}$, где $x^*(t)$ — частное решение уравнения (2).

3. Сингулярные интегральные уравнения с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$Kx \equiv ax(t) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{\tau-t} d\tau = f(t) \quad (5)$$

с постоянными коэффициентами.

Обозначим через $P_n^{\alpha,\beta}$ полиномы Якоби степени n ортогональные с весом $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ на сегменте $[-1, 1]$. Число α определяется формулой

$$a + b \operatorname{ctg} \pi \alpha = 0,$$

$\alpha + \beta = -\xi$, где ξ — индекс оператора K .

Обозначим через μ_k ($k = 0, 1, \dots, n$) узлы полинома $P_{n+1}^{\alpha,\beta}(t)$. Введем обозначения

$$\gamma_k^{\alpha,\beta} = \sum_{l=0}^n (P_l^{\alpha,\beta}(t_k))^2, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Теорема 3.1. Пусть оператор K непрерывно обратим в пространстве Гельдера H_β , индекс оператора K равен нулю. Тогда справедлива оценка

$$\|x^*(t) - x_n^*(t)\| \leq AE_n(f) n^\beta \lambda_{n+1}^{(-\alpha, -\beta)},$$

где x^* — решение уравнения (5),

$$x_n^*(t) = -\frac{\alpha\pi}{b} \sum_{k=0}^n \left(\frac{f_k}{\gamma_k^{\alpha,\beta}} \sum_{l=0}^n P_l^{\alpha,\beta}(\mu_k) P_k^{\alpha,\beta}(t) \right),$$

$\lambda_{n+1}^{(-\alpha, -\beta)}$, — константа Лебега по узлам полинома $P_{n+1}^{-\alpha, -\beta}(x)$. Аналогичные утверждения справедливы и при других значениях индекса оператора K .

Нелинейная краевая задача, описывающая распределение зарядов в полупроводниках

Е. З. Борович, В. М. Чистяков
С.-Петербург, СПбГЭТУ, СПбТУ

Рассматривается краевая задача

$$\begin{cases} (D(|E|)(n' + nE))' = 0, \\ E' = f - n, \quad 0 < x < 1, \\ E(0) = E(1) = E_0 > 0, \\ D(E(0))(n'(0) + n(0)E(0)) = j_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $E(x)$, $n(x)$ – напряженность электрического поля и плотность электронов, постоянная $f > 0$ задает однородную плотность ионизированной примеси, $D(|E|)$ – коэффициент диффузии, j_0 – плотность тока электронов при $x = 0$. Предполагается, что $j_0 = fD(E_0)E_0$ [1].

При этих условиях задача (1) имеет тривиальное решение $E(x) = E_0$, $n(x) = f$. В [1] доказано, что если выполнено условие $(1 + D'(E_0)E_0D^{-1}(E_0)) < 0$, то существует счетное множество точек $f_k(E_0)$, $k = 1, 2, \dots$, в окрестности которых возникают малые бифуркационные решения задачи (1).

Оказывается, что это условие означает, что для коэффициента диффузии выполнено так называемое условие отрицательной дифференциальной проводимости (ОДП). Доказано, что условие ОДП является необходимым и достаточным для существования бифуркационных решений задачи (1). Показана продолжимость всех бифуркационных решений по параметру f . Оказывается, что асимптотическое поведение бифуркационных решений при больших значениях параметра f существенно зависит от параметра E_0 . Доказано, что существует единственное значение параметра E_0^* , при котором возникает явление так называемых внутренних переходных слоев [2]. Соответствующую бифуркационную задачу можно рассматривать как нелинейную задачу на собственные значения и собственные функции. Для исследования вопроса устойчивости и неустойчивости собственных функций доказаны существование и единственность решений нестационарной задачи для задачи (1) при любом $t > 0$. Если $E_0 = E_0^*$, то устойчивы обе первые собственные функции, если $E_0 \neq E_0^*$, то устойчива одна из первых функций. Остальные собственные функции неустойчивы при любом E_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Recke L. An Example for Bifurcation of Solutions of the Basic Equations for Carrier Distributions in Semiconductors. Z. angew. Math. Mech. 67, 1987, p. 269-271.
2. Fife P. Boundary and Interior Transition Layer Phenomena for Pairs of Second Order Differential Equations. J. Math. Anal. Appl. 54, 1976, p. 497-521.

О СОХРАНЕНИИ ПОЛНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ЕЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.Ю.Бородулин

Санкт-Петербург, НИИ по передаче электроэнергии постоянным током высокого напряжения,
E-mail: julia@niipt.odusz.elektra.ru

Как известно, при численном моделировании динамических систем важное значение имеет способность метода численного интегрирования сохранять физические законы, лежащие в основе изучаемых движений. Пусть имеется консервативная механическая система, описываемая линейной системой дифференциальных уравнений (СДУ) второго порядка.

$$M\ddot{y} + Ky = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \quad (1)$$

(при обозначениях и допущениях, принятых в [1]), пусть A - матрица коэффициентов эквивалентной СДУ первого порядка, λ - ее собственные значения.

В [1] показано, что при численном интегрировании СДУ (1) методами Рунге-Кутты (РК) условие сохранения полной механической энергии имеет вид

$$F(z)F(-z) = 1, \quad (2)$$

где $F(z)$ - функция устойчивости метода; условие (2) выполняется для неявного метода РК, если его функция $F(z)$ может быть представлена как

$$F(z) = P(z)/P(-z), \quad (3)$$

где $P(z)$ - полином от z . Очевидно, что к таким относятся методы, для которых функция $F(z)$ отвечает диагональным клеткам таблицы аппроксимации Паде для экспоненты $\exp(z)$, в частности, методы Гаусса-Лежандра, рекомендованные в [1].

В докладе способность методов РК сохранять полную механическую энергию связывается с известными видами устойчивости, уточнены классы методов, обладающие этим свойством, рассмотрена их точность в смысле искажения затухания и частоты составляющих свободного процесса (общего решения), определяемых собственными значениями λ матрицы A в соответствии с подходом [2]). Обсуждаются электротехнические аналогии полученных результатов (применительно к моделированию линейных электрических цепей).

Соотношения (2) и (3) выполняются для любого метода РК с дробно-рациональной функцией

$$F(z) = (1 + \sum_{i=1}^s k_i z^i) / (1 + \sum_{i=1}^s (-1)^i k_i z^i), \quad (4)$$

где k_i - коэффициенты. Такие методы являются I-устойчивыми [3] (т.е. для них граница области устойчивости в комплексной плоскости z совпадает с мнимой осью $\text{Im}(z)$), так что I-устойчивость метода обеспечивает сохранение полной механической энергии. Выполнение соотношений (2), (3) легко связать с ω -устойчивостью (это понятие введено в [4]), а также с "недиссипативностью" методов (термин *nondissipative method* используется в [5,6]). С точки зрения точности выполнение указанных соотношений означает, что метод воспроизводит составляющие свободного процесса, имеющие вид гармонических колебаний любой частоты, с нулевым искажением затухания.

Пусть в формуле (4) $k_i = k_i^*$, где k_i^* - коэффициенты, отвечающие (s,s)-клетке аппроксимации Паде. Такую функцию устойчивости, помимо s-стадийного метода Гаусса-Лежандра, имеют (s+1)-стадийные методы Лобатто IIIA и Лобатто IIIB и ряд других методов РК. В частности, при s=1 функция F(z) соответствует методам трапеций, Кранка-Николсона, Ньюмарка ($\beta=1/4$). Как известно, существуют специальные численные методы для непосредственного интегрирования СДУ второго порядка (1) (например, методы РК-Нистрема) с функциями устойчивости вида (4). Все методы РК, характеризуемые различными коэффициентами таблицы Бутчера, обладающие одной и той же функцией F(z), обладают одинаковой точностью воспроизведения затухания и частоты составляющих свободного процесса.

Возможны другие варианты задания коэффициентов k_i , сохраняющие I-устойчивость. К ним, в частности, относятся задание полинома P(z) формулы (3) исходя из разложения экспоненты $\exp(z/2)$ в ряд Тейлора и корректировка коэффициентов при модифицировании методов с исходными коэффициентами k_i^* . Например, при s=2,

$$k_1 = 1/2, k_2 = (1 - \mu^2)/R$$

в формуле (4) получаем модификацию двухстадийного метода Паде [7], которая при рациональном выборе параметров μ, R может быть реализована как комбинация (на каждом шаге) двух одностадийных разностных схем с вещественными коэффициентами. Точность подобных I-устойчивых методов (4) целесообразно оценивать с учетом искажения ими затухания и частоты составляющих.

Граница области устойчивости для некоторых методов с функциями F(z), не удовлетворяющими соотношениям (2),(3), практически совпадает с осью $\text{Im}(z)$ на отрезке оси с точкой $z=0$ посередине (частичная I-устойчивость). Если шаг интегрирования h выбран так, что все собственные значения матрицы A, домноженные на его величину, λh , попадают на указанный отрезок, то получаемое численное решение сохраняет полную механическую энергию. Указанным свойством обладают некоторые методы, непосредственно использующие аппроксимацию матричного экспоненциала $\exp(Ah)$ (например, системные методы), а также, в меньшей степени, некоторые многостадийные явные методы (стандартный метод РК четвертого порядка, формула "трех восьмых", модификация Гилла, метод Кутты-Мерсона и др.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Исполов Ю.Г. Численное решение задачи Коши для конечномерных математических моделей механических систем // Механика и процессы управления. Сб. науч. трудов СПбГТУ № 446. СПб., 1993. С.82-103.
2. Бородулин М.Ю., Дижур Д.П., Кадомский Д.Е. Точность численного интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы в электрических цепях // Электричество. 1988. № 6. С.45-51.
3. Бородулин М.Ю. Устойчивость и точность циклических комбинированных алгоритмов при моделировании электронных цепей // Электронное моделирование. 1994. Т.16, № 2. С.42-47
4. Механизм формирования энергетических флуктуаций и методика его изучения / Ю.В.Ракитский, Е.Д.Шукин, В.С.Ющенко и др. // ДАН. 1985. Т.285. № 4. С.941-945.
5. Van der Howen P.J., Sommeijer B.P. Explicit Runge-Kutta(-Nystrom) methods with reduced phase errors for computing oscillating solutions // SIAM J. Numer. Anal. 1987. Vol. 24. PP. 595-617.
6. Portillo A., Sanz-Serna J.M. Lack of dissipativity is not symplecticness // BIT. 1995. Vol. 35. No. 2. PP. 269-276.
7. Бородулин М.Ю. Искажения аperiodических составляющих свободного процесса при численном моделировании линейных электрических цепей // Электричество. 1991. № 7. С.41-46.

ТОЧНОСТЬ ЯВНЫХ ОДНОШАГОВЫХ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ОБЛАСТЯМИ УСТОЙЧИВОСТИ, РАСТЯНУТЫМИ ВДОЛЬ ОСЕЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

М.Ю.Бородулин

Санкт-Петербург, НИИ по передаче электроэнергии постоянным током высокого напряжения,
E-mail: julia@niipt.oduz.elektra.ru

Как известно, явные методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений обладают простыми и экономичными (в смысле количества арифметических операций на шаге) разностными схемами, однако недостаточно устойчивы. Поэтому представляет интерес конструирование явных одношаговых методов с расширенной областью устойчивости (ОУ) - РОУ-методов, более эффективных при решении жестких задач.

Функция устойчивости s -стадийного явного одношагового метода $F(z)$ ($z=x+iy$ - комплексное число) имеет вид

$$F(z)=1+\sum_{i=1}^s k_i z^i,$$

где k_i - коэффициенты. Как правило, для явных методов Рунге-Кутты (подкласс методов (1))

$$k_i = k_i^* = 1/i!,$$

т.е. функция $F(z)$ отвечает разложению экспоненты $\exp(z)$ в ряд Тейлора. Изменение коэффициентов k_i по сравнению с величинами k_i^* позволяет растягивать ОУ вдоль одной из осей плоскости z . В докладе рассматривается точность РОУ-методов с растянутыми ОУ, имеющих функции

$$F(z)=Q_{sm}(z)=\sum_{i=0}^m k_i^* z^i + \sum_{i=m+1}^s l_i z^i, \quad (1)$$

где l_i - "настроечные" коэффициенты (предложены в [1,2]), и функции

$$F(z)=1+\sum_{i=1}^s (k_i^* + \lambda_i) z^i, \quad (2)$$

где λ_i - параметры. Точность РОУ-методов оценивается исходя величин искажений затухания и частоты составляющих свободного процесса (общего решения) в соответствии с подходом [3-5].

Для РОУ-методов (1) второе слагаемое формулы обеспечивает желательную конфигурацию ОУ. Разработанный в [1] алгоритм дает для полинома $Q_{sm}(x)$ степени s значения коэффициентов l_i , при которых неравенство

$$|Q_{sm}(x)| \leq 1$$

выполняется на отрезке $[x,0]$ наибольшей длины; в [2], например, для случая $m=1, s=4$ найдены значения l_i , при которых левая точка пересечения границы ОУ с осью x имеет координату около

-32. Анализ этого метода показывает, что в силу наличия у функции $F(z)$ четырех вещественных нулей вблизи полусоси $x < 0$ возникают области с очень большими положительными искажениями затухания. Составляющие, отвечающие таким областям, быстро подавляются в решении [4,5]. Расположение нескольких нулей функции $F(z)$ на оси x приводит к увеличению суммарной длины ее участков, где $F(x)$ близко к -1 , т.е. имеются условия для возникновения не имеющих физического смысла высокочастотных осцилляций. Подобные методы не всегда пригодны для интегрирования систем уравнений, матрицы которых имеют чисто вещественный спектр (например, при решении задачи нестационарной теплопроводности в конечно-элементном приближении).

При сильном растяжении ОУ вдоль оси x она сжимается вдоль оси y . В сочетании с низкой точностью для слабозатухающих колебательных составляющих это делает формируемые методы (1) малоприменимыми для систем, свободный процесс которых содержит большое число таких составляющих (например, при решении электроэнергетических задач). Для растягивания ОУ вдоль оси y коэффициенты l_i можно выбирать так, чтобы сблизить часть вещественных нулей функции $F(z)$ или увеличить число комплексно-сопряженных нулей, однако это не приводит к достаточному улучшению точности.

Для РОУ-методов (2) исследовались случаи $s=4$ и $s=5$, когда исходными являются соответственно стандартный метод РК четвертого порядка и метод Кутты-Мерсона (в последнем случае $k_s = 1/144$). Показано, что иногда даже небольшая деформация ОУ (при $|\lambda_i| \ll k_i$) существенно изменяет свойства метода. Так, для метода Кутты-Мерсона верхний нуль функции $F(z)$ расположен близко от оси y , что приводит к вычислительным проблемам при наличии слабозатухающих колебательных составляющих со значениями z , близкими к $i\lambda$. Незначительное смещение верхнего нуля вверх и/или влево расширяет ОУ, при этом точность улучшается для составляющих вблизи точки $i\lambda$, однако ухудшается для некоторых других. При увеличении значений ОУ сильно деформируется и растягивается вдоль выбранной оси до тех пор, пока не разрывается и не превращается в многосвязную. Сильное смещение верхнего нуля метода (2) при $s=4$ вверх вдоль оси y даже при сохранении односвязности ОУ приводит к тому, что в левой полуплоскости $x < 0$ возникает неустойчивая подобласть, заключенная между границей ОУ и осью y .

Таким образом, для РОУ-методов (1) и (2) растягивание ОУ неизбежно ухудшает воспроизведение составляющих в некоторых частях плоскости z , включая, как правило, окрестность точки $z=0$. Эффективность этих методов определяется повышением устойчивости для наиболее быстро затухающих или высокочастотных составляющих, а приемлемость выясняется исходя из точности для составляющих, представляющих интерес при моделировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков В.А., Новиков Е.А. О построении явных методов типа Рунге-Кутты с расширенными областями устойчивости // Препринт № 9 Вычислит. Центра СО АН СССР. Красноярск, 1988.
2. Новиков В.А. Численное конструирование областей устойчивости явных методов // Препринт № 15 Вычислит. центра СО АН СССР. Красноярск, 1988.
3. Бородулин М.Ю., Дижур Д.П., Кадомский Д.Е. Точность численного интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы в электрических цепях // Электричество. 1988. № 6. С.45-51.
4. Бородулин М.Ю. Фильтрация колебательных составляющих свободного процесса при численном интегрировании дифференциальных уравнений линейных электрических цепей // Электричество. 1990. № 11. С.49-54.
5. Бородулин М.Ю. Искажения апериодических составляющих свободного процесса при численном моделировании линейных электрических цепей // Электричество. 1991. № 7. С.41-46.

О ПОСТРОЕНИИ ОДНОМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ КООРДИНАТНЫХ ФУНКЦИЙ

И.Г.Бурова

Санкт-Петербург, НИИММ СПбГУ, *nut@niimm.spbu.ru*

Для решения краевых задач вариационно-разностными методами предлагаются координатные функции, полученные с помощью новых минимальных сплайнов, как полиномиальных, так и тригонометрических, нулевой или ненулевой высоты. В случае многих переменных строятся мультипликативные координатные функции с помощью упомянутых одномерных минимальных сплайнов.

Аппроксимирующая функция содержит значения искомой функции только внутри рассматриваемой области и поэтому не дает эффекта погранслоя. Получаемые вариационно-сеточные схемы можно назвать сеточными схемами без погранслоя.

Применение мультипликативных координатных функций приводит к сеточной матрице ленточного типа, так как носитель данных координатных функций компактен. В случае необходимости для уменьшения погрешности рекомендуется сгущать сетку вдоль соответствующих направлений координатных осей.

Литература

1. Демьянович Ю.К. Локальная аппроксимация на многообразиях и минимальные сплайны. СПб., 1994. 354 с.
2. Бурова И.Г., Патрушева Е.В., Чермных Т.В. О построении аппроксимаций на конечной сетке // *Методы вычислений*. Вып.17. 1995. С.28-42.
3. Бурова И.Г. Об аппроксимации локальными тригонометрическими сплайнами с заданным порядком аппроксимации. М., 1987. 49 с. Деп. в ВИНТИ 6.01.87, N 132-B87.
4. Бурова И.Г. О тригонометрических сплайнах на конечной сетке. М., 1996. 30 с. Деп. в ВИНТИ 22.11.96, N 3392-B96.
5. Бурова И.Г. Гладкие минимальные сплайны на конечной сетке. М., 1997. 45 с. Деп. в ВИНТИ 18.08.97, N 2706-B97.
6. Обэн Ж.П. Aubin J. — P. *Evaluation des erreurs de troncature des approximations des espaces de Sobolev. J. of Math. Analysis and Applic.*, 21, N2, 1968, 356-368.
7. Михлин С.Г. Вариационно-сеточная аппроксимация. Записки науч. семина ЛОМИ. т 48 Л. 1974. С. 32-188.

БИФУРКАЦИИ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ ПРИ СИЛЬНЫХ РЕЗОНАНСАХ

Д.Ю. Волков

В работе изучается бифуркация торов из состояния равновесия диссипативной автономной системы

$$\dot{x} = f(x, \epsilon), \quad (1)$$

где $x \in R^d, \epsilon \in R^m$, f - гладкая функция, система (1) имеет состояние равновесия $x = 0$ при малых ϵ . Работа является продолжением исследований Ю.Н.Бибикова, отраженных в [1]. Как известно, характер бифуркаций решения $x = 0$ зависит от собственных чисел $\lambda_1(\epsilon), \dots, \lambda_d(\epsilon)$ матрицы $A_0 = D_x F(0, \epsilon)$. Будем считать, что в системе (1) уже осуществлен переход на центральное многообразие и собственные числа $\lambda_1(\epsilon), \dots, \lambda_d(\epsilon)$ при $\epsilon = 0$ лежат на мнимой оси. Если

$$\lambda_j(0) = \langle \lambda(0), k \rangle \quad (2)$$

где $\lambda(0) = (\lambda_1(0), \dots, \lambda_d(0))$, $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k \in Z_+^d$, $|k| = k_1 + \dots + k_d$, то говорят, что собственные числа удовлетворяют резонансному соотношению порядка $|k|$. В [1] изучены бифуркации торов при условии, что $\lambda(0) = (i\omega_1, -i\omega_1, \dots, i\omega_p, -i\omega_p)$ и собственные числа не удовлетворяют тождественным равенствам ((2)) при $|k| \leq 4$. В данной работе исследуется случай произвольных резонансов. Исследование бифуркаций проводится в 4 этапа:

1. По исходной полной системе строится усеченная нормальная форма до членов некоторого порядка малости (резонансная нормальная форма).

2. По резонансной форме строится модельная система. В эту систему входят переменные, которые мало меняются при бифуркациях (медленные переменные).

3. Исследуются решения модельной системы.

4. Устанавливается связь между решениями модельной системы и полной исходной системы.

В работе подробно исследованы случаи

$$\lambda(0) = (i\omega_1, -i\omega_1, \dots, i\omega_p, -i\omega_p)$$

и

$$\lambda(0) = (i\omega_1, -i\omega_1, \dots, i\omega_q, -i\omega_q, 0, \dots, 0)$$

причем нулевые собственные числа могут иметь как простые, так и не простые элементарные делители. В работе строятся усеченные нормальные формы. Показано, что модельные системы в этом случае устроены более сложно, чем при отсутствии сильных резонансов. Кроме амплитудных переменных в модельные системы входят и линейные комбинации быстрых переменных. Эти комбинации определяются резонансными условиями. Модельные системы заданы на цилиндрическом фазовом пространстве $R^n \times T^q$, $n, q \in N$ и для изучения этих систем удобно применять специальные методы [3]. Полностью исследовать динамику специальных систем невозможно, поэтому изучены частные случаи. Установлено существование периодических, квазипериодических и хаотических решений у модельных систем. Доказано, что гиперболическим инвариантным торам размерности q модельной системы соответствуют $q + l$ -мерные инвариантные торы полной исходной системы. Рассмотрим частные случаи:

$$\lambda(0) = (i\omega_1, -i\omega_1, i\omega_2, -i\omega_2) \quad \text{и} \quad \omega_1 : \omega_2 = 1 : 1, 1 : 2$$

и

$$\lambda(0) = (i\omega_1, -i\omega_1, 0, 0) \quad \text{и} \quad \omega_1 : \omega_2 = 1 : 3$$

и нулевому собственному числу соответствуют не простые элементарные делители. Установлена связь теории бифуркаций, теории взаимодействия волн и теории синхронизации механических систем [2, 4].

Литература

- [1] Бибиков Ю.Н.- Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации.- Л. изд-во ЛГУ,1991,142 стр..
- [2] Ланда П.С. - Нелинейные колебания и волны.М., Наука,1997,495с.
- [3] Леонов Г.А., Буркин И.М.,Шепелявый А.И.- Частотные методы в теории колебаний,ч.1,С.-Петербург,из-во СПб у-та,366с.
- [4] Неймарк Ю.А., Ланда П.С. - Стохастические и хаотические колебания.М.,Наука,1987,422 с.

Работа поддержана грантом ГКВОРФ по фундаментальному естествознанию 97/1.8/32.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА ДВУХ ТОВАРОВ

Горский А.А., Локшин Б.Я., Розов Н.Х.
119899 Москва, МГУ, ф-т. пед. образования
тел.(095)939-52-41; факс (095)939-20-90
E-mail rozov@rozov.mcsme.ru

Построена математическая модель, описывающая поведение двух производителей, каждый выпускает свой вид товара и потребляет товар другого. Модель представляет обобщение динамической модели производства и сбыта одного товара, рассмотренной в [1].

Двумя производителями производятся два товара общего потребления, не являющиеся жизненно необходимыми. Каждый производитель, полученный от производства доход делит на три части.

Первая часть направляется на поддержание собственного существования (приобретение жизненно необходимых товаров, не представленных в модели).

Вторая часть используется для продолжения производства.

Третья часть представляет потребление – предназначена для приобретения товара противоположного типа.

Таким образом, рассматривается ситуация, когда производятся и потребляются товары, без которых, в принципе, можно обойтись и спрос на них, в основном, возникает в случае появления соответствующих дополнительных средств, заработанных при производстве таких товаров.

Модель является симметричной в том смысле, что состоит из двух взаимосвязанных систем, имеющих одинаковую структуру и отличающихся значениями коэффициентов. В модели участвуют следующие переменные ($i=1;2$):

x_i – платежеспособный спрос на товар,

z_i – количество товара на рынке,

u_i – уровень выпуска товара,

w – доход от производства товара.

Модель включает: 2 уравнения баланса товара на рынке с учетом платежеспособного спроса на товар, 2 уравнения производства товаров, учитывающих затраты времени на производство и 2 уравнения формирования платежеспособного спроса на товары в результате выручки от продажи производимого товара.

Модель представляет систему нелинейных дифференциальных уравнений. В зависимости от параметров, процессы, описываемые моделью могут демонстрировать различные режимы: стационарные, колебательные, хаотические и т.д. Модель может использоваться для исследования динамических процессов экономики и выбора рациональных стратегий поведения производителей из условия максимального достижения поставленных ими целей. Возможны обобщения, связанные с рассмотрением большего перечня товаров, конкуренции и кооперации производителей.

Литература.

1. Горский А.А., Колпакова И.Г., Локшин Б.Я. //Динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товара возобновляющегося спроса. Изв.РАН сер. Теория и системы управления N 1 1998.

**СВЕДЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ЛИНЕЙНОЙ
СТАЦИОНАРНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
С КВАЗИПОЛИНОМИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ
К ЗАДАЧЕ КОШИ**

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматривается двухточечная линейная стационарная стохастическая краевая задача

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f(t), \quad (1)$$

с граничными условиями

$$x(0) = x(1), \quad y(0) = y(1), \quad (2)$$

или с распадающимися граничными условиями

$$x(0) = p, \quad y(1) = q, \quad (3)$$

где

$$f(t) = \sum_{j=1}^m \exp(\mu_j t) (\cos(\nu_j t) \sum_{k=0}^{r_j} t^k a_{jk} + \sin(\nu_j t) \sum_{k=0}^{r_j} t^k b_{jk}), \quad (4)$$

$j, k, m, n, n_1, n_2, r_1, r_2, \dots, r_j$ — натуральные числа, $n_1 + n_2 = n$, $t, \mu_j, \nu_j \in \mathbb{R}^1$, $t^0 \equiv 1$, случайные векторы $p, x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $q, y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R}^n$, P — матрица $n \times n$, элементы которой суть независимые случайные величины с непрерывными функциями распределения.

Введем вспомогательные $n \times n$ - матрицы

$$Q_j = P - \mu_j E, \quad S_j = Q_j^2 + \nu_j^2 E, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где E — единичная $n \times n$ - матрица. Из определения матрицы P следует, что $\det(Q_j) \neq 0$, и $\det(S_j) \neq 0$, при $j = 1, 2, \dots, m$, с вероятностью 1.

Определим случайные векторы $A_{jk}, B_{jk} \in \mathbb{R}^n$ с помощью следующей линейной совместной рекурсии по k от r_j до 0 при $j = 1, 2, \dots, m$.

$$\begin{aligned} A_{jr_j} &= -S_j^{-1}(Q_j a_{jr_j} + \nu_j b_{jr_j}), \\ B_{jr_j} &= -S_j^{-1}(Q_j b_{jr_j} - \nu_j a_{jr_j}), \\ A_{jk} &= -S_j^{-1}(Q_j(a_{jk} - (k+1)A_{j(k+1)}) + \nu_j(b_{jk} - (k+1)B_{j(k+1)})), \\ B_{jk} &= -S_j^{-1}(Q_j(b_{jk} - (k+1)B_{j(k+1)}) - \nu_j(a_{jk} - (k+1)A_{j(k+1)})), \\ &k = r_j - 1, r_j - 2, \dots, 1, 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Определим случайные векторные функции $u(t) \in R^{n_1}$ и $v(t) \in R^{n_2}$ равенством

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m \exp(\mu_j t) (\cos(\nu_j t) \sum_{k=0}^{r_j} t^k A_{jk} + \sin(\nu_j t) \sum_{k=0}^{r_j} t^k B_{jk}) \quad (6)$$

Теорема 1. С вероятностью 1 существует единственное решение $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ краевой задачи (1),(2) с неоднородностью (4). Это решение удовлетворяет следующему начальному условию задачи Коши для системы уравнений (1)

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} + (\exp(P) - E)^{-1} \begin{pmatrix} u(0) - u(1) \\ v(0) - v(1) \end{pmatrix},$$

где $u(0)$, $v(0)$, $u(1)$, $v(1)$ определяются по формулам (5) и (6).

Следствие. Если в формуле (4) $\mu_j = 0$, $r_j = 0$ при $j = 1, 2, \dots, m$, а $f(t)$ — периодическая векторная случайная функция с минимальным равным единице периодом, то есть, с вероятностью 1 $f(t+1) = f(t)$ при $t \in R^1$, то с вероятностью 1 существует единственное решение $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ краевой задачи (1),(2) с неоднородностью (4), которое является периодическим с равным единице периодом решением системы уравнений (1). Это единственное периодическое решение удовлетворяет следующему начальному условию задачи Коши для системы уравнений (1)

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = - \sum_{j=1}^m (P^2 + \nu_j^2 E)^{-1} (P a_{j0} + \nu_j b_{j0})$$

Теорема 2. С вероятностью 1 существует единственное решение $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ краевой задачи (1), (3) с неоднородностью (4). Это решение удовлетворяет следующим начальным условиям задачи Коши для системы уравнений (1)

$$x(0) = p,$$

$$y(0) =$$

$$v(0) + (\exp(P)[n_1+1 : n, n_1+1 : n])^{-1} (q - v(1) - (\exp(P)[n_1+1 : n, 1 : n_1])(p - u(0)))$$

или в другом виде

$$x(0) = p,$$

$$y(0) = v(0) + (\exp(-P)[n_1+1 : n, n_1+1 : n])(q - v(1)) + \exp(-P)[n_1+1 : n, 1 : n_1] \times \\ \times (\exp(-P)[1 : n_1, 1 : n_1])^{-1} (p - u(0) - (\exp(-P)[1 : n_1, n_1+1 : n])(q - v(1))),$$

где $\exp(-P)[1 : n_1, 1 : n_1]$ обозначает соответствующих размеров вырезку ($n_1 \times n_1$ - подматрицу) из стохастической экспоненциальной матрицы $\exp(-P)$, а $u(0)$, $v(0)$, $v(1)$ определяются по формулам (5) и (6).

Заметим в заключение, что необходимые реализации вырезок можно вычислять на компьютерах с помощью точного (рекурсивного) метода [1].

Литература

1. Гурьянов А.Е. // Дифф. уравнения. 1980. Т. 16, N 8. С. 1517–1519.

О ПОСТРОЕНИИ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ ЗАДАЧ С СИЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Ю.К. Демьянович

Санкт-Петербургский государственный университет

Вариационно-разностный метод (ВРМ) для одномерной краевой задачи с сильным вырождением рассматривался автором ранее. В дальнейшем были разработаны граничные минимальные сплайны на локально квазиравномерных сетках и получены оценки аппроксимации и устойчивости (см. [1]). В данной работе строится ВРМ с использованием граничных минимальных сплайнов, оценивается точность вычислений и даются приемлемые для априорных суждений верхние грани констант в соответствующих неравенствах.

Моделью служит уравнение

$$-(a(x)u')' + b(x)u = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad u(1) = 0,$$

где $a(x)$, $b(x)$ и $f(x)$ – гладкие функции,

$$a(x) > 0 \quad \int_0^1 \frac{dx}{a(x)} = +\infty, \quad \int_0^1 \frac{x dx}{a(x)} < +\infty.$$

Координатные функции – граничные сплайны ω_j , для которых

$$\sum_j x_j^i \omega_j(x) = x^i, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

на конечной сетке $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$.

Другой модельный пример – нестационарная задача

$$u_t' = -(a(x, t)u_x')_x + b(x, t)u = f(x, t),$$

при прежних ограничениях по x и при соответствующих начальном и граничном условиях. С использованием указанных выше координатных функций сначала строится метод прямых для этой задачи, а затем проводится двухслойная дискретизация по времени с весовыми множителями. Изучается полученная схема ВРМ и ее зависимость от гладкости начального условия и от его согласования с граничным условием.

Благодаря применению упомянутых сплайнов удается значительно повысить точность вычислений при прежней памяти и времени счета. Численный эксперимент согласуется с теоретическими результатами.

Литература

1. И.Г. Бурова, Ю.К. Демьянович. Граничные минимальные сплайны и их применение. СПб., 1996. 88 с.

Санкт-Петербург, НИИММ СПбГУ, nim@nimm.spbu.ru

Б.П. Дербенева, В.Е. Чернышев

Рождение гиперболического инвариантного множества при расщеплении гетероклинического цикла типа Лоренца

Санкт - Петербург, Санкт -Петербургский госуниверситет

Имеется много примеров трехмерных автономных систем дифференциальных уравнений таких, что наличие у них достаточно простого инвариантного множества — гетероклинического цикла — влечет существование хаотического инвариантного множества в любой окрестности гетероклинического цикла, то есть гетероклинический цикл порождает хаос.

В первую очередь к гетероклиническим циклам, порождающим хаос, относятся трансверсальные гетероклинические циклы, содержащие среди своих предельных множеств только замкнутые траектории [1], [2]. Хаотическое множество также порождает цикл, состоящий из седло - фокуса и гомоклинической к нему траектории [3].

Рассмотрим трехмерную автономную систему дифференциальных уравнений, имеющую гетероклинический цикл Γ типа Лоренца, то есть компактное инвариантное множество, состоящее из конечного числа траекторий γ_i , $i \in 1 : m$, и их α и ω предельных множеств, которые являются либо седловыми замкнутыми траекториями, либо точками покоя типа седло - узел. При этом нумерацию траекторий можно выбрать так, что $\alpha(\gamma_i) = \omega(\gamma_{i-1})$, $i \in 2 : m$, $\alpha(\gamma_1) = \omega(\gamma_m)$, $\alpha(\gamma_i) \cap \alpha(\gamma_j) = \emptyset$, $i \neq j$, и среди предельных множеств, входящих в цикл Γ , есть как точки покоя так и замкнутые траектории.

Предположим, что гетероклинический цикл Γ равноразмерностный. Это означает, что размерности устойчивых многообразий W_i^s предельных множеств $\alpha(\gamma_i)$, $i \in 1 : m$, равны.

В работе [4] были получены условия, при выполнении которых равноразмерностный гетероклинический цикл Γ Лоренцева типа порождает инвариантное хаотическое компактное множество J в своей окрестности. При этом хаотическое инвариантное множество сохраняется при C^1 - малых возмущениях исходной системы.

Инвариантное множество назовем хаотическим, если в нем всюду

плотны замкнутые траектории, есть всюду плотная траектория и имеется чувствительная зависимость решений от начальных данных.

Хаотическое инвариантное множество J является максимальным инвариантным множеством исходной системы в некоторой окрестности гетероклинического цикла Γ . Оно негиперболично, поскольку содержит гетероклинический цикл Γ .

При C^1 - малых возмущениях системы в окрестности гетероклинического цикла лежит компактное хаотическое инвариантное множество J' возмущенной системы, которое в общем случае не гомеоморфно множеству J . Например, нетрудно построить C^1 - малое возмущение, при котором это хаотическое множество J' не содержит состояний равновесия возмущенной системы. Для таких возмущений справедлива следующая теорема.

Теорема. Существует окрестность $V(\Gamma)$ равноразмерностного гетероклинического цикла Γ Лоренцева типа такая, что если максимальное инвариантное хаотическое компактное множество J' возмущенной системы, лежащее в окрестности $V(\Gamma)$, не содержит точек покоя возмущенной системы, то множество J' — гиперболично.

Литература

1. Шильников Л.П. Об одной задаче Пуанкаре - Биргоффа. // Мат. сб. 1967, т. 74, N 3.
2. Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М., Наука, 1977, 304 с.
3. Шильников Л.П. К вопросу о расширенной окрестности седло - фокуса. // Мат. сб. 1970, т. 81, N1.
4. Чернышев В.Е. Возмущение гетероклинических циклов Лоренцева типа. Сб. Нелинейные динамические системы. Изво СПбГУ, 1998, вып.1.

УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИИ В ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ ПОПУЛЯЦИЙ

Ефремова С.С.

СПБГТУ

Одной из важных задач математической экологии является исследование динамики численности популяций. Уравнения динамики возрастной структуры популяций, развивающейся в стационарной среде с ограниченными ресурсами, могут быть представлены системой нелинейных разностных уравнений вида:

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= \mu e^{-\beta N(t)} (b_2 x_2(t) + b_3 x_3(t)) \\x_2(t+1) &= e^{-\alpha N(t)} a_1 x_2(t) \\x_3(t+1) &= e^{-\alpha N(t)} a_2 x_3(t)\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $N(t) = \sum_{j=1}^3 x_j(t)$ плотность популяции, $x_i(t)$ число индивидуумов в возрастном классе i в момент времени t ; коэффициенты a_i и b_i – не зависят от плотности, μb_i – максимальная скорость воспроизводства в классе i ; a_i – коэффициент выживаемости при переходе из i группы в $i+1$, α и β – параметры, учитывающие влияние плотности на рождаемость и выживаемость соответственно. Все параметры неотрицательны и удовлетворяют условиям: $a_1 < a_2 < 1$; $\mu b_3 < \mu b_2$; $\mu b_2 > 1$;

Проведено качественное исследование системы (1). Получены условия существования и устойчивости положения равновесия. Обнаружены два типа потери устойчивости равновесного распределения в зависимости от различий в силе воздействия на рождаемость и выживаемость. На основе полученных критических значений параметров проведено исследование различных типов периодических движений возрастной структуры популяций. Доказано существование стохастических режимов, проявляющихся в нерегулярном поведении возрастной структуры.

Проведено обобщение данной модели на случай, когда численности популяций отдельных возрастных групп входят в состав общей численности с определенными весовыми коэффициентами, что более правильно отражает состояние популяции в действительности. Показано, что при подходящей замене переменных такая обобщенная модель приводится к исходной и, следовательно, качественная картина динамики возрастной структуры при этом не изменяется.

К ЧИСЛЕННОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

П.Б. Забирахин, А.А. Суханов

Санкт-Петербургский государственный технический университет

Рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие поведение некоторой механической системы. Для их решения предлагаются модификации известных численных методов интегрирования, основанные на использовании предварительных знаний о спектральных свойствах решения, позволяющих повысить точность численного интегрирования. Необходимая информация может быть получена из свойств исходной механической системы и внешнего воздействия на нее, либо на основании данных предварительного численного исследования. Рассмотрим реализацию предлагаемого подхода на примере модификации простейшего класса одношаговых методов

$$\mathbf{x}_{k+1} = a\mathbf{x}_k + h(b\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + c\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1})) \quad (1)$$

для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (2)$$

Если параметры a, b, c считать константами (как в классических методах интегрирования) выполнение условия сходимости схемы (1) приводит к стандартному однопараметрическому семейству методов Эйлера. Анализ показывает, что улучшить численную схему можно, представляя параметры a, b, c некоторыми функциями шага интегрирования h . Если выбрать функции $a(h), b(h), c(h)$ исходя из условия точного вычисления незатухающих колебаний системы (2) по форме, соответствующей некоторой частоте ω_n (частоте “настройки”), можно получить следующую систему, определяющую семейство численных методов:

$$\begin{cases} \cos \omega_n h - a = -\omega_n h c \sin \omega_n h \\ \sin \omega_n h = \omega_n h b + c \omega_n h \cos \omega_n h. \end{cases} \quad (3)$$

Конкретные выражения параметров a, b, c в (3) задают соответствующие модификации стандартных схем интегрирования. Например, модифицированный метод Эйлера определяется соотношениями

$$a = \cos \omega_n h, \quad b = \frac{\sin \omega_n h}{\omega_n h}, \quad c = 0.$$

При этом, если частота “настройки” совпадает с первой собственной частотой линейной системы, собственные колебания по первой собственной форме будут вычисляться точно, а по высшим формам — гарантированно точнее, чем при использовании стандартной схемы. В случае применения указанных методов к определению вынужденных колебаний линейной системы под действием гармонического внешнего воздействия частоты $\omega = \omega_n$ модифицированные методы будут давать точное решение (по амплитуде, фазе и частоте) в установившихся режимах. Для общего случая нелинейной системы (2) показано, что применение рассматриваемых методов будет эффективно в случае, если решение системы близко к гармоническому с частотой ω_n .

Аналогичным образом могут быть модифицированы и другие численные методы (Рунге-Кутта, Адамса). В случае модификации методов высоких порядков точности оказывается возможным расширить класс функций, на которые «настроена» численная схема, не ограничиваясь гармоническими решениями.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ВОДОРОДОПРОНИЦАЕМОСТИ ДВУХСЛОЙНЫХ МЕМБРАН

Петрозаводский университет

Интерес к проблеме взаимодействия водорода и его изотопов с металлами носит многоплановый характер. Достаточно упомянуть задачи энергетики, защиты конструкционных материалов от водородной коррозии, проектирования химических реакторов, ракетостроения, вакуумной техники и технологии. Широко применяются различные многослойные конструкционные материалы. Возникает проблема оценки параметров их взаимодействия с водородом. При этом существенны не только диффузия, но и физико-химические явления на поверхности, на стыке слоев. Необходим алгоритм, позволяющий оценивать параметры модели по экспериментальным данным для конкретных материалов.

Согласно экспериментальному методу проницаемости с входной стороны предварительно обезводороженной и нагретой до фиксированной температуры $T(t) = \bar{T}$ мембраны (перегородки вакуумной камеры) скачкообразно создается достаточно высокое постоянное давление $p_0(t) = \bar{p}_0$ водорода в газовой фазе. С выходной стороны производится постоянная откачка газа вакуумной системой. Экспериментальными данными считаем плотность выходного десорбционного потока водорода [1,2].

Примем следующую математическую модель переноса водорода сквозь двухслойную мембрану с нелинейными динамическими граничными условиями. Для первого слоя:

$$c_t(t, x) = D(T)c_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in (0, t^+) \times (0, \ell), \quad (1)$$

$$c(0, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \ell], \quad (2)$$

$$c_0(t) = c(t, 0) = g(T)q_0(t), \quad t \in [0, t^+], \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}q_0(t) = \mu s(T)p_0(t) - b(T)q_0^2(t) + D(T)c_x(t, 0), \quad (4)$$

$$g(T(0))q_0(0) = c_0(0) = \varphi(0). \quad (5)$$

Здесь $c(t, x)$ — концентрация диффундирующего (атомарного) водорода, $q_0(t)$ — поверхностная концентрация ($x = 0$), $D(T)$ — коэффициент диффузии, $g(T)$ — коэффициент соответствия между концентрациями на поверхности и в приповерхностном объеме мембраны, μ — кинетическая константа, $s(T)$

— коэффициент адсорбции, $b(T)$ — коэффициент десорбции. Соотношение (4) являются уравнением баланса потоков. Десорбционный поток моделируется квадратичной зависимостью. Последнее слагаемое в правой части (4) соответствует оттоку (или притоку) атомов водорода от поверхности за счет диффузии в объеме мембраны. Начальные и граничные условия согласованы в смысле (5). Математическое обоснование модели диффузии с динамическими граничными условиями вида (3), (4) дано в [3].

Для второго слоя ($x \in [\ell, \ell + \ell_*]$, $p_*(t) \approx 0$) выписываются аналогичные соотношения:

$$\begin{aligned} cc_t^*(t, x) &= D^*(T)c_{xx}^*(t, x), & c^*(0, x) &= \psi(x), \\ c^*(t, \ell + \ell_*) &= g^*(T)q_*(t), & g^*(T(0))q_*(0) &= \psi(\ell + \ell_*), \\ \frac{d}{dt}q_*(t) &= -b^*(T)q_*^2(t) - D^*(T)c_x^*(t, \ell + \ell_*). \end{aligned}$$

Условия сопряжения слоев:

$$Dc_x(t, \ell) = D^*c_x^*(t, \ell) = -I(t), \quad k_1c(t, \ell) - k_2c^*(t, \ell) = I(t).$$

Первое соотношение — отсутствие накопления водорода на стыке (непрерывность диффузионного потока), второе описывает разрыв концентрации из-за неоднородности материала. Характер зависимости коэффициентов от температуры предполагается аррениусовским:

$$D(T) = D_0 \exp(-E_d/[RT]), \quad b(T) = b_0 \exp(-E_b/[RT]), \dots$$

Численное моделирование подтверждает соответствие модели экспериментальным данным.

Варьируя в серии опытов давление \bar{p}_0 , температуру \bar{T} и измеряя плотность выходного десорбционного потока $J(t) = b^*(T(t))q_*^2(t)$, требуется определить параметры D , D^* , s , g , g^* , b , b^* , k_1 , k_2 . В работе предлагается алгоритм идентификации и приводятся результаты численных экспериментов.

Список литературы

- [1]. Взаимодействие водорода с металлами / Ред. А.П. Захаров. М.: Наука, 1987. С 177-201.
- [2]. Габис И.Е., Курдюмов А.А., Тихонов Н.А. // Вестник С. Петербургского ун-та. Серия 4. Вып.2. 1993. С.77-79.
- [3]. Заика Ю.В. // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. 1996. N12. С. 108-120.

E-mail: zaika@mainpgu.karelia.ru

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (СИМВОЛИКО-ГРУППОВОЙ ПОДХОД)

В.Ф.ЗАЙЦЕВ, Ю.В.МАЛЫШЕВ

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена
наб. реки Мойки 48, Санкт-Петербург, 191186, Россия
E-mail : valentin@p36.f289.n5030.z2.fidonet.org

Казанский технологический университет

Рассмотрим символические операторы D , $(D + \dot{u})^k = \sum_{m=0}^k C_k^m \overline{\dot{u}^m D^{k-m}}$, $(D + \dot{u}_1)(D + \dot{u}_2) \dots (D + \dot{u}_n) = \sum_{m=0}^n C_n^m \underbrace{\dot{u}_1 \dot{u}_2 \dots \dot{u}_k}_m D^{n-m}$, где $\dot{u}_i(t) \in C(G)$, $D = \frac{d}{dt} = (\cdot)$, C_k^m – биномиальные коэффициенты,

$$\overline{\dot{u}^m D^{k-m}} = \frac{1}{C_k^m} \left(\dot{u}^m D^{k-m} + \dot{u}^{m-1} D \dot{u} D^{k-m} + \dots + D^{k-m} \dot{u}^m \right),$$

$$\underbrace{\dot{u}_1 \dot{u}_2 \dots \dot{u}_k}_m D^{n-m} = \frac{1}{C_n^m} \left(\underbrace{\dot{u}_1 \dot{u}_2 \dots \dot{u}_k}_m D^{n-m} + \dots + D^{n-m} \underbrace{\dot{u}_1 \dot{u}_2 \dots \dot{u}_k}_m \right); \quad i, j, k = \overline{1, n}.$$

Пусть линейное дифференциальное уравнение

$$L_n(D)y \equiv \sum_{m=0}^n a_m(t) D^{n-m} y = f(t), \quad (1)$$

$a_i(t), f(t) \in C(G)$, допускает факторизацию

$$L_n(D)y \equiv (D + \dot{u}_1) \dots (D + \dot{u}_n)y = f(t) \quad (2)$$

(среди \dot{u}_i могут быть и равные). Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Уравнение (2) интегрируется в квадратурах, и общее решение имеет вид

$$y = e^{-u_n} \int e^{u_n - u_{n-1}} \left[\dots \left(\int e^{u_1} f dt_1 + C_1 \right) \dots \right] dt + C_n e^{-u_n}.$$

Если в уравнении (2) \dot{u}_i – произвольные функции, то теорема 1 позволяет выделить класс уравнений, интегрируемый в квадратурах, например,

$$\begin{aligned} (D + \dot{u})^2 y = f &\Rightarrow \ddot{y} + 2\dot{u}\dot{y} + (\dot{u}^2 + \ddot{u})y = f, \\ (D + \dot{u})(D + \dot{v})y = f &\Rightarrow \ddot{y} + (\dot{u} + \dot{v})\dot{y} + (\dot{u}\dot{v} + \ddot{v})y = f. \end{aligned}$$

Теорема 2. Если $f(t) \in C(G)$, то нулевая начальная задача Коши $L_n(D)y = f$, $t \in G$, $D^k y|_{t=s} = 0$, $k = \overline{0, n-1}$ имеет на G единственное решение

$$y = y^*(t) = \int_0^t F(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

где

$$F(t - \tau) = \int_{\tau}^t d\tau_{n-1} \int_{\tau_{n-1}}^t \dots d\tau_2 \int_{\tau_2}^t e^{u_n(t) - u_n(\tau_{n-1})} e^{u_{n-1}(\tau_{n-1}) - u_{n-1}(\tau_{n-2})} \dots e^{u_1(\tau_1) - u_1(\tau)} d\tau_1$$

— функция Коши.

Теорема 3. Функция Коши совпадает с базисным решением φ_{n-1} , т.е. $\forall t$
 $F(t) = \varphi_{n-1}(t)$.

Теорема 4. Пусть $f \in C(G)$. Тогда при любых $s \in R$ и $\xi \in R$ начальная задача Коши $L_n(D)y = f$, $t \in G$, $D^k y|_{t=s} = \xi_k$, $k = \overline{0, n-1}$ однозначно разрешима на G :

$$y = y(t) = \sum_k \xi_k \varphi_k(t-s) + \int_s^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

где φ_k — нормированный в нуле базис соответствующего однородного уравнения $L_n(D)y = 0$.

Факторизация (2) имеет очевидную теоретико-групповую трактовку. Легко можно доказать, что в этом случае уравнение (1) допускает точечный оператор

$$X_1 = e^{-u_n(t)} \partial_y. \quad (3)$$

Понижение порядка с помощью этого оператора приводит снова к линейному уравнению, которое может быть записано в виде

$$(D + v_1) \dots (D + v_{n-1})y = g(t)$$

и допускает оператор $X_2 = e^{-v_{n-1}(t)} \partial_y$, и так далее.

Заметим, что представление уравнения (1) в факторизованном виде (2) в ряде случаев удобнее и нагляднее, чем теоретико-групповое описание с помощью допускаемой n -мерной алгебры Ли L_n , не говоря уже о замечательно простом и универсальном представлении общего интеграла и решения задачи Коши.

Вместе с тем очевидно, что оператор (3) является локальным (в данном случае — точечным) аналогом экспоненциального нелокального оператора, ответственного за факторизацию нелинейных уравнений, при помощи которого исходное уравнение приводится к системе специального вида, в которой одно или несколько составляющих ее уравнений могут решаться независимо от остальных. Так как поиск допускаемых уравнением нелокальных операторов представляет собой весьма трудоемкую (и не всегда алгоритмически разрешимую) задачу, построение символического аналога нелокальных операторов могло бы существенно повысить эффективность симметричных методов исследования нелинейных дифференциальных уравнений.

ОБРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ В ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Зайцев В.Ф.¹, Ноздрунов Н.В.², Флегонтов А.В.³

¹Российский государственный педагогический университет им.А.И.Герцена

²Орловский государственный педагогический университет

³Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

E-mail: afleg@mail.iias.spb.su

Разрабатываемая расширенная версия текстово-графической математической ИС «Дифференциальные уравнения» [1,2] предназначена в первую очередь для конечного пользователя-математика, использующего современные средства связи Internet. Имеющаяся для этих целей компьютерная технология пока далека от совершенства при обработке, поиске, пересылке математических выражений и порождает ряд проблем, о которых пойдет речь ниже.

Известно, что, в настоящее время, не существует эффективного пути для изображения стандартного математического выражения в WWW (на Web страницах). Принятый WWW консорциумом W3C и развиваемый стандарт HTML-языка гипертекстовой разметки документа не обеспечивает необходимого пути для выражения математической нотации. Стандартная математическая нотация - это язык науки, который используется не только учеными, но и миллионами педагогов, студентов, инженеров и бизнесменов во всем мире. Однако развитие поддержки для представления и редактирования математической нотации в Web дальше уровня математики средней американской школы не идет.

Принято два простых решения для представления математической нотации в Web:

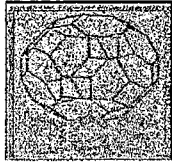
1. Представление с HTML ограничениями (построчная *ascii* кодировка);
2. Представление математического выражения как *gif* изображение (*gif*-образ с обязательным *alt*-признаком *ascii*).

Ascii кодировка математической нотации возможна как в одну строчку, так и в несколько линий (см. примеры в таблице). Она позволяет также вводить, хоть и на примитивном уровне, графическое изображение математического объекта. Наличие *alt*-признака позволяет некоторым пользователям рассматривать вашу информационную страницу без изображений (образов).

Однако, *gif* изображение уравнений далеко от идеального и имеет несколько недостатков:

- изображения *gif* будут напечатаны как *bitmaps*, показывая не больше деталей, чем появляется на экране, хотя *browsers* печатают нормальный текст в полном разрешении принтера, как и текстовые редакторы;

- шрифты, используемые в *gif* уравнении установлены при автозагрузке, в то время как размер шрифта текста документа управляется *browser* пользователя;
- загрузка страницы, содержащей несколько *gif* уравнений относительно медленная, потому что *gif* изображения не эффективного формата хранения для уравнений и загрузка каждого требует отдельной транзакции с Web сервером;
- невозможно делать поиск по текстовым характеристикам или фразам в уравнении, так как нет никакого текста в изображении *gif*;
- невозможно передать уравнение на другое программное обеспечение для математической обработки, поскольку математическая структура не сохранена.

Метод	Пример
<p><u>Представление с HTML ограничениями:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • в одну строчку • в несколько линий 	$y' = f(y/x)$ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$
<p><u>Представление как gif-образы:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • реальное представление после редактора Equation в Word или после dvi-вьюера TeX редактора; • уравнение как <i>gif</i> изображение без специального масштабирования; • <i>ascii</i> представление <i>alt</i>-признака математического выражения с возможным доступом к <i>gif</i> изображению; • <i>gif</i>-образ математического объекта (структура дискретной группы). 	$y'' = \pm \frac{40}{81} y' y^{-3} \mp \frac{5}{6} y^{-7/2} (y')^3$ $g(x)y'_x = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $y''_x = Ax^ny^m(y'_x)^l$ </div> 

Для конвертирования математических выражений в *gif* или *dvi* изображения (с учетом графических возможностей редактора TeX) принято четыре стратегии:

- а) MS Word → Equation → Clipboard → Gif,

либо MS Word → Equation → Clipboard → Paste (в граф. Программе) → Gif

при этом, автоматически можно выбрать прозрачный фон для уравнения;

b) MS Word → Equation → RTF → RTF to HTML,

однако RTF-формат не всегда удобочитаем;

c) TeXtoGif - конвертор для коротких математических выражений, когда каждое уравнение друг за другом переводится в Gif-формат (что является очень утомительной процедурой);

d) LaTeX2HTML - конвертор для полных LaTeX-документов (однако, он автоматически незагружен на любом ПК).

Новым стратегическим решением проблемы конвертации является на сегодняшний день использование HTML-препроцессора. Такое форматирование эффективно расширяет HTML-синтаксис на единственный новый тег `<eq> ... </eq>`, например в виде

```
\documentstyle[12pt]{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\begin{displaymath}
<center> <eq>
y''=\frac{4}{9} \Bigl( \Bigl(\frac{3}{4}y' \Bigl)^2-1 \Bigl)^{-1}
</eq> </center><p>
\end{displaymath}
\end{document}
```

Анализ развития поддержки математики в HTML показывает, что будущие улучшения связаны с внедрением MathType 4.0, где планируется ввести базисный язык представления математической нотации MathML, основанный на расширенном языке маркировок XML. А также, с улучшением возможностей HTML 4.0 (по сравнению с предыдущей версией и с возможностями специальных редакторов типа WebEdit Pro 2.0, HotDog 3.0.21, HoTMetaL Pro 4.0) по форматированию, встроенности конверторов и вьюеров, наличию дополнительных java-applet'ов. Перспективно и введение механизма авто-стиля CSS (Cascading Style Sheets), связывающего шрифт, размер и определенную информацию с тегами автора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 97-07-90088

Литература

1. Flegontov A.V. Information system "Differential equations"// Tools for Mathematical Modelling. Mathtools'97. Abstracts. St.- Peterburg, GTU, 1997, p.24.
2. Nozdrunov N.V., Flegontov A.V. Use of Internet-technologies for mathematical help-search systems// Tools for Mathematical Modelling. Mathtools'97. Abstracts. St.- Peterburg, GTU, 1997, p.49.

Зарубин А.Н.

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
СМЕШАННОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Орел, Орловский государственный университет

Уравнение

$$L(u) \equiv u_{xx}(x, y) + \operatorname{sign} y u_{yy}(x, y) - u(x - \tau, y) = 0, \quad 0 < \tau \equiv \operatorname{const}, \quad (1)$$

рассматривается в области $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1^+ \cup \mathcal{D}_2^- \cup I$, где $\mathcal{D}_1^+ = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ и $\mathcal{D}_2^- = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathcal{D}_{2k}$ — эллиптическая и гиперболическая части \mathcal{D} , причем $\mathcal{D}_{2k} = \mathcal{D}'_{2k} \cup \mathcal{D}''_{2k}$, а

$$\mathcal{D}'_{2k} = \left\{ (x, y) : k\tau - y < x < x_0 + k\tau + y, -\frac{x_0}{2} < y < 0 \right\},$$

$$\mathcal{D}''_{2k} = \left\{ (x, y) : x_0 + k\tau - y < x < (k+1)\tau + y, -\frac{\tau - x_0}{2} < y < 0 \right\}$$

и $0 < x_0 \equiv \operatorname{const} < \tau$, $I = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, y = 0\}$.

Пусть $\mathcal{D}_1^+ = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathcal{D}_{1k}$, где $\mathcal{D}_{1k} = \{(x, y) : k\tau \leq x \leq (k+1)\tau, y > 0\}$.

Задача. Найти решение $u(x, y) \in C(\overline{\mathcal{D}}) \cap C^2(\mathcal{D})$ уравнения (1), исчезающее на бесконечности, производные которого $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ могут иметь в точках $(k\tau, 0)$, $(x_0 + k\tau, 0)$ особенность порядка меньше единицы, удовлетворяющее условиям

$$u(x, y) = f_i(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\mathcal{D}}_{i(-1)} \quad (i = 1, 2);$$

$$u(x, x - x_0 - k\tau) = \psi_{1k}(x), \quad \frac{2k\tau + x_0}{2} \leq x \leq x_0 + k\tau;$$

$$u(x, x_0 + k\tau - x) = \psi_{2k}(x), \quad x_0 + k\tau \leq x \leq \frac{x_0 + (2k+1)\tau}{2},$$

где $f_i(x, y)$, $\psi_{jk}(x)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции, причем $\psi_{1k}(x_0 + k\tau) = \psi_{2k}(x_0 + k\tau)$; $f_1(x, +\infty) = 0$ и $f_1(x, 0) = f_2(x, 0)$ при $x \in [-\tau, 0]$.

С помощью интегралов энергии при $\tau \leq \sqrt{2}$ доказана теорема единственности решения.

Метод интегральных уравнений сводит вопрос существования решения задачи к счетной совокупности сингулярных интегральных уравнений.

Зарубин Е.А.

**О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ
НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ**
Орел, Орловский государственный университет

Уравнение

$$Au(x, y) = u(x - \tau, y), \quad (1)$$

$A = \partial^{2+H(y)} / \partial x^{2+H(y)} - \partial^{1+H(-y)} / \partial y^{1+H(-y)}$, $0 < \tau \equiv \text{const}$, $H(\xi)$ – функция Хевисайда, рассматривается в смешанной области $D = D_1 \cup D_2 \cup J$, где $D_1 = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}$ и $D_2 = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D_{2k}$ – параболическая и гиперболическая части D , причем $D_{2k} = \{(x, y) : k\tau - y < x < (k+1)\tau + y, -\tau/2 < y < 0\}$, а $J = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, y = 0\}$.

Пусть $D_1 = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D_{1k}$, где $D_{1k} = \{(x, y) : k\tau \leq x \leq (k+1)\tau, 0 < y < +\infty\}$.

Задача В. Найти функцию $u(x, y)$, которая обладает следующими свойствами:

- 1) $u(x, y)$ – регулярное решение уравнения (1) в D при $y \neq 0$;
- 2) $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^3(D)$, $u_x(x, y) \in C(\bar{D}_1)$, $u_x(x, y), u_y(x, y) \in C(D)$;
- 3) $u(x, y)$ удовлетворяет начальным

$$u(x, y) = f_1(x, y), \quad u_x(x, y) = f_2(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}_{1(-1)};$$

$$u(x, y) = f_3(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}_{2(-1)}$$

и граничным условиям

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, \quad 0 \leq y < +\infty;$$

$$u(x, y)|_{y=-x+k\tau} = \psi_k(x), \quad k\tau \leq x \leq (2k+1)\tau/2,$$

где $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$, $\psi_k(x)$ – заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, причем должны выполняться условия согласования

$$f_1(0, 0) = f_3(0, 0) = \psi_0(0), \quad f_2(0, 0) = \psi'_0(0)$$

и условия сопряжения

$$u(x, -0) = u(x, +0) = \omega(x), \quad x \in \bar{J};$$

$$u_y(x, -0) = u_y(x, +0) = \nu(x), \quad x \in J, \quad x \neq k\tau.$$

Теорема. Однородная задача **B** ($f_1 = f_2 = \varphi = \psi = 0$) имеет тривиальное решение $u(x, y) \equiv 0$ в области \bar{D} .

Для доказательства теоремы единственности применен метод *abc*. При этом положительная определенность получаемого интеграла по области D_1 зависит от однородности решения интегро-дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\omega'''(x) - \omega'(x) + \sum_{m=1}^k \gamma_m \int_0^{x-m\tau} (x - m\tau - \eta)^{2(m-1)} \omega(\eta) d\eta - \omega(x - \tau) = 0,$$

$k\tau \leq x \leq (k+1)\tau$, $\gamma_m = (m! \Gamma(m) 2^{2m-1})^{-1}$, если

$$\omega(x) = 0, \quad -\tau \leq x \leq 0$$

и

$$\omega(k\tau) = \omega'(0) = \omega(+\infty) = 0.$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНОЙ СИММЕТРИЕЙ ВО ВНЕШНЕМ
ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОЛЕ

г. Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет

В работах [1,2] для конечномерных нелинейных динамических систем с дискретной (точечной или пространственной) симметрией было введено фундаментальное понятие *буша* нормальных мод. Каждый буш включает все моды, которые появляются при возбуждении одной ("корневой") моды за счет произвольных нелинейных взаимодействий между частицами исследуемой системы. Существование буша мод как единого физического объекта связано с наличием вполне определенных симметричных правил отбора для передачи возбуждения между нормальными модами, соответствующими различным неприводимым представлениям группы симметрии системы в её состоянии равновесия. В частном случае полиномиальных динамических систем в вышеупомянутых работах, исходя из симметричных соображений, были введены "классы универсальности", в каждый из которых попадают все буши, динамика которых описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений, отличающихся лишь числовыми значениями входящих в них произвольных параметров.

Одним из самых распространенных в природе двумерных классов универсальности является класс В4 [2], частным случаем которого является известная модель Хенона-Хейли. С помощью основанной на теореме Пуанкаре-Дюлака процедуры нормализации систем дифференциальных уравнений в работах [3,4] для динамических систем этого класса было построено приближенное аналитическое решение в случае рациональной несоизмеримости затравочных частот соответствующих нормальных мод. Для решения ряда физических задач особый интерес представляет исследование нелинейных колебаний, соответствующих бушам В4, при наложении на исходную систему периодического электрического поля. В связи с этим в настоящей работе анализируется следующая система двух неавтономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_1^2 x &= (Nx^2 + Ky^2) + (Ax^3 + Bxy^2) + E_1 \cos(\omega_3 t + \delta) \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y &= (2Kxy) + (Cy^3 + Byx^2) + E_2 \cos(\omega_3 t + \delta)\end{aligned}\quad (1)$$

Вводя дополнительную переменную, можно перейти от уравнений (1) к полиномиальной системе трех автономных уравнений второго порядка и привести её к одной из возможных нормальных форм. Для

автоматизация требуемых для этого весьма громоздких вычислений нами была использована система аналитических вычислений MAPLE (шаблонная программа может быть использована для формализации любых полиномиальных систем дифференциальных уравнений в канонической форме). В предположении о рациональной несонизмеримости частот ω_1 и ω_2 нормализация Пуанкаре-Дюлака с отсечением членов высших порядков приводит к расщеплению системы на независимые уравнения и построению приближенного аналитического решения. Последнее представляет собой сумму некоторого числа тригонометрических функций, амплитуды и фазы которых сложным образом зависят от параметров исходной задачи (при этом происходит перенормировка "загравочных" частот $(\omega_1, \omega_2) \rightarrow (\Omega_1, \Omega_2)$).

В докладе представлены результаты вычислений с точностью до членов третьего порядка (включительно) по переменным x, y и амплитуде B внешнего периодического поля. Из этого решения видно, что подключение поля с частотой ω_3 (см. уравнения (1)) приводит к следующим изменениям в спектре Фурье буна В4 без поля, найденного в работах [3,4]. Несколько низкочастотных линий последнего смещаются на величину порядка $O(E^2)$ и появляется ряд новых линий, среди которых особый интерес представляют "нормальные" и "аномальные" дублеты. Амплитуды стоксовых и антистоксовых линий этих дублетов различны, но однозначно связаны друг с другом. Серии нормальных дублетов появляются около всех линий "голого" буна В4, а в центрах серий аномальных дублетов линии этого буна без поля отсутствуют. Амплитуды всех линий нормальных и аномальных дублетов вида $k\Omega_1 \pm m\Omega_2 \pm n\omega_3$ имеют порядок $O(\rho_1^l \rho_2^m E^m)$, где ρ_1 и ρ_2 — произвольные амплитудные постоянные, соответствующие двум независимым гармоническим режимам с частотами Ω_1 и Ω_2 , которые получаются в результате нормализации системы (1). Нами проанализирована зависимость амплитуд всех линий спектра от параметров исходной задачи и различные резонансные соотношения между загравочными частотами ω_1 и ω_2 . В докладе также обсуждаются возможные применения полученного аналитического решения для анализа конкретных физических задач.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В.П. Сахненко, Г.М. Чечин, Доклады Академии Наук, 1993, **330**, 308-310. [2] В.П. Сахненко, Г.М. Чечин, Доклады Академии Наук, 1994, **338**, 42-45. [3] Белая Т.М., Волощановский С.А., Зехцер М.Ю., Кукин А.В., Малыгчев Г.А., Чечин Г.М., Ягубянд В.Г. *Кусты взаимодействующих мод для систем с кристаллографической точечной симметрией. Часть 2. Нормальные формы гамильтонианов*. ДВН ВИНТИ 3467-В95, 1995. [4] М.Ю. Зехцер, Г.М. Чечин, *Анализ нелинейных колебаний типа В4 в конечных полиномиальных гамильтоновых системах с дискретной симметрией*. Труды международной конференции: Алгебраические и аналитические методы в теории дифференциальных уравнений. — ОГУ, Орёл, 1996, 72-76

СПЕКТРАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

НИИ ЭФА, Санкт-Петербург, Россия

Рассматривается система $\dot{x} = G(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ и ее матричное описание

$$\dot{x} = A(x)x, \quad (1)$$

где $A(x)$ определена однозначно через матрицу Якоби исходной системы. Достаточные условия экспоненциальной устойчивости системы формулируются следующим образом.

Теорема. Пусть $A(x)$ непрерывно дифференцируема и равномерно ограничена для $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть собственные значения $A(x)$, $\lambda_i(x)$, удовлетворяют условиям

$$1) \operatorname{Re} \lambda_i(x) \leq -\beta < 0; \quad 2) |\lambda_i(x) - \lambda_j(x)| > \delta, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда система (1) экспоненциально устойчива в целом.

Сформулированные условия не являются необходимыми, однако их нарушение обусловило многие контрпримеры к гипотезе Айзермана. Неоднозначность задания $A(x)$, т.е. задание матрицы системы в виде $A(x) + \Delta(x)$, $\Delta(x)x = 0$, не изменяет правой части системы (1), но изменяет спектр матрицы $A(x)$. Отделимость от мнимой оси $\lambda_i(x)$ отсутствует в примере Плисса. Замена матрицы $A(x)$, рассматриваемой в этом примере, на матрицу $A(x) - \alpha I$, где $\alpha > 0$ произвольное число, обеспечивает устойчивость в целом положения равновесия. Нарушение условия 2), т.е. кратность собственных значений для некоторых x , имеет место в контрпримере Н.Е. Барабанова к гипотезе Калмана.

Для доказательства теоремы вводится в рассмотрение функция $V(x, t) = [\exp F(x, t)]W(x)$, $W(x) = x^T P(x)x$, $P(x) = \sum h_i(x)h_i^T(x)$, $h_i(x)$ — собственные векторы $A^T(x)$,

$$F(x, t) = -\frac{f^2(t)(1 + x^T x)}{1 + f^2(t)x^T x},$$

где $f^2(t)$ определена из условия отрицательной определенности $dV(x, t)/dt$ на $x(t, x_0)$.

Получено в явном виде решение задачи стабилизации системы

$$\dot{x} = A(x)x + b(x)u, \quad u = s^T(x)x$$

с равномерно ограниченными и непрерывно дифференцируемыми $A(x)$, $b(x)$.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ И ГЛАДКОСТИ
ПО ПАРАМЕТРАМ РЕШЕНИЙ ОДНОГО
КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Б.Ф.Иванов

Санкт-Петербург . Государственный Технологический
Университет Растительных полимеров

Рассматривается линейная неоднородная система дифференциальных уравнений n - го порядка

$$\dot{x}(t) = [P + D(t)]x(t) + f(t) \quad / 1 /$$

где $x(t), f(t) \in R^n$; P - постоянная вещественная матрица, характеристические числа которой w_1, w_2, \dots, w_n чисто мнимые, а элементарные делители простые; вещественная матрица

$$D(t) = \|d_{ms}(t)\|_1^n \in L^p(R^1), \quad p \in (2, 3];$$

для каждой из функций

$$d_{ms}(t) \exp(-w_{r_2}t + w_{r_2}t), \quad 1 \leq m, s, r_2, l \leq n \quad / 2 /$$

можно указать такую окрестность нуля, в которой преобразование Фурье этой функции совпадает с преобразованием Фурье какой-либо функции из $L^1(R^1)$; $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$

$$\| \int_0^t \exp(-w_{r_2}\tau) f_j(\tau) d\tau \|_{L^\infty(R^1)} < +\infty, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

В терминах одного обобщения классической теории резонанса предложенного автором в [1] установлено, что при невыполнении условия резонанса каждое решение системы / 1 / ограничено и дифференцируемо в смысле Фреше по $D(t)$ и $f(t)$, когда последние изменяются в некоторых построенных в работе автора нормированных пространствах. [2]

Если $n = 2$, то условие на преобразования Фурье функций / 2 / и нерезонансные условия являются также и необходимыми для дифференцируемости по $D(t)$ и $f(t)$.

Литература.

1.Иванов Б.Ф.// Дифференц уравнения 1997.т.33,№5,с.704-706.

2.Иванов Б.Ф.// Дифференц уравнения 1997.т.33,№ 7с.1001

**МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ В
КВАДРАТУРАХ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

В.К. Иванов

Санкт-Петербург

Балтийский государственных технических университет

Дается метод получения, на определенных интервалах изменения независимой переменной, приближенного решения в квадратурах некоторых типов линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$py'' + gy' + hy = 0, \quad (1)$$

где $y(x)$ – искомая функция; x – независимая переменная; p, g, h – произвольные известные функции от x ; штрихи над функциями обозначают соответствующие производные по координате x .

Суть предлагаемого метода заключается в построении таких дифференциальных уравнений второго порядка, которые имеют решения в квадратурах и на определенных интервалах изменения x стремятся к рассматриваемым уравнениям.

Построены следующие уравнения, имеющие решения в квадратурах

$$py'' + gy' + hh_1y = 0, \quad (2)$$

$$py'' + gg_1y' + hy = 0, \quad (3)$$

$$pp_1y'' + gy' + hy = 0, \quad (4)$$

где h_1, g_1, p_1 – известные функции, полученные в процессе построения уравнений (2), (3), (4). Эти функции зависят от коэффициентов p, g, h и их производных и на определенном интервале изменения x стремятся к единице, если коэффициенты p, g, h и их производные на этом интервале подчиняются определенным условиям.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ, СВЯЗАННЫХ С ПЕРЕСТРОЙКОЙ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В. Д. Иртегов

Россия, Иркутск, Институт Динамики Систем и Теории Управления СО РАН

e-mail : irteg@icc.ru

При качественном исследовании фазового пространства систем с первыми интегралами (в том числе вполне интегрируемых по Лиувиллю систем) естественно возникает необходимость анализа особенностей, связанных с изменением структуры или числа первых интегралов при некоторых значениях параметров исходных дифференциальных уравнений или семейств инвариантных многообразий.

Подобные особенности могут встречаться при анализе границ достаточных условий устойчивости (как условий знакоопределенности некоторого первого интеграла) инвариантных многообразий механических систем.

Так при попытке исследования границы устойчивости ($A > C$, где A и C - моменты инерции тела относительно главных центральных осей) гиперболоидальной прецессии симметричного спутника на круговой орбите [1] приходится рассматривать переход осесимметричного тела в шар ($A = C$), что, как известно, связано с перестройкой первых интегралов задачи.

В обсуждаемую в докладе схему исследования особенностей укладываются также случаи, связанные с изменением первого интеграла, достигающего стационарного значения на элементах некоторого семейства инвариантных многообразий (решений) дифференциальных уравнений при некоторых значениях параметра семейства.

Указанный тип изменения первого интеграла происходит, например, на семействе перманентных вращений твердого тела с неподвижной точкой в случае С.В.Ковалевской, когда угловая скорость (параметр семейства) обращается в нуль.

Для таких особенностей поставлен ряд задач. В частности рассмотрены вопросы перестройки ветвления инвариантных многообразий системы вдоль выбранного семейства решений, получения достаточных условий устойчивости на основе второго метода Ляпунова, когда в качестве функций Ляпунова используются первые интегралы, распределения устойчивости между ответвляющимися инвариантными многообразиями. Обращено внимание на роль алгебраических соотношений, возникающих между первыми интегралами задачи на некоторых подмножествах фазового пространства системы, при вделении стационарных множеств и исследовании их окрестности.

Наиболее просто большинство из указанных выше задач выглядит для систем дифференциальных уравнений с квадратичными первыми интегралами.

Для случая полиномиальных не квадратичных первых интегралов рассмотрены примеры исследования конкретных задач в динамике твердого тела в различных силовых полях.

[1] Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. Изд. МГУ, М., 1975 г., 308 с.

Новые методы численного интегрирования уравнений связанной задачи термоупругости

Исполов Ю. Г., Постоялкина Е. А., Шабров Н. Н.

Санкт - Петербургский Государственный Технический Университет

E-mail address: shabrov@iris2.stu.neva.ru

Рассматриваются новые подходы к численному интегрированию уравнений связанной задачи термоупругости. При построении численных методов учитываются внутренние свойства механической системы.

Конечноэлементная модель связанной задачи термоупругости описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{u} + K_1 u - C \theta &= F(t), \\ C^T \dot{u} + M_2 \dot{\theta} + K_2 \theta &= Q(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(t)$ и $\theta(t)$ — векторы перемещений и температуры,

M_1 — матрица масс,

K_1 — матрица жесткости,

M_2 — матрица теплоемкости,

K_2 — матрица теплопроводности,

C — матрица термоупругости,

$F(t)$ и $Q(t)$ — векторы сил и тепловых нагрузок;

точкой обозначена производная по времени.

Начальные условия в этой формулировке задачи определяются равенствами

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (2)$$

а граничные условия учтены при выводе соотношений (1).

Первое уравнение системы (1) представляет собой уравнение колебаний консервативной системы с дополнительным слагаемым, зависящим от температуры. Второе уравнение

в (1) — это уравнение теплопроводности с дополнительным слагаемым, зависящим от скорости движения. Перекрестные слагаемые малы, так что при дальнейшем анализе можно ввести малый параметр — параметр связанности.

Проведенный анализ показал, что корни характеристического уравнения задачи (1) имеют отрицательную вещественную часть, что свидетельствует об устойчивости решения системы. Получено асимптотическое разложение корней характеристического уравнения по степеням малого параметра. Показано, что собственные числа задачи разделяются на две группы: первая группа представляет собой пары комплексно - сопряженных чисел с малыми отрицательными вещественными частями, характерными для

колебательной системы с малой диссипацией энергии, вторая группа — это отрицательные вещественные числа, характерные для систем с большой диссипацией энергии.

Для численного интегрирования системы (1) построены методы, учитывающие внутренние свойства системы. В основном алгоритме к первому уравнению системы применяется метод, ориентированный на интегрирование систем с малой диссипацией энергии (метод трапеций), а ко второму — метод, адекватно описывающий поглощение энергии в системе (A- и L-устойчивый метод семейства Рунге - Кутты второго порядка точности). В построенном алгоритме предусмотрено согласование этих двух методов.

Анализ качества работы алгоритма проводился на примере задачи о нагреве границы полупространства. Сравнение точного и численного решений показало, что предлагаемый метод численного интегрирования позволяет получить высокую точность в задачах о тепловом ударе с конечной скоростью изменения температуры границы. В задаче о распространении плоской термоупругой волны, возникающей в полупространстве благодаря мгновенному нагреву его границы общий характер распределения напряжения отражается достаточно хорошо, но вблизи границы полупространства вместо плавного возрастания напряжения наблюдаются неоправданные осцилляции, а скачок напряжения размыт. Использование для интегрирования первого уравнения (1) метода четвертого порядка точности вместо метода трапеций не приводит к существенному повышению точности.

Для того, чтобы учесть специфику задачи о мгновенном нагреве границы полупространства — резкое изменение температурного поля и поля перемещений был построен алгоритм, в котором величины, характеризующие напряженно - деформируемое состояние определяются соотношениями метода прямого математического моделирования, предложенного П. Ф. Шорром и ориентированного на решение одномерных задач. А для решения уравнения теплопроводности используется тот же метод (A- и L-устойчивый метод семейства Рунге - Кутты второго порядка точности).

Применение построенного таким образом алгоритма к задаче о мгновенном нагреве границы полупространства подтверждает, что использование соотношений метода прямого математического моделирования позволило значительно улучшить качество воспроизводимых результатов: устранить неоправданные осцилляции вблизи границы полупространства, получить четкий скачок напряжения.

Заключение. Анализ полученных результатов показывает, что предлагаемые нами методы численного интегрирования конечноэлементных уравнений связанной задачи термоупругости, учитывающие внутренние свойства задачи, являются достаточно эффективными, по крайней мере в тех случаях, когда изменения полей напряжений и температур не являются слишком быстрыми. В одномерных задачах в случае резкого изменения полей напряжений и температур более высокую точность численного решения дает предлагаемый метод, использующий для решения задачи динамики идеи метода прямого математического моделирования.

**ПОСТРОЕНИЕ , РЕШЕНИЕ И АНАЛИЗ СВОЙСТВ
СИСТЕМ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ПАКЕТЕ MODEL VISION 3.0**

Колесов Ю.Б., Парийская Е.Ю.,
Сениченков Ю.Б

Санкт-Петербургский государственный технический университет

sen@dcn.nord.nw.ru
http:\\ sen@dcn.nord.nw.ru\MV

Версия пакета MODEL VISION 3.0 реализует новые подходы к проектированию комплексов для проведения вычислительного эксперимента, базирующиеся на принципах Объектно-Ориентированного Моделирования.

По сравнению с предыдущей версией подверглись существенным изменениям блоки: “Язык описания локальных поведений”, “Анализ Карт Поведения”, “Решение алгебро-дифференциальных уравнений”, “Визуализация поведений”.

1. “Язык описания локальных поведений”. В новой версии пакета предусматривается возможность записывать системы алгебро-дифференциальных уравнений на языке, близком по форме к языку пакета MATHCAD, тем самым отпадает необходимость в сложной символике языка, базирующегося на схемах в переменных состояния.
2. “Анализ Карт Поведения”. Для описания глобального поведения используются так называемые карты поведения (B-chart), являющиеся обобщением карт состояния Харелла (Harel, State-Chart formalizm). Карты поведения позволяют естественным образом описывать смену поведений динамических систем в зависимости от происходящих событий. Графическая форма языка, базирующаяся на картах поведения более выразительна, чем соответствующая форма языка пакета SIMULINK.

Математическая модель сложных динамических систем пакета MVW эквивалентна по выразительной мощности модели гибридного автомата, предложенной для анализа дискретных систем, в которых требуется учитывать длительности процессов.

Модель гибридного автомата описывает динамические системы, в которых возможны периодические движения, допускаются разрывы в траекториях поведения. Такие системы в частности могут быть описаны конечным набором систем дифференциальных уравнений, каждая из которых определяет поведение динамической системы в некоторой области фазового пространства. Хотя говорить о полной эквивалентности нелинейных колебательных систем и систем, описываемых моделью гибридного автомата, очевидно не следует, многие типы релаксационных и кусочно-линейных систем могут быть представлены этой моделью.

Вполне естественно возникает вопрос о возможности применения методов качественной теории ОДУ и теории колебаний для систем, представленных с помощью модели гибридного автомата.

Методы верификации гибридных систем дают возможность отвечать на вопросы качественного поведения динамической системы: в терминах достижимости (единократной или многократной) отдельных состояний (вершин) конечного графа поведения системы, что соответствует вопросу о достижимости конкретной точки или области фазового пространства динамической системы.

Для доказательства соответствия между вопросами достижимости в теории гибридных систем и вопросами построения качественных фазовых портретов в классической теории ОДУ необходимо и достаточно: доказать возможность использования в методах верификации модели "абстрактного" гибридного автомата (множество начальных состояний которого есть True) и найти выразительные средства описания вопросов определения неподвижных точек и периодических движений и их устойчивости на языке той темпоральной логики, которая используется в методах автоматической верификации гибридных систем. Оба эти условия, как нам кажется, являются практически выполнимыми, поэтому использование методов верификации гибридных систем в системе MVW позволит решать вопросы качественного анализа при моделировании сложных динамических систем.

3. "Решение алгебро-дифференциальных уравнений". На основании изучения существующих специализированных коллекций и численных библиотек для пакета отбираются и тестируются современные методы решения алгебро-дифференциальных уравнений и формируются соответствующие DLL (используется MS FORTRAN 4.0). Появившаяся возможность строить 32-разрядные DLL из фортрановских библиотек позволит сформировать и постоянно поддерживать на современном уровне блок решения дифференциальных уравнений. В частности при подготовке пакета было проведено сравнительное изучение алгоритмов из книг Э. Хайера, С. Нерссета, Г. Ваннера "Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи" и Э. Хайера, Г. Ваннера "Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие задачи и алгебро-дифференциальные уравнения".
4. "Визуализация поведения". Разрабатывается новая форма визуализации поведения, названная технической анимацией.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ АСИНХРОННОЙ МАШИНЫ

Кондратьева Н.В., Леонов Г.А.,
Родюков Ф.Ф., Шепелявый А.И.

Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: ais@ais.usp.ru.ru

Рассматривается система

$$\begin{aligned}
 \left(L_s \frac{d}{dt} + R_s\right) i_\alpha^s + M \left(L_s \frac{d}{dt} + R_s\right) (i_\alpha^r \cos \gamma - i_\beta^r \sin \gamma) &= -u_m \sin \omega_s t, \\
 \left(L_s \frac{d}{dt} + R_s\right) i_\beta^s + M \left(L_s \frac{d}{dt} + R_s\right) (i_\alpha^r \sin \gamma + i_\beta^r \cos \gamma) &= u_m \cos \omega_s t, \\
 M \left(L_s \frac{d}{dt} + R_s\right) (i_\alpha^s \cos \gamma + i_\beta^s \sin \gamma) + \left(L_r \frac{d}{dt} + R_r\right) i_\alpha^r &= 0, \\
 M \left(L_s \frac{d}{dt} + R_s\right) (-i_\alpha^s \sin \gamma + i_\beta^s \cos \gamma) + \left(L_r \frac{d}{dt} + R_r\right) i_\beta^r &= 0, \\
 J \ddot{\gamma} = M[(i_\alpha^r i_\beta^s - i_\beta^r i_\alpha^s) \cos \gamma - (i_\alpha^r i_\alpha^s + i_\beta^r i_\beta^s) \sin \gamma] - M_H. &
 \end{aligned} \tag{1}$$

описывающая динамику асинхронного двигателя.

Здесь переменные $i_\alpha^s, i_\beta^s, i_\alpha^r, i_\beta^r$ — токи статорных и роторных обмоток. γ — угол поворота ротора; параметры R_s, L_s, R_r, L_r — сопротивления и индуктивности соответствующих обмоток, M — амплитудное значение взаимоиנדуктивности между ними, J — момент инерции ротора асинхронного двигателя; $\omega_s = 2\pi f$, f, u_m — частота и амплитуда подводимого к статорным обмоткам напряжения, M_H — момент нагрузки на валу асинхронного двигателя, t — текущее время.

Уравнения (1) с точностью до обозначений совпадают с уравнениями (8-1в), (8-1г) [1, с.360] и описывают динамику асинхронного двигателя в общепринятых идеализирующих представлениях, подробно изложенных, например, в [1, с.128-131; 2, с.142-156; 3, с.28-36].

В настоящем докладе проводится нелокальный анализ системы (1) в случаях постоянного и линейно зависящего от угловой скорости момента внешней нагрузки. С помощью качественных методов [4,5] и прямого метода Ляпунова получены условия дихотомичности и глобальной асимптотической устойчивости [6,7].

Будем говорить, что система (1) дихотомична, если любое ограниченное при $t > 0$ решение этой системы стремится к стационарному множеству.

Если любое решение системы (1) стремится при $t \rightarrow +\infty$ к некоторому состоянию равновесия, то будем говорить, что система (1) глобально асимптотически устойчива.

Теорема. 1) Пусть момент M_H постоянен. Тогда если

$$0 \leq M_H < \min \left\{ \frac{0.5\mu(1-\mu)L_s u_m^2}{\mu^2 \omega_s^2 L_s^2 + R_s^2}, \frac{2JR_r^2}{\mu^2 \omega_s^2 L_r^2} \right\},$$

то система (1) дихотомична;

2) Пусть $M_H = k\dot{\gamma}$. Тогда если

$$0 \leq k < \frac{2R_r}{\mu^2 \omega_s^3 L_r^2} \sqrt{(JR_r + k\mu\omega_s^2 L_r)(JR_r - 2k\mu\omega_s^2 L_r)},$$

то система (1) глобально асимптотически устойчива.

Здесь

$$\mu = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}$$

— коэффициент электромагнитного рассеяния в воздушном зазоре асинхронного двигателя.

Сформулированные результаты сравниваются с выводами, полученными с помощью традиционного инженерного подхода при анализе динамики асинхронного двигателя путем замораживания части переменных и использования для расчетов статической механической характеристики.

Литература

1. Уайт Д., Вудсон Г. Электромеханическое преобразование энергии. М., 1964.
2. Львович А.Ю., Родюков Ф.Ф. Уравнения электрических машин. СПб, Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1997.
3. Горев А.А. Переходные процессы синхронной машины. Л., Наука, 1985.
4. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л., 1947.
5. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
6. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М., 1972.
7. Леонов Г.А. О глобальной устойчивости системы Лоренца. ПММ, Т.47, вып.5, 1983.

**ОБ УСЛОВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
НЕАНАЛИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

С. Г. Крыжевич

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), \quad (1)$$

заданные в области $\Omega = \{(t, x) \in R \times R^n, t \geq t_0, \|x\| < \delta\}$ и имеющие нулевое решение, в окрестности которого правые части являются C^1 -гладкими по фазовым переменным; соответствующие матрицы Якоби равномерно по t удовлетворяют условию Гёльдера с некоторым положительным показателем α . Кроме того, предполагается: правильность линейного приближения

$$\dot{x} = A(t)x; \quad (2)$$

$$f(t, 0) = 0, \text{ а } \left. \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

Показывается, что при сделанных предположениях для систем (1) справедливо утверждение теоремы Ляпунова об условной устойчивости нулевого решения, а именно: если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — характеристические показатели системы (2) и для некоторого $k \geq n$ выполнено условие $\lambda_1, \dots, \lambda_k < 0$, то существует C^1 -гладкое и взаимно однозначное отображение g некоторой окрестности нуля из R^k в R^n , такое что:

1. $g(0) = 0$;
2. если $\Phi(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ — нормальная фундаментальная система решений (3), такая, что характеристические показатели $X_1(t), \dots, X_n(t)$ равны $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ соответственно, а $J(g)(0)$ — матрица Якоби отображения g в точке 0 , то $J(g)(0) = (X_1(t_0), \dots, X_k(t_0))$;
3. для любого $x_0 \in \Omega$, для которого существует $y_0 \in R^k$ такое, что $x_0 = g(y_0)$, решение системы (1) с начальными данными $x(t_0) = x_0$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

В предположении аналитичности правой части системы (1) по x данный результат был доказан Ляпуновым в его знаменитой диссертации [1].

Пусть $X_j(t) = \text{col}(x_{1j}(t), \dots, x_{nj}(t))$ при всех j от 1 до n . Обозначим через $\Delta(t)$ и $\Delta_{ij}(t)$ определитель матрицы $\Phi(t)$ и алгебраическое дополнение элемента $x_{ij}(t)$ соответственно, а через $\chi(\cdot)$ характеристический показатель. Ясно, что при любом $t \geq t_0$ $\Delta(t) \neq 0$, а в силу правильности системы (3) $\chi(1/\Delta(t)) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ и для элемента $\Delta_{ij}(t)/\Delta(t)$, стоящего в j -той строке и i -том столбце матрицы $\Phi^{-1}(t)$, верно: $\chi(\Delta_{ij}/\Delta(t)) \leq -\lambda_j$ для любых i и j от 1 до n .

Построим приближенные решения системы (1) по следующему алгоритму.

Возьмем некоторые достаточно малые вещественные постоянные $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ и введем в рассмотрение последовательность вектор-функций $\{X^{(m)}(\cdot)\} = X^{(1)}(\cdot), \dots, X^{(m)}(\cdot), \dots$, первый член которой представим в виде линейной комбинации столбцов матрицы $\Phi(t)$:

$$X^{(1)} = \sum_{r=1}^k \alpha_r X_r,$$

и, следовательно, является решением (2).

Возьмем $\lambda < 0$ таким, что $\lambda > \lambda_k$. Пусть известно $X^{(m-1)}(t) = \text{col}(x_1^{(m-1)}(t), \dots, x_n^{(m-1)}(t))$. Тогда отыщем $X^{(m)}(t) = \text{col}(x_1^{(m)}(t), \dots, x_n^{(m)}(t))$, являющееся решением

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, X^{(m-1)}(t)) \quad (3)$$

по формулам:

$$x_s^{(m)}(t) = x_s^{(1)}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{sj}(t) \int \eta_{ij}(\tau) f_s(\tau, X^{(m-1)}(\tau)) d\tau. \quad (4)$$

Здесь

$$x_s^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{is};$$

$$\eta_{ij}(\tau) = \Delta_{ij}(\tau) / \Delta(\tau);$$

f_s — s -тая компонента вектора f ($f(t, x) = \text{col}(f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$), а пределы интегрирования в выражении

$$\int \eta_{ij}(\tau) f_s(\tau, X^{(m-1)}(\tau)) d\tau$$

установлены следующим образом:

$$\int_{t_0}^t \eta_{ij}(\tau) f_s(\tau, X^{(m-1)}(\tau)) d\tau, \text{ если } \chi(\eta_{ij}(\tau)) \geq -\lambda(1 + \alpha);$$

$$- \int_t^{\infty} \eta_{ij}(\tau) f_s(\tau, X^{(m-1)}(\tau)) d\tau, \text{ если } \chi(\eta_{ij}(\tau)) < -\lambda(1 + \alpha).$$

Можно показать, что для любых малых $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ верно: $X^{(m)}(t) \rightarrow X^*(t)$ равномерно по всем $t \in [t_0, \infty)$, где X^* — некоторое решение системы (1) с отрицательным характеристическим показателем, причем $X^*(t)$ C^1 -гладко и взаимно однозначно при любом фиксированном t зависит от чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Матрица

$$J(X^*(t_0, 0, \dots, 0)) = \left(\partial x_s^{(m)}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_k) / \partial \alpha_r \Big|_{\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0} \right)$$

состоит из первых k столбцов матрицы $\Phi(t_0)$ и, следовательно, ранг ее равен k . Таким образом, при любом фиксированном $t \geq t_0$ отображение, ставящее значениям $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ в соответствие вектор $X_s^*(t, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$, является C^1 -гладким вложением некоторой малой окрестности в R^k в R^n .

Определим $g(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = X^*(t_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Это отображение, как было показано выше, удовлетворяет условиям 1–3.

Таким образом, утверждение об условной устойчивости системы (1) действительно справедливо.

Однако существует пример, показывающий, что если отказаться от требования гельдерности матрицы Якоби правой части системы (1), то утверждение теоремы Ляпунова для данной системы может не быть выполненным.

Л и т е р а т у р а

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собрание сочинений. Т. 2. М. – Л., 1956.

Использование различных полных ортонормированных систем функций для численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито *

Д.Ф. Кузнецов

Санкт-Петербургский государственный технический университет
каф. Высшая математика
e-mail: control1@citadel.stu.neva.ru

1. Введение.

Рассматривается проблема численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито вида:

$$dx_t = a(x_t, t)dt + B(x_t, t)df_t, \quad x_0 = y(0, \omega), \quad (1)$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в [4].

Известно, что решение уравнения (1) разлагается в ряды Тейлора-Ито, Тейлора-Стратоновича [1,2], унифицированные ряды Тейлора-Ито [3] по повторным стохастическим интегралам Ито или Стратоновича. Все эти повторные стохастические интегралы могут быть разложены по системе повторных стохастических интегралов Стратоновича вида:

$$J_{t,T}^{*(k)} = \int_t^{*T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) dw_{t_1}^{(i_1)} \dots dw_{t_k}^{(i_k)}, \quad (2)$$

где $\psi_i(\tau); i = 1, \dots, k$ — дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции; $w_\tau^{(i)} = f_\tau^{(i)}$ при $i = 1, \dots, m$ и $w_\tau^{(0)} = \tau; i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$.

Таким образом проблема численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито сводится к совместному численному моделированию систем интегралов вида (2).

Пусть условия теоремы 1 [4] выполнены. Тогда с вероятностью 1 имеем:

$$J_{t,T}^{*(k)} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \int_t^T \phi_{j_l}(s) dw_s^{(i_l)}, \quad (3)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле. Обозначения, входящие в (3) см. в [4].

Будем искать аппроксимацию повторного стохастического интеграла Стратоновича $J_{t,T}^{*(k)}$ в следующем виде:

$$J_{t,T}^{*(k)q} = \sum_{j_1=0}^q \dots \sum_{j_k=0}^q C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \int_t^T \phi_{j_l}(s) dw_s^{(i_l)}, \quad (4)$$

где число q выбирается из условия:

$$M \left\{ \left(J_{t,T}^{*(k)} - J_{t,T}^{*(k)q} \right)^2 \right\} = \int_t^T \psi_k^2(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1^2(t_1) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1=0}^q \dots \sum_{j_k=0}^q C_{j_k \dots j_1}^2 < \varepsilon, \quad (5)$$

где предполагается, что $i_l \neq i_p$ при $l \neq p; i_l \neq 0, i_p \neq 0; l, p = 1, \dots, k$. В других случаях условия типа (4) также могут быть получены.

Известно, что условию A2 теоремы 1 [4], в частности, удовлетворяют полные ортонормированные системы тригонометрических и полиномиальных функций. Рассмотрим примеры аппроксимаций некоторых повторных стохастических интегралов Стратоновича с помощью этих систем функций.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта N 97-0-1.8-71 по фундаментальным исследованиям в естествознании.

2. Примеры аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича.

2.1 Тригонометрическая система.

Согласно соотношению (4) имеем:

$$I_{0,t,T}^{*(i_1)} = \sqrt{T-t} \zeta_0^{(i_1)}, \quad I_{1,t,T}^{*(i_1)q} = -\frac{1}{2}(T-t)^{3/2} \left[\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right],$$

$$I_{00,t,T}^{*(i_2 i_1)} = \frac{1}{2}(T-t) \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \right\} \right],$$

причем:

$$M \left\{ \left(I_{1,t,T}^{*(i_1)} - I_{1,t,T}^{*(i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^3}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) < \varepsilon,$$

$$M \left\{ \left(I_{00,t,T}^{*(i_2 i_1)} - I_{00,t,T}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{3(T-t)^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) < \varepsilon \quad (i_1 \neq i_2),$$

где

$$I_{i_1 \dots i_k, t, T}^{*(i_2 \dots i_1)} = \int_t^{*T} (t - \tau_k)^{i_k} \dots \int_t^{*i_2} (t - \tau_1)^{i_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots \mathbf{f}^{(i_k)},$$

$i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ и попарно различны,

$$\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)}; \quad \phi_j(s) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0 \\ \sqrt{2} \sin \frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j = 2r - 1 \\ \sqrt{2} \cos \frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j = 2r \end{cases},$$

2.2. Полиномиальная система.

$$I_{0,t,T}^{*(i_1)} = \sqrt{T-t} \xi_0^{(i_1)}, \quad I_{1,t,T}^{*(i_1)} = -\frac{(T-t)^{3/2}}{2} \left[\xi_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \xi_1^{(i_1)} \right],$$

$$I_{00,t,T}^{*(i_2 i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t) \left[\xi_0^{(i_2)} \xi_0^{(i_1)} + \sum_{r=1}^q \frac{1}{\sqrt{4r^2 - 1}} \left\{ \xi_{r-1}^{(i_2)} \xi_r^{(i_1)} - \xi_r^{(i_2)} \xi_{r-1}^{(i_1)} \right\} \right],$$

причем:

$$M \left\{ \left(I_{00,t,T}^{*(i_2 i_1)} - I_{00,t,T}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{4} \left(\frac{1}{2} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{4r^2 - 1} \right) < \varepsilon \quad (i_1 \neq i_2),$$

$$\xi_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)}, \quad \phi_j(x) = \sqrt{\frac{2j+1}{T-t}} P_j \left(\left(x - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t} \right),$$

где $P_j(x)$ – полином Лежандра.

Важно отметить, что $\xi_j^{(i)}$ – независимые гауссовские случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией. То же самое можно сказать и о системе случайных величин $\zeta_j^{(i)}$.

Литература

- [1] Мильштейн Г.Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988, 228с.
- [2] Kloeden P.E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations Berlin: Springer, 1992, 632p.
- [3] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Унифицированное разложение Тейлора-Ито. Записки научн. семина. ПОМИ, 244, 1997, с.186-204.
- [4] Кузнецов Д.Ф. Метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций. Настоящий сборник.

**Метод разложения и аппроксимации повторных
стохастических интегралов Стратоновича,
основанный на кратных рядах Фурье по полным
ортонормированным системам функций ***

Д.Ф. Кузнецов

Санкт-Петербургский государственный технический университет

каф. Высшая математика

e-mail: control@citadel.stu.neva.ru

1. Введение.

В работе рассматривается новый метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций. Этот метод имеет непосредственное применение (см. например [1]) к численному решению стохастических дифференциальных уравнений Ито вида:

$$dx_t = a(x_t, t)dt + B(x_t, t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{y}(0, \omega), \quad (1)$$

где $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ решение уравнения (1); неслучайные функции $a(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ удовлетворяют условиям существования и единственности решения уравнения (1) в смысле стохастической эквивалентности; $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ стандартный векторный винеровский процесс с \mathcal{F}_t измеримыми и независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \dots, m$; случайная величина $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ стохастически независима от приращений $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_s$ при $t > 0$.

2. Основной результат.

Сформулируем основной результат в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

A1. $v_i(\tau)$; $i = 1, \dots, k$ -дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции.

A2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ полная ортонормированная система функций на промежутке $[t, T]$, для которой ряд Фурье $\sum_{j=0}^{\infty} C_j \phi_j(x)$, $C_j = \int_t^T f(x) \phi_j(x) dx$ для любой кусочно-гладкой на открытом интервале (t, T) и ограниченной на промежутке $[t, T]$ функции $f(x)$ сходится во всякой внутренней точке x

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта N 97-0-1.8-71 по фундаментальным исследованиям в области естествознания.

промежутка $[t, T]$ к величине $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, а также конечен на концах промежутка $[t, T]$.

Тогда повторный стохастический интеграл Стратоновича $J_{t,T}^{*(k)}$ вида

$$J_{t,T}^{*(k)} = \int_t^{*T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},$$

где $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$ при $i = 1, \dots, m$ и $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$ для всех $\tau \in [t, T]$; $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$ разлагается с вероятностью 1 в следующий сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд:

$$J_{t,T}^{*(k)} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \int_t^T \phi_{j_l}(s) d\mathbf{w}_s^{(i_l)}.$$

Замечание 1. Стохастический интеграл Стратоновича от некоторого случайного процесса ξ_τ понимается как следующий среднеквадратический предел:

$$\int_t^{*T} \xi_\tau d\mathbf{w}_\tau^{(i)} = l.i.m. \sum_{j=0}^{N-1} \xi_{\frac{1}{2}(\tau_j + \tau_{j+1})} \left(\mathbf{w}_{\tau_{j+1}}^{(i)} - \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)} \right)$$

при $\Delta_N \rightarrow 0$, где Δ_N —ранг разбиения $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[t, T]$, $t = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$, $\int_t^{*T} \xi_\tau d\mathbf{w}_\tau^{(0)} \stackrel{def}{=} \int_t^T \xi_\tau d\tau$.

Замечание 2. Подробное доказательство теоремы 1 приведено в [1,2].

Литература

[1] Кузнецов Д.Ф. Некоторые вопросы теории численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, 256с. Электр. Ж. Дифференц. уравн. и проц. управл., 1, 1998 (<http://www.neva.ru/journal>).

[2] Кузнецов Д.Ф. Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций и его применение к численному решению стохастических дифференциальных уравнений Ито. Труды межд. конф. Средства математического моделирования, с.135-160. СПб, Изд-во СПбГТУ, 1998.

АДАПТИВНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ГАУССОВСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Кульчицкий О.Ю.

Санкт-Петербургский государственный технический университет

E-mail: kulo@mcsd.hop.stu.ru

Рассмотрена стохастическая система управления, описываемая нелинейной системой дифференциальных уравнений, возмущенных гауссовским стационарным случайным процессом g_t :

$$\dot{x}_t = A(x_t, u(t)) + \Sigma(x_t)g_t, \quad (1)$$

где $x_t \in R_n$ - вектор состояния системы; $u(t) \in U \subset R_m$ - программное управляющее воздействие; $g_t \in R_1$ - стохастическое возмущение, являющееся центрированным гауссовским стационарным процессом с заданной ограниченной корреляционной функцией.

Задача моделирования рассматривается в настоящем докладе как задача численного получения реализаций решений системы стохастических дифференциальных уравнений (1) на заданной регулярной временной сетке с шагом Δ и фиксированной точностью.

Предлагаемая в докладе процедура численного моделирования состоит из двух этапов. На первом этапе решается задача оптимальной интерполяции процесса g_t на промежутке времени $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta]$ по конечному числу его значений на этом промежутке. Получающаяся при этом оптимальная аппроксимация \tilde{g}_t процесса g_t может иметь любую наперед заданную точность аппроксимации в зависимости от числа используемых при ее построении значений процесса g_t на промежутке $[k\Delta, (k+1)\Delta]$.

На втором этапе случайный процесс g_t в (1) заменяется на промежутке времени $[k\Delta, (k+1)\Delta]$ квазидетерминированным процессом \tilde{g}_t и применяется адаптивная процедура численного решения полученной системы как системы квазидетерминированных уравнений. Эта процедура может строиться, например, на одном из разновидностей метода Рунге-Кутты с адаптивным выбором шага интегрирования. Отметим, что возможность применения адаптивных процедур интегрирования определяется в данном случае предварительной аппроксимацией на промежутке $[k\Delta, (k+1)\Delta]$ реализации процесса g_t с заданной точностью аппроксимации.

Результаты настоящего доклада обобщают численные методы моделирования решений стохастических дифференциальных уравнений, изложенные в [1].

Литература

- [1] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Методы численного моделирования систем управления, описываемых системами дифференциальных уравнений Ито. Журнал "Проблемы управления и информатики", N 1, 1998г.

^oРабота выполнена при поддержке РФФИ, грант 96-01-00929.

О ТОЧЕЧНЫХ СИММЕТРИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

А. Н. КУСЮМОВ

Казань, КГТУ им. А.Н. Туполева

Исходную систему уравнений можно рассматривать как подмногообразие E в пространстве 1-джетов локальных сечений некоторого расслоения N общего типа с базой M . При этом подмногообразие E снабжено распределением Картана. В этом случае точечные симметрии исходной системы уравнений можно найти (следуя, например работе [1]) из условия касания некоторым полем X подмногообразия E .

В настоящей работе исходной системе дифференциальных уравнений E ставится в соответствие система внешних дифференциальных уравнений $L2(E)$. Внешние дифференциальные формы степени 2, входящие в $L2(E)$, определены на расслоении N . Систему внешних дифференциальных форм, определяющих $L2(E)$, можно рассматривать также как подпространство в пространстве внешних дифференциальных форм $L2(N)$ степени 2, определенных на расслоении N .

Для отыскания симметрий системы внешних дифференциальных уравнений $L2(E)$ используем условие равенства нулю производных Ли от каждой из внешних дифференциальных форм, входящих в $L2(E)$, по векторному полю X , определяющему точечную симметрию. Таким образом, используем условие

$$X(L2(E)) = 0, \quad (1)$$

при том, что $X(L2(E))$ ограничивается на подмногообразии в N , определяемом $L2(E)$. Подставляя координатную запись векторного поля X (определенного для системы уравнений указанного класса на расслоении N) в (1), получим определяющую систему уравнений в частных производных первого порядка для координат векторного поля X .

Примененный выше формализм представления систем дифференциальных уравнений, можно использовать для нахождения точечных симметрий уравнений более широкого класса. При этом, внешние формы, определяющие систему внешних дифференциальных уравнений, определены в пространстве джетов локальных сечений расслоения N .

Литература

- [1] Милославский А.М., Козловский М.С., Лизинский Д.Н. Введение и приложения к теории групп дифференциальных уравнений. - Казань: Издательство Казанского государственного университета, 1986.

НОВЫЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СИСТЕМ МАЯТНИКОВОГО ТИПА

**Г.А. Леонов, В.Б.Смирнова,
Г.Содербака**

*Санкт-Петербургский государственный университет,
leonov@math.lgu.spb.su,*

*Санкт-Петербургский государственный университет,
root@al2189.spb.edu,*

*Технологический университет г. Лунд,
gunnar@sm.luth.se*

Системы дифференциальных уравнений маятникового типа характеризуются наличием нулевого собственного значения у матрицы линейной части и присутствием в их составе периодической нелинейной функции. Таким системам присуща неединственность положения равновесия, причем устойчивые в малом по Ляпунову положения равновесия могут чередоваться с неустойчивыми. В связи с этим исследование асимптотики решений систем маятникового типа содержит две важные задачи. Первая задача состоит в изучении глобальных свойств решений, таких как ограниченность каждого решения системы (устойчивость по Лагранжу), стремление каждого решения к какому-либо положению равновесия (глобальная асимптотика), "закрепление" каждого решения внутри полосы ширины периода нелинейной функции (устойчивость по Бакаеву), существование предельных циклов различных типов. Вторая задача связана с оценкой областей притяжения устойчивых положений равновесия. К обоим этим задачам может быть применен прямой метод Ляпунова. Однако использование традиционных функций Ляпунова вида "квадратичная форма" и "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности" не дает в случае маятниковых систем значимых результатов.

В настоящем докладе предлагаются новые классы функций Ляпунова, использующие специфику маятниковых систем. Для уравнений маятникового типа вводится в рассмотрение функция Ляпунова, содержащая в своем составе квадратичную форму от фазовых переменных и нелинейности плюс интеграл от видоизмененной нелинейности. Последняя имеет те же нули, что и исходная нелинейная функция, но обладает меньшим по модулю средним на периоде. В результате для уравнения математического маятника получены (более точные, чем существовавшие ранее, оценки границ областей притяжения устойчивых положений равновесия. Для системы, описывающей колебания двух маятников с учетом трения между ними в общей точке подвеса, построено семейство функций Ляпунова, геометрически изображаемое в фазовом пространстве системы конусной сеткой. Показано, что при некоторых ограничениях на параметры системы любая ее начальная точка попадает в некоторую ячейку этой сетки, а соответствующая интегральная кривая может располагаться лишь в конечном числе ячеек. В результате получена возможность установить достаточные условия устойчивости системы двух маятников по Лагранжу и по Бакаеву.

ИЗБЫТОЧНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мироновский Л.А.

Санкт-Петербург, СПбГУАП,

E-mail: lam@lm44.cit.aanet.ru

При решении многих задач технической диагностики систем автоматического управления и других динамических объектов приходится сталкиваться с избыточными системами дифференциальных уравнений. Они возникают при анализе технических систем с дублированием и резервированием, при организации контроля по методу избыточных переменных, при диагностировании на основе аналитической избыточности, а также при решении задач обнаружения и локализации дефектов с помощью наблюдателей состояния.

В линейном случае такие системы могут задаваться полиномиально-матричными уравнениями вида

$$A(p) Y(p) = B(p) U(p), \quad (1)$$

где $U(p)$, $Y(p)$ – изображения по Лапласу входных и выходных воздействий,

$A(p)$, $B(p)$ – полиномиальные матрицы,

либо эквивалентным описанием с помощью матричной передаточной функции или уравнений в пространстве состояний.

Характерной особенностью избыточных систем является то, что их выходные переменные при соответствующем подборе начальных условий удовлетворяют одному или нескольким алгебраическим уравнениям вида

$$\Delta = M Y = 0, \quad (2)$$

где M – прямоугольная матрица (в простейшем случае строка),

которые для исправного объекта справедливы на всем интервале его функционирования.

В общем случае уравнения (1), (2) могут быть нелинейными и нестационарными, а сигнал Δ может использоваться для охватывания объекта (1) обратной связью.

Доклад посвящен исследованию таких свойств избыточных систем, как устойчивость, управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость и диагностируемость. В нем приводятся критерии избыточности динамических систем и даются примеры синтеза и анализа избыточных систем дифференциальных уравнений.

СТРУКТУРА ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Осипенко Г.С.¹, Зайцев В.Ф.², Флегонтов А.В.³

¹Санкт-Петербургский государственный технический университет
E-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

²Российский государственный педагогический университет им.А.И.Герцена

³Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
E-mail: afleg@mail.iias.spb.su

Приводится структура разрабатываемой версии информационной системы (ИС) «Дифференциальные уравнения» ISDIFF 1.0 (рис.1 и рис.2), которая является составной частью общей ИС «Дифференциальные уравнения и динамические системы». Система предназначена в первую очередь для конечного пользователя-математика, использующего современные средства телекоммуникации и, работающего с динамическими моделями. За основу принят авторский подход к структурированию справочного материала по дифференциальным уравнениям.

Для поддержки передачи стандартного математического выражения в Internet используются два метода: представление в кодировке HTML-языка гипертекстовой разметки с ограничениями и представление математической нотации как gif изображения (gif-образ с обязательным alt-признаком *ascii*).

Информация на рис.1 подчеркивает симметричную природу динамических объектов и возможную визуализацию сложных математических структур.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 97-07-90088.

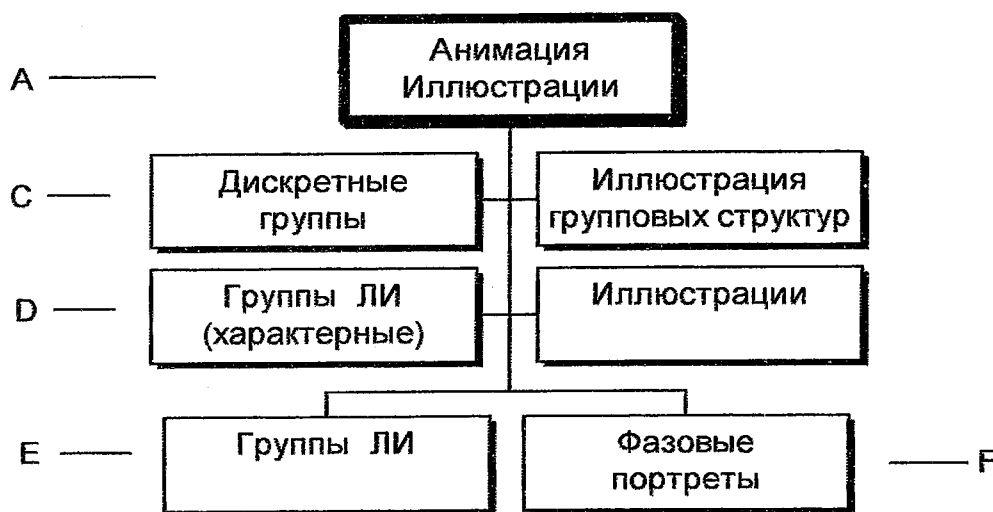


Рис. 1 Структура блока иллюстраций ИС.

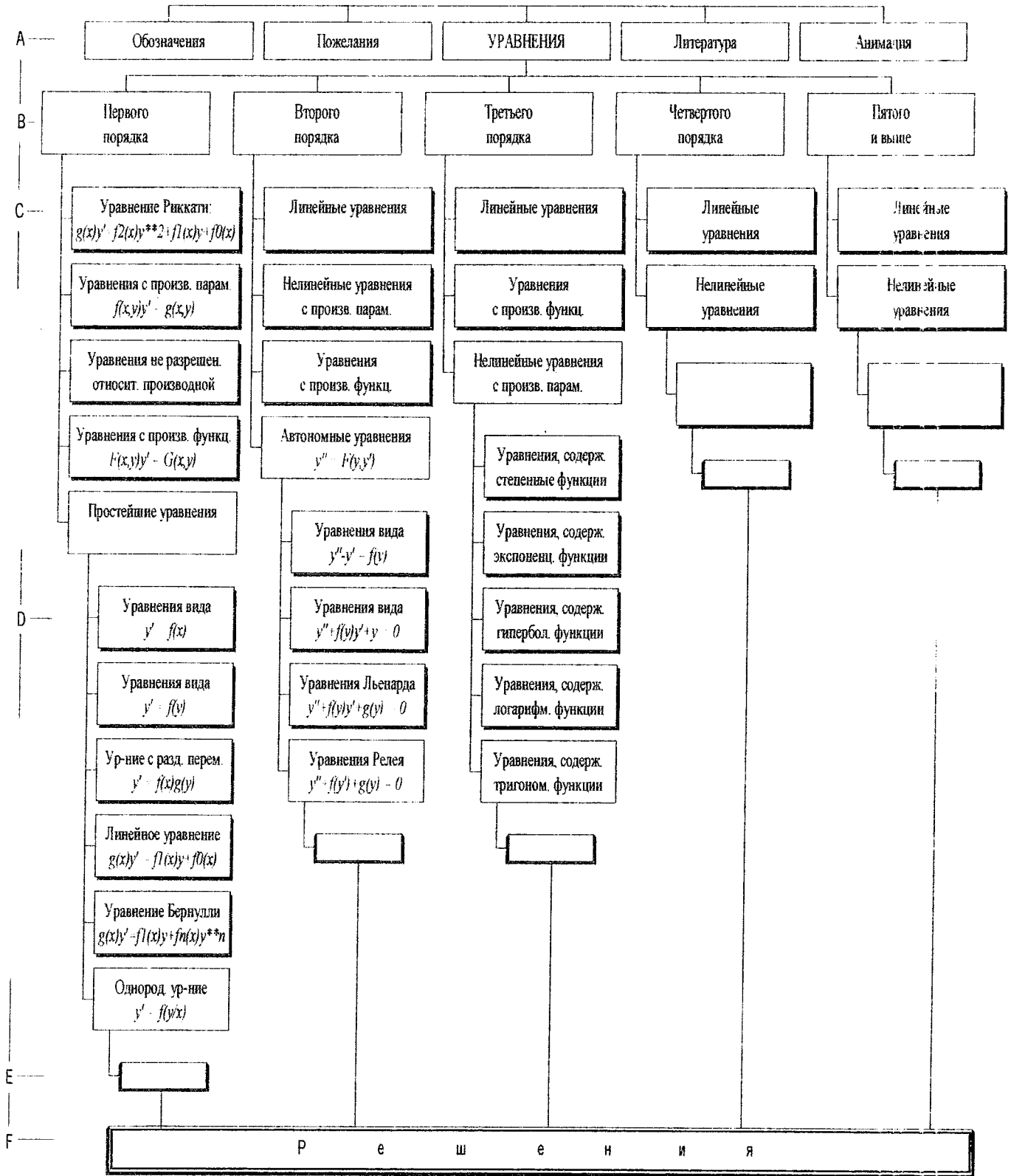


Рис. 2 Структура «ISDIFF 1.0».
 А - верхний уровень; В - суперклассы; С - классы;
 D - subclasses; E - уравнения; F - нижний уровень.

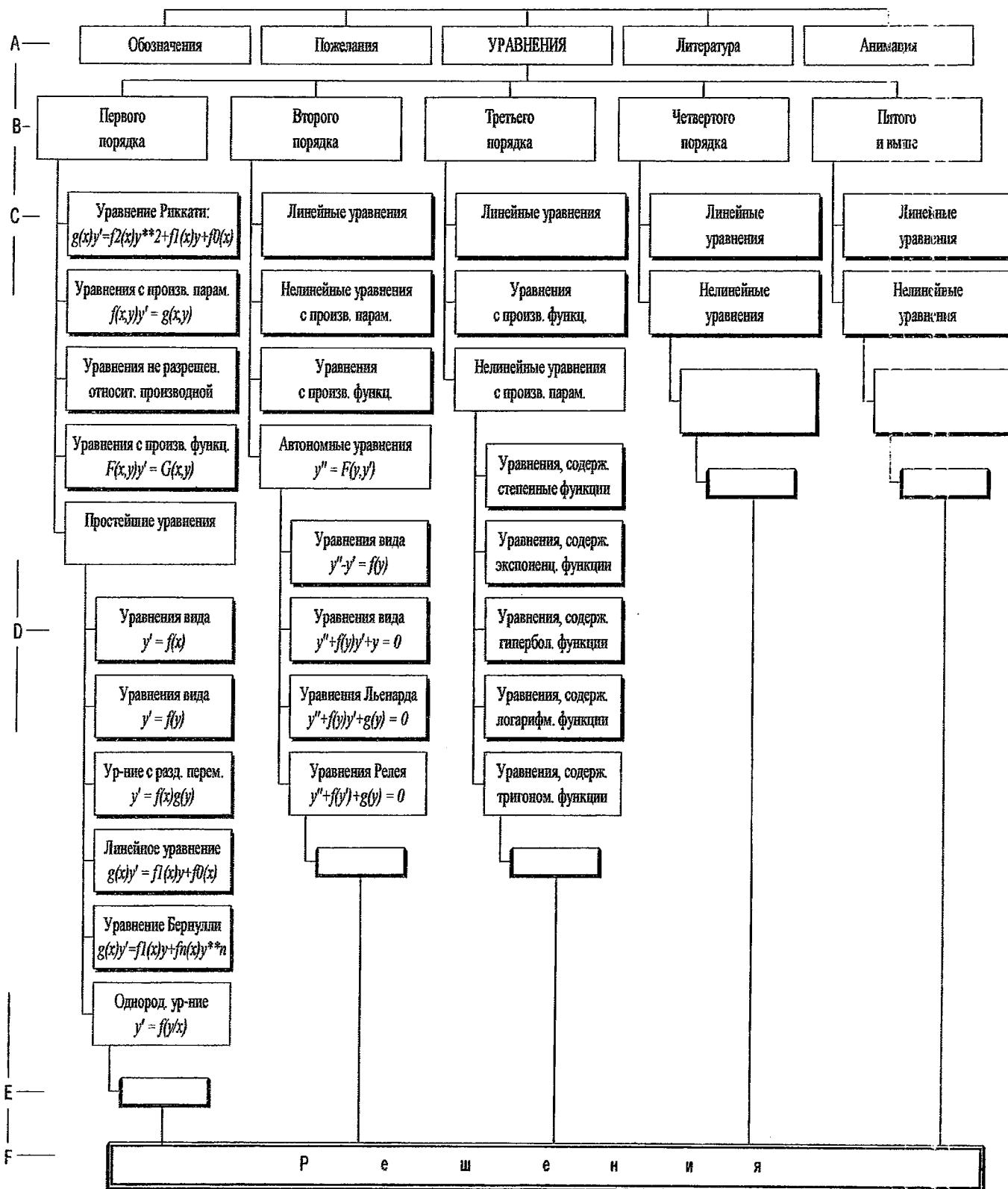


Рис. 2 Структура «ISDIFF 1.0».

A - верхний уровень; B - суперклассы; C - классы;
 D - subclasses; E - уравнения; F - нижний уровень.

Пенкин О.М. (Воронеж)

О некоторых свойствах решений эллиптических неравенств на стратифицированном множестве

В стратифицированном множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, т.е. в множестве, составленном из конечного числа многообразий (стратов) σ_{ki} (k -размерность), "правильно" примыкающих друг к другу (подробное определение см. в [1]), выделяется связное подмножество Ω_0 , составленное из стратов так, что $\bar{\Omega}_0 = \Omega$, рассматривается эллиптический оператор

$$(\Delta_p u)(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(p \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \right) (x) + \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}} \left(p \frac{1}{\sqrt{g^{kk}}} g^{k\alpha} \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \right) \Big|_{kj}(x).$$

Здесь $x \in \sigma_{k-1,i}$, запись $\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}$ означает примыкание $\sigma_{k-1,i}$ к σ_{kj} , координаты y^α ($1 \leq \alpha \leq k$) поределяются по отдельности для каждой такой пары ($\sigma_{k-1,i}, \sigma_{kj}$), по повторяющимся "греческим" индексам предполагается суммирование. На множестве достаточно гладких функций ("постратно") рассматривается неравенство $L_q u = \Delta_p u - qu \geq 0$, где $q \geq 0$ на Ω_0 . Для его решений удастся сформулировать "правильные" аналоги классических свойств типа принципа максимума и леммы о нормальной производной. Основные трудности связаны со сложностью геометрии Ω_0 и его границы $\partial\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_0$. Например, с самого начала неясно, что понимать под нормальной производной функции u в точке $x \in \partial\Omega_0$. Эта неясность обходится за счет трактовки нормальной производной, как одного из множителя в формуле Грина. Оказывается нормальной производной нужно считать выражение

$$\sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}} \left(p \frac{1}{\sqrt{g^{kk}}} g^{k\alpha} \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \right) \Big|_{kj}(x), \quad (x \in \partial\Omega_0)$$

где суммирование распространяется на страты $\sigma_{kj} \not\subset \partial\Omega_0$. Лемма о нормальной производной утверждает, что эта сумма отрицательна в точке нетривиального граничного максимума - факт имеющий многочисленные приложения.

Доказательства соответствующих утверждений, за счет особенностей нашего формализма, удастся проводить методами, близкими к классическим. Результаты получены в развитие работ [2, 3].

Литература

- [1] Фам Ф. Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. М.: Мир, 1970, 184 С.
- [2] Пенкин О.М. // ДАН. 1997, Т.352. №4, С.462-465
- [3] Пенкин О.М. // Дифференц. уравнения. 1997, Т.33, №10, С.1044-1050

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант N 96-01-00355) и гранта С.-Петербургского ун-та в области естественных наук (N 95-0-1.8-97)

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ТИПОВ РАВНОВЕСИЯ РФП МОДЕЛЕЙ 2 ПОРЯДКА

В.В. Петров

Репродуктивные функциональные популяционные модели, широко используемые в популяционной динамике [1] для $n=2$, имеют следующий вид:

$$\dot{x}_i = \alpha_i(x_i) * \varphi_i(x_1, x_2), x_i \geq 0, i = 1, 2. \quad (1)$$

$$\alpha_i(0) = 0, \dot{\alpha}_i(x_i) \geq 0 \quad \text{при } x_i \geq 0; \alpha_i, \varphi_i \in C^r, i = 1, 2. \quad (2)$$

В [1] были определены 4 векторных поля :

$$\vec{W} = (\alpha_1(x_1), \alpha_2(x_2)), \vec{P}_\beta = (\beta_1, \beta_2), \vec{P}^i = (\beta_i, \gamma_i),$$

$$\beta_i = \varphi'_{i,i}(x_1, x_2), \gamma_i = \varphi'_{i,j}(x_1, x_2), i, j = 1, 2; i \neq j$$

и на основе теоремы Гробмана-Хартмана было показано, что топологический тип особой точки определяется взаимным расположением этих векторов на "чертеже", полученном ("склеиванием") двумерной псевдоевклидовой плоскости с индексом 1 - E_1^2 , скалярное произведение на которой определяется, как $(\vec{x}, \vec{y})_1 = x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2$ с двумерной псевдоевклидовой плоскостью с индексом 0 - E_0^2 (собственно евклидовым пространством), скалярное произведение на которой определяется, как $(\vec{x}, \vec{y})_0 = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$. Вектора \vec{W} и \vec{P}_β определены в E_0^2 , а \vec{P}^1 , в \vec{P}^2 в E_1^2 . Изотропные прямые делят E_1^2 на 4 конуса 2 типов: 1. Вещественно-подобные ($+K^{Re}$ -положительный, содержащий вещественный орт e_1 и $-K^{Re}$ -отрицательный, содержащий $-e_1$.) 2. Мнимо-подобные ($+K^{Im}$ -положительный, содержащий мнимый орт e_2 и $-K^{Im}$, содержащий орт $-e_2$). Кроме того, конус $+K^{Im}$ делится дополнительно мнимой осью на $+K_L^{Im}$ и $+K_R^{Im}$, а конус $-K^{Im}$ на $-K_L^{Im}$ и $+K_R^{Im}$. Будем называть проекцией вектора \vec{X} на дополнительный сегмент, фигуру $\tilde{W}(\vec{X})$, лежащую в дополнительном сегменте, ближайшем к данному вектору и ограниченную изотропной

линией и прямой, которая вместе с прямой, проходящей через данный вектор образует угол для которого изотропная прямая является бисектрисой. Будем называть область $W \in E_1^2$ абсолютно устойчивой (а.у.) (неустойчивой (а.н.)), если при $\vec{P}^1, \vec{P}^2 \in W$ РФП модель асимптотически устойчива в особой точке. Области $W_1, W_2 \in E_1^2$ называются сопряженно устойчивыми (неустойчивыми), если при $\vec{P}^1 \in W_1$ и $\vec{P}^2 \in W_2$ РФП модель асимптотически устойчива (неустойчива). Область $W(P^1)$ называется областью устойчивости (неустойчивости) вектора P^1 , если при $\vec{P}^2 \in W(P^1)$ РФП модель асимптотически устойчива (неустойчива).

Теорема 1 1. Конус $-K^{Re}$ абсолютно устойчив.

2. Конуса $-K^{Re}, +K^{Im}, -K^{Im}$ абсолютно неустойчивы.

3. Области $(-K^{Re}, +K^{Re})$ и $(-K_R^{Im}, +K_R^{Im})$ сопряженно неустойчивы.

4. Области $(+K_L^{Im}, -K_L^{Im})$ сопряженно устойчивы.

Теорема 2 Области устойчивости (неустойчивости) вектора \vec{P}^1 определяются следующей таблицей:

\vec{P}^1	$+K^{Re}$	$+K^{Re}$	$-K^{Re}$	$-K^{Re}$	$+K^{Im}$	$+K^{Im}$	$-K^{Im}$	$-K^{Im}$
$W(\vec{P}^1)$	$+K^{Im}$	$-K^{Im}$	$+K^{Im}$	$-K^{Im}$	$+K^{Re}$	$-K^{Re}$	$+K^{Re}$	$-K^{Re}$
Тип уст-ти	а.н.	а.н.	а.у.	а.у.	а.н.	а.н.	а.н.	а.н.

Теорема 3 Топологический тип равновесия РФП модели инвариантен относительно собственного вращения и растяжения в пространстве E_1^2 .

Литература

- [1] Волков Д.Ю., Петров В.В. Бифуркации состояния равновесия и локальные свойства репродуктивных функциональных моделей популяций. - Сборник "Нелинейные динамические системы". Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург, 1998.

Работа поддержана грантом ГКВОРФ по фундаментальному естествознанию 97/1.8/32.

О ФУНКЦИИ БЕЛЛМАНА В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Н.Н. Петров, П.В. Плисс

Санкт-Петербург

Санкт-Петербургский Государственный Университет

rvp@rvp.usg.ru

В докладе рассматривается стандартная задача быстродействия с однотоочечным целевым множеством для конечномерной системы управления.

Приводится обзор некоторых принадлежащих авторам результатов, касающихся свойств функции Беллмана. Эти результаты находят применение во многих областях математики.

1. При изучении качественных вопросов теории оптимального управления функция Беллмана играет роль своеобразной функции Ляпунова. Для нормально локально управляемых систем "поверхность уровня" этой функции является границей множества управляемости за достаточно малый интервал времени. Таким образом, аналитические свойства функции Беллмана тесно связаны со структурой границы этого множества.
2. Так как функция Беллмана в весьма широких предположениях является вязким решением основного уравнения, в методе динамического программирования, её свойства активно изучаются в теории дифференциальных уравнений в частных производных.
3. В задаче о субримановых геодезических функция Беллмана определяет так называемую метрику Карно-Каратеодори, играющую важную роль в дифференциальной геометрии.
4. Во многих случаях метрика, ассоциированная с линейным дифференциальным оператором второго порядка на гладком многообразии, совпадает с функцией Беллмана специально построенной системы управления. Поскольку свойства этой функции тесно связаны с характером особенности функции Грина соответствующего оператора вблизи "диагонали" их изучение представляет безусловный интерес в теории линейных дифференциальных операторов.
5. Весьма важной задачей является выяснение зависимости функции Беллмана от параметров в конкретных системах управления, часто встречающихся в приложениях. Для некоторых таких систем (например, для уравнения Ван-дер-Поля с управлением) удается получить в известном смысле исчерпывающие результаты.

Литература

1. Н.Н. Петров О сумме квадратов векторных полей. // Дифференциальные Уравнения, 1997, т.33, 11, с.1516-1522
2. Н.Н. Петров Об одной задаче субримановой геометрии. // Дифференциальные Уравнения, 1995, т.31, 6, с.973-979
3. Н.Н. Петров Зависимость функции Беллмана от параметра для двумерных систем управления. // Дифференциальные Уравнения, 1997, т.33, 5, с.664-671

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЗАДАЧ

Санкт-Петербургский государственный университет

Пусть A - самосопряженный положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H , спектр A либо дискретен, либо содержит собственные значения (СЗ) этого оператора, лежащие слева от его существенного спектра $\sigma_e(A)$. Для упрощения формулировок введем величину

$$\ell(A) := \begin{cases} \infty, & \text{если } \sigma_e(A) = \emptyset \\ \inf(\sigma_e(A)), & \text{если } \sigma_e(A) \neq \emptyset \end{cases}$$

Обозначим через $\{\lambda_n(A)\}$ СЗ оператора A , удовлетворяющие неравенству $\lambda_n(A) < \ell(A)$ и упорядоченные по возрастанию с учетом кратности, и рассмотрим задачу об их отыскании.

В докладе исследуется сходимость двух известных методов решения поставленной задачи - метода промежуточных задач Ароншайна и метода промежуточных задач Бэзли-Фокса [1]. Важность их заключается в том, что они приближают искомые СЗ снизу и в сочетании с методом Ритца, дающим приближения сверху, позволяют найти эти СЗ с гарантированной точностью. По рассматриваемому вопросу наиболее общие и полные результаты получены Брауном [2] Здесь некоторые из результатов Брауна уточняются и обобщаются.

Методы Ароншайна и Бэзли-Фокса начинаются с выбора базового оператора A_0 , который должен иметь те же общие, перечисленные выше свойства, что и оператор A , а также следующие дополнительные свойства:

1) замкнутые билинейные формы a , a_0 операторов A и A_0 связаны соотношением

$$a = a_0 + b,$$

где b - симметричная положительная билинейная форма в H ;

2) СЗ $\{\lambda_n(A_0)\}$, удовлетворяющие неравенству $\lambda_n(A_0) < \ell(A_0)$, и соответствующие им ортонормированные в H собственные элементы оператора A_0 известны;

3) существуют СЗ $\lambda_n(A)$, удовлетворяющие неравенству $\lambda_n(A) < \ell(A_0)$.

Кроме того, в методе Бэзли-Фокса требуется, чтобы форма b была представима в виде

$$b(u, v) = (Su, Sv), \quad \forall u, v \in D(b),$$

где S - известный оператор, действующий из H в некоторое гильбертово пространство H_s со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_s$.

Следующим, основным шагом в обоих методах является построение последовательности промежуточных операторов A_m с теми же общими свойствами, что и у оператора A , и с замкнутыми билинейными формами a_m , удовлетворяющими неравенствам

$$a_0 \leq a_m \leq a_{m+1} \leq a, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Для этого в методе Бэзли-Фокса выбирается последовательность расширяющихся подпространств $G_1 \subset G_2 \subset \dots$, лежащих в области определения $D(S^*)$ оператора S^* , сопряженного к S , и операторы A_m строятся в виде

$$A_m := A_0 + \overline{S^* Q_m S},$$

где Q_m - ортопроектор в H_* на G_m , черта означает замыкание.

В методе Ароншайна основой конструкции операторов A_m также является расширяющаяся последовательность подпространств $F_1 \subset F_2 \subset \dots$, которые выбираются из области определения $D(B)$ самосопряженного оператора B , отвечающего билинейной форме b , и являются подпространствами энергетического пространства H_B оператора B . Имея такую последовательность, полагают

$$A_m := A_0 + \overline{B P_m},$$

где P_m - ортопроектор в H_B на подпространство F_m .

Для СЗ $\lambda_n(A)$, удовлетворяющих неравенству $\lambda_n(A) < \ell(A_0)$, в качестве приближений берутся СЗ $\lambda_n(A_m)$: $\lambda_n(A_m) \approx \lambda_n(A)$. В силу (1) имеем неравенства

$$\lambda_n(A_0) \leq \lambda_n(A_m) \leq \lambda_n(A_{m+1}) \leq \lambda_n(A).$$

Теорема 1. Если последовательность $\{G_m\}$ предельно плотна в $D(S^*)$ по норме графика S^* , т.е. если

$$\inf_{g \in G_m} (\|f - g\|_* + \|S^*(f - g)\|) \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ для } \forall f \in D(S^*),$$

то $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_n(A_m) = \lambda_n(A)$ для $\lambda_n(A_0) < \ell(A_0)$.

Теорема 2. Если последовательность $\{F_m\}$ такова, что

$$\inf_{v \in F_m} (b(u - v, u - v) + \|B(u - v)\|^2) \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ для } \forall u \in D(B),$$

то $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_n(A_m) = \lambda_n(A)$ для $\lambda_n(A) < \ell(A_0)$.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: "Мир", 1970, 328с.
2. Brown R.D. Convergence criteria for Aronszajn's method and for the Bazley-Fox method //Proc. Roy. Soc. Edinburgh, SectA. 1988. vol.108. P.91-108.

Ю.В.Покорный, А.В.Боровских, С.А.Шабров

О КОЛЕБЛЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Воронежский государственный университет, Воронеж

Ряд задач математической физики приводит к анализу качественных свойств (число нулей, число перемен знака и пр.) решений уравнений вида

$$-(pu')' + Q'u = F', \quad (1)$$

где Q' и F' – обобщенные производные функций ограниченной вариации на (a, b) . Неприменимость стандартного подхода с позиций теории распределений (Соболева-Шварца) вынуждает использовать другой подход, адекватный физической природе задач, при котором уравнение (1) трактуется в виде

$$-(pu') + \int_{\xi}^x u dQ - F(x) \equiv \text{const} \quad (a < x < b), \quad (2)$$

где ξ – одна из точек непрерывности $Q(x)$ и интеграл понимается по Лебегу-Стилтьесу. Возникающие здесь трудности определяются зависимостью интеграла от верхнего предела, который должен принимать сплошь все значения из (a, b) , вследствие чего невозможно предполагать ту же функцию Q всюду непрерывной справа (или слева), что, как правило, делается различными авторами. Последнее предопределяет расширение понятия интеграла Лебега-Стилтьеса на случай, когда соответствующее распределение $Q(x)$ может иметь двойные скачки, т.е. $Q(\tau - 0) < Q(\tau) < Q(\tau + 0)$. С помощью таких распределений (с двойными скачками) удастся описать обобщенное поточечное дифференцирование, позволяющее сводить уравнение (2) к поточечно определенному (т.е. обыкновенному) дифференциальному уравнению вида (1) для случая, например, двойного диполя, когда F' содержит слагаемое вида δ' , где δ – дельта-функция Дирака. При таком подходе для важных классов функций, теряющих не только гладкость, но и непрерывность, удастся разработать адекватную классической технику дифференциальных неравенств, установить оценки числа нулей решений уравнения вида (1), установить точные аналоги теорем сравнения Штурма и соответствующие осцилляционные свойства собственных функций двухточечных краевых задач.

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант N 96-01-00355) и гранта С.-Петербургского ун-та в области естественных наук (N 95-0-1.8-97)

О НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЯХ

Воронежский государственный университет, Воронеж

На пространственной сети (геометрическом графе) Γ рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-(pu')' + qu = f(x, u, u'), \quad (1)$$

понимаемое как обыкновенное на каждом ребре γ_i (одномерном отрезке) и заменяемое условием непрерывности и условием

$$\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} (p_i u_i)'(a+0) = 0 \quad (2)$$

в каждой внутренней вершине a . Суммирование в (2) ведется по ребрам γ_i , примыкающим к a , через $u'(a+0)$ обозначена производная $u(x)|_{x=a}$ вдоль ребра γ_i в направлении "от a ". В целом Γ представляется ориентированным, чтобы в (1) производная $u'(x)$ имела смысл в каждой точке Γ , отличной от внутренних вершин. Уравнения описанного типа возникают в самых разных задачах естествознания. Обычно их рассматривают в виде системы уравнений второго порядка – на каждом ребре свое уравнение. В рамках нашего подхода (1)+(2) – единый объект с решением – скалярнозначной функцией $u : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$.

Многообразие решений уравнения (1)+(2) имеет размерность, как правило, совпадающую с количеством граничных вершин (тупиковых ребер) и поэтому задача Коши в обычном смысле здесь поставлена быть не может. Наиболее естественное средство фиксации изолированного решения – выделение его значений на $\partial\Gamma$ – множестве граничных вершин (аналог двухточечной краевой задачи для случая, когда Γ совпадает с отрезком). В такой постановке для уравнения (1)+(2) найден ряд условий единственности решений (в терминах монотонности f по u) и условий разрешимости, существования ветвей собственных функций для случая, когда $f = f(\cdot, \lambda) = \lambda f_0(\cdot)$ и пр.

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант N 96-01-00355) и гранта С.-Петербургского ун-та в области естественных наук (N 95-0-1.8-97)

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ДЕНДРИТА НЕРВНОЙ КЛЕТКИ

Покорный Ю.В., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Покровский А.Н.

Воронеж, ВГУ; Санкт-Петербург, СПбГУ

Уравнения электрических процессов в древовидных отростках нервных клеток (в линейном приближении) сформулированы как дифференциальные уравнения на графе-дереве.

Описание графа. Конечный граф Γ расположен в ограниченном объеме евклидова пространства R^3 , где введены прямоугольные координаты $z = (z_1, z_2, z_3)$. Ветви дерева (ребра графа) Γ считаются прямолинейными отрезками в R^3 и обозначаются $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$; число ветвей равно m . Каждой точке любой ветви γ_i сопоставляется локальная координата $x \in R$ и пространственные координаты $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x))$. Концы ребер (ветвей) графа называются узлами. Множество узлов обозначается как $J(\Gamma)$. Каждый узел может принадлежать одному или нескольким ребрам; множество ребер, оканчивающихся в узле a , ($a \in J(\Gamma)$), обозначается K_a ; $1 \leq |K_a| \leq m$. Граф связный и является деревом: из каждого узла a существует единственный путь по ребрам графа в любой другой узел a^* .

Потенциалы и токи. Обозначим $V = V(t, x)$ внутриклеточные потенциалы на ребрах и в узлах графа Γ , и $\phi = \phi(t, z)$ внеклеточный потенциал, определенный на $R^3 \setminus \Gamma$, $\phi(t, \infty) = 0$. Внеклеточные потенциалы на графе Γ определяются следующим образом. Каждой точке x любого ребра γ_i сопоставляются функции $\rho_i(x)$ (радиус), $f_i(x)$, $g_i(x)$, $p_i(x) = \rho_i(1 + (\rho_i')^2)^{1/2}$. Ребро γ_i можно рассматривать как вектор в R^3 . В точке $x \in \gamma_i$ построим плоскость, ортогональную к γ_i , на ней определим окружность $C(x)$ с центром в точке $z(x)$, с радиусом $\rho_i(x)$ и полярным углом θ , и вычислим

интеграл

$$\bar{\phi}_i(t, x) = (1/2\pi) \int_C \phi(z(x) + r(\rho_i(x), \theta)) d\theta; \quad x \in \gamma_i;$$

$$\bar{\phi}(t, a) = |K_a|^{-1} \sum_{\gamma_i \in K_a} \bar{\phi}_i(t, a), \quad a \in J(\Gamma).$$

Уравнения. Внутриклеточный потенциал $V(t, x)$ на ребре γ_i удовлетворяет уравнению

$$\partial(V_i - \bar{\phi}_i)/\partial t = p_i^{-1}(\rho_i^2 V_i')' - g_i(V_i - \bar{\phi}_i) - f_i, \quad (1)$$

где штрих обозначает производную по x . В узлах внутриклеточный потенциал $V(t, x)$ непрерывен и выполняются условия

$$\sum_{\gamma_i \in K_a} \rho_i^2(a) V_i'(t, a) + u_a(t)[V(t, a) - \bar{\phi}(t, a) - V_{sa}] = 0, \quad a \in J(\Gamma); \quad (2)$$

где $u_a(t)$ - управляющие сигналы (проводимости постсинаптической мембраны), $V_{sa} = const$. Внеклеточный потенциал $\phi(t, z)$ вычисляется по формуле

$$\phi(t, z) = \sum_{i=1}^m A_i \int_{\gamma_i} \frac{(\rho_i^2 V_i')}{r(x, z)} dx - \sum_{a \in J(\Gamma)} B_a u_a(t)[V(t, a) - \bar{\phi}(t, a) - V_{sa}]/r(a, z); \quad (3)$$

где $r(x, z) = |z - z(x)|$; A_i и B_a - константы.

Существует единственное решение системы уравнений (1),(2),(3). При $u_a = const.$, $a \in J(\Gamma)$ задача (1) - (3) сводится к спектральной задаче на графе Γ . При естественных ограничениях ее решение обладает свойствами:

- Каждому собственному значению λ_n соответствует единственная собственная функция $\psi_n(x)$. λ_n вещественны, $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

- При каждом n собственная функция $\psi_n(x)$ имеет на Γ n нулей и $n + 1$ пучность. $\psi_0(x)$ не имеет нулей на Γ . (Пучность графа Γ является подграфом, нуль - подмножеством точек Γ),

- Для каждого n нули ψ_n и ψ_{n+1} перемежаются.

АППРОКСИМАЦИЯ РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОЛЕБАНИЯМИ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ

Покровский А.Н.

Санкт-Петербург, СПбГУ

Рассматриваются релаксационные колебания в системе

$$\varepsilon dx/dt = f(x, y); \quad dy/dt = g(x, y); \quad x \in R^k, \quad y \in R^m \quad (1)$$

с гладкими f, g . Обозначим $x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)$ решение (1) с начальными условиями $x(0, \varepsilon) = x^0, y(0, \varepsilon) = y^0$. Уравнение $f = 0$ задает многообразие Γ , состоящее из двух устойчивых частей Γ_1, Γ_2 , неустойчивой части Γ_+ и многообразий точек срыва Γ_{10}, Γ_{20} . Выполняются обычные условия невырожденности точек срыва. Устойчивые корни уравнения $f = 0$ обозначены $x = \phi_j(y); \phi_j(y) \in \Gamma_j; j = 1, 2$.

Релейная система задается уравнениями

$$dy/dt = g(\phi_j(y), y); \quad y(0) = y^0, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

и отображениями $\Gamma_{10} \rightarrow \Gamma_2, \Gamma_{20} \rightarrow \Gamma_1$. Обозначим $x_0(t), y_0(t)$ решение системы (2); моменты переключения обозначим t_0, t_1, t_2, \dots . Известно, что на конечном интервале времени $[0, T]$ всюду, за исключением δ -окрестностей точек переключения $t_i, i = 0, 1, \dots$

$$|x(t, \varepsilon) - x_0(t)| \rightarrow 0, \quad |y(t, \varepsilon) - y_0(t)| \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ и эти величины имеют порядок $\varepsilon^{2/3} \ln(1/\varepsilon)$.

Построена новая релейная система с решениями $x^*(t, \varepsilon) = \Phi_j^*(y^*, \varepsilon), y^*(t, \varepsilon)$:

$$dy^*/dt = G(\Phi_j^*(y^*, \varepsilon), y^*); \quad y^*(0, \varepsilon) = y^0, \quad j = 1, 2 \quad (3)$$

с отображениями $\Gamma_{10}^*(\varepsilon) \rightarrow \Gamma_2^*(\varepsilon); \Gamma_{20}^*(\varepsilon) \rightarrow \Gamma_1^*(\varepsilon)$. Решение этой релейной системы лучше аппроксимирует решение системы (1) на интервале $[0, T]$ с выколотыми окрестностями точек переключения. Имеет место

Теорема. Если Γ_1, Γ_2 в системе (1) неограниченны, то существует такая релейная система (3) и такие числа $\varepsilon_0 > 0, \delta > 0, K_0 > 0, K_1 > 0$, что при $t \in [\delta, T] \setminus \cup_i (t_i - \delta, t_i + \delta), 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ выполняется неравенство:

$$|x(t, \varepsilon) - x^*(t, \varepsilon)| + |y(t, \varepsilon) - y^*(t, \varepsilon)| < K_0 \exp(-K_1/\varepsilon).$$

Румянцева Е.В., Зарубин А.Н.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА
 ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ
 СМЕШАННОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Орел, Орловский государственный университет

Уравнение

$$L(y) \equiv u_{xx}(x, y) + \operatorname{sign} y u_{yy}(x, y) - \alpha u_x(x - \tau, y) = 0, \quad 0 < \tau \equiv \operatorname{const}, \quad (1)$$

$\alpha \in R$, рассматривается в смешанной области $D = D_1^+ \cup D_2^- \cup J$, где $D_1^+ = \{(x, y) : x > 0, 0 < y < \pi\}$ и $D_2^- = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D_{2k}$ — эллиптическая и гиперболическая части D , причем $D_{2k} = \{(x, y) : k\tau - y < x < (k+1)\tau + y, -\tau/2 < y < 0\}$, а $J = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, y = 0\}$.

Пусть $D_1^+ = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D_{1k}$, где $D_{1k} = \{(x, y) : k\tau \leq x \leq (k+1)\tau, 0 < y < \pi\}$.

Задача Q. Найти регулярное в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u(x, y) = f_i(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}_{i(-1)} \quad (i = 1, 2);$$

$$u(x, \pi) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq \pi;$$

$$u(x, k\tau - x) = \psi_k(x), \quad k\tau \leq x \leq (2k+1)\tau/2,$$

где f_i, φ, ψ_k — заданные непрерывные, достаточно гладкие функции, причем $f_1(x, 0) = f_2(x, 0), x \in [-\tau; 0]; f_i(0, 0) = \psi_0(0); f_1(0, \pi) = \varphi(0); \varphi(+\infty) = 0; \psi_k(+\infty) = 0$.

Единственность решения задачи Q доказана при $|\alpha| \leq 1/\pi$ с помощью энергетических неравенств без ограничения на величину запаздывания τ , а существование методом интегральных уравнений и конечных интегральных преобразований.

Савков С.А., Юшканов А.А.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА В ЗАДАЧАХ ОБ ИСТОЧНИКАХ ТЕПЛА И ЧАСТИЦ

Орел, Орловский государственный университет
Москва, Московский педагогический университет

Получено аналитическое решение модельного кинетического уравнения с БГК (Бхатнагара, Гросса и Крука) и ЭС (эллипсоидально-статистическим) интегралами столкновений для задачи о точечных источниках тепла и частиц. Решение проводим в три этапа: рассматриваем бесконечный плоский источник и методом Кейза ищем решения соответствующего ему однородного уравнения, представляющие собой полную систему ортогональных функций; далее, функцию распределения для источника (функцию Грина) раскладываем по полученной системе решений и определяем поля температуры и концентрации молекул газа; используя связь между решениями в плоском и сферическом случаях находим поле температуры $T(r)$ и концентрации $N(r)$ для изотропного точечного источника:

$$T_h(r) = \frac{1}{5\pi r} + \frac{5}{18\pi^{3/2}r^2} f_{Th}; \quad N_p(r) = \frac{1}{5\pi r} + \frac{1}{2\pi^{3/2}r^2} f_{Np};$$

$$T_p(r) = N_h(r) = -\frac{1}{5\pi r} - \frac{1}{6\pi^{3/2}r^2} f_{Tp}.$$

Индекс h соответствует источнику тепла, p – источнику частиц. r – расстояние от источника. Первые слагаемые описывают асимптотическое поведение решения на большом удалении от источника, вторые – в непосредственной близости от него. Функции f_{Th} , f_{Tp} и f_{Np} определяются через интегралы от функции ошибок и с точностью до десятых долей процента аппроксимируются выражениями

$$f_{Th} = \exp(-0.464r^{0.951}); \quad f_{Np} = \exp(-0.763r^{0.893});$$

$$f_{Tp} = \exp(-0.452r^{0.924})$$

для БГК и

$$f_{Th} = \exp(-0.505r^{0.926}); \quad f_{Np} = \exp(-0.910r^{0.833});$$

$$f_{Tp} = \exp(-0.310r^{1.173})$$

ЭС модели интеграла столкновений.

Савкова О.В., Зарубин А.Н.

**ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ
НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
СМЕШАННОГО ТИПА С КРАТНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

Орел, Орловский государственный университет

Уравнение

$$L(y) \equiv y u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) - y u(x - (1 + H(y))\tau, y) = 0, \quad (1)$$

$0 < \tau \equiv \text{const}$, $H(\xi)$ – функция Хевисайда, рассматривается в смешанной области $D = D_1^+ \cup D_2^- \cup J$, где $D_1^+ = \{(x, y) : x > 0, 0 < y < \pi\}$ и $D_2^- = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D_{2k}$ – эллиптическая и гиперболическая части D , причем

$$D_{2k} = \{(x, y) : k\tau - y < x < (k+1)\tau + y, -\tau/2 < y < 0\},$$

а $J = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, y = 0\}$.

Пусть $D_1^+ = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D_{1k}$, где $D_{1k} = \{(x, y) : 2k\tau \leq x \leq 2(k+1)\tau, 0 < y < \pi\}$.

Задача А. Найти регулярное в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u(x, y) = f_i(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}_{i(-1)} (i = 1, 2);$$

$$u(x, y)|_{y=\pi} = \phi(x), \quad 0 \leq x < +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq \pi;$$

$$u(x, y)|_{x-2k\tau=2(-y)^{3/2}/3} = \psi_{2k}(x), \quad 2k\tau \leq x \leq (4k+1)\tau/2;$$

$$u(x, y)|_{(2k+1)\tau-x=2(-y)^{3/2}/3} = \psi_{2k+1}(x), \quad (4k+3)\tau/2 \leq x \leq 2(k+1)\tau;$$

где $f_i, \phi, \psi_{2k}, \psi_{2k+1}$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции, причем

$$f_1(x, 0) = f_2(x, 0), \quad x \in [-\tau; 0], \quad f_i(0, 0) = \psi_0(0),$$

$$\psi_{2k}(2k\tau) = \psi_{2k+1}(2k\tau) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad f_1(0, \pi) = \phi(0),$$

$$\phi(+\infty) = 0, \quad \psi_{2k}(+\infty) = 0, \quad \psi_{2k+1}(+\infty) = 0.$$

Теорема. Если существует решение задачи А, то оно единственно при условии $\tau \leq 1/\sqrt{2}$.

Доказательство теоремы идет с помощью метода *abc* в сочетании с методом Франкля (т.е. использования интегралов энергии на линии вырождения $y = 0$) и оценочной работы.

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ РЕДУКЦИИ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ В ИНТЕГРИРУЕМЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

Воронеж, Воронежский государственный университет

Для интегрируемых дифференциальных уравнений вариационного исчисления естественен вопрос о том, что дает интегрируемость в сочетании с конечномерной редуцируемостью. Идея явного представления маргинального отображения и ключевой функции была сформулирована в [1] и затем реализована в [2]-[5] в задачах об упругих равновесиях эйлера и кирхгофа стержней (или, что эквивалентно, в задачах о движениях маятника и лагранжева волчка) и в задаче о периодических решениях SG -уравнения. Безусловно, список таких реализаций можно продолжить, если учесть наличие в настоящее время большого запаса интегрируемых уравнений [6].

Доклад посвящен описанию общих систем интегрируемых ключевых параметров и доказательству интегрируемости параметров Морса-Ботта в интегрируемых двухточечных краевых задачах с выпуклой нелинейностью. В этом классе посредством явных выражений ключевых параметров Морса-Ботта через константы интегрирования удается получить явные формы маргинальных отображений и ключевых функций, что позволяет осуществлять изучение особенностей экстремалей гладких функционалов аналитическими и компьютерными средствами. Явные формулы создают основу для разработки новых алгоритмов визуализации, с помощью которых можно выводить на принтер и на экран монитора графические образы, дающие наглядную информацию о существовании и бифуркации экстремалей, об индексах Морса бифурцирующих экстремалей, о метаморфозах поверхностей уровней и т.п.

Литература

1. Сапронов Ю.И. Нелокальные конечномерные редукции в вариационных краевых задачах. // Матем. заметки. 1991. Т.49, вып.1. С.94-103.
2. Левченко О.Н. Маргинальный анализ эйлера стержня. // Тезисы 6-ой Межвузовской научной конференции молодых ученых. Липецк, 1992. С.170.
3. Levchenko O.N., Sapronov Yu.I. Morse-Bott reduction for a symmetric Kirchhoff rod. // Methods and Applications of Global Analysis. Voronezh University Press. 1993. P.95-100.
4. Левченко О.Н. Конечномерная редукция периодической краевой задачи для SG -уравнения. // Современные методы нелинейного анализа. Воронеж, ВГУ. 1995. Тез. конф. С. 62-63.
5. Сапронов Ю.И., Левченко О.Н. Явное представление конечномерных редукций в интегрируемых вариационных задачах. // Topological methods in nonlinear analysis. 1997. Gdan'sk. С.129-143.
6. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения. М., Физматлит, 1995. - 560 с. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. М., Международная программа образования, 1996. - 496 с.

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ДИСКРЕТНОЙ СИММЕТРИЕЙ

г. Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет

Теоретико-групповые методы исследования нелинейной динамики классических систем с симметриями начали развиваться сравнительно недавно. Первое направление таких исследований связано с понятием нелинейной нормальной моды [1,2], второе — с понятием буши нормальных мод [3-5]. Оба эти направления отличаются друг от друга по постановке решаемых задач, получаемым результатам и используемому математическому аппарату (общим для них является применение теории представлений групп симметрии и теории нормализации систем дифференциальных уравнений). В настоящей работе рассматриваются три класса полиномиальных динамических систем — гамильтоновых, градиентных и систем типа Онгагера, обладающих в состоянии равновесия дискретной (точечной или пространственной) группой симметрии G .

В отличие от линейных, в нелинейных системах возбуждение некоторой моды ξ , преобразующейся по неприводимому представлению (НП) Γ_ξ группы G , приводит к возбуждению и целого ряда "вторичных" мод $\xi', \xi'', \xi''', \dots$, соответствующих другим НП $\Gamma_{\xi'}, \Gamma_{\xi''}, \Gamma_{\xi'''}, \dots$. Полная совокупность $B_\xi = \{\xi, \xi', \xi'', \xi''', \dots\}$ мод, появляющихся в системе вследствие возбуждения "корневой" моды ξ в работах [3,4] названа бушем (кустом) колебательных мод. Буши B_ξ можно рассматривать и как геометрический объект, обладающий группой симметрии $G_\xi \subset G$, и как динамический объект, описываемый некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которая строится исходя из симметричных соображений и определяет изменение во времени амплитуд входящих в B_ξ мод. Ранее нами было доказано, что в буши B_{ξ_0} входят те и только те моды ξ_i , для которых имеет место следующее соотношение между ядрами гомоморфизма соответствующих им НП $\ker \Gamma_{\xi_0} \subseteq \ker \Gamma_{\xi_i}$ ($i = 1, 2, \dots$). Физическая причина "затягивания" некоторой вторичной моды ξ_i ($i \neq 0$) в буши B_{ξ_0} связана с действием на нее обобщенной силы со стороны корневой моды ξ_0 , причем, отвечающие за это силовое воздействие члены потенциальной энергии являются линейными по компонентам моды ξ_i в однородными функциями относительно компонент корневой моды ξ_0 . Значение введенного понятия буши мод связано со следующими двумя причинами. Во-первых, число степеней свободы, отвечающее данному бушу, обычно бывает существенно меньшим по сравнению с общим числом степеней свободы исходной динамической системы. Во-вторых, соответствующие бушу динамические уравнения можно эффективно классифицировать по некоторым "классам универсальности", поскольку к каждому такому

классу нередко относятся сотни и тысячи различных колебательных режимов различных механических систем.

Большое значение для общего анализа и построения приближенных аналитических решений динамических уравнений, описывающих эволюцию бушва мод, имеет восходящая к работам Пуанкаре теория нормализации систем дифференциальных уравнений. С ее помощью в настоящей работе для градиентных динамических систем доказана следующая теорема (она может быть обобщена и на случай систем Онгагеровского типа).

Теорема. Пусть имеется динамическая система, описываемая дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{y}_k + \lambda_k y_k = -\nabla U \quad (k = 1, 2, \dots, s), \text{ где}$$

1) Каждая векторная переменная $y_k = (y_{k,1}(t), y_{k,2}(t), \dots)$ есть набор n_k функций $y_{k,i}(t)$ ($i = 1, \dots, n_k$) преобразующихся по НП Γ_k группы симметрии G системы в состоянии равновесия; 2) Собственные значения λ_k ($k = 1, 2, \dots, s$), соответствующие инвариантным подпространствам различных НП Γ_k , являются рационально несоизмеримыми (с физической точки зрения это условие означает отсутствие резонансов Ферми); 3) $U(y_1, y_2, \dots, y_s)$ является полиномиальной функцией порядка выше второго, инвариантной относительно действия группы симметрии G .

Тогда существует такое нелинейное преобразование от y_k к \tilde{y}_k ($k = 1, 2, \dots, s$), что

1) новые переменные \tilde{y}_k , как и старые переменные y_k , преобразуются по тем же самым НП Γ_k ($k = 1, 2, \dots, s$) группы G . 2) между новыми переменными \tilde{y}_k , относящимися к разным НП, нет *силосных* взаимодействий вплоть до произвольного порядка малости.

Приведенная теорема позволяет утверждать, что в нелинейных динамических системах могут существовать колебательные режимы, соответствующие отдельным НП группы симметрии G ее равновесного состояния. Число соответствующих такому колебательному режиму обобщенных степеней свободы равно размерности НП, что обычно много меньше полного числа степеней свободы исходной динамической задачи. Более того, оказывается, что может существовать целый набор динамических режимов, соответствующих несущему пространству данного НП, число степеней свободы которых меньше размерности этого представления. Все такие колебательные режимы поддаются полной симметричной классификации. В докладе обсуждается также связь этих режимов с нелинейными нормальными колебаниями Розенберга.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J.A. Montaldi, R.M. Roberts, and I.N. Stewart, *Nonlinearity* 3 (1990) 695-730. [2] J.A. Montaldi, R.M. Roberts, and I.N. Stewart, *Nonlinearity* 3 (1990) 731-772. [3] В.П. Сахненко, Г.М. Чечин, Доклады Академии Наук, 1993, **330**, 308-310. [4] В.П. Сахненко, Г.М. Чечин, Доклады Академии Наук, 1994, **338**, 42-45. [5] G.M. Chechin and V.P. Sakhnenko, *Polish J. Tech. Phys.*, 1996, **37**, 297-300.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ЗАДАЧИ ПСЕВДОПЕРЕСЕЧЕНИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ТЕРМОВ ДВУХАТОМНОЙ СИСТЕМЫ

Н.В.Семенова, В.В.Краснощеков

Санкт-Петербург, государственный технический университет

russ@mail.imop.csa.ru

Теоретическое исследование колебательных возмущений в спектрах двухатомных молекул основано, как правило, на приближении двух состояний. В качестве устойчивых молекулярных термов, отвечающих каждому из состояний, можно взять, например, потенциалы гармонического осциллятора с одинаковыми частотами. Тогда возникает точно решаемая модельная задача со следующим уравнением Шредингера

$$\hat{H}(R)\psi(R) = E\psi(R),$$

где \hat{H} – Гамильтониан рассматриваемой системы,

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dR^2} + R^2 & V \\ V & -\frac{d^2}{dR^2} + (R - R_0)^2 + \Delta \end{pmatrix},$$

$\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ – волновая функция, E – энергия системы, R – расстояние между атомами, V – постоянное взаимодействие, обуславливающее переходы между термами, $R_0 > 0$, $\Delta > 0$ – относительные смещения термов по осям координат.

Предлагается искать ψ в виде разложения

$$\psi(R) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}} e^{-\frac{R^2}{2}} H_n(R),$$

где $H_n(R)$ – полином Эрмита. С учетом связи коэффициентов $b_n = Vc_n/(E - 2n - 1)$ и рекуррентных формул для полиномов Эрмита уравнение Шредингера сводится к трехчленному рекуррентному соотношению (ТРС)

$$\left(2n + 1 - E + R_0^2 + \Delta + \frac{V^2}{E - 2n - 1}\right) c_n - R_0 \left(\sqrt{2n}c_{n-1} + \sqrt{2(n+1)}c_{n+1}\right) = 0,$$

при условиях: $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $c_{-1} = 0$.

Полученные при решении ТРС значения сдвигов и расщепления энергетических уровней служат альтернативой экспериментальным данным при оценке точности приближенных методов. При малых значениях постоянного взаимодействия были исследованы три модификации квазиклассического приближения: метод Вентцеля-Крамера-Бриллюэна (ВКБ), метод фазовых интегралов и дискретный аналог метода ВКБ, который и был признан лучшим.

АЛГОРИТМ САМОНАСТРОЙКИ ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ КАСКАДНЫХ СИСТЕМ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ¹

Санкт-Петербург, математико-механический факультет СПбГУ

Рассматривается класс объектов, представляющих собой батарею последовательно соединённых аппаратов, описываемых системой нелинейных уравнений, имеющих ненаблюдаемую линейную часть, содержащую управление и неизвестные параметры

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= D_i(x_i - x_{i-1}) + F_i(x_i)z_i, \\ \frac{dz_i}{dt} &= A_i(z_i - z_{i-1}), i = 1, 2, \dots, N; t \geq t_0,\end{aligned}$$

где $z_0 = C(\theta)u + d(\theta)$. Здесь $\{x_i\}_{i=1}^N$ – вектор стабилизируемых переменных (измеряется) x_0 задан, $\{z\}_{i=1}^N$ – неизмеряемые переменные, D_i и A_i – известные гурвицевы матрицы. Нелинейные матричные функции $F_i(x)$ также известны, u – набор управляющих воздействий, $C(\theta)$ и $d(\theta)$ – неособая матричная и векторная функции, зависящие линейно от неизвестного векторного параметра $\theta \in \Theta \subset R^q$, где Θ выпуклое и известное множество.

Предполагается, что при всех x_i уравнения статики $D_i(x_i - x_{i-1}) + F_i(x_i)z_0 = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, однозначно определяют зависимости $x_i = X_i(z_0, x_0)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Также предположим, что функция $X_N(\cdot, x_0)$ обратима и соотношение $z_0 = X_N^{-1}(x_N, x_0)$ однозначно определяет z_0 как функцию от x_N .

Примем, наконец, что при заданных $x_{i,*}$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$ и заданном z_* , определяемых однозначно из уравнений статики $[z_* = X_N^{-1}(x_{N,*}, x_0)]$, по предписанному значению $x_{N,*}$, для нелинейности $F_i(\cdot)$ выполнены условия

$$|F_i(x_i)| \leq c_{F_i} (x_i - x_{i,*})^T [F_i(x_i) - F_i(x_{i,*})] z_* \leq c'_{F_i} |x_i - x_{i,*}|^2$$

при любых x_i . Это требование выполнено в изучаемой прикладной задаче.

Приведенные условия полностью выделяют класс объектов управления, которые будем называть устойчивыми каскадными системами с неизвестными параметрами.

¹Работа поддержана РФФИ (проект 98-01-00581) и программой "Интеграция" (проект 326.53)

Задача управления состоит в построении обратной связи вида $u(t) = U(x_{i=1}^N, s \leq t)$, не зависящей от значений θ неизвестного параметра и обеспечивающей стабилизационную цель управления $x_N(t) \rightarrow x_{N,*}$ при $t \rightarrow \infty$.

При известном значении параметра $\theta = \theta_*$ при сделанных выше предположениях поставленную цель обеспечивает стационарное управление $u_* = C^{-1}(\theta_*)[X_N^{-1}(x_{N,*}, x_0) - d(\theta_*)]$.

При неизвестном значении параметра θ для построения управляющего воздействия используется оценка $\theta' = \theta'(t)$ неизвестного параметра θ . Дополнение основного контура управления контуром выработки подходящей оценки определяет адаптивную обратную связь, которая может реализовываться различными способами. В данной работе конструирование адаптивной обратной связи базируется на идеях метода самонастройки.

В рамках этого метода требуется построить квадратичную функцию Ляпунова вида $V(x_1 - x_{1,*}, \delta) = (x_1 - x_{1,*})^T H_1 (x_1 - x_{1,*}) + (\delta - \delta_*)^T C(\theta) (\delta - \delta_*)$, δ — "расширенная" оценка вектора неизвестных параметров, включающая, кроме оценок θ' , оценки неизвестных начальных данных $z(t_0)$. Построение контура адаптации состоит в выборе такой зависимости параметров δ от времени и таком выборе управления, что производная по t функции V в силу замкнутой системы должна быть отрицательной (при этом управление не должно зависеть от неизвестных параметров). Это обеспечивает предельное соотношение $x_N(t) \rightarrow x_{N,*}$.

В работе при некоторых общих дополнительных условиях предложен способ построения обратной связи, обладающей указанными свойствами и, тем самым, реализовано адаптивное управление классом рассматриваемых каскадных систем.

Разработанный алгоритм применялся в задаче адаптивного управления процессом полимеризации при производстве синтетического каучука СКИ-3. Уравнения математической модели процесса были составлены сотрудниками ВНИИ синтетического каучука И.М.Абрамзоном, В.А.Лавровым, Б.А.Перлиным, П.П.Шпаковым и др. и описывали каскад реакторов с мешалками. В батарее происходит процесс полимеризации изопрена в присутствии каталитического комплекса. Расход катализатора является управлением. Цель управления — поддержание заданной температуры на выходе батареи. Эксперименты на ЭВМ показали работоспособность предложенных алгоритмов адаптивной стабилизации.

l_1 СУБОПТИМАЛЬНЫЕ РОБАСТНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО СКАЛЯРНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ ¹

Соколов В.Ф.

Сыктывкарский государственный университет,

Email: sokolov@ssu.edu.komi.ru

Рассматривается линейный дискретный скалярный объект управления (SISO)

$$a(q^{-1})y = b(q^{-1})u + w_p + w_a,$$

где y, u – скалярные выход объекта и управление, q^{-1} – оператор сдвига назад ($q^{-1}z(t) := z(t-1)$), a и b – полиномы от оператора q^{-1} , $a(0) := 1$, w_a – последовательность ограниченных возмущений в объекте, $\|w_a\|_\infty \leq \delta_w$, и w_p – последовательность параметрических возмущений. В случае структурированных параметрических возмущений

$$\forall t \in \mathbf{N} \quad |w_p(t)| \leq \delta_y \sup_{s < t} |y(s)| + \delta_u \sup_{s < t} |u(s)|,$$

а в случае неструктурированных возмущений

$$\forall t \in \mathbf{N} \quad |w_p(t)| \leq \max\{\delta_y \sup_{s < t} |y(s)|, \delta_u \sup_{s < t} |u(s)|\}.$$

Управление объектом осуществляется линейным регулятором

$$\alpha(q^{-1})u = \beta(q^{-1})y, \quad \alpha(0) := 1,$$

где α и β полиномы от оператора q^{-1} .

Требуется построить регулятор, минимизирующий показатель качества

$$J = \sup_{w_p} \sup_{w_a} \|y\|_\infty.$$

Обозначим через $\chi(z) := a(z)\alpha(z) - b(z)\beta(z)$ характеристический полином системы, включающей объект управления и регулятор, и через $G_{yv} := \alpha(z)/\chi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{yv}(k)z^k$ и $G_{uv} := \beta(z)/\chi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{uv}(k)z^k$ – передаточные функции от возмущений к выходу и управлению, соответственно. Передаточные функции называются устойчивыми, если корни полинома χ лежат вне замкнутого единичного круга комплексной плоскости. Для любой устойчивой передаточной функции $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^k$ положим $\|G\|_1 := \sum_{k=0}^{\infty} |g(k)|$.

Из результатов l_1 теории робастного управления [1, 2, 3] следует, что при нулевых начальных данных в системе, включающей объект управления и регулятор,

$$J = \frac{\delta_w \|G_{yv}\|_1}{1 - \delta_y \|G_{yv}\|_1 - \delta_u \|G_{uv}\|_1},$$

в случае структурированных параметрических возмущений, и

$$J = \frac{\delta_w \|G_{yv}\|_1}{1 - \max\{\delta_y \|G_{yv}\|_1, \delta_u \|G_{uv}\|_1\}},$$

¹Настоящая работа поддержана грантом Министерства общего и профессионального образования РФ

в случае неструктурированных параметрических возмущений. При этом необходимым и достаточным условием робастной устойчивости системы является условие положительности знаменателей. Указанные формулы для показателя качества справедливы и для ненулевых начальных данных в системе управления, если l_∞ норму выхода в показателе качества заменить на асимптотический показатель $\limsup_{t \rightarrow \infty} |y|$ и сузить класс параметрических возмущений до возмущений с конечной или затухающей памятью [4].

Заметим, что при отсутствии параметрических возмущений ($\delta_y = \delta_u = 0$) сформулированная задача была решена в [5] и послужила началом развития современной теории l_1 оптимального управления [6, 7].

Сформулированная задача синтеза l_1 оптимальных робастных не сводится непосредственно к стандартным задачам l_1 оптимизации. В данной работе рассматривается задача синтеза l_1 субоптимальных робастных регуляторов, которая сводится к приближенному решению семейства задач l_1 оптимизации благодаря дробно-линейной структуре показателей качества. Приближенные решения строятся с использованием метода Q -масштабирования [8].

Литература:

- [1] Khammash, M.H. and J.B. Pearson Performance Robustness of Discrete-Time Systems with Structured Uncertainty// *IEEE Trans. Automat. Control*, 1991, v. AC-36, 398-412.
- [2] Khammash, M. H. and J.B. Pearson Analysis and design for robust performance with structured uncertainty// *Systems and Control Letters*, 1993, v. 20, 179-187.
- [3] Khammash, M. H. Robust performance bounds for systems with time-varying uncertainty// *Proc. of the 33rd Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL, December, 1994, 28-33.
- [4] Соколов В.Ф. Адаптивное робастное управление дискретным скалярным объектом в l_1 постановке// *Автоматика и телемеханика*, 1998, N. 3, 107-131.
- [5] Барabanов А.Е., Граничин О.Н. Оптимальный регулятор линейного объекта с ограниченной помехой// *АиТ*. 1984. N. 5. С. 39-46.
- [6] Барabanов А.Е. Синтез минимаксных регуляторов. С.-Петербург. Изд. С.-Петербургского университета, 1996.
- [7] Dahleh M.A. and Diaz-Bobillo I.J. Control of uncertain systems: a linear programming approach. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1995.
- [8] Khammash M.H. The scaled-Q method for solving l_1 optimization problems// *Proc. of the American Control Conference*. 1997. Albuquerque, New Mexico, June 4-6, 1997.

МЕТОД КОМПЕНСАЦИИ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С НЕЙРОННЫМ ВЫЧИСЛИТЕЛЕМ УПРАВЛЯЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Степанов М.Ф.

Саратов, Саратовский государственный технический университет, smf@star.sstu.ru

Методическая погрешность естественно-интеллектуальных систем автоматического управления обусловленная квантованием по уровню измеряемого сигнала нейронами - детекторами. Система автоматического управления объектом вида $\dot{x} = Ax + Bu + Mf$, $x \in R^n, u \in R^m, f \in R^r$ с реализацией закона управления $u = C^T x$ на нейроноподобных элементах описывается соотношениями:

$$\dot{x} = Ax + B(u^n + f^n) + Mf, \quad f^n = u - u^n, \quad \sup f^n(\Delta) = |C^T| \Delta$$

$$u^n = \left[\sum_{j=1}^n c_{j1} \sum_{k=1}^{N_j} (k-1) \Delta_j g_{kj}(x_j), \dots, \sum_{j=1}^n c_{jm} \sum_{k=1}^{N_j} (k-1) \Delta_j g_{kj}(x_j) \right]^T, \quad g_{kj}(x_j) = \begin{cases} 0, & x_j < (k-1)\Delta_j \\ 0, & x_j \geq k\Delta_j \\ 1, & (k-1)\Delta_j \leq x_j < k\Delta_j \end{cases}$$

где Δ_j - величина уровня квантования j -го измеряемого сигнала, т.е. x_j ;

k - номер уровня квантования;

$g_{kj}(x_j)$ - выходной сигнал k -го нейрона-детектора, измеряющего x_j ;

f^n - погрешность реализации закона управления на нейроноподобных элементах и интерпретируемая как дополнительное внешнее воздействие;

$|C^T|$ - матрица, элементами которой являются модули коэффициентов закона управления;

Δ - вектор величин уровней квантования по измеряемым переменным.

Для компенсации методической погрешности, обусловленной влиянием f^n , предлагается использовать дополнительное управляющее воздействие. Построим модель нового объекта управления с возмущающим воздействием $f^1 \underline{\Delta} f^n$ на основе модели замкнутой САУ с прежним управляющим устройством

$$\dot{x}^1 = A_1 x^1 + B(u^1 + f^1), \quad A_1 = (A + BC^T).$$

Для него методом АКОР синтезируем закон управления $u^1 = C_1^T x^1$. Новое (дополнительное) нейронное управляющее воздействие будет описываться соотношением

$$u^{1n} = \left[\sum_{j=1}^n c_{1j1} \sum_{k=1}^{N_j} (k-1) \Delta_j g_{kj}(x_j), \dots, \sum_{j=1}^n c_{1jm} \sum_{k=1}^{N_j} (k-1) \Delta_j g_{kj}(x_j) \right]^T$$

В совокупности с исходным управляющим воздействием u^n получим для исходного объекта управления (1) нейронное управляющее воздействие вида:

$$u_{\Sigma}^n = u + u^{1n} = \left[\sum_{j=1}^n (c_{j1} + c_{1j1}) \sum_{k=1}^{N_j} (k-1) \Delta_j g_{kj}(x_j), \dots, \sum_{j=1}^n (c_{jm} + c_{1jm}) \sum_{k=1}^{N_j} (k-1) \Delta_j g_{kj}(x_j) \right]^T$$

Однако при его нейронной реализации вновь возникнут погрешности, величина которых, приведенная к точке приложения управляющего воздействия может быть оценена сверху величиной

$$|f^{1n}| = |u^1 - u^{1n}| = \left[\sum_{j=1}^n |c_{1j1}| \Delta_j, \dots, \sum_{j=1}^n |c_{1j2}| \Delta_j, \dots, \sum_{j=1}^n |c_{1jm}| \Delta_j \right]^T$$

Для их компенсации вновь используем новое дополнительное управляющее устройство. Построим модель нового объекта управления с возмущающим воздействием $f^2 \underline{\Delta} f^{1n}$ на основе модели замкнутой САУ с ранее построенными управляющими устройствами:

$$\dot{x}^2 = A_2 x^2 + B(u^2 + f^2), \quad A_2 = (A_1 + BC_1^T)$$

Для него синтезируем закон управления $u^2 = C_2^T x^2$. Новое нейронное управляющее воздействие будет описываться соотношением

$$u^{2n} = \left[\sum_{j=1}^n c_{2j1} \sum_{k=1}^{N_j} (k-1) \Delta_j g_{kj}(x_j), \dots, \sum_{j=1}^n c_{2jm} \sum_{k=1}^{N_j} (k-1) \Delta_j g_{kj}(x_j) \right]^T$$

Далее цепочка рассуждений повторяется.

Пусть построено L дополнительных законов управления. Поскольку как основное, так и дополнительные управляющие воздействия приложены в одной точке и имеют одинаковую реализацию, то их можно объединить. Тогда значение объединенного нейронного управляющего воздействия может быть описано соотношением

$$u^{Ln} = u + \sum_{l=1}^L u^{ln} = \left[\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^L c_{lji} \sum_{k=1}^{N_j} (k-1) \Delta_j g_{kj}(x_j), \dots, \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^L c_{ljm} \sum_{k=1}^{N_j} (k-1) \Delta_j g_{kj}(x_j) \right]^T$$

где c_{0ji} - компоненты матрицы основного закона управления $C_0 = C$.

Проведенные исследования с помощью MATLAB и SANICS [2] для ряда моделей объектов управления показали, что значение величины уровня квантования Δ целесообразно выбирать в диапазоне $\Theta_{уст}^* / 4 \leq \Delta \leq \Theta_{уст}^* / 2$, обеспечивающем наименьшие аппаратные затраты при соблюдении требований к точности управления $\Theta = Nx$, $\Theta \in R^x$, $|\Theta_{устi}| \leq \Theta_{устi}^*$, $i = (1, \chi)$ с использованием дополнительного (компенсационного) закона управления, полученного после двух - трех итераций синтеза.

Литература

1. Степанов М.Ф. Нейроподобный вычислитель управляющего воздействия естественно-интеллектуальных систем автоматического управления // Аналитическая теория автоматического управления: Тезисы докладов региональной научно-технической конференции. - Саратов: Саратовский государственный технический университет, 1997. - С. 82 - 97.

2. Stepanov M.F. The Simulation of Natural - Intelligent System of Automatic Control // Tools for Mathematical Modelling. Abstract. - St. Peterburg : St. Peterburg State Technical University, 1997. - Pp. 54 - 55.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С НЕЙРОННЫМ ВЫЧИСЛИТЕЛЕМ УПРАВЛЯЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Степанов М.Ф.

Саратов, Саратовский государственный технический университет, smf@star.sstu.ru

В естественно-интеллектуальных системах автоматического управления [1] возникает методическая погрешность управления, обусловленная квантованием по уровню измеряемого сигнала нейронами - детекторами. Пусть система автоматического управления описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu + Mf, \quad x \in R^n, u \in R^m, f \in R^\mu, \quad u = C^T x.$$

На самом деле измерению доступен не вектор переменных состояния x , а вектор измеряемых переменных y . Последний отличается от вектора x наличием квантования значений его компонентов по уровню, поскольку они являются выходными переменными нейронов-детекторов:

$$y(x) = \left[\sum_{k=1}^{N_1} (k-1)\Delta_1 g_{k1}(x_1), \dots, \sum_{k=1}^{N_n} (k-1)\Delta_n g_{kn}(x_n) \right]^T$$

Реализация закона управления на нейронном вычислителе управляющего воздействия описывается соотношениями $u^n = C^T y$, или, учитывая факт квантования по уровню

$$u^n = \left[\sum_{j=1}^n c_{j1} \sum_{k=1}^{N_j} (k-1)\Delta_j g_{kj}(x_j), \dots, \sum_{j=1}^n c_{jn} \sum_{k=1}^{N_j} (k-1)\Delta_j g_{kj}(x_j) \right]^T$$

$$g_{kj}(x_j) = \begin{cases} 0, & x_j < (k-1)\Delta_j \\ 0, & x_j \geq k\Delta_j \\ 1, & (k-1)\Delta_j \leq x_j < k\Delta_j \end{cases}$$

где Δ_j - величина уровня квантования j -го измеряемого сигнала, т.е. x_j ;
 k - номер уровня квантования;
 $g_{kj}(x_j)$ - выходной сигнал k -го нейрона-детектора, измеряющего x_j .

Методическую ошибку реализации закона управления, т.е. различие между u и u^n , учитывая структуру нейронов-детекторов, можно оценить сверху следующим соотношением

$$\sup |u - u^n| = \left[\sum_{j=1}^n |c_{j1}| \Delta_j, \dots, \sum_{j=1}^n |c_{jn}| \Delta_j \right]^T$$

Это можно интерпретировать как возникновение внешнего возмущающего воздействия, аддитивного управлению

$$\sup |\tilde{f}^n| \leq |u - u^n| = \left[\sum_{j=1}^n |c_{j1}| \Delta_j, \dots, \sum_{j=1}^n |c_{jn}| \Delta_j \right]^T$$

Тогда можно записать

$$\dot{x} = Ax + B(u^n + \tilde{f}^n) + Mf$$

Таким образом, погрешность реализации закона управления на нейроноподоб-

ном вычислителе управляющего воздействия от значения величины уровня квантования измеряемого сигнала может быть приведена к входу объекта управления и интерпретироваться как дополнительное внешнее возмущающее воздействие $f' = u - u^n$. Эту зависимость можно оценить сверху следующим соотношением:

$$\sup f''(\Delta) = |C^T| \Delta$$

где $|C^T|$ - матрица, элементами которой являются модули коэффициентов закона управления;

Δ - вектор величин уровней квантования по каждой измеряемой переменной.

Наличие дополнительного внешнего возмущающего воздействия приводит к дополнительной установившейся ошибке управления

$$\Theta_{уст} = \Theta_{уст}(f) + \Theta_{уст}(\Delta)$$

где $\Theta_{уст}$ - установившаяся ошибка управления;

$\Theta_{уст}(f)$ - установившаяся ошибка управления, вызванная наличием реального внешнего воздействия f ;

$\Theta_{уст}(\Delta)$ - установившаяся ошибка управления, обусловленная наличием квантования по уровню в нейронах-детекторах.

Учитывая, что $\Theta_{уст}(f) = (A + BC^T)^{-1} M \bar{f}$,

можно ввести следующую оценку

$$\Theta_{уст}(\Delta) = (A + BC^T)^{-1} B f''(\Delta)$$

или, с учетом соотношения для $f''(\Delta)$

$$\sup \Theta_{уст}(\Delta) = (A + BC^T)^{-1} B |C^T| \Delta$$

Таким образом, достижимая точность управления САУ с нейроноподобным вычислителем управляющего воздействия может быть оценена сверху следующим соотношением:

$$\sup \Theta_{уст} = \Theta_{уст}(f) + \sup \Theta_{уст}(\Delta) = (A + BC^T)^{-1} M \bar{f} + (A + BC^T)^{-1} B |C^T| \Delta$$

или иначе

$$\sup \Theta_{уст} = (A + BC^T)^{-1} (M \bar{f} + B |C^T| \Delta)$$

Очевидно, что при $\Delta \rightarrow 0$ имеем $\Theta_{уст} \rightarrow \Theta_{уст}(f)$. В целом

$$(A + BC^T)^{-1} M \bar{f} \leq \Theta_{уст} \leq (A + BC^T)^{-1} (M \bar{f} + B |C^T| \Delta)$$

Полученные оценки могут быть использованы при выборе величины уровня квантования сигнала, а, следовательно, и количества нейронов-детекторов.

Литература

1. Степанов М.Ф. Нейроноподобный вычислитель управляющего воздействия естественно-интеллектуальных систем автоматического управления // Аналитическая теория автоматического управления: Тезисы докладов региональной научно-технической конференции. - Саратов: Саратовский государственный технический университет, 1997. - С. 82 - 97.

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ И ЛОКАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

С.П.Токарев

СПбГУТ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, t, \varepsilon) \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$, $X(x, t, \varepsilon)$ - непрерывная 2π -периодическая по t функция класса C^∞ по x, ε при малых $|x|, |\varepsilon|$ и любых t .

Наряду с (1) рассмотрим усредненную систему

$$\dot{y} = \varepsilon \int_0^{2\pi} X(y, t, \varepsilon) dt \quad (2)$$

и предположим, что $y = 0$ - гиперболическая особая точка (2). В классических работах Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова предложен алгоритм построения формального преобразования в виде ряда по степеням ε , приводящего (1) к автономному виду. В настоящее время установлено, что этот ряд является, как правило, расходящимся даже в случае аналитичности правых частей (1) и может быть использован лишь для асимптотического представления решений (1).

Теорема При перечисленных условиях для любого $k \geq 1$ существует замена переменных

$z = x + \varepsilon f(x, t, \varepsilon)$, где $f(x, t, \varepsilon)$ - непрерывная 2π -периодическая по t функция класса C^k по x, ε при малых $|x|, |\varepsilon|$ и любых t , которая приводит (1) к автономному виду.

В случае, если $y = 0$ является притягивающей или отталкивающей точкой для системы (2), то можно взять $k = \infty$

ИНДУЦИРУЕМЫЕ СИММЕТРИИ СИНТЕЗИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

А. В. ФЛЕГОНТОВ

Санкт-Петербургский институт информатики и
автоматизации РАН, Россия
E-mail : afleg@mail.iias.spb.su

Для задач синтеза дифференциальных уравнений с априорной симметрией, также как и для задач анализа симметричной структуры уравнений, используется техника интегральных многообразий, лиевский и дискретно-групповой анализ дифференциальных уравнений. При этом рассматривается не только отдельное уравнение инвариантное к определенной группе симметрий, но и класс уравнений, связанных дискретной симметрией, а также дифференциальный D -комплекс уравнений разных порядков, базирующихся на одном многообразии.

Если исходное многообразие M или младшее дифференциальное уравнение из D -комплекса на многообразии M допускает группу Ли X , то и все уравнения комплекса также будут допускать эту группу, в силу очевидной коммутации оператора дифференцирования и оператор X . С повышением порядка уравнений возрастает возможность появления новых операторов симметрии Ли X_k .

Действие дискретной группы преобразований G , связывающее многообразие M с многообразием M_1 , естественным образом индуцирует лиевские симметрии для преобразованных уравнений, которые аналогичным образом распределяются по всему преобразованному комплексу. Из структуры G легко получить вид преобразованных операторов симметрий. Так например, для дискретной образующей s оператор переноса перейдет в проективный оператор

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \xrightarrow{s} X_1 = x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1},$$

для образующей y - в оператор Ли-Беклунда, а оператор растяжения

$$X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

останется инвариантным.

Поиск допускаемых системами дифференциальных уравнений групп и анализ структур допускаемых симметрий осуществлялся с помощью самостоятельной программы LIE [2]. Эта программа написана в нотации системы mHATN [1] и состоит (основные блоки) из генераторов определяющих уравнений, решателя определяющих уравнений, генератора векторов алгебры Ли и ненулевых коммутаторов. Для преобразованного уравнения вида

$$y'' = \pm \frac{4}{9} y^{-1/2} \xrightarrow{s} y'' = \mp \frac{4}{9} x^{-5/2} y^{-1/2},$$

программа дает следующий результат

ECHO: FALSE

?

? DOLJE();

Program LIE v. 4.2 (c) 1994 A K Head

```
(11);
```

```
(11)
```

```
(4 11)
```

```
@: Def Eqns = (4, 11)
```

```
? A#;
```

```
@: {DIF (F# (2, U1, X1), U1, 2),
      DIF (F# (1, U1, X1), U1, 2) - 2*DIF (F# (2, U1, X1), U1, X1),
      6*U1^(1/2)*X1^(5/2)*DIF (F# (1, U1, X1), U1, X1)
      - 3*U1^(1/2)*X1^(5/2)*DIF
      (F# (2, U1, X1), X1, 2) - 4*DIF (F# (2, U1, X1), U1),
      4*U1*X1*DIF (F# (1, U1, X1), U1) -
      8*U1*X1*DIF (F# (2, U1, X1), X1) + 10*U1
      *F# (2, U1, X1) + 2*X1*F# (1, U1, X1) +
      9*U1^(3/2)*X1^(7/2)*DIF (F# (1, U1, X1)
      , X1, 2),
      UUU#1 == F# (1, U1, X1),
      XXX#1 == F# (2, U1, X1)}
```

```
? DOSOLV();
```

```
@: {UUU#1 == U1*X1*F# (10) + U1*F# (12)/3,
      XXX#1 == -X1*F# (12) + X1^2*F# (10)}.
```

То, программа LIE благополучно разрешает систему из 4 уравнений с 11 неизвестными получая и проективный оператор и оператор растяжения. Для уравнений более старших порядков возрастает и вычислительная сложность, так для преобразованного уравнения 5 порядка приходится анализировать определяющие уравнения из 63 термов, что окончательно приведет к решению системы из 15 уравнений с 36 неизвестными.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 97-07-90088.

Литература

- [1] Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: ЛИИАН, 1991. 240с.
- [2] Head A.K. LIE, a PC program for Lie analysis of differential equations// Computer Physics Communications, vol. 71 (1993) pp.241-248.

МЕТОД БИФУРКАЦИОННЫХ ДИАГРАММ ИССЛЕДОВАНИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ДВУМЕРНЫХ КОМПАКТНЫХ ОРИЕНТИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

С.М. Хрящев

С.-Петербургский государственный технический университет

khrya@osipenko.stu.neva.ru

В предыдущих работах автора изучалась управляемость линейных по состоянию динамических систем управления (ДСУ) и проекций этих систем на сферу и проективное пространство. Рассмотренные динамические системы задавались семействами векторных полей (ВП), зависящих от некоторого управляющего параметра. Условия управляемости были сформулированы в терминах условий на спектральную характеристику (СХ) ДСУ и выполнения условий зацепляемости. СХ была построена с помощью характеристической системы уравнений для матрицы линейной ДСУ. Эта СХ представляла собой некоторый набор семейств инвариантных подпространств упомянутой матрицы ДСУ, непрерывно зависящих от параметра. Предполагалось, что этот набор семейств максимально мелкий из возможных с сохранением свойства непрерывности по параметру. Условия зацепляемости в наиболее простом случае означают непустоту пересечения инвариантных подпространств при различных значениях управляющего параметра.

В настоящей работе применяется другой подход. СХ можно охарактеризовать также как набор семейств множеств, неперестраивающихся при изменении управляющего параметра. Сами эти множества являются инвариантными для динамической системы, отвечающим фиксированным значениям управляющего параметра. Такая интерпретация СХ позволяет ее вводить для произвольных ДСУ и на ее основе сформулировать условия управляемости ДСУ. Аналогично для произвольных ДСУ можно интерпретировать условия зацепляемости. Следует отметить, что основное отличие СХ в линейном случае от СХ в общем случае заключается в том, что в линейном случае семейства ВП обладают свойством симметрии, которое наследуется СХ. Это свойство оказывается решающим для обеспечения свойства тривиальности. В нелинейном случае тривиальность СХ обеспечивается большим числом перестроек фазовых портретов (ФП), но также как и в линейном случае тривиальность СХ обеспечивает управляемость ДСУ.

При исследовании управляемости первоочередно изучаются семейства векторных полей общего положения. В частности, такие семейства обладают свойством локальной управляемости вдоль траекторий движения, имеют определенное количество типов перестроек ФП и являются грубыми. Далее рассматриваются лишь бифуркации ФП коразмерности один, которые происходят при изменении управляющего параметра.

Сначала изучается управляемость произвольных ДСУ на двумерной сфере. Это изучение включает в себя следующие аспекты.

1. Перечисление всех возможных типов перестроек ФП при изменении управляющего параметра и построение графа этих перестроек, или бифуркационной диаграммы. При этом используется принцип "экономии количества критических элементов", который означает, что для описания всех возможных перестроек используется минимально возможное количество критических элементов ВП, т.е. точек покоя и предельных циклов.

2. На основе анализа бифуркационной диаграммы, т.е. графа перестроек ФП, выделены все минимально возможные отрезки путей на этом графе, которые обеспечивают тривиальность СХ. Последовательности ВП, соответствующие этим выделенным отрезкам путей на графе, названы сценариями управления. Показано, что подсемейства ВП, отвечающих этим отрезкам обеспечивают управляемость ДСУ. Далее, если некоторое семейство ВП не обладает свойством минимальности, то для того, чтобы СХ была тривиальной, нужно, чтобы произошли некоторые бифуркации "лишних" критических элементов, которые обеспечат тривиальность СХ для семейства ВП, не обладающих свойством минимальности в указанном смысле.

3. Если СХ для некоторого семейства ВП не окажется тривиальной, то для обеспечения управляемости нужно потребовать выполнения условий зацепляемости, т.е. пересечения линий устойчивых и неустойчивых многообразий. Рассмотрены также некоторые случаи сценариев, которые обеспечивают управляемость ДСУ с нетривиальной СХ.

Рассмотрены некоторые примеры исследования управляемости на многообразиях общего вида. Указан способ сведения исследования управляемости на этих многообразиях к исследованию управляемости ДСУ на сфере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хрящев С.М. Спектральный метод исследования управляемости динамических систем вблизи инвариантных множеств. Автоматика и телемеханика, 1998, 3, с. 28-42.
- [2] Хрящев С.М. О локальной управляемости динамической системы вдоль траектории. Деп. ВИНТИ 24.03.97, N 868-В 97, с. 1-14.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННО - ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ МАССОПЕРЕНОСА ЧЕРЕЗ ПОЛУПРОНИЦАЕМУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЯМОГО И ОБРАТНОГО ОСМОСА

Краснодар, Кубанский государственный технологический университет

Процессы переноса растворителя (пермеата) через полупроницаемую поверхность (мембрану, поверхность испарения), задерживающую растворенный компонент, обеспечивающий высокое осмотическое давление, сопровождается обратным влиянием осмотических сил на скорость проникновения пермеата. Такие процессы описываются нелинейной краевой задачей, анализ которой выявил невозможность существования стационарного решения. Как показано в работах [1, 2] эти процессы имеют автоколебательный характер.

Следует отметить еще одну особенность указанной системы: граничное условие на поверхности мембраны при движении растворенного компонента к мембране (обратный осмос) не является классическим условием 3 рода. При попытке применения стандартных конечноразностных методов это условие приводит к отсутствию диагонального преобладания обращаемой матрицы, что приводит к неустойчивости численного процесса.

Предложен комбинированный подход, позволяющий реализовать эффективную вычислительную процедуру получения устойчивых решений. На основе фундаментального решения линеаризованной задачи исходная краевая задача приводится к нелинейному интегральному уравнению, которое предложено решать интерполяционно-экстраполяционным методом (предиктор-корректор), являющимся обобщением метода Адамса на случай двумерных пространственно-временных задач.

На основе предложенного алгоритма разработан программный комплекс, позволяющий с помощью персонального компьютера (IBM PC) получить временные зависимости для концентрационных полей растворов вблизи полупроницаемой мембраны и описать динамику движения жидкости через мембрану в процессах прямого и обратного осмоса.

Литература.

1. Лекарев В.М., Чердниченко В.Г. Циклические процессы фазовых превращений раствора в капиллярах пористой среды //Материалы 4-й междунар. конференции "Циклы природы и общества". Часть I. - Ставрополь: СтГУ, 1996, с.299-301.
2. Лекарев В.М., Чердниченко В.Г. Массоперенос в двухкомпонентном растворе при испарении летучего компонента с поверхности менисков в капиллярах пористой среды. - Сб. докладов 1-й Российской национальной конференции по теплообмену. - М.: РАН, 1994. Том 5, с. 103-108.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Ю. В. Чурин

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматривается квазиоднородная система

$$\dot{x} = P(x) + X(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$P(\lambda x) = \lambda^m P(x), \quad \sup_t \|x\|^{-m} \|X(x, t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \rightarrow +\infty$$

в некоторой окрестности множества $\Phi = \{\alpha x_0 : \alpha > 0\} \times \mathbb{R}$, где единичный вектор x_0 коллинеарен вектору $P(x_0)$, $(x_0, P(x_0) > 0)$ и x_0 является гиперболической точкой покоя на сфере Пуанкаре, индуцированной однородной системой

$$\dot{x} = P(x). \quad (2)$$

Согласно топологическому принципу Важевского [1], система (1) имеет в окрестности Φ положительно интегральное множество Γ . Оказывается, что в рассматриваемом случае существует естественная проекция π множества Γ на $(k+1)$ -мерное многообразие, где $k = \dim W^s(x_0)$, и, если отображение π обратимо, то π^{-1} — непрерывно и, следовательно, Γ является $(k+1)$ -мерным многообразием.

Как показано в [2], обратимость π заведомо имеет место, если $m > 1$ и функция $X(x, t)$ липшицева. Чтобы Γ оказалось C^1 -многообразием, следует на X наложить дополнительные предположения, связанные с ее дифференцируемостью [3].

Л и т е р а т у р а

1. *Ważewski T.* Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires // *Ann. Soc. Polon. Math.*, 1947. V. 20. P. 279–313.
2. *Чурин Ю. В.* Простые исключительные множества неавтономных квазиоднородных систем // *Дифференц. уравнения*, 1973. Т. 9, № 6. С. 1073–1086.
3. *Иванов О. А., Кудряшова Г. Р.* О гладкости инвариантной поверхности квазиоднородной системы в окрестности простого исключительного направления // *Дифференц. уравнения*, 1987. Т. 23. С. 540–543.

НЕСТАНДАРТНЫЕ СИММЕТРИИ В УРАВНЕНИЯХ ЛАГРАНЖА И ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

г. Долгопрудный, Московский физико-технический институт

В качестве симметрии в конечномерной механической системе понимается преобразование пространства "время-состояние", сохраняющее совокупность движений. Не редок случай, когда симметрию можно усмотреть без вычислений: по виду уравнений или по физической сущности сил, действующих на систему. Отдельно взятая симметрия и даже группа симметрий не всегда позволяет построить первый интеграл. В частности, теорема Э.Нетер для вычисления первого интеграла требует, чтобы преобразования группы симметрий носили вариационный характер [1 — 3]: оставляли неизменным функционал — действие по Гамильтону. Рассматривается более мягкое требование к группе симметрий [2, 3]: динамика системы эквивалентно (с совпадающими совокупностями движений) задается семейством лагранжианов; действие по Гамильтону, соответствующее одному из представителей семейства, переходит под действием преобразования группы к такому же по величине действию, но, возможно, соответствующему другому лагранжиану из семейства. Класс таких — "блуждающих" — симметрий содержит, в частности, конформные и дивергентные симметрии. Показывается, что в этом случае первый интеграл может быть вычислен, исходя из нескольких групп симметрий. Приводятся примеры.

1. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям/ Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 639 с.

2. Яковенко Г.Н. "Блуждающие" симметрии в уравнениях динамики// Проблемы математики в физико-технических и экономических задачах/ Межвед. сб. науч. тр./МФТИ. М.: 1993. С.170-185.

3. Яковенко Г.Н. Групповые свойства динамических систем. Конечномерный случай. М.: Изд. МФТИ, 1994. 140 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00556).

ALGEBROIDS NATURE OF THE SECONDARY CHARACTERISTIC CLASSES

JAN KUBARSKI

The notion of a Lie algebroid comes from J. Pradines [P1, P2, 1967] and was invented in connection with the study of differential groupoids. It should be added that, many years ago, M. Atiyah in 1957 [A] considered the vector bundle TP/G (for a complex G -principal bundle P) in the context of the problem of the existence of a connection in P . The vector bundle TP/G is the total space of the Lie algebroid $A(P)$ of P [K1, M]. Next, differential geometry has discovered many other objects which determine a Lie algebroid — fulfilling a role analogous to that of Lie algebras for Lie groups — as, for example (a) principal bundles [K1, M], (b) vector bundles [K2, M], (c) transversally complete foliations and nonclosed Lie subgroups [MO1, MO2], (d) Poisson manifolds [C-D-W] and others. Observations concerning characteristic homomorphisms on the ground of principal bundles — such as the Chern-Weil homomorphism [K2], the homomorphism of a flat [K4] or a partially flat principal bundle [K8] — show that they depend only on the Lie algebroids of these principal bundles. [This holds although in the Lie algebroid of a principal bundle there is no direct information about the structure Lie group of this bundle (except for its Lie algebra) which may be disconnected]. This enables us to build a theory of characteristic classes for Lie algebroids and, next, to apply this technique to the investigation of TC-foliations, nonclosed Lie subgroups or Poisson manifolds. We mark that the category of Lie algebroids is more elastic than the category of principal bundles and makes it possible to generalize the considerations in the direction of nontransitive (but regular) objects.

(I) *The Chern-Weil homomorphism.* Let A be any regular Lie algebroid over a foliated manifold (M, F) with the Atiyah sequence $0 \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow A \xrightarrow{\gamma} F \rightarrow 0$. In [K2] the Chern-Weil homomorphism $d_A : I_A \rightarrow H_F(M)$, $\Gamma^k \mapsto \frac{1}{k!} \langle \Gamma^k, \Omega \vee \dots \vee \Omega \rangle$ of A (Ω is the curvature form of any connection in A) is constructed, whose domain I_A is the algebra of ad_A -invariant cross-sections of $\bigvee^k \mathfrak{g}^*$, $k \in \mathbb{N}$.

(a) For a Lie algebroid $A(P)$ of a connected principal bundle P , the algebra $I_{A(P)}$ is isomorphic to the algebra of invariant polynomials $(\bigvee \mathfrak{g}^*)_I$ and $h_{A(P)}$ agrees with the Chern-Weil homomorphism of P .

(b) For the tangential case of P over a foliation F of the base manifold M , the domain of the Chern-Weil homomorphism of the regular Lie algebroid $A(P)^F = \gamma^{-1}[F]$ over (M, F) sometimes contains more elements than the simple construction of the tangential characteristic classes given by C. Moore and C. Schochet [M-S]. Such a situation can take place when M is not orientable but all leaves of F are oriented [K3].

(c) Consider now the Lie algebroid $A = T^*M$ of a Poisson manifold $(M, \{\cdot, \cdot\})$ with a characteristic foliation F of codimension 1. The adjoint bundle \mathfrak{g} of (1-dimensional abelian) Lie algebras of the Lie algebroid T^*M is, in substance, the transverse bundle ν^*F of F [D-S]. Assume that F is an \mathbb{R} -Lie foliation. This last condition is equivalent to the fact that \mathfrak{g} admits a nowhere vanishing global cross-section invariant with respect to the adjoint representation [K5] and then giving a nontrivial element, denoted by $\mathbf{1}$, of the domain of the Chern-Weil homomorphism h_A . The Lie algebroid A of such a Poisson manifold is isomorphic to $\mathbb{R} \times \mathbb{F}$ with the structure of a Lie algebra in the space of global cross-sections given by the formula

$$[(f, X), (g, Y)] = (-\Omega(X, Y) + \partial_X g - \partial_Y f, [X, Y]),$$

$f, g \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(F)$, where Ω is an F -tangential closed 2-form (the curvature of an arbitrarily taken connection). Since $h_A(\mathbf{1}) = [\Omega]$, then we see that:

- if Ω is not exact, then the Lie algebroid A admits no flat connection.

(d) Consider any transitive Lie algebroid A with isotropy Lie algebras isomorphic to \mathbb{R} or to $\mathfrak{so}(3)$ and assume that A admits a nowhere vanishing cross-section ε of $\bigwedge^n \mathfrak{g}$ ($n = \dim \mathfrak{g}|_x$, i.e. $n = 1$ for \mathbb{R} and $n = 3$ for $\mathfrak{so}(3)$), being invariant with respect to the adjoint representation of A on $\bigwedge^n \mathfrak{g}$ (then A is called a *spherical Lie algebroid* [K6]). Some principal bundles and some TC-foliations are sources of these Lie algebroids. For a spherical Lie algebroid, we define the Euler class $\chi_A \in H^{n+1}(M)$ and the Gysin sequence joining the cohomology groups of A . The Euler class can be computed via the Chern-Weil homomorphism of A . In the case of the Lie algebroid A over an oriented compact manifold M of dimension $n + 1$, we study

flat connections with isolated singularities: for any such point, we define a real number, called the index, and prove the index theorem joining the index sum with the Euler class. For the \mathbb{R} -Lie algebroids, the index in a singularity cannot be an integer [K7].

(II) *The secondary characteristic homomorphism* in the category of principal bundles concerns the so-called foliated principal bundles equipped with a reduction. More exactly, for a principal bundle $P(M, G)$, a flat partial connection in P over a foliation $F \subset TM$ and an H -reduction $P' \subset P$ (H is a closed Lie subgroup of G), we have a characteristic homomorphism $\Delta : H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})_{q'} \rightarrow H(M)$ where $q' \geq \text{codim} F$, \mathfrak{g} is the Lie algebra of G and $H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})_{q'}$ is the cohomology algebra of the truncated relative Weil algebra $(\wedge(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes \bigvee^{\leq q'} \mathfrak{g}^*)_{I_H}$. Passing to Lie algebroids, we obtain the triple $(A(P), A(P'), \lambda')$ consisting of the Lie algebroid $A(P)$, its Lie subalgebroid $A(P')$ and the corresponding flat partial connection λ' in $A(P)$ over a foliation F . It turns out that the characteristic homomorphism Δ (for P' being connected) is a notion of the triple $(A(P), A(P'), \lambda')$. Therefore it is clear that we can construct the secondary characteristic homomorphism in the category of regular Lie algebroids for the so-called PFS-Lie algebroids (A, B, λ) , i.e. the triples where A and $B \subset A$ are regular Lie algebroids over a foliated manifold (M, F) and λ' is a partial flat connection in A over a subfoliation $F' \subset F$. The functoriality and the independence of the choice of homotopic subalgebroids B are fundamental properties of the secondary characteristic homomorphism. The crucial role in the problem of the homotopic independence is played by the following theorem on a global smooth solution of some system of differential equations with parameters:

- Denote the canonical coordinates on $\mathbb{R}^{\geq} \times \mathbb{R}^{\kappa}$ by $(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n)$. Let C^∞ functions $b_i^k, a_{r_i}^k : \mathbb{R}^{\geq} \times \mathbb{R}^{\kappa} \rightarrow \mathbb{R}$, $r, k \leq q$, $i \leq m$, be given (the domain is the whole Euclidean space!). Consider a system of partial differential equations

$$\frac{\partial z^k}{\partial x^i}(x, y) = -b_i^k(x, y) + \sum_{r=1}^q a_{r_i}^k(x, y) \cdot z^r, \quad k \leq q, \quad i \leq m,$$

satisfying the conditions of local integrability. Then, for an arbitrarily taken C^∞ mapping $g : \mathbb{R}^{\kappa} \rightarrow \mathbb{R}^n$, there exists exactly one globally defined C^∞ solution $z : \mathbb{R}^{\geq} \times \mathbb{R}^{\kappa} \rightarrow \mathbb{R}^n$ such that $z(0, y) = g(y)$, $y \in \mathbb{R}^{\kappa}$.

REFERENCES

- [A] Atiyah, M.F., *Complex analytic connections in fibre bundles*, Trans. Amer. Math. Soc., 85 (1957), 181-207.
- [C-D-W] Coste, A., Dazord, P., Weinstein, A., *Groupoides symplectiques*, Publ. Dep. Math. Universite de Lyon 1, 2/A (1987).
- [D-S] Dazord P., Sondaz D., *Varietes de Poisson — Algebroides de Lie*, Publ. Dep. Math. Universite de Lyon 1, 1/B (1988).
- [K1] Kubarski J., *Lie algebroid of a principal fibre bundle*, Publ. Dep. Math. University de Lyon 1, 1/A, 1989.
- [K2] —, *The Chern-Weil homomorphism of regular Lie algebroids*, Publ. Dep. Math. University de Lyon 1, 1991.
- [K3] —, *Tangential Chern-Weil homomorphism*, Proceedings of GEOMETRIC STUDY OF FOLIATIONS, Tokyo, Nov. 1993, World Scientific, Singapore, 1994, pp. 324-344.
- [K4] —, *Algebroid nature of the characteristic classes of flat bundles*, in press.
- [K5] —, *Fibre integral in regular Lie algebroids*, in press.
- [K6] —, *The Euler class and the Gysin sequence of spherical Lie algebroids*, in press.
- [K7] —, *The Euler-Poincare-Hopf theorem for flat connections with singularities*, in press.
- [K8] —, *Algebroid nature of the characteristic classes of partially flat bundles*, in preparation.
- [M] Mackenzie, K., *Lie groupoides and Lie algebroids in differential Geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series 124, Cambridge, 1987.
- [MO1] Molino, P., *Etude des feuilletages transversalement complets et applications*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 10(3) (1977), 289-307.
- [MO2] —, *Riemannian foliations*, Progress in Mathematics Vol. 73,
- [M-S] Moore, C. & Schochet, C., *Global Analysis on Foliated Spaces*, Mathematical Sciences Research Institute publications; 9, 1988, Springer-Verlag New-York Inc.
- [P1] Pradines, J., *Theorie de Lie pour les groupoides differentiables dans la categorie des groupoides*, Calcul differentiel dans la categorie des groupoides infinitesimaux, C. R. Acad. Sci. Ser.A-B, Paris, 264, (1967), 265-248.
- [P2] —, *Theorie de Lie pour les groupoides differentiables*, Atti Conv Intern Geom 7 Diff. Bologna, 1967, Bologna-Amsterdam.

CONTENTS / СОДЕРЖАНИЕ

<i>Electronic Journal "Differential Equations and Control Processes"</i>	3
Arsenjev D.G., Ivanov V.M., Kulchitsky O.Yu. Effectiveness of Semi-statistical Method: Theory and Numerical Results	6
Balonishnikov A.M., Khartsiev V.E., Kuz'min N.Yu. On Nonlinear Waves with Dissipation	8
Bartosiewicz Z. Real Solutions of Real Differential Equations	9
Begun E.N. Shadowing of Numerical Trajectories for a Flow on a Hyperbolic Set	11
Bodunov N.A. Problem of Local Identifiability from Discrete Observations.....	12
Boikov I.V. Stability of Some Types Partial Differential Equations	14
Boikov I.V. To Aizerman's Problem	16
Burić N., Vasović N. A Simple Model of the Chaotic Immune Responce	18
Burkov I.V., Zaremba A.T. Adaptive Active Control for Engine Speed Oscillation Damping	20
Chentsov A.G., Morina S.I., Zobnin B.B. The Programmed Iterations Method in Systems with a Varying Structure	22
Cheung W-S. On Multi-dimensional Opial-type Inequalities	24
Dmitruk N.M. Synthesis of the Optimal Divident and Investment Policy in a Dynamic Model of the Firm	26
Dubovski P.B. Quasifunctionals as an Approach to Analyzing Systems of ODE's	28
Dudkin A.O., Sbitnev V.I. Coupled Map Lattice Simulation of Epileptogenesis in the Hipocampal Slices	30
Ershev E., Osipenko G. Coordinates near an Invariant Manifold of a Smooth Differential Equations System	31
Finogenko I.A. The Mathematical Theory of Differential Equations Arising in Dynamics of Systems with Dry Friction	32
Flegontov A.V. About Synthesis of Differential Equations and their Groups	33
Fomin V.N., Somova A.A. Stability and Robastness of Linear Difference and Differential Systems	34
Gelig A.Kh., Churilov A.N. Auto-oscillations in Pulse-modulated control systems	35
Grigoriev V.V., Mikhailov S.V., Ryukhin V.Y., Mansurova O.K. Analysis and Synthesis Methods Based on Lyapunov's Method	37
Horberlt W., Timmer J., Melzer W. Estimating Parameters in Nonlinear Differential Equations	

with Application to Physiological Data	39
Hsieh Ying-Hen. Two-sex Model for Treatment of HIV and Behavior Change in a Growing Population	40
Jordan V. The Capture of Hydrodynamical Shock in the Case of the Nonlinear Wave Equation	41
Khan Q.J.A. A Mathematical Model of Multiparty Political System	43
Knežević-Miljanović J. An Asymptotic Analysis of Differential Equations	46
Kolbina S.A. Local Identifiability of a Parabolic Equation from Discrete Observations	47
Krishnan E.V. Travelling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations	48
Lima P.M., Carpentier M. Numerical and Asymptotic Approximation of a Singular Boundary-value Problem	50
Lukyanov G. Identification of Parameters of Technical Systems on the Basis of Deterministic Chaos Theory	51
Petcu D. Computer Environment for Numerical ODE Solvers	53
Pilyugin S.Yu. Shadowing near the Global Attractor for a Semilinear Parabolic Equation	56
Plamenevskaya O.B. Weak Shadowing in Two-dimensional Diffeomorphisms	57
Pustovoit M.A., Sbitnev V.I. "Spiral Wave –travelling Clustering" Intermittency and $1/f$ –Noise in a 2D Coupled Map Lattice	58
Scow D.W. Homoclinic Points for Dissipative E^n -automorphism	59
Sesekin A.N. Nonlinear Dynamic Systems with Impulse Structure	60
Steinkamp O. Melnikov's Method for Random Dynamical Systems	61
Zavalishin D.S., Zavalishin S.T. Nonlinear Differential Equations in Distributions for Transport Manipulators in a Viscous Medium	63
Zhu J. Local Time Stepping Algorithms for Solving Ordinary Differential Equations	65
Zubov S.V. Self-oscillations in Hysteresis Systems	66
<i>Электронный журнал "Дифференциальные уравнения и процессы управления"</i>	69
Акунова А., Акунов Т.А., Ушаков А.В. Оценка качества решений дифференциальных уравнений с помощью систем сравнений минимальной достаточности	72
Ампилова Н.Б. Нахождение периодических точек в окрестности инвариантных кривых отображения Гардини	74
Ананьевский И.М. Управление двухмассовыми системами в условиях неопределенности ...	76
Басов В.В., Бибиков Ю.Н. Бифуркация положения равновесия системы дифференциальных уравнений в критическом случае двух чисто-мнимых и двух нулевых корней	

характеристического уравнения	77
Бильченко Г.Г. Однозначность обобщенных интегралов Чизотти	79
Бильченко Н.Г. Об особой роли группы переносов по независимой переменной в задачах оптимального управления ламинарным пограничным слоем	80
Близоруков М.Г., Логинова Е.В. Групповой подход к исследованию линейной системы разностных уравнений с непрерывным аргументом	81
Бобылев Н.А., Коровин С.К. Некоторые задачи робастной устойчивости	83
Богатушин И.Я. Обобщение методов решения систем нелинейных дифференциальных уравнений	84
Бойкова А.И. Об одном приближенном методе решения дифференциальных уравнений	86
Боревич Е.З., Чистяков В.М. Нелинейная краевая задача, описывающая распределение зарядов в полупроводниках	88
Бородулин М.Ю. О сохранении полной механической энергии консервативной системы при численном интегрировании ее дифференциальных уравнений	89
Бородулин М.Ю. Точность явных одношаговых методов численного интегрирования с областями устойчивости, растянутыми вдоль осей комплексной плоскости	91
Бурова И.Г. О построении одномерных и многомерных координатных функций	93
Волков Д.Ю. Бифуркации инвариантных торов при сильных резонансах	94
Горский А.А., Локшин Б.Я., Розов Н.Х. Динамическая модель рынка двух товаров	96
Гурьянов А.Е. Сведение двухточечной линейной стохастической краевой задачи с квазиполиномиальной неоднородностью к задаче Коши	97
Демьянович Ю.К. О построении вариационно-разностного метода для задач с сильным вырождением	99
Дербенева Б.П., Чернышев В.Е. Рождение гиперболического инвариантного множества при расщеплении гетероклинического цикла типа Лоренца	100
Ефремова С.С. Устойчивость и бифуркации в одной дискретной модели динамики возрастной структуры популяций	102
Забирехин П.Б., Суханов А.А. К численному определению периодических решений дифференциальных уравнений	103
Зайка Ю.В., Попов В.В. Идентификация модели водородопроницаемости двухслойных мембран	104
Зайцев В.Ф., Малышев Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения (символично-	

групповой подход)	106
Зайцев В.Ф., Ноздрунов Н.В., Флегонтов А.В. Обработка математических выражений в информационной системе «Дифференциальные уравнения»	108
Зарубин А.Н. Аналог задачи Геллерстедта для уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом	111
Зарубин Е.А. О единственности решения начально-краевой задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка с запаздывающим аргументом	112
Зехцер М.Ю., Игнатович П.С., Г.М.Чечин Исследование двумерных нелинейных колебаний для полиномиальных динамических систем с дискретной симметрией во внешнем периодическом поле	114
Зубер И.Е., Дроздов А.А. Спектральная стабилизация нелинейных систем	116
Иванов Б.Ф. Об ограниченности и гладкости по параметрам решений одного класса линейных систем	117
Иванов В.К. Метод приближенного решения в квадратурах некоторых линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами	118
Иртегов В.Д. Об особенностях, связанных с перестройкой первых интегралов	119
Исполов Ю.Г., Постоялкина Е.А., Шабров Н.Н. Новые методы численного интегрирования уравнений связанной задачи термоупругости	120
Колесов Ю.Б., Парийская Е.Ю., Сениченков Ю.Б. Построение, решение и анализ свойств систем алгебро-дифференциальных уравнений в пакете Model Vision 3.0	122
Кондратьева Н.В., Леонов Г.А., Родюков Ф.Ф., Шепелявый А.И. Об устойчивости дифференциальных уравнений асинхронной машины	124
Крыжевич С.Г. Об условной устойчивости неаналитических систем обыкновенных дифференциальных уравнений	126
Кузнецов Д.Ф. Использование различных полных ортонормированных систем функций для численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	128
Кузнецов Д.Ф. Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций	130
Кульчицкий О.Ю. Адаптивное моделирование стохастических систем управления с	

коррелированными гауссовскими возмущениями	132
Кусюмов А.Н. О точечных симметриях квазилинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными	133
Леонов Г.А., Смирнова В.Б., Содебака Г. Новые классы функций Ляпунова для исследования асимптотических свойств систем маятникового типа	134
Мироновский Л.А. Избыточные системы дифференциальных уравнений	135
Осипенко Г.С., Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В. Структура информационной системы «Дифференциальные уравнения»	136
Пенкин О.М. О некоторых свойствах решений эллиптических неравенств на стратифицированном множестве	139
Петров В.В. О геометрической интерпретации топологических типов равновесия РФП моделей 2 порядка	140
Петров Н.Н., Плисс П.В. О функции Беллмана в задаче быстрогодействия	142
Позняк Л.Т. К вопросу о сходимости методов промежуточных задач	143
Покорный Ю.В., Боровских А.В., Шабров С.А. О колеблемости уравнений с обобщенными коэффициентами	145
Покорный Ю.В., Прядиев В.Л. О нелинейных краевых задачах на пространственных сетях	146
Покорный Ю.В., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Покровский А.Н. Уравнения электрического поля дендрита нервной клетки	147
Покровский А.Н. Аппроксимация релаксационных колебаний колебаниями релейных систем	149
Румянцева Е.В., Зарубин А.Н. Начально-краевая задача для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом	150
Савков С.А., Юшканов А.А. Аналитическое решение кинетического уравнения Больцмана в задачах об источниках тепла и частиц	151
Савкова О.В., Зарубин А.Н. Теорема единственности решения начально-краевой задачи для уравнения смешанного типа с кратным запаздыванием	152
Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции и визуализации в интегрируемых вариационных задачах	153
Сахненко В.П., Чечин Г.М. Нелинейные колебания в динамических системах с дискретной симметрией	154

Семенова Н.В., Краснощеков В.В. Решение уравнения Шредингера для задачи псевдопересечения квадратичных термов двухатомной системы	156
Соколов Б.М., Фомин В.Н. Алгоритм самонастройки для стабилизации каскадных систем с неизвестными параметрами	157
Соколов В.Ф. l_1 Субоптимальные робастные регуляторы для дискретного скалярного объекта управления	159
Степанов М.Ф. Метод компенсации методической погрешности систем управления с нейронным вычислителем управляющего воздействия	161
Степанов М.Ф. Оценка точности систем управления с нейронным вычислителем управляющего воздействия	163
Токарев С.П. Метод усреднения и локальная эквивалентность	165
Флегонтов А.В. Индуцируемые симметрии синтезируемых уравнений	166
Хрящев С.М. Метод бифуркационных диаграмм исследования управляемости динамических систем на двумерных компактных ориентируемых многообразиях	168
Чередниченко В.Г., Лекарев В.М. Интерполяционно-экстраполяционный метод решения нелинейной задачи массопереноса через полупроницаемую поверхность при наличии прямого и обратного осмоса	170
Чурин Ю.В. О существовании интегрального многообразия в окрестности исключительного направления	171
Яковенко Г.Н. Нестандартные симметрии в уравнениях Лагранжа и первые интегралы	172
Kubarski J. Algebroids Nature of the Secondary Characteristic Classes	173
Contents / Содержание	175
<i>О создании электронной базы данных о российских специалистах в области дифференциальных уравнений, динамических систем и процессов управления</i>	181

На базе электронного журнала "Дифференциальные уравнения и процессы управления" (адрес журнала в ИНТЕРНЕТ <http://www.neva.ru/journal>) создается база данных (на русском и английском языках) о Российских специалистах и специалистах СНГ в области теории дифференциальных уравнений, динамических систем, процессов управления и областях, смежных с ними. Создаваемая база данных будет иметь свободный доступ в сети ИНТЕРНЕТ. В связи с созданием базы данных просим Вас заполнить следующую форму и отправить ее по электронной (или обычной) почте по адресу:

ershov@eug.usr.abu.spb.ru и (или) **database@osipenko.stu.neva.ru**

Россия 198005 Санкт-Петербург
2-я Красноармейская, 4
Архитектурно-строительный университет
Кафедра высшей математики, Ершову Е.К.

Мы были бы весьма признательны, если Вы сочли возможным распространить эту форму среди заинтересованных лиц.

Заранее Вам благодарны, проф. Г.С. Осипенко,
Редактор электронного журнала
"Дифференциальные уравнения и процессы управления"

Форма, включаемая в базу данных

1. Фамилия
2. Имя
3. Отчество
4. Фамилия (на английском языке)
5. Имя (на английском языке)
6. Отчество (на английском языке)
7. Год рождения
8. Место рождения
9. Высшее учебное заведение, которое закончил, и год окончания
10. Ученая степень и год ее присуждения
11. Ученое звание и год его присвоения
12. Членство в Российской и других академиях наук
13. Членство в математических обществах
14. Участие в редколлегиях журналов
15. Место работы
16. Должность
17. Почтовый адрес места работы
18. Область научных интересов (ключевые слова, не более 15)
19. Рабочий телефон (только один), код города в скобках
20. Факс (только один)
21. Адрес электронной почты (только один)

Лицензия ЛР № 020593 от 9.08.97

Подписано в печать *12.05.98*. Объем в п.л. *20,75*.
Тираж *250*. Заказ № *322*.

Отпечатано с готового оригинал-макета
Оформлено в Издательстве СПбГУ
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29