ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ РАН им. В.А.СТЕКЛОВА

275 лет
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Основана в 1724 году

"ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-X"
на Воронежской весенней математической школе
"СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ"

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
(3-9 мая 1999 г.)

Воронеж — 1999

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ РАН им. В.А.СТЕКЛОВА

275 лет
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Основана в 1724 году

"ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-Х"

на Воронежской весенней математической школе

"СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ"

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

(3-9 мая 1999 г.)

Воронеж — 1999

УДК 517.94 (92; 054; 97)

"Понтрягинские чтения - X." Тезисы докладов. — Воронеж, ВГУ, 1999 — с.

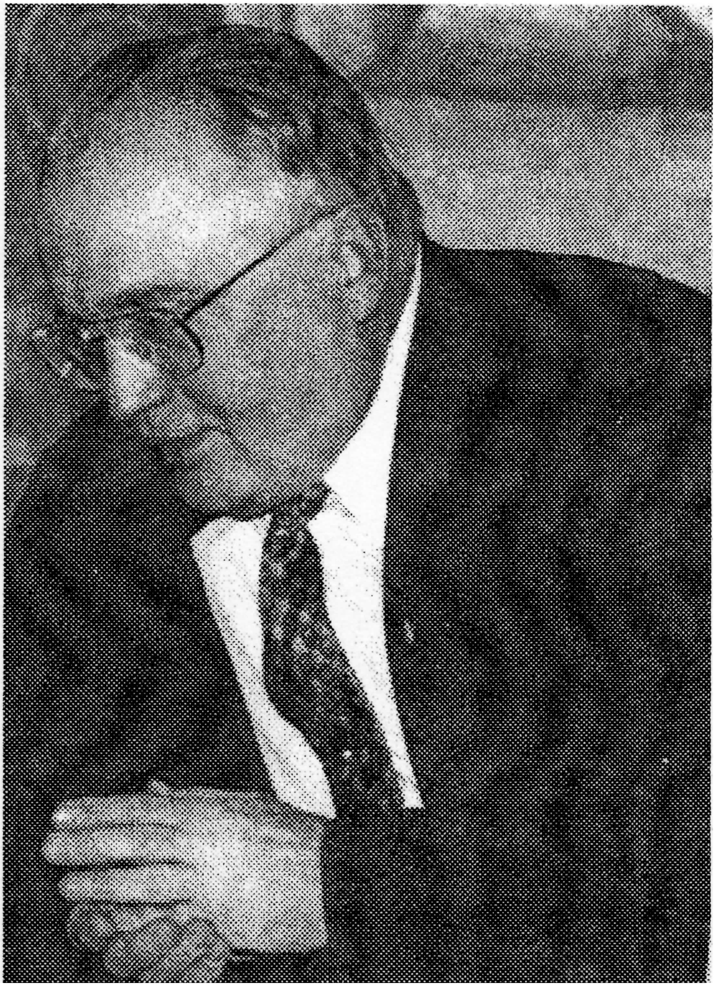
В сборнике представлены тезисы докладов и лекций, сделанных на Воронежской весенней математической школе. В работе конференции приняли участие учение более чем из 50 городов России и ближнего зарубежья.

Тематика охватывает широкии спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр, а также проблем преподавания математики.

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ: В.А.Ильин — председатель, Ю.С.Осипов — сопредседатель, С.В. Емельянов — сопредседатель, Ю.В.Покорный — зам. председателя, В.Г.Звягин — зам. председателя, С.К. Коровин, А.Б.Куржанский, Е.Ф.Мищенко, С.М. Никольский, В.А.Садовничий, Д.Д.Ивлев, Т.Я.Азизов, Н.А.Бобылев, А.Г.Баскаков, П.Л.Григоренко, А.В.Кряжимский, А.С.Мищенко, Е.И.Моисеев, S.Nicaise, М.С.Никольский, А.И.Перов, А.С.Потапов, А.И.Прилепко, В.Д.Репников, Н.Х.Розов, Ю.И. Сапронов, В.А.Соболев, В.М.Тихомиров, А.П.Хромов, А.В.Боровских — ученый секретарь.

ОРГКОМИТЕТ: В.А.Ильин — председатель, И.И.Борисов — сопредседатель, Ю.В.Покорный — зам. председателя, А.С.Сидоркин — зам. председателя, М.А.Артемов, Н.А.Бобылев, Г.А.Гончарова, М.И.Зеликин, А.В.Куркина, М.С.Никольский, А.С.Печенцов, А.Ю.Попов, В.В.Провоторов — ученый секретарь, Ю.А.Савинков, Ю.И.Сапронов, В.В.Сысоев, В.П.Трофимов, Ю.В.Чеботаревский.

Оргкомитет благодарит за поддержку Российский фонд фундаментальных исследований.



В этом году школа посвящена 60-летнему юбилею академика Виктора Антоновича Садовничего, ректора Московского государственного университета.

УДК 514.774+514.774.8+515.179

Метрические характеристики звездного тело $\mathfrak{K}^m$

Абдыманапов У.У. (ИМ НАН КР, г.Бишкек)

Как известно, в топологии и функциональном анализе уделяется достаточно большая внимания введению топологии и метрик в пространствах, элементарными которых являются различные системы подмножеств топологического или метрического пространства. При рассмотрении метрических пространств обычно специально выделяют пространства компактных выпуклых множеств. В этой работе в качестве специального пространство выделяется множество Θ^m всех компактных звездчатых выпуклых тел $\mathfrak{K}^m \subset \mathcal{E}^m$, которые обычно метризуется по Хаусдорфу.

Следует отметить, что приведенная ниже утверждения, очень геометрическая по форме и по содержанию и имеет довольно красивых следствий.

Теорема . Пусть $\mathfrak{K}$ – произвольный звездообразный компакт в евклидовом пространстве $\mathcal{E}^m$. И пусть для любого набора последовательности точек $\{\xi_i\}_{i=1}^{(m+1)} \subset \mathfrak{K} \subset \mathcal{E}^m$ подобрано такая точка $\eta \in \mathcal{E}^m$ единственным образом, что $I = [\xi_i, \eta] \in \mathfrak{K} \subset \mathcal{E}^m$ для любого $i \ (i = \overline{1,(m+1)})$ причем $\bigcap_{i=1}^{(m+1)} \xi_i \neq 0$. Тогда произвольный звездообразный компакт $\mathfrak{K} \subset \mathcal{E}^m$ является звездными относительно подобранной единственным образом точки $\eta \in \mathcal{E}^m$.

УДК 514.774+514.774.8+515.179

Топология звездного тело $\mathfrak{X}^m$ и построение его $\mathfrak{X}^m_i$ – расщеплений

Абдыманапов У.У. (ИМ НАН КР, г.Бишкек)

Дацим следующие

Определение 1. Множество $\mathfrak{X}^m = \{(\xi \in R) \subset \mathcal{E}^m : |\Theta_{\mathfrak{X}^m}(\xi)| = |\inf_{\tau\xi \in \mathfrak{X}^m}(\tau)| < 1\}$ называется звездным телом. если начало 0 является внутренней точкой множество $\mathfrak{X}^m$ (возможен и случаи, когда $|\Theta_{\mathfrak{X}^m}(\xi)| = 0$), либо найдется такое $\tau_* \in Z$, $\tau_* = (|\Theta_{\mathfrak{X}^m}(\xi)|^{-1}) > 0$, что луч $(\tau\xi) \in \mathfrak{X}^m$ является внутренней точкой множество $\mathfrak{X}^m$ при $(\tau < \tau_*)$ и внешней при $(\tau > \tau_*)$.

Определение 2. Полиэдральный m – элемент называется звездным, если $Fr.\,star_\sigma(\sigma_i) = star(sphere)^{m-1}$ или $Fr.\,star_\sigma(\sigma_i) = star_\sigma(\sigma^m)$.

Определение 3. Полиэдральная m – мерная $(sphere)^m$ называется звездной, если $Fr.\,star_\sigma(\sigma_i) = star(sphere)^{m-1}$

Построение $\mathfrak{X}^m_i$ – расщеплений звездного тело $\mathfrak{X}^m \subset \mathcal{E}^m$ при $m \leq 3$ равносильно доказательству следующей теоремы, близкая по изложению к гипотезу Уильяма Терстона "о геометризации" в [1]

Теорема. Пусть $\mathfrak{X}^3 \subset \mathcal{E}^3$ – произвольное, трехмерное компактное звездное многообразие. И пусть $\mathfrak{X}^3 \subset \mathcal{E}^3$ разбито вложенными в него попарно непересекающимися двумерными звездчатыми $disk(\mathfrak{X}^2) \subset \mathfrak{X}^3 \subset \mathcal{E}^3$ или двумерными звездчатыми расслоенными $cyl.(\mathfrak{X}^2) \subset \mathfrak{X}^3 \subset \mathcal{E}^3$ и 2 – звездными элементами $star_\sigma(\sigma^2) \in \mathfrak{X}^3 \subset \mathcal{E}^3$ на звездчатые дольки. Тогда, склеенные 3 – звездными элементами $star_\sigma(\sigma^3) \in \mathfrak{X}^3 \subset \mathcal{E}^3$ любой $Fr.\,disk(\mathfrak{X}^2_i) \subset \mathfrak{X}^3 \subset \mathcal{E}^3$ допускает геометрическую структуру в звездном теле $\mathfrak{X}^3 \subset \mathcal{E}^3$.

Литература

1. Thurston W.P. The geometry and topology of 3-manifolds. Mimeografed Lecture Notes. Princeton Univ. 1978/79; Ch.1-9; 1980. Ch.11,13.

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ НЕИЗВЕСТНОГО НАЧАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ СОПРЯЖЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА [1]

Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н. (Москва)

В докладе рассматривается задача минимизации энергетического функционала на траекториях линейной управляемой системы с выпуклым геометрическим ограничением на управление:

(1) $$\dot{x} = Ax + u, \quad u \in U; \quad x(0) = x_0, x(T) = 0, \quad L(u) = 0.5 \int_0^T \|u(t)\|^2 \, dt \mapsto \min.$$

Область управления U - выпуклый компакт, $0 \in \operatorname{int} U$, длительность T процесса предполагается больше времени быстродействия. Поиск оптимального решения задачи (1) сводится к решению краевой задачи принципа максимума Понтрягина

(2) $$\dot{x} = Ax + u_*(\psi), \quad \dot{\psi} = -A^*\psi, \qquad x|_{t=0} = x_0, x|_{t=T} = 0,$$

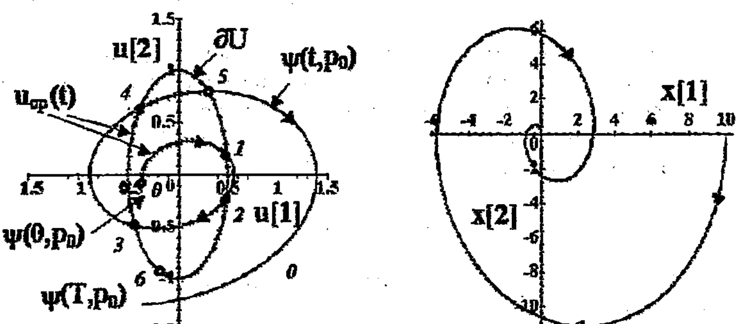
(3) $$u_*(\psi) = \operatorname{argmax}_{u \in U} K,$$

здесь (3) — экстремальное управление, определяемое из условия максимума $K \mapsto \max_{u \in U}$ для функции Гамильтона - Понтрягина $K = -\|u\|^2/2 + (\psi, Ax + u)$. Краевая задача (2) нелинейна, причем нелинейность (3) представляет проекцию точки ψ на выпуклый компакт U: $\|u_*(\psi) - \psi\| = \min_{u \in U} \|u - \psi\|$. Неизвестный, разрешающий краевую задачу (2), параметр $\psi(0) = p_0$ допускает [1] экстремальное описание как минимизатор выпуклой функции $V(\cdot) : R^n \mapsto R^1$, которая строится по исходным данным задачи (1):

$$p_0 = \operatorname{argmin}_{p \in R^n} V(p), \quad V(p) \equiv (p, x_0) + \int_0^T \kappa(e^{-sA^*} p) \, ds, \quad \kappa(\psi) \equiv \max_{u \in U}[(u, \psi) - \|u\|^2/2].$$

Последние функции имеют непрерывные градиенты $\kappa'(\psi) = u_*(\psi)$, $V'(p) = x_0 + \int_0^T e^{-sA}\kappa'(e^{-sA^*} p) \, ds$, причем $\kappa(\psi) \to +\infty, \|\psi\| \to \infty$; $V(p) \to +\infty$, $\|p\| \to \infty$. Оптимальное значение функционала $L_{op} = -V(p_0)$. Таким образом, решение задачи (1), сложной нелинейной вычислительной проблемы, сведено к выпуклой конечномерной задаче безусловной минимизации функции V. Указанное экстремальное описание разрешающего параметра может быть положено в основу численных алгоритмов решения нелинейной краевой задачи (2). Разработана программа для решения задачи (1) в среде MAPLE. Область управления выбрана в форме эллипсоида. Оптимальное управление может быть чисто граничным, либо чисто внутренним, или же содержать ряд чередующихся граничных и внутренних участков.

Пример. Для $n = 2$, $A = [[0, 1], [-2, -0.4]]$, $U = \{(Qu, u) \le 1\}$, $Q = [[4, 0], [0, 1]]$, $x_0 = (10, 0)$, $T = 8$ вычисления дают: $p_0 = (-0.35839346, -0.03590161)$, $V(p_0) = -1.33805794$, $\|x(T)\| < 10^{-5}$. На левом рисунке показаны область управления, сопряженная переменная и оптимальное управление (кривая *0123456*, помеченная плюсами) с чередующимися тремя внутренними и тремя граничными участками, на правом — оптимальная траектория на фазовой плоскости.



Литература

1. *Y.N.Kiselev. Extremal property of the initial value of the adjoint variable in the minimization problem of the energy functional on trajectories of linear systems with constrained controls. // Journal of Math. Sciences, 1998.*

[1] Работа поддержана фондом "Университеты России — Фундаментальные Исследования", пр. 43. 5199.

Теорема единственности решения задачи Трикоми- Неймана для уравнения смешанного типа

Акимов А.А., Тимербулатова Э.М. (Стерлитамак)

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = F(x,y), \qquad (1)$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, в области D, ограниченной кусочно - гладкой кривой Г, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(a,0)$ и $B(b,0)$, $a < b$, характеристиками AC и CB уравнения (1) при $y < 0$. Пусть М-любая точка кривой Г. Обозначим через $\Gamma_1 = \breve{AM}, \Gamma_2 = \breve{BM}$.

Задача ТН . Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D \cup \Gamma_2) \wedge C^2(D_+ \cup D_-), \qquad (2)$$

$$Lu \equiv F(x,y), \ (x,y) \in D_- \cup D_+, \qquad (3)$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{AC \cup \Gamma_1}, \qquad (4)$$

$$\delta_s[u] + \alpha u = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_2 \qquad (5)$$

где φ, ψ, α – заданные достаточно гладкие функции,

$\delta_s[u] = K(y)u_x\frac{dy}{ds} - u_y\frac{dx}{ds}, D_+ = D \cap \{y > 0\},\ D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Отметим, что задача Трикоми-Неймана впервые была поставлена Ф.И. Франклем [1] в связи с решением задачи об обтекании клина сверхзвуковым потоком. В работе [2] получена теорема единственности решения задачи ТН для уравнения Трикоми при дополнительном условии $u(B) = 0$.

В данной работе при некоторых ограничениях на коэффициенты уравнения (1) установлены экстремальные свойства решений задачи Трикоми-Неймана в областях эллиптичности и гиперболичности. На основании этих свойств получена единственность решения задачи ТН без ограничений геометрического характера на кривую Г.

Литература

1. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М., 1973.

2. Мелентьев Б.В. О теоремах единственности решения некоторых краевых задач для уравнений смешанного типа. ДАН. Т.143, №1, 1962. С.38-41.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ГРАНИЧНЫМИ ДАННЫМИ В L_p, $1 < p < \infty$. [1]

Александров А.В. (Владимир)

Пусть Γ_0 – простой гладкий контур, и α_j : $j = 1, \dots, m$ – семейство гладких сдвигов $\Gamma_0 \to \Gamma_j$, введенное для многосвязной области $D \subseteq R^2$ с ориентируемой границей $\Gamma = \cup_{j=1}^{m} \Gamma_j$. Для эллиптической системы

$$\sum_{i,j=1,2} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \ a_{ij} \in \mathrm{R}^{\ell \times \ell} \tag{1}$$

в области D рассматривается нелокальная краевая задача

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{m} A_{ij} \ u^+ \circ \alpha_j = f_i, \quad i = 0, \dots, m_0 \\ \sum_{j=1}^{m} (B_{ij}^1 u_{x_1}^+ \circ \alpha_j + \ B_{ij}^2 u_{x_2}^+ \circ \alpha_j \ + \ B_{ij}^0 \ u^+ \circ \alpha_j) = f_i, \ i = m_0 + 1, \dots, m. \\ f = (f_1, \dots, f_{m_0}, \dots, f_m) \in L_p(\Gamma_0), \ \ 1 < p < \infty, \ \ 0 < m_0 \le m. \end{array} \right. \tag{2}$$

Здесь $u^+ \circ \alpha_j$, $u_{x_1} \circ \alpha_j$, $u_{x_2}^+ \circ \alpha_j$ угловые граничные значения вектора решения u и его частных производных, снесенные сдвигами α_j с Γ_j на Γ_0; A_{ij}, $B_{ij}^0, B_{ij}^1, B_{ij}^2$ – наборы действительных $\ell \times \ell$ матриц-функций на Γ_0 достаточной гладкости. В краевом условии на Γ_0 задается ровно $m\ell$ скалярных линейных соотношений. Сопоставим краевой задаче (1)-(2) $\ell \times \ell$ матрицы функции на Γ_0:

$$G_{ij}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} A_{ij} s_1 |\alpha_j'| \ b + A_{ij} s_2 |\alpha_j'| \ b \ J, & i = 0, \dots, m_0, \\ B_{kj}^1 b + B_{kj}^2 \ b \ J, & i = m_0 + 1, \dots, \end{array} \right.$$

Здесь $s(t) = (s_1, s_2)$ единичный вектор касательной к Γ_0 в точке t, матрицы $b, J \in C^{\ell \times \ell}$ вычисляются по коэффициентам эллиптической системы и участвуют в общем представлении решений u. Введем m - вектор сигнатуры ориентации e с компонентами

$$e_j = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{если } \Gamma_j \quad \text{ориентации} \Gamma_j \text{ и } \Gamma_0 \text{ совпадают} \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{array} \right.$$

Теорема *Пусть* $u \in e_p^1(D)$ [1]. *Тогда нетеровость краевой задачи* $(1) - (2)$ *в* $L_p(\Gamma_0)$ *равносильна выполнению условия*

$$\det G^e(t) \neq 0, \quad \forall t \in \Gamma_0,$$

с матрицей функцией

$$G^e(t) = (G_{ij}^e(t))_1^m, \qquad G_{ij}^e = \left\{ \begin{array}{ll} G_{ij}, & e_j = 1 \\ \overline{G}_{ij}, & e_j = -1 \end{array} \right. .$$

Подсчитан также индекс краевой задачи. Результат получен путем нетерово - эквивалентной редукции (1) - (2) к системе сингулярных интегральных уравнений в предположении $f_1', \dots, f_{m_0}' \in L_p(\Gamma_0)$, $B_{ij}^k \in H(\Gamma_0)$, $A_{ij} \in H^1(\Gamma_0)$, где символ $'$ означает дифференцирование по длине дуги Γ_0. В классах Гельдера H^k и Гельдера с весом более общий случай нелокальной краевой задачи исследован А.П. Солдатовым в [2].

Литература

[1] Александров А.В. Задача Пуанкаре для систем второго порядка на плоскости в классах типа Харди // Дифф. уравнения. – 1997. – т.33, N8. – С.1069 – 1075.

[2] Солдатов А.П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. Части I – II // Изв. РАН. Сер. матем. – 1991.– Т. 55, NN 3,5.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ(проект №99-01-00893)

О ГЕЛЬДЕРОВОСТИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЕСОМ НЕ ИЗ КЛАССА МАКЕНХАУПТА

Алхутов Ю.А., Жиков В.В. (Владимир) [1]

Изучается внутренняя гладкость решений вырождающихся эллиптических уравнений вида

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} (\omega(x) u_{x_i})_{x_i} = 0,$$

где $\omega(x) \geq 0$ - весовая функция. Предполагается, что область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, где рассматривается уравнение, разделена гиперплоскостью $\Sigma = \{x : x_n = 0\}$ на части $D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\}$, $D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\}$ и $\omega(x) = \omega_i(x)$ в $D^{(i)}$, $i = 1, 2$, где $\omega_i(x)$ удовлетворяют A_2 - условию Макенхаупта. Последнее означает, что для стандартных кубов Q с лебеговой мерой $|Q|$ справедливо соотношение

$$\sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \left(|Q|^{-1} \int_Q \omega_i \, dx \right) \left(|Q|^{-1} \int_Q \omega_i^{-1} \, dx \right) = M_i < \infty. \tag{1}$$

для кубов Q_r с длиной ребра r и центрами на Σ при $r \leq r_0$ требуется выполнение неравенства

$$\frac{\omega_1(x)}{\omega_1(Q_r)} \leq C \frac{\omega_2(x)}{\omega_2(Q_r)}, \quad x \in Q_r, \tag{2}$$

где $\omega_i(Q) = \int_Q \omega_i \, dx$, а C не зависит от Q и r.

Условиям (1)-(2) удовлетворяют и функции $\omega(x)$, для которых A_2 - условие Макенхаупта не имеет места. Примером служит вес $\omega(x) = |x|^{\alpha_1}$ в $D^{(1)}$, $\omega(x) = |x|^{\alpha_2}$ в $D^{(2)}$, где $-n < \alpha_2 < \alpha_1 < n$.

Под решением понимается функция класса

$$W^1_{2,loc}(D, \omega) = \{u : u \in W^1_{1,loc}(D), \ |\nabla u|^2 \omega \in L^1_{loc}(D)\},$$

для которой интегральное тождество выполнено на пробных функциях из $C_0^\infty(D)$. Нетрудно показать, что множество гладких функций плотно в $W^1_{2,loc}(D, \omega)$.

Установлена внутренняя априорная оценка нормы Гельдера решений. Ранее аналогичный результат был получен, когда A_2 - условию Макенхаупта удовлетворяет $\omega(x)$. Отметим следующее интересное наблюдение: если $\omega_i(x) = C_i$, где $0 < C_1 < C_2$, то постоянная Гельдера не зависит от C_i, а зависимость нормы Гельдера от C_i определяется только максимумом модуля решения.

[1] Работа выполнена при поддержФе Р И, проеФты 99-01-00072 и 99-01-00893

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЯЮЩИМИ СИЛАМИ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Андреев А.С., Бойкова А.А. (г.Ульяновск)

Рассматривается управляемая голономная механическая система с n обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$, на которую действуют внешние линейные диссипативные и управляющие силы, так что движение системы описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = U_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\dot{q}_j(t)$$

$$\left(T = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \quad f_{ij} = -f_{ji} = \mathrm{const}\right)$$

Датчики координат позволяют измерять координаты системы с некоторыми конечными запаздываниями $r_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ во времени.

Ставится задача определения управляющих сил, которые позволили бы по этим измерениям обеспечить асимптотическую устойчивость положения равновесия системы $\dot{q}(t) = q(t) = 0$.

Найдены условия, при которых эта задача решается управляющими силами потенциального типа

$$U_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}(q_1(t - r_1(t)), \ldots, q_n(t - r_n(t)))$$

$\Pi = \Pi(q)$ — определенно-положительная функция.

Работа выполнена по программе "Университеты России"- 99.

О СТАБИЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Андреев А.С., Павликов С.В. (Ульяновск)

Решается задача синтеза управления в нелинейной управляемой системе с запаздывающей обратной связью.

Рассматривается управляемая система, описываемая функционально-дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, u) \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — вектор фазовых координат, $|x|$ — норма в R^n, $t \in R^+$ — время, $x_t \in C$ — функция, C — множество непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^n$ с нормой $\|\varphi\| = \sup(|\varphi(s)|; -h \le s \le 0)$, $u \in R^r$ — вектор управления.

Пусть $f(t, 0, 0) \equiv 0$. Задача синтеза управления состоит в нахождении непрерывного управления $u = u(t, x_t)$, $u(t, 0) = 0$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость невозмущенного состояния системы (1) $x = 0$. Достаточные условия решения этой задачи можно найти согласно следующей теореме.

Теорема. Предположим, что существует управление $u = u^{\circ}(t, x_t)$ и функционал $V : R^+ \times C \to R$, такие что

1) функция $f_{\circ}(t, x_t) = f(t, x_t, u^{\circ}(t, x_t))$ удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решений от начальных условий и предкомпактности системы (1)

2) $h_1(|\varphi(0)|) \le V(t, \varphi) \le h_2(\|\varphi\|)$, $\dot{V}(t, \varphi) \le -W(\varphi) \le 0$;

3) не существует решения $x = x(t)$ предельного уравнения

$$\dot{x}(t) = f_{\circ}^*(t, x_t), \; f_{\circ}^*(t, \varphi) = \lim_{t_n \to +\infty} f_{\circ}(t_n + t, \varphi)$$

вдоль которого $W(x_t) \equiv 0$, кроме нулевого, $x(t) \equiv 0$.

Тогда управление $u = u_{\circ}(t, x_t)$ решает задачу синтеза, обеспечивая равномерную асимптотическую устойчивость состояния $x = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-01005).

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С ПОТЕНЦИАЛАМИ — СУММАМИ ЭКСПОНЕНТ

Андрианов А.Ю. (Москва)

В работе исследуется класс дифференциальных операторов, порождённых дифференциальным выражением $l(y) \equiv -y'' + q(x)y$ в пространстве $L_2(-\infty; +\infty)$ в предположении, что коэффициент $q(x) = \sum\limits_{l=1}^{k} c_l e^{i\gamma_l x}$, где $c_l \in \mathbb{C}, \gamma_l > 0$. Установлена связь между спектральными данными κ_n и обобщённой спектральной матрицей.

Спектральные данные были введены М.Н. Симбирским, который решил по ним обратную задачу и указал метод решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с начальным потенциалом вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n e^{is_n x}$, основанный на эволюции спектральных данных.

В настоящей работе вычислено ядро обратного оператора преобразования для оператора с потенциалом $\sum\limits_{l=1}^{k} c_l e^{i\gamma_l x}$, показано, что элементы обобщённой спектральной матрицы для такого оператора имеют вид

$$R_{11} = \frac{1}{2\pi} + c_{110}\delta(s) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{11n}(\delta(s - s_n/2) + \delta(s + s_n/2)),$$

где s_n — элементы множества — замыкания по сложению множества $\{\gamma_l\}_{l=\overline{1,k}}$, занумерованные в порядке возрастания, и аналогично R_{12}, R_{21}, R_{22}. Указан способ нахождения выражений для чисел c_{11n}, $c_{12n}, c_{21n}, c_{22n}$ в терминах c_l и γ_l.

Сопоставляя равенство Парсеваля-Марченко и формулу спектрального разложения, установленную автором, приходим к некоторой бесконечной системе уравнений, связывающей спектральные данные κ_n и числа $c_{11n}, c_{12n}, c_{21n}, c_{22n}$.

Основным результатом работы является формула

$$\kappa_n s_n p_n = 4c_{21n} - 4c_{12n},$$

где последовательность p_n допускает бесконечное асимптотическое разложение по отрицательным степеням s_n вида $p_n \sim \sum\limits_{l=2}^{\infty} P_l s_n^{-l}$. Здесь числа P_l суть многочлены от коэффициентов асимптотического разложения по отрицательным степеням s_n некоторой последовательности, элементы которой выражаются через $c_{11n}, c_{12n}, c_{21n}, c_{22n}, s_n$.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ СТЕНКИ КАНАЛА

Анкилов А.В.,Вельмисов П.А.(Ульяновск)

Рассматривается начально-краевая задача аэроупругости, связанная с исследованием устойчивости вязкоупругих элементов стенки канала конечной длины. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\Delta\varphi = 0, \quad x \in [a,b], y \in [-y_0, y_0];$$

$$\varphi_y(x,y_0,t) = \dot{w}_p(x,t) + V w_p'(x,t), \quad x \in (a_{2p-1}, a_{2p}),\ p = 1 \div n;$$

$$\varphi_y(x,y_0,t) = 0, \quad x \in [a,a_1] \bigcup \left(\bigcup_{p=1}^{n-1} [a_{2p}, a_{2p+1}]\right) \bigcup [a_{2n}, b];$$

$$\varphi_y(x,-y_0,t) = 0,\ x \in (a,b); \quad \varphi_x(b,y,t) = \varphi_x(a,y,t) = 0,\ y \in [-y_0, y_0];$$

$$L(w_p) \equiv D_p(w_p'''' - \int_0^t R_{1p}(\xi,t) w_p''''(x,\xi)d\xi) + \beta_{0p}(w_p - \int_0^t R_{2p}(\xi,t) w_p(x,\xi)d\xi) +$$

$$+ N_p w_p'' + M_p \ddot{w}_p = -\rho\left(\varphi_t(x,y_0,t) + V\varphi_x(x,y_0,t)\right),\ x \in (a_{2p-1}, a_{2p}),\ p = 1 \div n;$$

Здесь x,y,t- декартовы координаты и время; $\varphi(x,y,t)$- потенциал скорости; $w_p(x,t)$ - прогибы пластин; штрих обозначает производную по x и τ, точка- по t.

Используя методы теории функций комплексного переменного, решение задачи можно привести к исследованию системы уравнений:

$$L(w_p) = -\frac{V\rho}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{2i-1}}^{a_{2i}} (\dot{w}_i + V\, w_i') \frac{\partial K(\tau,x)}{\partial x} d\tau - \frac{\rho}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{2i-1}}^{a_{2i}} (\ddot{w}_i + V\, \dot{w}_i') \times \tag{1}$$

$$\times K(\tau,x)d\tau, x \in (a_{2p-1}, a_{2p}),\ K(\tau,x) = ln \frac{1}{\left|sn(F(k)(\tau - a)) - sn(F(k)(x-a))\right|},$$

$$\text{где} F(k) = \frac{K(k)i}{y_0};\ \frac{K(\sqrt{1-k^2})}{K(k)} = \frac{(b-a)}{y_0};\ K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Теорема. Пусть концы вязкоупругих элементов закреплены либо жестко ($w_p = w_p' = 0$), либо шарнирно ($w_p = w_p'' = 0$), ядра релаксации $R_{ip}(\tau,t) = \dfrac{\partial Q_{ip}(\tau,t)}{\partial \tau}$ удовлетворяют неравенствам $\dfrac{\partial Q_{ip}(\tau,t)}{\partial \tau} \geq 0$, $\dfrac{\partial Q_{ip}(0,t)}{\partial t} \leq 0$, $\dfrac{\partial^2 Q_{ip}(\tau,t)}{\partial \tau \partial t} \leq 0 \quad (i = 1,2)$, и выполнены условия

$$D_p > 0,\ M_p \geq \rho K_{0p}/\pi,\ \beta_{0p} \geq 0,\ N_p < \lambda_{1p} D_p(1 + Q_{1p}(0,\infty)) - \rho K_{0p} V^2/\pi,$$

где $K_{0p} = \sup\limits_{x \in (a_{2p-1}, a_{2p})} \sum\limits_{m=1}^{n} \int\limits_{a_{2m-1}}^{a_{2m}} K(x,\tau)d\tau, p = 1 \div n$, λ_{1p} -наименьшие собственные значения соответствующих краевых задач для уравнения $\psi''''(x) = -\lambda\psi''(x)$. Тогда решения $w_p(x,t)$ системы уравнений (1) устойчивы по отношению к возмущениям начальных значений $w_p(x,0)$, $\dot{w}_p(x,0), w_p''(x,0)$.

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ СЖАТИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ДВОИЧНЫХ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТАБЛИЦ СОЧЕТАНИЙ

Аржеухов А.Б. (Воронеж)

Представлен комплекс алгоритмов динамического сжатия произвольных двоичных данных, созданный с использованием таблиц сочетаний и обеспечивающий сохранность информации при реконструкции данных. Алгоритмы предназначены для пополнения базы моделей и алгоритмов, поддерживающей метод интеллектуального кодирования информации и ее носителя.

Алгоритм 1. Осуществляет непосредственное перекодирование n-битовых двоичных групп, на которые разбиваются исходные двоичные данные, в двоичные коды номеров соответствующих сочетаний из n (нулей и единиц группы) по m (только единиц или нулей группы) в специальных таблицах. Алгоритм обеспечивает возрастающий эффект сжатия при n = 5 и более, но эффект значим лишь при m = 1,2,n-1,n. Так, при n = 8 и m = 1,n-1 коэффициент сжатия Ксж = 2, при m = 2,n-2 - Ксж = 1,3; при n = 16 и m = 1,n-1 Ксж =3, при m = 2,n-2 Ксж = 2; при n = 32 и m = 1,n-1 Ксж = 5,3, при m = 2,n-2 Ксж = 3,2. Однако с ростом n резко падает относительное количество сочетаний с m =1,2,n-1,n-2. Так, если при n = 8 из 256 таких сочетаний 72 (28%), то при n = 16 из 65536 - всего 272 (0,4%).

Алгоритм 2. Предназначен для сжатия n - битовых двоичных групп с m = 3,4,...,n-4,n-3. С помощью специальных наборов кодовых групп, названных корректорами, исходную двоичную группу подвергают поразрядному сложению по mod 2 с двоичными группами соответствующих наборов, из полученных групп выбирают одну с m =1,n-1, если таковая есть, либо с m = 2,n-2 в противном случае. Если при заданном n коррекция не обеспечила указанные значения m, то - переход на другие значения n и повторение процедуры коррекции. При удачном исходе процедуры коррекции дальнейшие действия алгоритма 2 аналогичны действиям алгоритма 1. Эффективность данного алгоритма ниже по сравнению с первым вследствие необходимости включать в сжатую двоичную группу битов кода корректора. Значимый эффект сжатия появляется при n = 7 и m = 1,n-1. Так, при n = 8 и m = 1,n-1 Ксж = 1,15; при n = 16 и m = 1,n-1 Ксж = 2,0; при n = 16 и m = 2,n-2 Ксж = 1,5; при n =32 и m = 1,n-1 Ксж = 3,6; при n = 32 и m = 2,n-2 Ксж = 2,5.

Алгоритм 3. Исходные двоичные данные структурируют, образуя блоки из n k-битовых групп. В каждом текущем блоке с помощью параллельно выполняемых специальных процедур выявляют группы с взаимозависимыми значениями (подобные, антиподобные, инверсно подобные, подобные с точностью до ..., колеблющиеся относительно среднего, составляющие арифметическую или геометрическую прогрессию и т.п.) . Если число m взаимозависимых групп в блоке больше 3, то для этих групп образуют сочетание из n нулей и единиц, в котором позиция каждой взаимозависимой группы отмечена единицей, а позиция каждой из прочих групп - нулем. К блоку добавляют код зависимости групп и код номера данного сочетания из соответствующей таблицы сочетаний и исключают все или кроме одной первой из взаимозависимых групп. Если в блоке оказываются несколько объединений групп, взаимосвязанных разными или одинаковыми зависимостями, то в блок вводят коды всех зависимостей и коды номеров соответствующих им сочетаний. Данный алгоритм обеспечивает сжатие до 7-10 раз при значениях m, близких к значениям n, однако относительное число таких ситуаций невелико. Поэтому в среднем алгоритм обеспечивает значение Ксж около 2,0.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Артемов М.А., Бородина Е.С., Баулин И.В. (Воронеж)

Методом малого параметра решен ряд задач теории упругопластического тела. Так Д.Д.Ивлевым и Л.В.Ершовым [1] развит подход определения напряженного и деформированного состояния, когда пластическая зона развивается от некоторой границы и целиком охватывает ее. Г.И.Быковцев и Ю.Д.Цветков [2] рассмотрели общий подход к решению задачи о нахождении упругопластической границы, когда пластическая зона носит локальный характер и не охватывает весь контур. Точное решение задачи о двухосном растяжении упругопластической плоскости, ослабленной круговым отверстием, получено Л.А.Галиным [3] и Г.П.Черепановым[4].

Рассматривается распространение пластической зоны в процессе нагружения пластины, когда часть контура отверстия находится в упругой зоне. Полагается, что граница отверстия свободна от усилий, а на бесконечности приложены взаимно перпендикулярные растягивающие усилия. Используется теория пластического течения при трансляционном упрочнении, предложенная А.Ю.Ишлинским [5]. Решение проведено методом малого параметра. При малом упрочнении решение рассматриваемой задачи, можно свети к последовательному решению упругопластических задач [6,7]. За нулевое приближение принято решение, полученное в [3].

Литература.

1. Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука. 1978. 208 с.

2 Быковцев Г.И., Цветков Ю.Д. Двумерная задача нагружения упругопластической плоскости, ослабленной отверстием // Прикл. матем. и механика. 1987. Т. 51. Вып.2. С. 314-322.

3. Галин Л.А. Плоская упругопластическая задача //Прикл. матем. и механика // 1946. Т. 10. Вып.3. С. 367-386.

4. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука. 1983. 238 с.

5. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матем. журн. 1954. Т. 6. Вып.3. С.314-325.

6. Артемов М.А. О двуосном растяжении толстой пластины с круговым отверстием из упрочняющегося упругопластического материала // Журн. прикл. механики и тех. физ. 1985. № 6. С. 158-163.

7. Артемов М.А. О методе возмущений в теории упрочняющегося тела. // Актуальные задачи механики деформируемого твердого тела. Воронеж. 1990. С.4-10.

РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ, БЛИЗКИХ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ

Артемов М.А., Вульман С.А., Семыкина Т.Д. (Воронеж)

В машиностроении, в частности, в авиационной промышленности, приходится иметь дело с расчетом элементов конструкций, представляющих собой тонкие оболочки, одна из главных кривизн которых мала, но отлична от нуля. Предлагаемый метод позволяет свести расчет подобных оболочек к расчету цилиндрических оболочек, для которых имеется хорошо развитый математический аппарат.

Пусть уравнения срединной поверхности оболочки в цилиндрической системе координат r, θ, z имеет вид

$$\bar{r} = (r_0 + \delta_1 r_1^{(1)}(z) + \delta_2 r_2^{(1)}(\theta))\bar{e}_r + z\bar{e}_z + o(\delta_i) \qquad (1)$$

Здесь δ_1 - малый параметр, характеризующий отклонение меридиана от прямой, δ_2 характеризует отклонение второй кривизны от константы. В первом приближении линии $z = \mathrm{const}$ и θ=const являются главными линиями кривизны. Перемещения срединной поверхности u,v,w, а также внутренние усилия N_1, N_2, S, Q_1, Q_2 и моменты M_1, M_2, M_{12} представляются в виде $f = f^{(0)}(z,\theta) + \delta_1 f^{(1)}(z,\theta) + \delta_2 f^{(2)}(z,\theta)$

Компоненты перемещений, усилий и моментов с индексом (0) представляют собой решение для круговой цилиндрической оболочки с радиусом r_0=R. Разложение по малым параметрам δ_1 и δ_2 уравнений равновесия, уравнений, связывающих компоненты деформаций оболочки с перемещениями, приводит к двум независимым системам уравнений. Компоненты усилий и моментов связаны с компонентами деформаций срединной поверхности соотношениями [1]

$$N_1 = B(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad N_2 = B(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \quad S = Gh\gamma, \quad M_1 = D(\chi_1 + \nu\chi_2),$$

$$M_2 = D(\chi_2 + \nu\chi_1), \quad M_{12} = D(1-\nu)\chi_{12}, \quad B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Нагрузки и перемещения, входящие в граничные условия, записываются в виде рядов по параметрам δ_1 и δ_2 с учетом геометрии оболочки.

Таким образом, анализ состояния оболочки двоякой кривизны, срединная поверхность которой описана уравнением (1), может быть сведен к расчету круговой цилиндрической оболочки радиуса R.

Литература.

1. Колтунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. М.: Высш. Школа. 1972. 296 с.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Астахов А.Т. (Воронеж)

В работе [1] доказана теорема об убывании гармонической функции трех переменных в конусе.

Теорема (Аршон). *Пусть $u(X)$-гармоническая функция трех переменных в бесконечной области D, содержащей внутри себя конус V: $|\arg(x \pm i\sqrt{y^2+z^2})| < \frac{\pi}{2h_0}$, $r_X = \sqrt{x^2+y^2+z^2} > a$, $(x > 0)$, $h_0 > 1$. Если внутри D $|u(X)| < C\exp\{-r_X^{h_0+\eta}\}$ с любыми фиксированными C и $\eta > 0$, то $u(X) \equiv 0$.*

В настоящей работе рассматривается вопрос: как быстро может убывать полигармоническая функция $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ заданная на конусе пространства R^n, чтобы $u(x_1, x_2, ..., x_n) \not\equiv 0$? Доказано, что для конуса вращения от условия $\eta > 0$ можно избавиться. Кроме того, из доказательства теоремы следует, что при некоторых предположениях на тело вращения характер убывания полигармонической функции будет такой же как и в плоском случае.

Доказана следующая

Теорема. *Если полигармоническая функция $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ задана на конусе*

$$(x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} \le \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right) x_1$$

пространства R^n, непрерывна вплоть до его границ и выполняются условия:

$$|u(x_1, x_2, ..., x_n)| \le M e^{-\varepsilon\|x\|^\alpha},$$

$$|\Delta^j u(x_1, x_2, ..., x_n)| \le M e^{-\varepsilon\|x\|^\alpha}, \qquad j = 1, 2, ..., m-1,$$

$$\alpha > 1, \quad \varepsilon > 0, \quad \|x\| \to \infty, \quad M = \text{const} > 0,$$

где m — порядок полигармонической функции $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\Delta^j u(x_1, x_2, ..., x_n)$ при каждом значении j являются непрерывными функциями вплоть до границ конуса. Тогда $u(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 0$.

Автор благодарен доктору физ.- матем. наук В.З. Мешкову за внимание к работе.

Литература.

1. Аршон И.С. Об убывании гармонических функций трех переменных // Изв. АН СССР, сер.матем. — 1965. — Т.29, №6. — С.1283–1294.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМ В ОТРАСЛЯХ СТРОИТЕЛЬНОЙ ИНДУСТРИИ

И.Ф.Астахова, А.В.Ларин, Т.В.Самодурова
(г.Воронеж)

Экспертные системы представляют одно из наиболее значительных практических достижений в области искусственного интеллекта. В настоящей работе предлагается модель построения экспертной системы для отраслей строительной индустрии. Разрабатываемые авторами экспертные системы состоят из следующих блоков: базы данных некоторых характеристик предметной области, пакетов прикладных программ, базы знаний, модуля принятия решений и интерфейсов с пользователем. В зависимости от предметной области меняется наполнение в базах данных и модели, описывающие предметную область.

Настоящий подход применяется для получения решения некоторых классов задач в двух отраслях строительной индустрии: в прогнозировании зимней скользкости на автомобильных дорогах и прогнозировании температурных полей конструкций при интенсивном нагреве. В качестве модели данных задач выступают теплофизические законы сохранения энергии, а для баз данных рассматриваются теплофизические свойства материалов конструкций.

Работа выполняется при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

О существовании быстроубывающих решений дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом в гильбертовом пространстве

Атагишиева Г.С. (Махачкала)

Рассматривается задача

$$L_{p\omega}^2 u(t) \equiv D_t^2 u(t) - \sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{m}\left[A_{k_j} + A_{k_j}(t)\right] S_{h_{k_j}+h_{k_j}(t)} D_t^k u(t) = f(t), \quad t > t_0, \tag{1}$$

$$u^{(k)}(t) = g_k(t), \quad t \le t_0, \quad u^{(k)}(t_0+0) = g_k(t_0), \quad k = 0,1, \tag{2}$$

где $D_t^k = \frac{1}{i^k}\frac{d^k}{dt^k}$; $A_{k_j}, A_{k_j}(t): Y \to Y$ $(X \to Y)$ - замкнутые (ограниченные) операторы, X, Y - гильбертовы пространства, $X \subset Y$, $\|\cdot\|_X \ge \|\cdot\|_Y$, $h_{k_j} = const$, $h_{k_j}(t)$ - абсолютно-непрерывные функции, $h_{k_j}'(t) \le r < 1$, $k = 0,1$, $j = \overline{0,m}$.

Оператор $L_{p\omega}^2 : X_{(t_0,\infty)}^{2,\alpha} \to Y_{(t_0,\infty)}^{0,\alpha}$, [1].

Через $R_p(\lambda) \equiv \left(\lambda^2 E - \sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{m} A_{k_j}\lambda^k exp\left(-i\lambda h_{k_j}\right)\right)^{-1} : Y \to X$ обозначим резольвентный оператор $A_p \equiv \sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{m} A_{k_j} S_{h_{k_j}} D_t^k : X \to Y$.

Теорема.

Пусть выполнены условия:

а) $A_{k_j} : Y \to Y$ замкнутые операторы $k = 0,1$, $j \ge 0$; $A_{k_j} : X \to Y$ выполнены непрерывные операторы $k = 0,1$, $j \ge 1$;

$\forall\delta$ $\left\|A_{k_j}(t)\right\|_Y = 0\left(e^{-\delta t}\right)$, $t \to \infty$, $j = 0,1,\dots,m$;

б) $R_p(\lambda)$ - регулярна в полуплоскости $Im\lambda \ge 0$,

$$\left\|R_p(\lambda)\right\|_X \le c\,exp\left\{\left(\frac{\alpha-1}{a}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{Im\lambda}{\alpha}\right)^{\alpha}\right\}, \quad a > 0, \quad \alpha > 1;$$

в) $f(t) \in Y_{(t_0,\infty)}^{0,\delta}$, $\forall\delta$;

г) $h_{k_j}(t) \in H(R)$, $e^{\delta t}\left|h_{k_j}(t)\right|^{1/2} \chi_{A_{k_j}}\left(e^{-\delta t}\right) \in L_2(t_2,\infty)$, $\forall\delta$, $j = \overline{1,m}$;

д) $u(t)$ решение (1), (2), $u(t)$, $u'(t) \in L_2((t_2,\infty),X)$,

$$t_2 = min\left(t_1, \min_{\substack{1\le j\le m\\0\le k\le 1}}\left(t_0 - h_{k_j}\right)\right), \quad t_1 = \min_{\substack{1\le j\le m\\0\le k\le 1}} \inf_{t\ge t_0} \varphi_{k_j}(t), \quad \varphi_{k_j}(t) = t - h_{k_j} - h_{k_j}(t).$$

Тогда, $e^{(a-\varepsilon)t^{\beta}} u(t) \in L_2((t_0,\infty),X)$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, $\varepsilon > 0$.

Литература

1. Атагишиева Г.С. О дифференциальных уравнениях второго порядка с быстро убывающими коэффициентами в гильбертовом пространстве. Тезисы докладов Четвертой Северо-Кавказской региональной конференции, 1997. – С.16.

ПРОБЛЕМА СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ.

Афонин А.А. (Таганрог).

Впервые общая формулировка задачи стационарной фильтрации в произвольной области была представлена, по-видимому, в работе [1]. Позже, в работе [2] рассматривался вопрос моделирования таких задач в случае линейной фильтрации. В настоящей работе рассмотрен вопрос моделирования стационарной фильтрации в общей постановке, ее связь с задачей о свободной границе, рассмотрены вопросы существования и единственности решения этой задачи.

Пусть пористая среда представляет собой открытую, ограниченную, область $\Omega \subset R^n$ (n=2,3) с липшицевой границей, которая представляет собой совокупность связных чередующихся множеств трех типов S_1, S_2, S_3 , которые являются соответственно непроницаемой границей, а также границами области с атмосферой и резервуаром с жидкостью. Течение жидкости в пористой среде описывается ее давлением $u(x)$ на S_1, S_2, давление определяется функцией $\varphi(x) \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Закон, с помощью которого описывается течение жидкости в пористой среде найден Дарси экспериментально и имеет вид :

$$\bar{v} = -K(\nabla u + \bar{e}) \tag{1}$$

Здесь $\bar{e}$ - вертикальный орт; K - проводимость, в общем случае, матрица, определяющая характер пористой среды, в которой происходит течение. В дальнейшем считаем:

$$K(x,u)=k(u)a(x).$$

где $k(S)$ - неотрицательная, ограниченная функция; $a(x)$ - измеримая, ограниченная, равномерно эллиптическая матрица. Для несжимаемой жидкости уравнение непрерывности имеет вид:

$$\nabla \bar{v} = 0 \tag{2}$$

Граничные условия на $\partial\Omega$ имеют вид :

$$u(x) \ge \varphi(x) \qquad \text{на } S_3 \tag{3}$$

$$\bar{v}\cdot\bar{n} = 0 \qquad \text{на } S_1 \tag{4}$$

$$u \le \varphi(x),\ \bar{v}\cdot\bar{n} = 0,\ (u-\varphi(x))\cdot \bar{v}\cdot\bar{n} = 0 \qquad \text{на } S_2 \tag{5}$$

Приведем слабую формулировку этой задачи. Пусть $M(\varphi)$ - выпуклое множество, определяемое следующим образом:

$$M(\varphi)=\{v\in H^1(\Omega): v=\varphi \quad \text{на} \quad S_3, \quad v \le \varphi \qquad \text{на } S_2\}$$

Тогда краевая задача (1)-(5) эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$\int_\Omega \nabla(v-u)\cdot k(u)\cdot a(\nabla u + \bar{e})dx \ge 0 \quad \text{Для } \forall v \in M(\varphi)$$

Для случая, когда $K(u) = \begin{cases} 0, u<0 \\ 1, u \ge 0 \end{cases}$, соответствующего случаю линейной фильтрации, можно утверждать, что область Ω разделена на две области: $\Omega_1=\{u>0\}$ и $\Omega_2=\{u=0\}$, на свободной границе Г, разделяющей эти области, выполняются условия:

$$u=0,\ (\nabla u + \bar{e})\cdot\bar{n} = 0.$$

Тогда задача о свободной границе в слабой формулировке имеет вид:

Задача 1. Найти пару (u,γ) такую, что $u\in M(\varphi)$ с $u \ge 0$ и $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ с $0 \le \gamma \le 1$ таких, что имеет место неравенство

$$\int_\Omega \nabla(v-u)\cdot u(\nabla u + \gamma\bar{e})dx \qquad \text{для } \forall v \in M(\varphi)$$

Тогда имеет место следующий результат

Теорема. Существует решение (u,γ) задачи 1, причем $u(x)$ непрерывно по Гельдеру. Решение является единственным в случае a=E.

Литература

[1] Alt, H.W. A free boundary problem associated with the flow of ground water. Urch. Ration Mech. Anal., 64(1977, III-126).

[2] Афонин А.А. Моделирование задачи линейной стационарной фильтрацией со свободной границей. Проблема существования и единственности. Известия ТРТУ, №2, (1997, 205-209.)

Бадков В.М.

ДВУСТОРОННИЕ ПОТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ МНОГОЧЛЕНОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ОКРУЖНОСТИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ВЕСОМ

Пусть $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ – система многочленов, ортонормированная на единичной окружности с весом $\varphi(\tau)$. Рассмотрим вес

$$\varphi(\tau)=\omega(|\sin\tfrac{\tau}{2}|)\,|\sin\tfrac{\tau}{2}|^{-1}\quad(\tau\in\mathbb{R}),\tag{1}$$

где $\omega(\delta)$ – вогнутый модуль непрерывности такой, что

$$\omega(\tau)\tau^{-1}\in L^1[0,1].\tag{2}$$

Если при этом

$$\Omega(\theta):=\int_0^{\theta}\omega(\tau)\tau^{-1}d\tau=O(\omega(\theta))\quad(\theta\to+0),\tag{3}$$

то, как следует из результатов работы [1],

$$|\varphi_{n-1}(e^{i\theta})|\asymp\left(|\sin\tfrac{\theta}{2}|+\tfrac{1}{n}\right)^{\frac12}\left[\omega\left(|\sin\tfrac{\theta}{2}|+\tfrac{1}{n}\right)\right]^{-\frac12}\quad(n\in\mathbb{N},\theta\in\mathbb{R}).\tag{4}$$

Предположим, что

$$\tau\omega'(\tau)/\omega(\tau)\to0\quad(E(\omega')\ni\tau\to+0),\tag{5}$$

где $E(\omega')$ – множество существования конечной производной $\omega'(\tau)$. В этом случае (3) не выполняется. Оказывается, что при этом для $\theta=0$ (4) теряет силу, что видно из следующей теоремы (основного результата сообщения).

ТЕОРЕМА. Пусть $\omega(\delta)$ – вогнутый модуль непрерывности и выполнены условия (1), (2) и (5). Тогда равномерно по $\theta\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$

$$|\varphi_{n-1}(e^{i\theta})|\asymp n^{-\frac12}[\omega(n^{-1})]^{\frac12}[\Omega(n^{-1})]^{-1}+$$
$$+\frac{|\sin\frac{\theta}{2}|}{(|\sin\frac{\theta}{2}|+\frac1n)^{\frac12}}\cdot\frac{\Omega(|\sin\frac{\theta}{2}|+\frac1n)}{\Omega(|\sin\frac{\theta}{2}|)}\left[\omega\left(|\sin\tfrac{\theta}{2}|+\tfrac1n\right)\right]^{-\frac12}.\tag{6}$$

Подобная формула была получена в [2] для веса

$$\varphi(\tau)=\frac{4}{|\sin\tau|}\left[\left(\ln\frac{1+\cos\tau}{1-\cos\tau}\right)^2+\pi^2\right]^{-1}\quad(\tau\in\mathbb{R}).\tag{7}$$

Литература

1. Бадков В.М. Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса// Тр.МИРАН.-1992.-Т.1.-С.41-88.
2. Бадков В.М. Асимптотика многочленов второго рода и двусторонние поточечные оценки их производных// Тр.ин-та математики и механики УрО РАН.-1992.-Т.1.-С.71-83.
3. Бадков В.М. Поточечные оценки снизу модулей производных многочлена, ортогонального на окружности с весом, имеющим особенности// Матем. сборник.-1995.-Т.186,№ 6.-С.3-14.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект № 99-01-00175.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА.

БАЙЗАКОВ А.Б. (ИМ НАН КР, г. Бишкек)

В данной работе рассмотрен вопрос о существовании и структуре обобщенных решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода. Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t K(t,s)\,u(s)\,ds = f(t). \qquad (1)$$

В работе [I] при условиях $K(t,t)\neq 0$, $f(0)\neq 0$ найдено обобщенное решение уравнение (I).

ТЕОРЕМА: Пусть I) в области $G\{0\leq s\leq t\leq T\}$ функция $K(t,s)$ непрерывна и имеет первую производную по t; 2) $f(t)=f_1(t)/t$, $f_1(0)\neq 0$. Тогда интегральное уравнение (I) имеет обобщенное решение вида

$$u(t)=\alpha\delta(t)+x(t),$$

где $\delta(t)$-дельта функция Дирака, а $x(t)$ определяется из уравнения

$$t\,x(t)+\int_0^t N(t,s)\,x(s)\,ds = F(t), \qquad (2)$$

где $N(t,s)\equiv\left[K(t,s)+t\,K'_t(t,s)\right]/K(t,t)$,

$$F(t)=f_1(t)/K(t,t).$$

Уравнение (2) при $F(0)=0$ изучено в работе [2], а при $F(0)\neq 0$ рассмотрено в [3].

Отметим, что уравнение вида (I)

$$\int_0^t u(s)\,ds = e^t/t$$

имеет обобщенное решение

$$u(t)=\delta(t)+\left[t^{-1}\int_0^t (e^{\tau}-1)\,d\tau\right]',$$

где $'$ обозначает производную по t.

ЛИТЕРАТУРА

I. Иманалиев М.И. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода. Фрунзе. I98I. - I44 с.

2. Байзаков А.Б. Об одном классе интегральных уравнений Вольтерра с особой точкой. - Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, I984, с III - II2.

3. Бектеналиев А. Обобщенные решения нелинейных интегральных уравнений третьего рода типа Вольтерра. // Респ.научн.конф. "Дифференциальные уравнения и их приложения". г.Ош,I993,с.36.

ОДНОРОДНЫЕ ЭРМИТОВЫ f-МНОГООБРАЗИЯ

Балащенко В.В. (Минск)

Важнейшую роль в геометрии структур на многообразиях играют инвариантные структуры. В обобщённой эрмитовой геометрии [1], которая сейчас интенсивно развивается, такие примеры стали появляться лишь в последние годы. Оказалось, что их источником могут служить обнаруженные канонические структуры на регулярных Ф-пространствах [2].

Алгебраической основой выделения основных классов обобщённых почти эрмитовых структур на (псевдо-)римановых многообразиях (M, g) являются свойства присоединённой Q-алгебры [1]. В частности, абелева Q-алгебра определяет класс *обобщённых эрмитовых структур* [1]. В наиболее важном случае f-структуры К.Яно ($f^3 + f = 0$) будем называть соответствующее многообразие *эрмитовым f-многообразием*. Если $f = J$ – почти комплексная структура на M, то получаем в точности классическое эрмитово многообразие.

Пусть $(G/H, g, f)$ – однородное регулярное Ф-пространство связной полупростой группы Ли G со стандартной естественно редуктивной метрикой g и инвариантной f-структурой. Значительный запас инвариантных f-структур на таких пространствах обеспечивают канонические f-структуры [2]. При этом для однородных Ф-пространств конечного порядка k ($\Phi^k = id$) все такие структуры в [2] перечислены. В частности, при $k = 4$ каноническая f-структура одна, а при $k = 5$ есть две канонические f-структуры. Следующие утверждения предъявляют широкий класс первых примеров однородных эрмитовых f-многообразий.

ТЕОРЕМА 1. *Однородное Ф-пространство порядка 4 $(G/H, g, f)$ полупростой группы Ли G с канонической f-структурой является эрмитовым f-многообразием.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть f_1 и f_2 – канонические f-структуры на однородном Ф-пространстве $(G/H, g)$ порядка 5 полупростой группы Ли G. Тогда $(G/H, g, f_i), i = 1, 2$ является эрмитовым f_i-многообразием.*

Примером однородного Ф-пространства порядка 4, метрика которого не является естественно редуктивной, но каноническая f-структура которого эрмитова, служит 6-мерная обобщенная группа Гейзенберга.

ЛИТЕРАТУРА: 1. Кириченко В.Ф. // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники). М.: ВИНИТИ. 1986. Т.18. С.25-71. **2.** Балащенко В.В., Степанов Н.А. // Матем. сб. 1995. Т.186. N 11. С.3-34.

О ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ С ЛАГРАНЖИАНАМИ ЛИНЕЙНОГО РОСТА НА СЕТКАХ

Барабанов О.О. (Ковров) [1]

Пусть Q — вложенный в R^n связный граф с гладкими дугами (сетка). На Q, как на подмножестве R^n, задан лагранжиан $f(x,\xi)$ линейного роста:

$$c_1|\xi| - c_1 \leq f(x,\xi) \leq c_2|\xi| + c_2,\ 0 < c_1.$$

Пусть $C_1(Q)$ — множество функций, гладких на дугах Q, непрерывных на Q. Для $u \in C_1(Q)$, по определению, $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\nu$, где ν — касательный к соответствующей дуге орт.

Рассматривается класс краевых задач

$$\int\limits_Q f(x,\nabla u(x)) - p(x)u(x)dx + \sum_{b\in B} P(b)u(b) \longrightarrow \inf,\ u \in C_1(Q) \qquad (1)$$

с краевым условием $u(b) = u_0(b)$ для всех b из некоторого подмножества B_0 множества B всех вершин сетки. На задачи (1) легко переносится теория обычных краевых задач антиплоской упруго-пластичности, в частности — понятие предельной нагрузки, принцип эквивалентности, расширение на функции ограниченной вариации и т.д.

Любопытный смысл получает задача, двойственная к задаче о предельной нагрузке. Именно, пусть $f(x,\xi) = \tau(x)|\xi|$, где τ — постоянная на каждой дуге (для простоты формулировки нижеследующей теоремы) функция. Пусть, кроме того, $B_0 = \emptyset$, $p = 0$, $P(a) = 1$, $P(a') = -1$, и $P = 0$ в остальных вершинах сетки. Тогда задача о предельной нагрузке λP примет вид

$$\lambda = \min \int\limits_Q \tau|\nabla u|dx, \quad u(a) = 1,\ u(a') = 0. \qquad (2)$$

Теорема 1. *Для (2) имеет место следующая двойственная формула:*

$$\lambda = \max \sum_{a\in d} \sigma(d), \qquad (3)$$

где максимум ищется среди всех таких функций σ на множестве D всех дуг графа Q, что

$$|\sigma| \leq \tau, \quad \sum_{b\in d} \sigma(d) = 0 \quad \forall b \in B \setminus \{a,a'\}, \qquad \sum_{a\in d} \sigma(d) + \sum_{a'\in d} \sigma(d) = 0,$$

где $b \in d$ обозначает инцидентность вершины b и дуги d.

Задача (3) — классическая задача о максимальном потоке. В таком случае, задача (2) о предельной нагрузке — еще одна интерпретация теоремы двойственности Форда-Фалкерсона.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 99-01-00072 и 99-01-00893

R_N-ОПТИМАЛЬНОСТЬ В БЕСКОАЛИЦИОННОЙ ИГРЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.

Бардин А.Е. (Орехово–Зуево)

Рассматривается бескоалиционная игра N лиц при неопределенности

$$\Gamma = \langle \mathbf{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}, Y, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbf{N}}\rangle,$$

где $\mathbf{N} = \{1,2,...,N\}$ - множество номеров игроков; в игре Г каждый i-й игрок выбирает и использует любую свою стратегию $x_i \in X_i \in comp\mathbf{R}^{n_i}$ и в результате формируется ситуация $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in X = \prod\limits_{i\in\mathbf{N}} X_i$. Независимо от их действий реализуется некоторая неопределенность $y \in Y \in comp\mathbf{R}^m$, причем игроки должны учитывать возможность реализации любой неопределенности. Функция выигрыша i-го игрока задана непрерывной на $X \times Y$ скалярной функцией $f_i(x,y)$. На "содержательном уровне" цель i-го игрока в игре Г-выбор такой стратегии $x_i \in X_i$,чтобы в сложившейся ситуации $x = (x_1,...,x_N)$ при реализации неопределенности $y \in Y$ его выигрыш $f_i(x,y)$ был "как можно больше".

Рассматривается упорядоченное семейство подыгр со связанными стратегиями, которое порождается исходной игрой Г и некоторым отношением порядка R_N. Вводится понятие оптимальной подыгры и устанавливаются свойства таких игр. Подыгрой со связанными стратегиями, порожденной игрой Г, понимается набор

$$\Gamma_M = \langle \mathbf{N}, M, Y, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbf{N}}\rangle,$$

где М непустое компактное подмножество множества X, остальные элементы подыгры определены в игре Г. В подыгре Γ_M игроки выбирают свои стратегии таким образом, чтобы ситуация $x \in M$. Такой выбор может быть достигнут путем предварительных переговоров.

Пусть $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_M \mid M \in compX, M \neq \emptyset\}$ - множество всевозможных подыгр, порожденных игрой Г. Аналогично подходу в работе [1] формализуется отношение порядка R_N на множестве $\mathbf{\Gamma}$. Игру $\Gamma_{M^*} \in \mathbf{\Gamma}$ будем называть R_N - минимальной игрой в $\mathbf{\Gamma}$, если не существует игры $\Gamma_M \in \mathbf{\Gamma}$ такой, что $\Gamma_M R_N \Gamma_{M^*}$. $\mathbf{R_N}$ – оптимальной игрой упорядоченного семейства игр $\langle \mathbf{\Gamma}, R_N\rangle$ называется R_N - минимальная игра Γ_{M^*} такая, что $\Gamma_{M^*} \neq \Gamma \to \Gamma_{M^*} R_N \Gamma$.

Исследованы свойства R_N –оптимальных подыгр, установлена структура такой подыгры, взаимосвязь известных решений из теории бескоалиционных игр и R_N–оптимальных подыгр, доказана теорема существования.

Литература.

1. А.Е.Бардин. Структура множества R–оптимальных подыгр со связанными ограничениями и при неопределенности. || Управление сложными системами: Межвуз. сб. научн. тр. Москва. 1999. с.5-9.

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ.

Барсукова В.Ю. (г. Краснодар)

Изучаются решения однородного интегрального уравнения

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s)x(s)\,ds, \qquad (1)$$

имеющие не более чем экспоненциальный рост на бесконечности.

Обозначим через $BC^n(R^1; \varphi_{ba})$ банахово пространство непрерывных функций $x: R^1 \to C^n$ с $\|x\| = \sup\limits_{t\in R^1} \|x(t)\|_{C^n} \varphi_{ba}(t)$, где

$$\varphi_{ba}(t) = \begin{cases} \exp(bt), & t < 0 \\ \exp(-at), & t \geq 0 \end{cases}$$

Пусть $n \times n$ - матрица $K(t, s)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $K(t + \omega, s + \omega) = K(t, s)$ при некотором $\omega > 0$.
2. При каждом $t \in R^1$ функция $\|K(t, s)\| \cdot \varphi_{dc}^{-1}(s)$ суммируема по s на R^1 и

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|K(t + h, s) - K(t, s)\| \varphi_{dc}^{-1}(s)\,ds = 0$$

Определим операторнозначную функцию $K(\xi) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \xi^m K_m$, где $K_m x = \int_0^{\omega} K(t, s - m\omega)x(s)\,ds$, $t \in [0, \omega]$ [см. 1].

В предположении $0 < a < c$, $0 < b < d$ найдены условия, при которых множество решений (1) из $BC^n(R^1; \varphi_{ba})$ является конечномерным пространством. Показано, что при этом каждое такое решение есть линейная комбинация функций вида $t^k \exp(-t \ln\lambda/\omega)\psi(t)$, где $\psi(t)$ – непрерывная ω–периодическая функция, λ – собственное число $K(\xi)$ из кольца $\exp(-a\omega) \leq |\xi| \leq \exp(b\omega)$.

Получены также условия, обеспечивающие в $BC^n(R^1; \varphi_{ba})$ нетеровость соответствующего неоднородного уравнения.

Литература.

1. Пуляев В.Ф. Экспоненциальные решения интегральных уравнений// Изв. вузов. Математика. 1988. №6. С. 75-78.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КИНЕТИКИ МНОГОЦЕНТРОВОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Батаронов И.Л., Железный С.В. (*Воронеж*)

Как показывают эксперименты, в условиях импульсного нагрева развивается многоцентровое плавление поверхности в виде образования локальных областей плавления (ЛОП). Причина этого связывается с наличием множественных центров зарождения (ЦЗ) расплавленных областей, обусловленных неоднородностью поверхности. Ввиду вероятностного характера зарождения ЛОП задача описания кинетики плавления в этом случае требует статистического подхода. Пусть $n(u,t)$ - функция распределения ЦЗ по энергии активации u перехода в ЛОП, $f(S,t)$ - функция распределения ЛОП по величине их площади S, $v(S)$ - скорость роста ЛОП размера S. Тогда полная система уравнений задачи включает в себя уравнение непрерывности для $f(S,t)$, выражающее сохранение числа ЛОП в процессе роста, граничное условие к нему, определяемое скоростью перехода ЦЗ в ЛОП на нерасплавленной части поверхности, кинетическое уравнение изменения концентрации ЦЗ в результате их перехода в ЛОП, и уравнение эффективного поля температуры $T(t)$, выраженное через характеристики распределения ЛОП. Для заданного $T(t)$ решение для функции $f(S,t)$ имеет вид

$$f(S,t)=\frac{\sigma(\tau)Q(\tau)}{v(S)},\quad \tau=t-\int_0^S\frac{dS'}{v(S')},$$

где доля $\sigma(t)$ нерасплавленной части поверхности определяется решением интегрального уравнения

$$1-\sigma(t)=\int_0^t S_m(t-\tau)\sigma(\tau)Q(\tau)d\tau\ , \tag{1}$$

Здесь функция $S_m(t)$, равная максимальной площади ЛОП, достигаемой к моменту времени t, задается неявным соотношением

$$\int_0^{S_m}\frac{dS}{v(S)}=t\ ,$$

а скорость $Q(t)$ образования ЛОП из ЦЗ по всей поверхности определяется выражением

$$Q(t)=\int_0^\infty k(u,T)n_0(u)\exp\left(-\int_0^t k(u,T)dt'\right)du\ , \tag{2}$$

где $k(u,t)$ - коэффициент скорости реакции перехода ЦЗ в ЛОП с энергией активации u, а $n_0(u)$ - начальное распределение ЦЗ по энергиям активации. Следует отметить, что полученное уравнение (1) является существенно нелинейным, поскольку входящее в выражение (2) эффективное поле $T(t)$ зависит от функции $\sigma(t)$.

ОБ ОДНОМ РАЗВИТИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАСТРАНСТВАХ С КОНУСАМИ

Бахтин И.А. (Воронеж)

В вещественном банаховом пространстве E с конусом K приводятся признаки сходимости некоторых итерационных процессов к решениям нелинейных уравнений со скоростью неометрической прогрессии. Непрерывность исследуемых операторов и нормальность конуса, вообще говоря, не предполагаются.

Определение. *Оператор B называется подлинейным относительно линейного оператора A, если $B0 = 0$ и $By - Bx \leq Ay - Ax$ $(0 \leq x \leq y)$.*

Определение. *Положительный на конусе K оператор A называется u-ограниченным сверху на конусе K, если для любого элемента $x \in K$ существуют числа $n \in \mathbf{N}$ и $\beta > 0$, такие, что $A^n x \leq \beta u$, где $u > 0$ — фиксированный элемент.*

Теорема 1. *Пусть*

1) операторы A и B положительны и монотонны на конусе K;

2) линейный оператор A u-ограничен сверху на конусе K и для некоторых чисел $m \in \mathbf{N}$, $\lambda_0 > 0$ и элемента $u > 0$ выполняется неравенство $A^m u \leq \lambda_0 u$;

3) оператор B подлинеен относительно линейного оператора A и для любого числа $l > 0$ существует число $L > 0$, такое, что из $x, y \in \langle 0, lu \rangle$ следует $\|Bx - By\| \leq L\|Bx - By\|_u$.

Тогда для любых $x_0, z \in K$ при каждом $\lambda > \sqrt[m]{\lambda_0}$ последовательность $x_n = \frac{1}{\lambda}(Bx_{n-1} + z)$ $(n \in \mathbf{N})$ сходится к единственному в K решению x_* уравнения $\lambda x = Bx + z$ со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{\sqrt[m]{\lambda_0}}{\lambda}$.

Теорема 2. *Пусть*

1) линейный оператор A положителен и u-ограничен сверху на воспроизводящем конусе K и для некоторых чисел $m \in \mathbf{N}$, $\lambda_0 > 0$ и элемента $u > 0$ выполняется неравенство $A^m u \leq \lambda_0 u$;

2) оператор B $(B0 = 0)$ обладает свойством: для любого числа $l > 0$ существует число $L > 0$, такое, что из $x, y \in \langle -lu, lu \rangle$ следует $\|Bx - By\| \leq L\|Bx - By\|_u$;

3) выполняется неравенство

$$-(Ay - Ax) \leq By - Bx \leq Ay - Ax \qquad (x \leq y).$$

Тогда для любых элементов $x_0, z \in E$ и числа $\lambda > \sqrt[m]{\lambda_0}$ справедливо утверждение теоремы 1, где элемент $x_* \in E$.

КОНТРПРИМЕР К ГИПОТЕЗЕ САЙМОНА.

Безбородов П.А. (Волгоград)

Одним из актуальных направлений современной теории уравнений в частных производных является качественное исследование свойств целых (то есть определенных во всем пространстве $\mathbb{R}^n$) решений. Особое место в этой теории занимает изучение вопросов, связанных с аналогами теоремы Бернштейна для уравнений определенного класса. В классической формулировке эта теорема утверждает, что единственными целыми решениями уравнения минимальных поверхностей являются линейные функции.

В своей недавней работе [1] Л. Саймон поставил задачу нахождения класса квазилинейных уравнений, для которых выполнено так называемое свойство Бернштейна, то есть любые целые решения которых обязательно являются линейными. В той же статье Саймон высказал гипотезу о том, что свойство Бернштейна выполняется для квазилинейного уравнения

$$(1 + u_x^2)u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{yy} = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим класс квазилинейных уравнений в частных производных эллиптического типа вида

$$A(u_x)u_{xx} + B(u_x, u_y)u_{xy} + C(u_y)u_{yy} = 0. \tag{2}$$

Заметим, что уравнение (1), предложенное Саймоном, содержится в классе (2). Мы доказываем, что для этого класса уравнений при некоторых ограничениях на коэффициенты справедлива следующая

Теорема. *Пусть уравнение имеет вид* (2) *и пусть его коэффициенты* $A(\xi)$ *и* $C(\eta)$ *являются аналитическими функциями своих аргументов и удовлетворяют условиям*

$$\int_0^{+\infty} A(\xi)d\xi = +\infty, \quad \int_{-\infty}^0 A(\xi)d\xi = -\infty,$$

$$\int_0^{+\infty} C(\eta)d\eta = +\infty, \quad \int_{-\infty}^0 C(\eta)d\eta = -\infty.$$

Тогда уравнение (2) *имеет целые аналитические решения, отличные от линейных.*

Таким образом, мы выделяем класс уравнений, которые заведомо не обладают свойством Бернштейна. Как следствие, получаем опровержение гипотезы Саймона о справедливости Теоремы Бернштейна для уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Саймон Л. (Simon L.) Asymptotics for exterior solutions of quasilinear elliptic equations // Geometry from Pac. Rim., Berlin - New York. de Gruyter, 1997. С. 343-362.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Н.С. Березкина, И.П. Мартынов, В.А. Пронько
(Республика Беларусь, Гродно)

При исследовании свойств уравнения Кортевега - де Фриза и его высших аналогов в литературе (например, [1],[2]) используются два линейных оператора $L = D^2 - v$ и $B = 2^{2n}D^{2n+1} + \sum\limits_{k=1}^{2n} a_k D^{2n+1-k} + a_{2n+1}$, где $D = \frac{d}{dx}$.

В докладе рассматривается пара операторов L и B вида

$$L = D^2 + 2pD, B = 2^{2n}D^{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n} a_k D^{2n+1-k}.$$

Подбирая коэффициенты оператора B и находя условия для функции p такие, чтобы собственные значения оператора L не зависели от t, получаем для p нелинейное уравнение в частных производных.

При $n = 3$ это уравнение имеет вид

$$\begin{gathered}\alpha(p_{xxxxxxx} - 14p^2 p_{xxxxx} - 56pp_x p_{xxx} - 42pp_{xx}^2 - 70p_x^2 p_{xx} + \\ +70p^4 p_{xx} + 140p^3 p_x^2 - 20p^7)_x + \beta(p_{xxxx} - 10p^2 p_x - 10pp_x^2 + \\ +6p^5)_x + \gamma(p_{xx} - 2p^3 + \sigma p)_x = p_t.\end{gathered} \tag{1}$$

При $n = 2, n = 1$ получаем уравнения, которые являются частными случаями (1) соответственно при $\alpha = 0, \beta = \gamma = 1$ и $\alpha = \beta = 0, \gamma = 1$. При этом в последнем случае возникает модифицированное уравнение Кортевега - де Фриза, широко применяемое в математической физике.

Для уравнения (1) доказано наличие необходимых условий свойства Пенлеве и установлены некоторые другие аналитические свойства решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: 1989.
2. Kruskal M.D., Clarkson P.A. //Stud.Appl.Math. 1992. V.86. P.87-165.

Построение собственных функций задачи Трикоми для вырождающегося уравнения смешанного типа

С.Л.Бибакова (Стерлитамак)

Рассмотрим уравнение

$$L_\alpha u \equiv u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y + \lambda u = 0, \qquad (1)$$

где $\alpha = \text{const}$, $0 < \alpha < 1$, λ – комплексный параметр, в области D, ограниченной при $y > 0$ кривой $\Gamma_0(x^2 + 4y = 0)$ с концами в точках B(1,0) и K(0,1/4), лежащей в первом квандранте, отрезком AK оси OY, где $A = (0,0)$, и характеристиками $AC(x - 2\sqrt{-y} = 0)$ и $CB(x + 2\sqrt{-y} = 1)$ уравнения (1) при $y < 0$.

Задача T_λ. Найти значения параметра λ и соответствующие им функции u(x,y), удовлетворяющие условиям:

$$u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-),$$

$$u(x,y) = 0, (x,y) \in \Gamma_0 \cup AK, \; u(x,y) = 0, (x,y) \in AC,$$

$$\lim_{y \to 0-0} (-y)^\alpha u_y = k \lim_{y \to 0+0} y^\alpha u_y, 0 < x < 1,$$

где $k = -1$ при $0 < \alpha < 1/2$, $k = 1$ при $1/2 < \alpha < 1$.

Найдены собственные значения $\lambda_{n,m} = (\alpha_m^{\gamma_n})^2$, где $\alpha_m^{\gamma_n}$ – m-ый корень уравнения $J_{\gamma_n}\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$, $\gamma_n = \frac{1}{2} + (2n+1)$, $n = 0,1,2,\ldots$, и построена система собственных функций задачи T_λ : $u_{n,m}(x,y) =$

$$\begin{cases} r^{-\beta} J_{\gamma_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)\left[-k\dfrac{\Gamma(2\gamma_n+1)\Gamma(\beta-\gamma_n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}+\gamma_n)}\mathrm{F}\left(\beta+\gamma_n, \beta-\gamma_n, \alpha; \cos^2\dfrac{\varphi}{2}\right)+\right. \\ \left. +\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\gamma_n+1)}{(1-\alpha)\Gamma(\beta+\gamma_n)\Gamma(\frac{1}{2}+\gamma_n)}\left(\cos^2\dfrac{\varphi}{2}\right)^{1-\alpha}\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2}+\gamma_n, \dfrac{1}{2}-\gamma_n, 2-\alpha; cos^2\dfrac{\varphi}{2}\right)\right], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,y) \in D_+, \\ \sigma^{-\beta} J_{\gamma_n}(\sqrt{\lambda}_{n,m}\sigma)\theta^{-(\beta+\gamma_n)}\mathrm{F}\left(\beta+\gamma_n, \dfrac{1}{2}+\gamma_n, 1+2\gamma_n; \dfrac{1}{\theta}\right), \qquad (x,y) \in D_-, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2+4y}$, $0 \le r \le 1$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{y}}{x}$, $0 \le \varphi \le \pi/2$ при $y > 0$;

$$\sigma = \sqrt{x^2+4y} \;, 0 \le \sigma \le 1, \; \theta = \frac{x + \sqrt{x^2+4y}}{2\sqrt{x^2+4y}} \;, \theta \ge 1 \text{ при } y < 0.$$

Отметим, что в работе Мамедова Я.Н. построена система функций задачи T_λ в области D, где граница области D_+ состоит из отрезка AK оси $y = 0$, $K = (-1,0)$, и дуги $KB : x^2 + 4y = 1$, $y > 0$.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Близняков Н.М. (Воронеж)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \tag{1}$$

где $P(x,y), Q(x,y)$ — однородные многочлены степени $n = 2m+1 \in \mathbb{N}$, $P(0,y) \not\equiv 0$.

Обозначим

$$F(x,y) = yP(x,y) - xQ(x,y),$$

$$G(x,y) = F(x,y)/\text{НОД}\left(F(x,y), \tfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right).$$

Рассмотрим векторное поле

$$\Phi(x,y) = \{G(x,y), P(x,y)\}.$$

Теорема. *Пусть многочлен $F(1,y)$ имеет k различных вещественных корней, $k > 0$. Нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда 0 — изолированная особая точка векторного поля $\Phi(x,y)$ и ее топологический индекс равен k:*

$$ind(\Phi, 0) = k. \tag{2}$$

Вычисление индекса нулевой особой точки поля $\Phi(x,y)$ можно свести [1] к вычислению классического индекса Коши рациональной функции:

$$ind(\Phi, 0) = I_{-\infty}^{+\infty} P(1,y)\frac{\partial F}{\partial y}(1,y)/F(1,y).$$

Поскольку $k = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial y}(1,y)/F(1,y)$, то равенство (2) эквивалентно следующему:

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial y}(1,y)/F(1,y) = I_{-\infty}^{+\infty} P(1,y)\frac{\partial F}{\partial y}(1,y)/F(1,y).$$

Техника вычисления индексов Коши хорошо развита, в частности, формула Эрмита-Гурвица-Фробениуса [2] позволяет выразить индекс Коши $I_{-\infty}^{+\infty} R$ любой рациональной функции через коэффициенты её числителя и знаменателя.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект N.99-01-00390) и Программы "Университеты России — фундаментальные исследования" (проект N.3673).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bliznyakov N.M. Cauchy indices and the index of a singlular point of a vector field // Lecture Notes in Mathematics, 1986. - N.1214. - P.1-20.

[2] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1967. - 576с.

[3] Каменков Г.В. Избранные труды, т.2: Устойчивость и колебания нелинейных систем. - М.: Наука, 1972. - 214с.

РЕГУЛЯРНОСТЬ ЕЛЕМЕНТОВ АБЕЛЕВЫХ СУПЕРАЛГЕБР

Блюмин С.Л., Кривовяз Е.В. (Липецк)

Обратимость в супералгебрах исследовалась в [1], а в абелевых n-кратных супералгебрах - в [2]. Ниже исследуется обобщенная обратимость (регулярность) в абелевых супералгебрах.

Пусть A - абелева супералгебра с единицей I, или коммутативная Z_2-градуированная алгебра, то есть $A = A^0 \oplus A^1$ (прямая сумма подмодулей) и $A^i \cdot A^j \subset A^{i \oplus j}$, $i, j \in Z_2$; A^0 является подалгеброй в A, $I \in A^0$. Элемент $a = a^0 + a^1 \in A$, $a^0 \in A^0$, $a^1 \in A^1$, по определению регулярен, если существует элемент $x = x^0 + x^1 \in A$ (обобщенный обратный к a) такой, что $a \cdot x \cdot a = a$ или $a^2 \cdot x = a$. Так как $a^2 = (a^0 + a^1)^2 = ((a^0)^2 + (a^1)^2) + (2 \cdot a^0 \cdot a^1)$, $(a^0)^2 + (a^1)^2 \in A^0$, $2 \cdot a^0 \cdot a^1 \in A^1$, то возникает система уравнений

$$((a^0)^2 + (a^1)^2) \cdot x^0 + (2 \cdot a^0 \cdot a^1) \cdot x^1 = a^0,$$
$$(2 \cdot a^0 \cdot a^1) \cdot x^0 + ((a^0)^2 + (a^1)^2) \cdot x^1 = a^1.$$

В силу коммутативности корректно определено понятие детерминанта и применимо правило Крамера: если $\Delta = ((a^0)^2 + (a^1)^2)^2 - (2 \cdot a^0 \cdot a^1)^2 = ((a^0)^2 - (a^1)^2)^2$ обратим, то есть $\delta = (a^0)^2 - (a^1)^2$ обратим, то с использованием обозначения $a' = a^0 - a^1$, когда $a' \cdot a = (a^0)^2 - (a^1)^2$, x запишется в виде $x = (a' \cdot a)^{-1} \cdot a' = a' \cdot (a \cdot a')^{-1}$; это в действительности обычный обратный к $a : a \cdot x = x \cdot a = I$ (простейший пример дает абелева супералгебра $\mathbf{C}$ комплексных чисел, a' - обычное сопряженное).

Если Δ , to есть δ, необратим, то этот подход неприменим. Пусть, в этом случае, $\Lambda = (a^0)^2 + (a^1)^2$ обратим. Тогда из второго уравнения $x^1 = \Lambda^{-1} \cdot (a^1 - 2 \cdot a^0 \cdot a^1 \cdot x^0)$, и подстановка в первое дает уравнение для $x^0 : \delta^2 \cdot x^0 = \delta \cdot a^0$. Пусть для простоты $\delta = 0$, тогда $(a^1)^2 = (a^0)^2, \Lambda = 2 \cdot (a^0)^2$, так что a^0 обратим, $x^0 = c \in A^0$ произволен и

$$x = c + \Lambda^{-1} \cdot (a^1 - 2 \cdot a^0 \cdot a^1 \cdot c)$$

(простейший пример дает абелева супералгебра $\mathbf{U}$ двойных чисел).

ЛИТЕРАТУРА

1. Блюмин С.Л., Кривовяз Е.В., Миловидов С.П., Мишачев Н.М. Обратимость элементов Z_2-градуированных алгебр // Тез. докл. Воронеж. вес. матем. школы "Современные методы в теории краевых задач (Понтрягинские чтения-VIII)". Воронеж: ВГУ, 1997. С.23.

2. Блюмин С.Л., Кривовяз Е.В., Немец С.Ю. К обратимости элементов n-кратных супералгебр // Тез. докл. Воронеж. вес. матем. школы "Современные методы в теории краевых задач (Понтрягинские чтения-IX)". Воронеж: ВГУ, 1998. С.221.

РЕГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
(методические аспекты)

Блюмин С.Л., Миловидов С.П. (Липецк)

Представляется целесообразным изучение в теории операторов темы "Регулярные операторы" в смысле регулярности по Дж. фон Нейману, или обобщенной обратимости. Это мотивируется не только введением данного понятия именно в работе одного из творцов функционального анализа [1], его давней важностью в линейной и общей алгебре [2] и все возрастающей -- в других разделах математики (см., например, [3]), но и тем, что оно методически наиболее просто вводит в круг понятий, модифицирующих классическое понятие обратимости операторов или тесно связанных с ним, а в ряде важных для приложений случаев допускает конструктивное вычисление.Таковы понятия лево-, право-, непрерывно-, относительно-, приводимо-, почти-, псевдообратимых операторов,плотно определенных, нормально разрешимых, фредгольмовых (нетеровых), топологически фредгольмовых, полуфредгольмовых, конечномерных, компактных, ядерных, абсолютно суммирующих, Гильберта-Шмидта операторов, понятия следа и индекса оператора. Простейшие связи между этими понятиями таковы: оператор, одновременно лево- и право-обратимый, обратим; лево-, право-обратимые операторы регулярны; в банаховых пространствах операторы регулярны тогда и только тогда, когда они нормально разрешимы и топологически фредгольмовы, в гильбертовых пространствах - когда они нормально разрешимы; конечномерные и фредгольмовы операторы регулярны; именно для них разрабатываются алгоритмы конструктивного вычисления (так, алгоритм Фаддеева может быть обобщен на основе рекуррентных формул теории Гротендика-Пича [4,5]детерминантов Фредгольма) с последующими применениями - например, в теории краевых задач [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Neumann J. von. On regular rings//Proc.Nat.Acad.Sci. USA.1936. V 22.P.707-713.

2. Общая алгебра/Под общ. ред. Л.А.Скорнякова.Т. 1, 2. М.: Наука, 1990,1991.592 с.,480 с.

3. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи.Киев:ИМ НАНУ,1995.320 с.

4. Гротендик А.Теория Фредгольма//Математика.1958.2:5.С.51-103.

5. Пич А. Операторные идеалы.М.:Мир,1982.536 с.

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ НЕЯВНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Котов П.Ю. (Липецк)

Хорошо известно, что явная непрерывная 1D-система, описываемая раз- решенным относительно старшей производной обыкновенным дифференциальным уравнением некоторого порядка или системой таких уравнений, может быть представлена (путем расширения пространства состояний) в нормальной форме Коши, имеющей первый порядок как дифференциальная (ее порядок как системы складывается из порядков исходных уравнений как дифференциальных); то же верно для явных дискретных 1D-систем, описываемых разрешенными относительно старшей разности обыкновенными разностными уравнениями. Известны некоторые результаты такого рода и для явных непрерывных (см., например, [1]) и дискретных (см., например, [2]) MD-систем, описываемых дифференциальными или разностными уравнениями с частными производными или разностями. Именно поэтому в классической математической теории систем, как правило, используется их описание в нормальной форме Коши.

В общей постановке задача приведения к нормальной форме системы, описываемой неявным (в линейном случае - сингулярным) нелинейным уравнением

$$f(x, \{..., S_i x, ...\}, \{..., S_i S_j x, ...\}, ..., \{..., S_i S_j ... S_k x, ...\}) = 0,$$

где $x-$ исходный вектор состояния, $f-$ некоторая векторная функция, $S_i, 1 \leq i \leq n$, - некоторые операторы (например, частные дифференциальные или разностные первого порядка), сводится к формированию нового вектора состояния X и новой векторной функции F таких, что система эквивалентно описывается уравнением

$$F(X, \{..., S_i X, ...\}) = 0,$$

причем одна из координат функции F непосредственно воспроизводит исходное уравнение, а остальные отражают те или иные соотношения между операторами S_i (например, их коммутативность; характерный пример приведен в [3]); в случае свободных систем, когда соотношения отсутствуют, функция F сводится к f. Предлагается методика соответствующих преобразований, реализованная для ряда конкретных классов систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск: Наука и техника, 1983. 272с.

2. Блюмин С.Л. Преобразования моделей мультиразмерностных систем. М. 1989. 23с. (Деп. в ВИНИТИ ред.ж."ИАН СССР.Техническая кибернетика" 21.09.89. N 5978-В-89).

3. Блюмин С.Л. Двумерные преобразования сигналов и анализ двумерных систем. Учебное пособие. Воронеж: ВПИ-ЛПИ, 1991. 75с.

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ФУНКЦИОНАЛОМ

Бободжанов А.А.,Прохоренко В.И.,Сафонов В.Ф.(Москва)

В докладе обсуждается проблема разрешимости системы управления

$$\varepsilon\dot{x} = A(t)\,x(t,\varepsilon) + B(t)\,u(t,\varepsilon) + f(t), \quad x(0,\varepsilon) = x^0, \; 0 \le t \le T, \qquad (1)$$

с функционалом качества

$$J_\varepsilon\,(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T (x^*\,Q(t)\,x + u^*\,R(t)\,u\,)\;exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_T^t \mu\,(\theta)\,d\,\theta\right)d\,t, \qquad (2)$$

зависящим от быстро убывающей функции демпфирования (условия на матрицы $Q(t)$ и $R(t)$ обычные для систем управления). При следующих предположениях на спектр $\{\lambda_j(t)\}$ гладкой матрицы

$$T(t) = \begin{pmatrix} A & -B\,R^{-1}\,B^* \\ -Q & -\,(A^* + \mu\,I) \end{pmatrix}$$

оптимальной системы (правая часть $f(t) \in C[0,1]$):

а) $\lambda_j(t) \ne 0, j = 1,...,n,\ n+2,...,2n,\ \forall t \in [0,\,T]$;

б) $\lambda_{n+1}(t) \;\equiv\; 0\ \forall t\,\in\,[t_1,t_2] \subset\ (0,1)$
и $\quad\lambda_{n+1}(t) \ne 0, \quad \forall t\,\in\,[0,1]\backslash[t_1,t_2]$;

в) $\lambda_i\,(t) \ne \lambda_j(t)\,,\ i \ne j,\ i\,,\,j = \overline{1,2n},\ \ \forall t\,\in\,[0,T]$;

г) $Re\,\lambda_j(t)\ <\ 0, j\,=\,\overline{1,n},\ Re\,\lambda_j(t)\ \ge\ 0,\ j\,=\,\overline{n+1,2n},\ \forall t\ \in\ [0,T]$ показывается однозначная разрешимость задачи (1) - (2) и выводятся оценки (при достаточно малых $\varepsilon > 0$)

$$||x(t,\varepsilon)||_{C[0,T]} \le\ K_1\,||x^0||\ +\ \frac{K_2}{\varepsilon}||f(t)||_{C[0,T]},$$

$$||u(t,\varepsilon)||_{C[0,T]} \le\ K_3\,||x^0||\ +\ \frac{K_4}{\varepsilon}||f(t)||_{C[0,T]}.$$

Полученные оценки позволяют изучить предельный переход в системе (1)- (2) при $\varepsilon\ \to +0$ и установить предельные режимы в виде "всплесков", "ступенек" и т.д.

НЕСТАБИЛЬНАЯ ТОЧКА ПОВОРОТА В СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕДИАГОНАЛИЗИРУЕМЫМ ПРЕДЕЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Бобочко В.Н. (Кировоград)

Введение. Рассмотрим задачу

$$L_\varepsilon W(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 W''(x,\varepsilon) - AW(x,\varepsilon) = h(x), \tag{1}$$

$$W(0,\varepsilon) = \mu^{-2}\alpha_0 + \hat{W}^0, \qquad W'(0,\varepsilon) = \left[\mu^{-4}\alpha_1 + \mu^{-3}\hat{W}_0\right]$$

при $\varepsilon \to +0$, $\quad x \in I = [0,a]$, $\quad \mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Здесь A – линейный оператор, заданный в $\mathbf{R}^n$, $W(x,\varepsilon)$ - искомая вектор-функция, α_m, $\hat{W}_m$, $m = 0,1$ – начальные векторы. Задачу (1) будем исследовать при выполнении таких условий.

Условие 1. $A, h(x) \in \mathbf{C}^\infty[I]$.

Условие 2. Спектр предельного оператора A имеет вид

$$\lambda_1(x) \equiv \cdots \equiv \lambda_{p+s}(x) < \cdots < \lambda_{n-1}(x) < 0 \leq \lambda_n(x) \equiv x\tilde{\lambda}_n(x).$$

Различные аспекты исследования СВЗ (1) для случая простого спектра оператора A изучены достаточно хорошо ([1 - 2] и др.). В этом случае *Условия 2* на спектр оператора A обеспечивали однозначную постановку задачи (1). Поскольку в исследуемом случае спектр предельного оператора A содержит кратный елемент $\lambda_1(x)$, то *Условия 2* еще не достаточно для однозначной постановки, а соответственно для построения асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи (СВЗ) (1).

Случай, когда предельный оператор A не являеться диагонализируемым вносит значительные трудности в исследование СВЗ (1).

Для однозначного описания регуляризующей вектор-переменной t и пространств безрезонансных решений (ПБР) необходимо еще иметь информацию о нормальной форме оператора A. Поэтому будем предполагать, что $p+s$ - кратному элементу $\lambda_1(x)$ соответствует один элементарный делитель кратности p , и s -простых элементарных делителей.

Из *Условия 2* следует, что точка поворота $x = 0$ является нестабильной точкой поворота для СВЗ (1). Построена равномерно пригодная асимптотика решения задачи (1) на всем отрезке $[0;a]$ в случае когда предельное векторное уравнение $-A\omega(x) = h(x)$ имеет разрыв второго рода в точке $x = 0$.

Дана оценка остаточного члена построенной асимптотики решения СВЗ (1).

1. Бобочко В. Н. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота // ДУ. – 1991. – Т. 27. - No9. – с. 1505-1515.

2. Бобочко В. Н. Система дифференциальных уравнений с точкой поворота в случае недиагонализируемого предельного оператора // ДУ. – 1998. - Т. 34. – No10. – с. 1304-1312.

Краевая задача для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с недиагонализируемым предельным оператором

Бобочко В.Н. (Кировоград), **Маркуш И.И.** (Слупск)

В докладе исследуется краевая задача вида

$$L_\varepsilon W(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 W''(x,\varepsilon) - AW(x,\varepsilon) = h(x); \qquad (1)$$

$$E_1 W(m,\varepsilon) = E_1(\mu^{-2}\alpha_m + P_m),\ E_2 W'(m,\varepsilon) = E_2(\mu^{-4}\alpha_m + \mu^{-2}P_m)$$

при $\varepsilon \to +0$, $x \in j = [0,a]$, $m = 0,a$; $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

Здесь A — линейный оператор, заданный в R^n, $h(x)$ — известная вектор-функция, $W(x,\varepsilon)$ — искомая вектор-функция, α_m и P_m — известные начальные векторы, $E_k(k = 1,\ 2)$ — диагональные матрицы n-го порядка вида

$$E_1 = \mathrm{diag}\ \{1,0,\ldots,0\},\ E_2 = \mathrm{diag}\ \{0,1,\ldots\ 1\}.$$

Задача (1) исследуется в случае, когда спектр предельного оператора A удовлетворяет условиям

$$\lambda_1(x) \equiv x\tilde{\lambda}_1(x) < 0 < \lambda_2(x) \equiv \cdots \equiv \lambda_{p+1}(x) < \lambda_{p+2}(x) \equiv \cdots$$

$$\equiv \lambda_{p+s+1}(x) < \lambda_{p+s+2}(x) < \cdots < \lambda_n(x). \qquad (2)$$

Построена равномерно пригодная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи (1) на всем отрезке j, включая и точку поворота $x = 0$. Дана оценка остаточного члена асимптотики решения задачи (1). Доказано, что на любом компакте отрезка j, не содержащем точки поворота $x = 0$, имеет место предельное равенство: $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} W(x,\varepsilon) = \omega(x)$, где $\omega(x)$ — решение вырожденного векторного уравнения: $-A\omega(x) = h(x)$. Исследован общий случай, когда точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода для решения вырожденного уравнения [1–3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
2. *Бобочко В.Н.* Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с кратной точкой поворота // Дифференц. урав. — 1996. — Т. 32, № 9. С. 1153–1155.
3. *Бобочко В.М., Маркуш I.I.* Асимптотичне інтегрування диференціальних рівнянь із нестабільним спектром граничного оператора. — Київ: ВІПОЛ, 1993. — 214 с.

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

И.В. БОЕВА, В.В. КАТРАХОВ (Владивосток)

В докладе предполагается рассмотреть операторы преобразования для дифференциального сингулярного оператора типа Лежандра–Гегенбауэра

$$L_{\nu,\mu}u(x) = \frac{1}{s^{2\nu}(x)}\frac{d}{dx}(s^{2\nu}(x)\frac{du}{dx}) - \frac{\mu(\mu+2\nu-1)}{s^2(x)},$$

где $s(x) = sin(x)$ или $s(x) = sh(x)$ (sh – гиперболический синус). Указанные операторы преобразования преобразуют $L_{\nu,\mu}$ в сдвинутый на константу оператор двухкратного дифференцирования. Сами операторы преобразования представляют собой суперпозицию обычных лиувиллевских операторов дробного интегрирования или дифференцирования и аналогичных операторов "по функции $s(x)$". Даются оценки этих операторов в весовых лебеговых классах, причем в некоторых случаях – с точными постоянными. В дальнейшем они применяются для построения новых функциональных пространств, связанных с пространствами Бесова–Никольского–Соболева, в которых справедливы соответствующие теоремы о весовых и нелокальных следах.

НЕСТАБИЛЬНАЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧКА ПОВОРОТА В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Болилый В.А. (Кировоград)

Рассматривается сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение (СВДУ)

$$\varepsilon^5 y'''(x,\varepsilon) + \varepsilon^3 a(x) y''(x,\varepsilon) + \varepsilon^2 b(x) y'(x,\varepsilon) + c(x) y(x,\varepsilon) = h(x), \tag{1}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x) \in C^\infty[I]$, $x \in I = [0; a]$.

Предполагается, что корни характеристического уравнения имеют вид

$$k_{1,2}(x) = \pm\sqrt{x\tilde{k}(x)}, \quad k_3(x) < 0, \quad \tilde{k}(x) > 0.$$

Согласно принятой терминологии точка $x = 0$ называется псевдодифференциальной точкой поворота.

Случай стабильной точки поворота, т.е. когда $\tilde{k}(x) < 0$ при $x \in I$ изучен в [1].

Нестабильность точки поворота означает, что одна из функций Эйри неограниченно возрастает на бесконечности.

Исследованию СВДУ (1) посвящено сравнительно мало работ, причем основные результаты получены в работах Р. Лангера и В. Вазова.

Для построения равномерно пригодной асимптотики решения уравнения (1) используется дифференциальный оператор Эйри-Лангера вида

$$\mathrm{T} \equiv \frac{\partial^3}{\partial t^3} - t\frac{\partial}{\partial t}. \tag{2}$$

Для аналогичных целей, Р. Лангер в уравнении с дифференциальной точкой поворота использовал модельное уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \lambda^2 z \frac{\partial V}{\partial z} + 3\lambda\mu V = 0,$$

где $|\lambda| \to +\infty$, $\mu-$ некоторое число. Исследование решения этого уравнения значительно сложнее по сравнению с исследованием решений модельного уравнения (2).

В данной работе построена равномерно пригодная асимптотика решения уравнения (1) по методу разработанному в [2].

1. Бобочко В.Н., Болилый В.А. Псевдодифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений // Математическая физика и нелинейная механика - 1999. - вып. 2.

2. Бобочко В.Н. Уравнения типа Орра-Зоммерфельда с двумя точками поворота // Дифференц. ур.-ия - 1992. - Т. 28, N 10. - С. 1559-1570.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА.

Бондарева Г.С.(Ижевск)

Пусть $\Omega \in R^n$, $n \geq 3$ ограниченная односвязная открытая область с гладкой поверхностью $\partial\Omega$. $B = C^\alpha(\overline{\Omega})$, $\alpha \in [0,1)$–банахово пространство функций Гёльдера с конечной нормой

$$||u|| = \sup_{t\in\Omega} |u(x)| + \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}.$$

Определим интегральный оператор $\Lambda : B \to C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ равенством

$$\Lambda g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_\Omega g(s)\ln\frac{1}{|t-s|}ds., & n=2 \\ \frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_\Omega g(s)\frac{1}{|t-s|^{n-2}}d\,s, & n\geq 3. \end{cases}$$

Исследуется на разрешимость задача

$$\Delta u + Tu = f, \tag{1}$$

$$l_k(u) = 0, \qquad k = 1,\ldots,m, \tag{2}$$

где $f \in B$, $T : D \to B$ - линейный ограниченный оператор, l_k, $k = 1,\ldots,m$–некоторые линейные ограниченные функционалы, в пространстве D функций вида

$$u = \Lambda g + \sum_{j=1}^{m} r_j u_j, \qquad \text{где} \tag{3}$$

$u_j, j = 1\ldots,m$ – система линейно независимых гармонических функций, $r_j \in R$, с нормой $||u||_D = ||g||_B + \sum_{j=1}^m |r_j|$.

Для интерполяционных условий

$$l_k(u) \equiv u(t_k) - \gamma_k, \quad k = 1,\ldots,m, \quad \gamma_k \in R, \tag{4}$$

где t_k– точки области Ω, получена теорема

Теорема 1 . *Для любого набора точек $t_k \in \Omega$, $k = 1,\ldots,m$ задача ??-?? однозначно разрешима в D, если $||T||_{D\to B} \leq \frac{1}{1+\sum_{k=1}^m |\Lambda(1)(t_k)|}$.*

УДК 539.374

Борисович О.Ю. Бырдин А.П.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ЯДЕР НАСЛЕДСТВЕННОСТИ ОБРАТНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Требование фактической интерпретируемости теории термореологически простых сред с памятью на основе экспериментальных данных приводит к необходимоти использования частных видов определяющих соотношений, вытекающих из общего соотношения Вольтера - Фреше

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} G_n(t_1, ..., t_2) \prod_{k=1}^{n} E(t - t_k) dt_k, \qquad (1)$$

где S и E - напряжение и деформация в среде, G_n - ядра наследственности. При обработке экспериментальных данных для металлов и полимеров, многие авторы указывали на подобие кривых ползучести или подобие изохронных кривых. Известно, что этот факт отражается в сепарабельности ядер наследственности G_n , или ядер наследственности K_n в соотношении, обратном к (1):

$$G_n(t_1, ..., t_n) = a_n \prod_{k=1}^{n} G_1(t_k), \quad K_m(t_1, ..., t_m) = B_m \prod_{k=1}^{m} K_1(t_k).$$

Для этого класса сред нами получены аналитические выражения для ядер наследственности обратного к (1) соотношения в общем случае

$$K_n(t_1, ..., t_n) = \varphi_n\left(\frac{a_2}{a_1^2}, ..., \frac{a_n}{a_1^n}\right) \Phi_n(t_1, ..., t_n), \qquad (2)$$

где функция φ_n вычислена для ряда зависимостей a_n от n, в случае ряда(1), содержащего только интегралы нечетной кратности при $a_{2n+1} = \mu^{2n+1}$

$$K_{2n+1}(t_1, ..., t_{2n+1}) = 2(-2)^n \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!} \Phi_n(t_1, ..., t_{2n+1}), \qquad (3)$$

а также в случае, когда соотношение (1) содержит лишь однократный и трехкратный интегралы (одномерная кубичная теория Ильюшина - Огибалова):

$$K_{2n+1}(t_1, ..., t_{2n+1}) = \left(-\frac{a_3}{2\pi}\right) \frac{3}{2n+1} \binom{3n-1}{n-1} \Phi_n(t_1, ..., t_{2n+1}). \qquad (4)$$

Здесь $\binom{n}{k}$ - биномиальные коэффициенты, $\Phi_n(t_1, ..., t_n) = K_1(t_1) \prod_{k=2}^{n} \delta(t_k - t_1)$, функция $K_1(t)$ является решением уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_1(t-\tau) K_1(\tau) d\tau = \delta(t).$$

Полученные формулы (2) - (4) позволяют определять временные зависимости функций G_n через найденные в опытах на ползучесть функции K_n .

ГЛОБАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Борисович Ю.Г. [1] **(Воронеж)**

Современная теория управляемых систем и оптимального управления активно использует разнообразный аппарат топологии (школы Л. С. Понтрягина, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Н. Н. Красовского и других). Для настоящего момента характерна теснейшая связь с многозначным анализом, теорией неподвижных точек многозначных отображений, с фредгольмовым анализом (указанная тематика интенсивно изучается, включая не только дифференциальные уравнения, но и включения. В сингулярных по Лионсу задачах оптимизации $f(y) = B(u)$, $G(y,u) \to ind$, где $f : Y \to X$ — фредгольмов (или Браудера-Скрыпника) оператор, $B : U \to X$ — компактный, $G : Y \times U \to \mathbb{R}$ — функционал качества; тогда множество решений $\mathfrak{M} = \{(y,u)\}$ основного уравнения есть прообраз диагонали $(f \times B)^{-1}\Delta_X$, и при соответствующих условиях определен (надлежаще обобщенный) индекс пересечения $\gamma(f, B)$ как класс бордизмов пространства $Y \times U$, характеризующий топологию множества $\mathfrak{M}$. На $\mathfrak{M}$ следует ограничить функционал G и искать inf. Важнейший этап — исследование структуры $\mathfrak{M}$. Настоящая статья посвящена этой задаче. В работе автора [1] развит метод исследования множества $\mathfrak{M}$. При этом привлекаются методы современного глобального анализа и теория многозначных отображений бордизмов с бесконечномерным оснащением, обобщающая бордизмы Л. С. Понтрягина.

Пусть Φ_n — класс нелинейных фредгольмовых отображений индекса n, $K^v(E)$ — пространство компактных выпуклых множеств, X — банахово многообразие класса C^1 с краем ∂X. Рассмотрим отображения $f : X \to E$, $g : X \to K^v(E)$, $k : \mathbb{Z}^m \to K^v(E)$, где E — банахово пространство, $\mathbb{Z}^m$ — компактное многообразие, $f \in \Phi_n C^1(X, E)$ — собственное отображение, g, k — полунепрерывные сверху многозначные отображения, причем g является f-уплотняющим. Для отображения $H = f - g$ потребуем условие отделимости на ∂X : $H(\partial X) \cap k(\mathbb{Z}^m) = \emptyset$.

Теорема. *Для $n, m \in \mathbb{Z}$, $n + m = q \geq 0$, $m \geq 0$, определен индекс пересечения $\gamma(H, k)$ со значениями в классах бордизмов $\widetilde{F}_q(X \times Z^m)$ Элворти-Тромба, сохраняющийся при гомотопиях отображений, естественно согласованных с наложенными условиями. При нетривиальном $\gamma(H, k)$ существует пара $(x_*, z_*) \in (Int\, X) \times Z^m$, являющаяся совпадением H и k: $H(x_*) \cap k(z_*) \neq \emptyset$.*

Получен аналог этой теоремы и для отображений f, g классов S_+, α_0 Ф. Браудера, И. В. Скрыпника. Приведенная теорема позволяет исследовать структуру решений $\mathfrak{M}$ для нелинейных функционально-дифференциальных эволюционных систем с управлением и нелинейной функциональной связью, неразрешенных относительно фазовой скорости, в том числе для системы дифференциальных включений

$$g(x, \cdot x) \in F(t, u_t, x_t, \dot{x}_t), \quad \text{при условии} \quad l(u(\cdot), x(\cdot), \dot{x}(\cdot)) \ni \theta,$$

где F, l — многозначные с выпуклыми компактными значениями нелинейные операторы, заданные на соответствующих функциональных пространствах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Борисович Ю.Г. Глобальный анализ операторных уравнений, возникающих в сингулярных задачах оптимизации // ДАН РАН, 1997. - Т.355. - N.1. - С.11-13.

[2] Борисович Ю.Г. Топологические характеристики и исследование нелинейных задач // Известия ВУЗов. Математика. Казань: изд-во "Форт-Диалог", 1997. - N.2. - С.3-23.

[1] Работа поддержана грантами "Программа Университеты России" (1999г.) и РФФИ (99-01-00390).

ОБОБЩЕННАЯ G-СТЕПЕНЬ ЭКВИВАРИАНТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Борисович Ю.Г. [1], Золотарев И.Ю. (Воронеж)

Проблеме вычисления топологической степени эквивариантных отображений конечномерных многообразий и ее обобщений посвящено много работ (отметим недавние [1], [2]). В докладе предлагается новая конструкция G-степени со значениями в классах бордизмов G-оснащенных G-многообразий.

Пусть $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ — компактное, главное, C^1-гладкое G-многообразие, где G — компактная группа Ли, действующая в $\mathbb{R}^{n+k}$ по ортогональному представлению, а нормальное к M^n расслоение $N(M) = \{(x,v);\ x \in M^n,\ v \perp T_xM^n\}$ — эквивариантно. Систему непрерывных, эквивариантных сечений $\{\bar{\tau}_j(x)\}_{j=1}^k = \{(x, \bar{\tau}_j(x)\}_{j=1}^k$, таких, что $\{\bar{\tau}_j(x)\}_{j=1}^k$ — базис $N_x(M^n)$, назовем G-нормальным k-реперным полем (G-оснащением). На множестве замкнутых, главных G-многообразий с G-оснащениями естественно вводится понятие G-бордантности, класс G-бордизмов обозначим $[M^n, \tau^k]_G$. Пусть G действует на $\mathbb{R}^{n+k}$, $\mathbb{R}^k$ по ортогональным представлениям, Ω — открытое, ограниченное, инвариантное подмножество в $\mathbb{R}^{n+k}$ и $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^k$ — C^1-гладкое G-отображение, такое, что θ — регулярное значение и $f(x) \neq 0$, $x \in \partial\Omega$ (такое отображение f будем называть допустимым). Если на Ω действие G свободно, то $M^n = f^{-1}(0)$ — главное замкнутое G-многообразие в $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Фиксируем $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^k$ — базис в $\mathbb{R}^k$, обозначим $\bar{\tau}_i(x) \in N_x(M^n)$ — вектор, такой, что $Df(x)\bar{\tau}_i(x) = \bar{e}_i$. На $N(M^n)$ можно определить действие группы G, относительно которого репер $\{\bar{\tau}_i\}$ является G-оснащением [3].

Определение. *Назовем G-степенью $G - Deg(f, \bar{\Omega})$ C^1-гладкого $\bar{\Omega}$-допустимого регулярного G-отображения f на области Ω класс G-бордизмов $[M^n, \tau^k]_G$.*

Теорема. *Пусть g_0 и $g_1 : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^k$ — C^1-гладкие $\bar{\Omega}$-допустимые G-отображения, для которых θ — регулярное значение. Если существует C^1-гладкое по (x,t) $\bar{\Omega}$-допустимая по x G-гомотопия $F : \bar{\Omega} \times I \to \mathbb{R}^k$ отображения g_0 в g_1, для которой 0 — регулярное значение, то $G - Deg(g_0, \bar{\Omega}) = G - Deg(g_1, \bar{\Omega})$.*

Данное определение G-степени обобщается на случай, когда действие группы G не свободно на Ω, а отображение f — непрерывно и θ — не регулярное значение. Соответствующая конструкция для $G = S^1$ приведена в работе [4]. Используя теорему G-вложения (Мостов-Пале), можно распространить эту конструкцию на случай отображений многообразий, что позволяет развить конструкцию G-степени фредгольмовых отображений на основе метода конечномерной редукции [5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кравцевич В., Хуасинг С. Аналитическое определение эквивариантной степени // Известия ВУЗов. Математика. - 1996. - N 6. - С.37-54.

[2] Kushkuley A., Balanov Z. Geometric Methods in Degree Theory for Equivariant Maps // Lecture Notes in Math., 1996. - V.1632. - 136p.

[3] Борисович Ю.Г., Золотарев И.Ю. К обобщенной теории степени эквивариантных отображений // Труды матем. факультета ВГУ, 1998. - N.3. - С.4-9.

[4] Золотарев И.Ю. К обобщенной теории степени отображений, эквивариантных относительно действия компактной группы Ли $G = S^1$ // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ, 1999. - С.51-54.

[5] Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы операторы и теория Лере-Шаудера // УМН, 1977. - Т.32. - Вып.4. - С.3-50.

[1] Работа поддержана грантами "Программа Университеты России" (1999г.) и РФФИ (99-01-00390).

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕПЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ.

Борисович Ю.Г. [1]**, Портная Т.В. (Воронеж)**

Рассмотрим ориентированную $(n-1)$-мерную сферу S^{n-1}, $(n \geq 3)$ и n-реперное векторное поле F со значениями в $SO(n)$, задаваемое на гиперповерхности $\Gamma \in S^{n-1}$ (с индуцированной ориентацией). Такие реперные поля возникают, например, при исследовании уравнений ОТО, где существееную роль играют сингулярности, соответствующие особым точкам поля.

Пусть ориентируемая гиперповерхность Γ является границей области $M^{n-1} \subset S^{n-1}$, гомеоморфной диску D^{n-1}, тогда для гиперповерхности Γ, гомеоморфной S^{n-2}, определен глобальный топологический индекс $\gamma(F,\Gamma) \in \pi_{n-2}(SO(n))$ как препятствие к продолжению реперного поля с Γ на ограничиваемую им область. Для изолированной особой точки $x^* \in M^{n-1}$ определен топологический индекс $ind_{x^*} \in \pi_{n-2}(SO(n))$.

Рассмотрим связные подмножества $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$ сферы S^{n-1}, такие что $\bigcap\limits_{j\in\beta}(B_j) \neq 0$, $\beta \subseteq \{1,2,\ldots,k-1\}$. Пусть на B_1 определено сечение $F_1 : B_1 \to B_1 \times SO(n)$, а на B_i, $(i = \overline{2,k-1})$ для сечения F_1 определены условия $F_i : B_i \to B_i \times M_i$, где $M_i \subset SO(n)$. Введем в рассмотрение k -ады [1]
$(S^{n-1}, B_1, B_2, \ldots, B_{k-1})$, $((R^n)^n, SO(n),$
$M_2, \ldots, M_{k-1})$ и морфизм $f : (S^{n-1}, B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}) \to ((R^n)^n, SO(n), M_2, \ldots, M_{k-1})$
Отображение f задает элемент k -адной гомотопической группы Постникова М.М. - Жогина И.Л. $[\gamma_k](F) \in \pi_{n-2}((R^n)^n, SO(n), M_2, \ldots, M_{k-1})$, определяющий препятствие к продолжению n-реперного поля на всю сферу S^{n-1} с условиями F_i.

При вычислении гомотопических групп k - ад полезны следующие свойства.

Теорема 1. Пусть в пунктированной $(k+1)$ - аде $(A; B_1, \ldots, B_{k-1})$ B_k стягиваемо и $B_k \bigcap\limits_{j\in\beta}(B_j)$ стягиваемо для любого $\beta \subseteq \{1,2,\ldots,k-1\}$. Тогда

$$\pi_r(A;B_1,\ldots,B_k) \simeq \pi_r(A;B_1,\ldots,B_{k-1}),\ r > k-2$$

Теорема 2. Пусть для произвольной пунктированной $(k+1)$ - ады $(A;B_1,\ldots,B_{k-1})$ $B_k \subset B_i$ для любых $i = \overline{1,k-1}$, тогда

$$\pi_r(A;B_1,\ldots,B_k) \simeq \pi_r(A;B_1,\ldots,B_{k-1}),\ r > k-2$$

Следствие. *Если для произвольной пунктированной* $(k+1)$ - *ады* $(A;B_1,\ldots,B_{k-1})$ $B_k \subset B_{k-1} \subset \ldots \subset B_2 \subset B_1$, *тогда*

$$\pi_r(A;B_1,\ldots,B_k) \simeq \pi_r(A;B_1)$$

Теорема 3.(Об инвариантности при деформационных ретракциях.) Если $(A;B_1,\ldots,B_k) \subset (A';B'_1,\ldots,B'_k)$, причем A_i, B_i, $i = \overline{1,k}$ являются деформационными ретрактами соответственно A'_i, B'_i, $i = \overline{1,k}$, а все $\bigcap\limits_{j\in\beta}(B_j)$, $\beta \subseteq \{1,2,\ldots,k-1\}$ являются деформационными ретрактами соответствующих $\bigcap\limits_{j\in\beta}(B'_j)$, $\beta \subseteq \{1,2,\ldots,k-1\}$, то

$$\pi_r(A;B_1,\ldots,B_k) \simeq \pi_r(A';B'_1,\ldots,B'_k),\ r > k-2$$

[1] Постников М.М. Лекции по геометрии. Основы теории гомотопий. - М.: Наука, 1984. -416с.

---

[1]Работа поддержана грантами РФФИ N 99-01-00390 и и "Программой Университеты России".

УДК 519.85

МЕТОД МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ ПРИ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Ю.В. Бугаев (Воронеж)

Метод экстраполяции экспертных оценок был предложен, как способ генерации формального правила, – функции полезности (ФП), упорядочения альтернативных решений, несравнимых по безусловному критерию предпочтения. Формальным обоснованием метода является теорема фон Неймана о существовании ФП [1]. Использование метода предполагает следующее.

1. Каждый объект выбора можно рассматривать как p-мерный вектор $Q = (q_1, q_2, ..., q_p)$, компоненты которого соответствуют исходным критериям оптимизации или каким-либо другим параметрам моделируемой системы.

2.Эксперт (ЛПР) способен из каждой пары достаточно различающихся альтернатив выбрать лучшую по полезности.

3. Существует функция полезности заданной структуры:

$$F(Q) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_j(Q), \tag{1}$$

где f_j– известные функции векторного аргумента Q, монотонно возрастающие по каждой координате Q; α_j– неизвестные параметры (веса). Основное свойство функции (1) заключается в том, что альтернатива P лучше альтернативы Q по мнению эксперта (ЛПР) тогда и только тогда, когда $F(P) \geq F(Q)$.

Эксперту (ЛПР) предъявляется ограниченная выборка альтернатив $(Q;^1 ...Q^m)$, которую он должен упорядочить по убыванию полезности. Если экспертов несколько, то результаты упорядочения могут не совпадать. Считая значение оцененной полезности каждой альтернативы случайной величиной, распределение которой зависит от параметров ФП, можно для получения их точечных оценок воспользоваться принципом максимума правдоподобия.

В предположении нормальности распределения экспертных оценок полезности автором найдено условие существования конечного решения уравнений правдоподобия: мнения экспертов должны быть противоречивы. Кроме того, для случая двух альтернатив доказана единственность конечного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фишберн П. Многомерные функции полезности в теории ожидаемой полезности. В кн.: Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решений. М.: Статистика. 1979. - С. 10-44.

The gauge freedoms of decomposition formulae for 3-vector fields in R^3
E.N. Bukina and V.M. Dubovik (Dubna, JINR, BLTP)

- We discuss here to what extent single-valued is the Helmholtz representation of vector fields:

$$V \equiv V^{\parallel} + V^{\perp} = \nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}V - \mathrm{curl}\Delta^{-1}\mathrm{curl}V, \tag{1}$$

$$\text{where} \quad \Delta^{-1} := -\int_{\Omega\subseteq R^3} \frac{d^3r'}{4\pi|r-r'|}.$$

In fact (1) contains the evident "gauge freedoms":

$$\varphi = \varphi + \omega, \quad (\Delta\omega = 0), \qquad A = A + \nabla w.$$

If to remove the demands of topological triviality Ω or/and the boundedness of functions ω and w, we may represent the gauge freedoms in the form of special components to V:

$$V_N = \mathrm{curl}L\binom{r^l}{1/r^{l+1}}Y_{lm} \equiv \binom{-(l+1)\nabla r^l Y_{lm}}{l\nabla r^{-l-1}Y_{lm}},$$

which have finite values all over the space except $r \to \infty$ and $r \to 0$, respectively; really,

$$\mathrm{div}V_N = \mathrm{curl}V_N \equiv 0, \quad \text{in} \quad R^3/S^2_{r\to\infty} \quad \text{and} \quad R^3/\{0\}.$$

Thus, under this gauge freedom the Helmholtz decomposition takes for example the following forms

$$V = \nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}V + \mathrm{curl}\left(\Delta^{-1}\mathrm{curl}V + L\sum_{lm}\left[C_{lm}r^l + C'_{lm}r^{-l-1}\right]Y_{lm}\right). \tag{2}$$

- The complete theorem concerning on the decomposition of $V(r)$ in terms of scalar functions reads as follows:

Representation Theorem. Given a region $\Omega \subseteq R^3\backslash\{0\}$, with a regular boundary and $V : r \in \Omega \to V(r) \in R^3$. Then, there exist three scalar functions $\varphi(r), \psi(r)$ and $\chi(r)$ on Ω which define this V, e.g.

$$V(r) := \nabla\varphi(\cdot) + \mathrm{curl}r\psi(\cdot) + \mathrm{curl}\ \mathrm{curl}r\chi(\cdot) \equiv \nabla\varphi + L\psi + N\chi. \tag{3}$$

Easily to find fundamental solutions of the inversion problem of (1) in the form

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}V = \Delta\varphi \quad &\to \quad \varphi = \Delta^{-1}\mathrm{div}V,\\
LV = L^2\psi \quad &\to \quad \psi = -L^{-2}LV \equiv L^{-2}r\ \mathrm{curl}V,\\
rV = (r\nabla)\varphi + L^2\chi \quad &\to \quad \chi = L^{-2}(r\nabla)\Delta^{-1}\mathrm{div}V - L^{-2}(rV),
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\text{where} \quad L^{-2} := \int_\sigma \frac{d\omega'}{4\pi}ln(1 - \hat{r}\cdot\hat{r}').$$

Reconstruct by means the Helmholtz decomposition the representation of χ such that it depends on curl$V$ and div$V$ only. Then the fundamental solutions of inversion problem of (4) may be represented as

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}V = \Delta\varphi \quad &\to \quad \varphi = \Delta^{-1}\mathrm{div}V,\\
LV = L^2\psi \quad &\to \quad \psi = -L^{-2}LV \equiv L^{-2}r\ \mathrm{curl}V,\\
rV = (r\nabla)\varphi + L^2\chi \quad &\to \quad \chi \doteq L^{-2}(r\nabla)\Delta^{-1}\mathrm{div}V - L^{-2}(rV),\\
&= L^{-2}L\Delta^{-1}\mathrm{curl}V + \sum_{lm}L^{-2}\left[C_{lm}\nabla r^l + C'_{lm}\nabla r^{-l-1}\right]Y_{lm}
\end{aligned} \tag{5}$$

So, we observe the effective longitudinal contribution in the transverse part χ, as an example important for physical applications.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА

Булгаков А.И., Григоренко А.А. (Тамбов)

Пусть X – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$; $\mathrm{comp}[X](\mathrm{cl}[X])$ – множество всех непустых компактов (замкнутых подмножеств) пространства X. Пусть $A \subset X$. Обозначим A^ϵ – замкнутую ϵ-окрестность множества A, $\|A\| = \sup\{\|a\| : a \in A\}$. Пусть R^n – пространство n-мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$; $L^n[a,b], C^n[a,b]$ – пространства суммируемых, непрерывных вектор-функций $x : [a,b] \to R^n$ с обычными нормами, соответственно.

Обозначим через $K([a,b] \times (0,\infty))$ множество всех функций $\eta(\cdot,\cdot) : [a,b] \times (0,\infty) \to [0,\infty)$, обладающих свойствами: при каждом $\delta \in (0,\infty)$ функция $\eta(\cdot,\delta)$ измерима и существует такая суммируемая функция $m_\delta : [a,b] \to [0,\infty)$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $\tau \in (0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,\tau) \le m_\delta(t)$; при почти всех $t \in [a,b]$ справедливо равенство $\lim\limits_{\delta\to 0+0} \eta(t,\delta) = 0$.

Пусть отображение $F : [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[R^n]$ обладает свойствами: при каждом $x \in C^n[a,b]$ $F(\cdot,x)$ измеримо; при почти всех $t \in [a,b]$ $F(t,\cdot)$ непрерывно; для каждого ограниченного $B \subset C^n[a,b]$ найдется такая суммируемая функция $\beta : [a,b] \to [0,\infty)$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in B$ выполняется оценка $\|F(t,x)\| \le \beta(t)$.

Определим отображение $\Phi : C^n[a,b] \to \mathrm{cl}[L^n[a,b]]$ равенством

$$\Phi(x) = \{y \in L^n[a,b] : y(t) \in F(t,x) \text{ при п.в. } t \in [a,b]\}.$$

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \tag{1}$$

где $\Psi : C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$ – непрерывный оператор; $V : L^n[a,b] \to C^n[a,b]$ – линейный непрерывный интегральный оператор.

Пусть V – выпуклый компакт пространства $C^n[a,b]$. Обозначим $H_{co}(V)$ – множество всех решений включения (1) с оператором Φ, определенным с помощью выпуклой замкнутой оболочки значений отображения Φ.

Пусть функция $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times (0,\infty))$. Для любого $\delta \in (0,\infty)$ определим многозначное отображение $\Phi_{\eta(\delta)} : C^n[a,b] \to \mathrm{cl}[L^n[a,b]]$ равенством

$$\Phi_{\eta(\delta)} = \{y \in L^n[a,b] : y(t) \in F(t,x)^{\eta(t,\delta)} \text{ при п.в. } t \in [a,b]\}.$$

Аналогично [1], под δ-решением включения (1) будем понимать непрерывную функцию $x : [a,b] \to R^n$, удовлетворяющую включению

$$x \in \Psi^\delta(x) + V\Phi_{\eta(\delta)}(x).$$

Обозначим через $H_{\eta(\delta)}(V)$ множество всех δ-решений включения (1), принадлежащих множеству V.

В докладе обсуждаются условия, при которых существует такая функция $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times (0,\infty))$, при которых выполняется равенство

$$H_{co}(V) = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V)},$$

где $\overline{H_{\eta(\delta)}(V)}$ – замыкание множества $H_{\eta(\delta)}(V)$ в пространстве $C^n[a,b]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков А.И., Ткач Л.И. Возмущение однозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами // Известия Вузов. Математика. 1999, N3.

ЗОНЫ СУВЕРЕНИТЕТА УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н. Н. Бутенина(*Н.Новгород*)

Рассматривается управляемая динамическая система вида

$$x' = P(x) + u(t)Q(x), \tag{1}$$

где $x \in R^2$, $P(x)$, $Q(x)$ $\{R^2 \to R^2\}$ - функции класса C^k $(k \geq 3)$, $u(t)$ $\{R^1 \to R^1\}$ - кусочно-непрерывная ограниченная функция, $m \leq u(t) \leq n$. В дальнейшем m и n рассматриваем как параметры УДС (1).

Считаем, что система (1) удовлетворяет условиям, сформулированным в [1].

Пусть при $u(t) \equiv \mu$ $(m < \mu < n)$ система (1) является структурно-устойчивой, $\Omega_0 (\Omega^*)$ – устойчивая (неустойчивая, отличная от седла) предельная траектория указанной μ-системы.

Предположим, что при всех рассматриваемых ограничениях на управление область достижимости $D(\Omega^*)$ ограничена.

Наряду с понятием зоны иммунитета $I(\Omega_0)$ [1] (максимальной из безопасных зон области управляемости $U(\Omega_0)$, не содержащих других устойчивых предельных траекторий μ-системы) для УДС вида (1) вводится понятие зоны суверенитета состояния Ω^*, двойственное к понятию зоны иммунитета.

Определение 1. Собственной зоной области $D(\Omega^*)$ назовем множество $O(\Omega^*)$, для которого выполнены условия:

1) $\Omega^* \in O(\Omega^*) \subset D(\Omega^*)$;

2) $O(\Omega^*)$ не содержит неустойчивых предельных траекторий μ-системы с индексом Пуанкаре $(+1)$, отличных от Ω^*;

3) для любой точки M области $O(\Omega^*)$ имеем $U(M^*) \subset O(\Omega^*)$, т.е. по допустимым траекториям из $O(\Omega^*)$ можно только выйти.

Определение 2. Максимальную из собственных зон области $D(\Omega^*)$ назовем зоной суверенитета состояния Ω^*.

Для обозначения этой зоны введем символ $S(\Omega^*)$. Свойства зоны $S(\Omega^*)$ аналогичны свойствам зоны иммунитета $I(\Omega_0)$ [1]:

1. необходимым условием существования зоны суверенитета является требование $\overline{U(\Omega^*)} \subset D(\Omega^*)$;

2. при расширении промежутка [mn] зона суверенитета может только сжиматься;

3. если при расширении области значений управляющей функции зона суверенитета исчезает, то это происходит "скачком".

Разработана методика построения границы зоны $S(\Omega^*)$, доказано, что исчезновение $S(\Omega^*)$ является следствием слияния граничных компонент областей $U(\Omega^*)$ и $S(\Omega^*)$.

Литература

[1] Бутенина Н.Н. "Области достижимости и зоны иммунитета". Тезисы докладов ВВМШ "Понтрягинские чтения IX", Воронеж. 1998г. С.41.

МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА-ФОРДА УЧИТЫВАЮЩАЯ УТИЛИЗАЦИЮ ВРЕДНЫХ ОТХОДОВ ВЫДЕЛЯЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ПРОИЗВОДСТВА В ОКРУЖАЮЩУЮ СРЕДУ

Бутова С.Б., (Ставрополь)

Соответствующая модель имеет вид следующей системы векторно-матричных уравнений

$$\begin{cases} x = A_{11}x + A_{12}y - A_{13}y + b_1 \\ y = A_{21}x + A_{22}y + b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Формально эта модель представима в виде уравнения типа Леонтьева

$$\tilde{Z} = \tilde{A}\,\tilde{Z} + \tilde{b} \qquad \left(\tilde{Z} = (x, y)\right) \qquad (2)$$

с блочной матрицей $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} - A_{13} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

и с «полуположительным» вектором $\tilde{b} = (b_1 - b_2)$.

Основное принципиальное отличие этой модели от модели Леонтьева состоит в том, что матрица $\tilde{A}$ не обязательно неотрицательная за счет «блока» A_{12}-A_{13} а также в том, что у вектора $\tilde{b}$ часть компонент, возможно, отрицательная.

Для модели (1), также как и для модели Леонтьева, центральным вопросом является вопрос о существовании неотрицательного решения $\tilde{Z} = (x^0, y^0)$, т.е. решение, для которого $x^0 \geq \Theta$, $y^0 \geq \Theta$. Этот вопрос требует принципиально иных подходов, чем традиционные в теории положительных решений вида (2) с оператором $\tilde{A} \geq \Theta$, $\tilde{b} \geq \Theta$.

ОСОБЕННОСТИ ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ГЕОМЕТРИЯ ЗАЦЕПЛЕНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДЕТАЛЕЙ ВИНТОВОГО НАСОСА

Валюхов С.Г., Костин В.А., Сапронов Ю.И. (Воронеж)

При описании поперечных сечений винтовых насосов является целесообразным отождествление секущей плоскости с полем комплексных чисел. Профиль поперечного сечения левого винта (для 2–винтового насоса) задается при этом в виде $z = -1 + F(\psi) = -1 + f(\psi)e^{i\psi}$ (f — $2\pi/n$–периодическая функция), а профиль сечения правого винта — в виде $z = 1 + F^*(\varphi) = 1 + f^*(\psi))e^{-i\psi}$. Построение сопряженного профиля (компьютерное или аналитическое) удобно проводить, разместив профили так, чтобы центр левого из них (исходного профиля) оказался в нуле, а центр правого (сопряженного) — в точке 2. Левый профиль фиксируется в неподвижном состоянии, а правый движется как плоское твердое тело, жестко скрепленное с кругом радиуса 1, центр которого в начальный момент времени расположен в точке 2, и который равномерно катится по неподвижной окружности $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Движение профиля задается функцией $z(\varphi, t) = e^{i(2t+\varphi)}f(\varphi) + 2e^{it}$. Сопряженный профиль является геометрической огибающей t–параметрического семейства кривых $z(\varphi, t)$ или, что эквивалентно, является частью множества S особых значений отображения $(s, t) \mapsto z(\varphi, t)$ (действующего из двумерного тора в комплексную плоскость). Множество S служит образом множества особых точек Σ, определяемого уравнением $\left(\frac{\partial z(t,s)}{\partial s}, \frac{1}{2i}\frac{\partial z(t,s)}{\partial t}\right) = 0$. Такое представление весьма удобно при построении и исследовании сопряженных профилей. Другой подход — представление S в виде дискриминантной кривой (если исходное семейство кривых задано в виде линий нулевого уровня функций t–параметрического семейства $V(x, y.t)$). Условие касания огибающей $z(t)$ с кривыми линиями семейства приводит к соотношению $\left(grad_z V(x(t), y(t), t), \frac{d}{dt}z(t)\right) = 0$, из которого следует, что огибающая задается системой уравнений $V(x, y, t) = \frac{\partial V}{\partial t}(x, y, t) = 0$, определяющей значения $z = x + iy$, при которых $V(x, y, \cdot)$ имеет кратный корень (по t). Следовательно, проекция $(x, y, t) \mapsto (x, y)$ переводит множество решений данной системы уравнений на дискриминантную кривую гладкого x, y–семейства гладких функций скалярного аргумента t.

Литература: [1] *Валюхов С.Г., Костин В.А., Сапронов Ю.И.* К кинематике винтовых насосов.// Труды математического факультета (новая серия). Воронеж, ВГУ. 1998. N 3. С.14-19.

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВЕРХНЕГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА.

Васильев В.В. (Тамбов)

Пусть $\mathbb{R}^n$ – пространство n – мерных вектор – столбцов с нормой $|\cdot|$. Обозначим $C^n[a,b]$ ($L^n[a,b]$) – пространство непрерывных (суммируемых) вектор – функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \max\limits_{t\in[a,b]}\{|x(t)|\}$ ($\|x\|_L = \int\limits_a^b |x(t)|dt$). Пусть оператор $T : C^n[a,b] \times L^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ обладает свойствами: при каждом фиксированном $z \in L^n[a,b]$ отображение $T(\cdot,z)$ является вольтерровым по А.Н. Тихонову и изотонным; для любого $x \in C^n[a,b]$ отображение $T(x,\cdot)$ изотонно и существует такое число $\tau \in (0, b-a)$, что если суммируемые функции z_1 и z_2 равны на отрезке $[a,\nu] \subset [a,b]$, то $T(x,z_1) = T(x,z_2)$ на отрезке $[a,\tau+\nu] \cap [a,b]$; для любого $x \in C^n[a,b]$ и любого $y \in L^n[a,b]$ справедливо равенство $T(x,y) = T(x,0)$ на $[a, a+\tau]$.

Пусть $\nu \in [a,b]$. Определим непрерывные операторы $P_\nu : C^n[a,\nu] \to C^n[a,b]$ и $G_\nu : L^n[a,\nu] \to L^n[a,b]$ равенствами

$$(P_\nu x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \in [a,\nu] \\ x(\nu), & \text{если } t \in [\nu,b], \end{cases} \qquad (G_\nu x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \in [a,\nu], \\ 0, & \text{если } t \in [\nu,b]. \end{cases}$$

Для любого $\nu \in [a,b]$ и любого $u \in L^n[a,b]$ рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x}(t) = T(P_\nu x, G_\nu u)(t), \quad t \in [a,\nu], \quad x(a) = x_0. \tag{1}$$

Решением задачи (1) будем называть абсолютно непрерывную функцию $x : [a,\nu] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую дифференциальному равенству в (1) при п.в. $t \in [a,\nu]$ и соотношению $x(a) = x_0$. Задачу (1) при фиксированном $u \in L^n[a,b]$ будем коротко записывать $\dot{x} = T_\nu(x,u)$ $x(a) = x_0$.

Далее, не уменьшая общности, будем считать, что существует такое целое число $m = 1,2,\ldots,$ что $\frac{b-a}{m} = \tau$. Будем говорить, что задача

$$\dot{x} = T(x,\dot{x}), \quad x(a) = x_0 \tag{2}$$

удовлетворяет условию А, если задача

$$\dot{x} = T_\tau(x,0), \quad x(a) = x_0$$

имеет верхне решение u_1 и для любого $i = 1,2,\ldots,m$ задача

$$\dot{x} = T_{i\tau}(x, \dot{u}_{i-1}), \quad x(a) = x_0,$$

где $\dot{u}_0 = 0$, имеет верхнее решение u_i, $i = 1,2,\ldots,m$.

Теорема 1. *Пусть задача (2) обладает свойством А. Тогда эта задача имеет верхнее решение.*

Теорема 2. *Пусть задача (2) обладает свойством А и пусть абсолютно непрерывная функция $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет неравенству $\dot{y} \leqslant T(y,\dot{y})$, $y(a) \leqslant x_0$. Тогда выполняется неравенство $y \leqslant u$, где u – верхнее решение задачи (2).*

Литература

1. Булгаков А.И. Функционально - дифференциальные включения с невыпуклой правой частью // Диф. уравнения, 1990. Т.26, №11 С. 1872-1878.

УДК 511

О ПРИЛОЖЕНИИ ВЕСОВОГО РЕШЕТА К КОРОТКИМ ИНТЕРВАЛАМ

Вахитова Е.В. /Стерлитамак/

Ранее автором были получены оценки снизу для числа чисел с ограниченным количеством простых делителей в коротких интервалах:

$$\mathcal{A}_1 = \{\Phi(n) \mid n \in \mathbb{N},\ x - x^{\frac{1}{c}} < n < x\},$$

$$\mathcal{A}_2 = \{\Phi(p) \mid p\text{-простое},\ x - x^{\frac{1}{c}} < p < x\},$$

где $c > 1$, x – достаточно большое положительное число, $\Phi(n)$ – неприводимый полином с целыми коэффициентами. При этом был применен метод решета Сельберга с весами Бухштаба в непрерывной форме Лаборде.

В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для последовательности

$$\mathcal{A}_3 = \{\Phi(pq) \mid p, q\text{-простые},\ p \neq q,\ x - x^{\frac{1}{c}} < pq \leq x\}.$$

Для решения этой задачи применяются веса Бухштаба нового типа, которые были анонсированы в [1] и изучены в [2]. Функции весового решета F и f определены условиями:

$$F(u) = \frac{2e^{\gamma}}{u},\quad f(u) = 0,\quad 0 < u \leq 3,$$

$$(uF(u))' = f(u-1),\quad (uf(u))' = F(u-1),\ u \geqslant 2.$$

Литература.

1. Бухштаб А.А. Новый тип весового решета // Тезисы докл. всес. конф. "Теория чисел и ее приложения". Тбилиси, 1985, 22-24.
2. Вахитова Е.В. О приложении функций Бухштаба // Матем. заметки. 1995. т.57, вып. I, с.121-125.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЛН ГИДРОУДАРА В ТРУБОПРОВОДЕ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ РАСХОДОМ

Вервейко Н.Д., Гребенников Д.Ю., Новиков Д.В. (Воронеж)

Исследуется распространение волн гидроудара вдоль гидролиний с распределенными вдоль нее расходом $q = \lambda q_0 (p/p_0 - 1)$ за счет пористости или перфорации стенок трубы (q_0 — текущий основной расход жидкости в трубе, p_0 — внешнее давление, λ — коэффициент расхода) [1, 2].

Уравнения движения и неразрывности сжимаемой жидкости в упруго деформируемых трубах с распределенным расходом вдоль трубопровода для скачков скорости [v] и давления [p] имеют вид:

$$A \cdot x = 0,$$

где: $A = \begin{bmatrix} \text{[illegible]} - p_0/(\rho_0 c_0^2) & c \\ (E+k)c + \lambda(k+2Ek) & E+k-E\cdot k \end{bmatrix}$,

ρ_0 — плотность жидкости;

c_0 — скорость волны гидроудара в геометрически эквивалентном сплошном трубопроводе;

$\rho_0 c_0^2 = (1/E + 1/k)^{-1}$; $k = k_ж / p_0$;

$E = (E_{ст}/p_0)(h/D)$; $E_{ст}$, $k_ж$ — упругие модули материала стенки трубопровода и жидкости;

D, h — диаметр трубы и ее толщина.

Условие существования волны гидроудара $[p] \neq 0$, $[v] \neq 0$ дает уравнение для определения скорости с распространения фронта волны гидроудара $p(c) = \det(A) = 0$ откуда для малых λ следует $c/c_0 = \pm 1 - \lambda kE + \cdots$.

Как следует из выражения для c/c_0 — распределенный сток вызывает замедление волны бегущей вниз по потоку, а распределенный вдув материала в поток вызывает ускорение волны вниз по потоку. Из соотношения $N[p] = c[v]$ следует, что для волны бегущей вниз по потоку с заданным скачком скорости [v] превышение давления [p] в линии с распределенным расходом меньше, чем в сплошном трубопроводе.

[1] Чарный И.А. Неустановившееся течение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975, 295 с.

[2] Вервейко Н.Д. Лучевой метод расчета упруговязкопластических волн гидроудара, Воронеж, Изд. ВГУ, 1997, 204с.

РАЗРЫВЫ СКОРОСТЕЙ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕЧЕНИЯ СВЯЗНОЙ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

Вервейко Н.Д., Смотрова О.А. (Воронеж)

Рассматривается микрополярная модель связной сыпучей среды, в которой напряженное состояние описывается несимметричным тензором напряжений, что приводит условие пластичности Мизеса–Шлейхера-Соколовского [2] к замкнутому условию текучести в пространстве напряжений. Ассоциированный закон течения о коаксиальности тензоров напряжений и скоростей деформации в классической постановке [1, 2] позволяет получить выражение для скорости дилатансии в зависимости от давления.

В рамках предложенной модели рассматривается плоская задача течения связного сыпучего материала $(\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0)$ в квазистатическом приближении. Система уравнений поля скоростей в разрывах скоростей $[\overline{w}] = ([u_n],[u_\tau])$ имеет вид

$$B[\overline{w}] = 0,$$

где: $B = \begin{bmatrix} n_x - ctg2\varphi \cdot n_y & -ctg2\varphi \cdot n_x - n_y \\ (M - ctg2\varphi) \cdot n_x & -(M - ctg2\varphi) \cdot n_y \end{bmatrix}$; $M = M(\sigma, \varphi, Y, f, \alpha)$; $\overline{n}(n_x, n_y)$ – нормаль к линии разрыва скоростей с угловым коэффициентом k. Из уравнения $\det B = 0$, получается выражение для углового коэффициента

$$k_{1,2} = \left(-1 \pm \sqrt{1 + ctg^2 2\varphi - M^2}\right) \Big/ (M + ctg2\varphi).$$

Угловые коэффициенты характеристик поля скоростей и линий разрыва совпадают, то есть разрывы скоростей перемещений имеют место на характеристиках. Скорость дилатансии в рассматриваемой модели имеет вид

$$\Delta = \frac{\dot{e}}{\dot{\gamma}} = \frac{[u_n]}{[u_\tau]} = \frac{2k_i M}{-M + ctg2\varphi + k_i^2 (M + ctg2\varphi)} \neq 0.$$

В случае идеальной пластичности ($\Delta = 0, [u_n] = 0, [u_\tau] \neq 0$) линия разрыва скоростей перемещений есть линия скольжения.

[1] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966, 232 с.

[2] Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Наука, 1990, 272с.

Явное представление матрицы рассеяния одномерного оператора Шредингера

В.А.Винокуров (Москва)

Любое решение дифференциального уравнения

$$y'' + (k^2 - u(x))y = 0$$

на действительной прямой $\mathbf{R}$ с вещественным параметром $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ и вещественнозначной функцией $u(x)$ (потенциалом), удовлетворяющей условию $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|dx \equiv M < \infty$, представимо в виде

$$y(x,k) = a_+(x,k)\exp(ikx) + a_-(x,k)\exp(-ikx).$$

Столбец $T(x,k) = \begin{pmatrix} a_+(x,k) \\ a_-(x,k) \end{pmatrix}$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению, полученному в [1], имеет пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} T(x,k) = T(\pm\infty,k)$ и выполняется равенство $T(+\infty,k) = S(k)T(-\infty,k)$.

Для *матрицы рассеяния* $S(k)$ получено явное представление, которое при $\frac{M}{|k|} < 1$ имеет вид

$$S(k) = \exp(-\tfrac{1}{k}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\xi_1)R(2k\xi_1)d\xi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nk^n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\xi_1)u(\xi_2)...u(\xi_n)$$

$$val\ n(\xi_1,\xi_2,...\xi_n)[R(2k\xi_n),...[R(2k\xi_2),R(2k\xi_1)]...]d\xi_1 d\xi_2...d\xi_n).$$

Здесь: $R(t) \equiv \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & \exp(-it) \\ -\exp(it) & -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$; $[A,B] \equiv AB - BA$; $val\ n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $n = 1,2,...$ — отображения, определённые в предыдущей работе автора [2].

[1] Винокуров В.А., Садовничий В.А. Докл. РАН. 1998.Т.358. N3. С.298-301.

[2] Винокуров В.А. Докл. АН СССР. 1991. Т.319. N4. С. 792–797.

Дифференцирование собственного значения оператора Штурма-Лиувилля по потенциалу

В.А.Винокуров, В.А.Садовничий (Москва)

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение второго порядка в нормальной форме Лиувилл

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0 \tag{1}$$

на отрезке $[0, l]$ с вещественным потенциалом $q(x)$ и краевыми условиями типа Штурма

$$\cos(\varphi_0)y(0) + \sin(\varphi_0)y'(0) = 0, \quad \cos(\varphi_l)y(l) + \sin(\varphi_l)y'(l) = 0, \tag{2}$$

где $\varphi_0 \in \mathbf{R}$, $\varphi_l \in \mathbf{R}$. Предполагаем, что функци $q(x)$ принадлежит пространству $L_1(0, l)$ и обозначаем через $||q||$ её норму в пространстве $L_1(0, l)$. Асимптотическое поведение последовательности собственных значений λ_n, $n = 0, 1, 2, ...$ при $n \to \infty$ с любой степенью точности описано в [1].

При фиксированных краевых условиях (2) собственное значение λ_n является вещественной числовой функцией $\lambda_n = \lambda_n(q)$, определённой на пространстве $L_1(0, l)$.

Теорема 1 *Для любого номера $n = 0, 1, 2, ...$ и для любой функции $q \in L_1(0, l)$ существует число $\delta > 0$ и существует число $C > 0$, такие что для любой функции $q_1 \in L_1(0, l)$, такой что $||q_1||_1 \leq \delta$ выполнено неравенство*

$$|\lambda_n(q + q_1) - (\lambda_n(q) + \int_0^l q_1(x)y_n^2(q, x)dx)| \leq C||q_1||_1^2.$$

Итак, в каждой точке $q \in L_1(0, l)$ функционал $\lambda_n(q)$ имеет производную $\lambda_n'(q)$, которая является линейным непрерывным отображением банахова пространства $L_1(0, l)$ в действительную прямую $\mathbf{R}$, причём действие функционала $\lambda_n'(q)$ на функцию $f(x) \in L_1(0, l)$ имеет вид

$$\lambda_n'(q)f = \int_0^l f(x)y_n^2(q, x)dx.$$

Справедлива следующая формула регуляризованного следа.

Теорема 2 *Для граничных условий (2) с параметрами φ_0 и φ_l — целыми кратными $\frac{\pi}{2}$ для любой функции $q \in L_1(0, l)$ ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n(q) - (\lambda_n(0) + \lambda_n'(0)q)) = 0, \tag{3}$$

сходится к нулю.

Для второй краевой задачи на отрезке $[0, \pi]$, предполага дополнительно, что функция $q(x) \in W_1^{(1)}(0, \pi)$, мы получаем из формулы (3) интегрированием по частям классическую формулу следов работы [2].

[1] Винокуров В.А.,Садовничий В.А. // Докл. АН. 1998. Т.358. N.3. С.298-301.

[2] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. // Докл. АН СССР. 1953. Т.88. N.4. С.593-596.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ВОПРОСАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В. В. Власов* (Москва)

Рассмотрим следующую задачу:

$$\sum_{j=0}^{n}\left(B_j u(t-h_j)+D_j\frac{du}{dt}(t-h_j)\right)+\int_0^h K(s)u(t-s)\,ds=0,\quad t>0; \tag{1}$$

$$u(t)=y(t),\quad t\in[-h,0);\quad u(+0)=\varphi_0=y(-0). \tag{2}$$

Здесь B_j, D_j $(j=0,1,\ldots,n)$ — матрицы размера $m\times m$ с постоянными комплексными элементами, $u(\cdot)$ — вектор-функция со значениями $\mathbb{C}^m$, числа h_j таковы, что $0=h_0<h_1<\ldots<h_n=h$; элементы $K_{ij}(s)$ $i,j=1,2,\ldots,m$ матрицы-функции $K(s)$ принадлежат пространству $L_2(0,h)$.

Обозначим через $\mathcal{L}(\lambda)$ матрицу-функцию

$$\mathcal{L}(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}(B_j+\lambda D_j)\exp(-\lambda h_j)+\int_0^h K(s)\exp(-\lambda s)\,ds \tag{3}$$

через $l(\lambda)=\det\mathcal{L}(\lambda)$, через ν_q — кратности нулей λ_q функции $l(\lambda)$, через $y_{q,j,s}(t)$ экспоненциальные (элементарные) [1] решения уравнения (1).

Теорема. *Пусть* $\det D_0\neq 0$, $\inf\limits_{\lambda_p\neq\lambda_q}|\lambda_p-\lambda_q|>0$, *и конечна величина* $N=\max\nu_q$. *Тогда:*

(a) *Любое сильное решение* $u(t)\in W_2^1((-h,T),\mathbb{C}^m)$, $T>0$, *задачи* (1), (2) *допускает оценку*

$$\|u(t+\cdot)\|_{W_2^1(-h,0)}\leqslant d\exp(\kappa t)(t+1)^{N-1}\|y\|_{W_2^1(-h,0)},\quad t\geqslant 0, \tag{4}$$

где $\kappa=\sup Re\,\lambda_q$, *а постоянная* d *не зависит от* $y(t)$.

(b) *Система экспоненциальных решений* $\{y_{q,j,s}(t)\}$ *уравнения* (1) *минимальна в пространстве* $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

(c) *При дополнительном условии* $\det D_n\neq 0$ *система подпространств* $\{V_{\lambda_q}\}$, *где* V_{λ_q} *— линейная оболочка экспоненциальных решений* $y_{q,j,s}(t)$, *отвечающих* λ_q, *образует базис Рисса из подпространств пространства* $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

В докладе рассматриваются также некоторые спектральные вопросы, и на этой основе изучается асимптотическое поведение решений задачи (1), (2) и её различных обобщений (подробнее см. [1]–[3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.В. // Изв. вузов. Математика. – 1996. – №1. – С.22–35.
2. Власов В.В. // УМН. 1998. – Т.53. – Вып. 4. С. 217–218.
3. Власов В.В. // Изв. вузов. Математика. – 1999. – №2. – С.20–29.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 99–01–01079, № 96–15–96091

КОМПЬЮТЕРНЫЙ РЕЙТИНГ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

В.Г.Власов, А.А.Кузнецов, А.В.Власов (г. Иркутск)

Для выполнения государственного образовательного стандарта по дисциплине "математика" в ИрГТУ была разработана универсальная для всех специальностей рабочая программа по основным разделам курса высшей математики, стержнем которой является компьютерный рейтинг. Суть его состоит в том, что все студенты технических специальностей регулярно проходят компьютерное тестирование, которое на 1 курсе осуществляется по следующим разделам:

1 семестр		2 семестр	
0	Элементарная математика	5	Исследование функций
1	Линейная алгебра	6	Интегральное исчисление
2	Аналитическая геометрия	7	Дифференциальные уравнения
3	Введение в математический анализ	8	Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных
4	Производная и дифференциал		

Тест раздела представляет собой набор нескольких сот вопросов, на каждый из которых предлагается выбрать один из пяти готовых ответов. Изготовлен он был в собственной оригинальной оболочке [1] . Время тестирования ограничено 15 минутами, за которое каждый студент отвечает на столько вопросов, насколько успеет. Если тестируемый отвечает за 15 минут на 15 вопросов и на все правильно, то он получает 100 баллов. В случае, если он отвечает быстрее, или (и) отвечает правильно более чем на 15 вопросов, то машина премирует его.

Полнота проверки знаний и умений студента по любому предмету с помощью компьютерного тестирования во многом определяется постановкой вопросов и предлагаемыми ответами. Если студенту будет предложено квадратное уравнение и на выбор несколько его решений, то он простой подстановкой может выбрать правильное решение. При этом он может не помнить ни теорему Виета, ни что такое дискриминант. Но если будет предложено определить, сколько корней содержится на заданном отрезке, то ему придётся тем или иным образом эти корни найти.

Анализ семи тысяч протоколов тестирования, полученных в первом семестре, позволяет сделать следующие выводы:

1. Средний рейтинг студентов 1-го курса по высшей математике оказался чуть выше, чем по элементарной математике.
2. В отдельных потоках средний рейтинг студентов по высшей математике оказался гораздо выше, чем по элементарной математике, но есть и такой поток, где он оказался гораздо ниже.
3. Средние рейтинги студентов по каждому из четырёх разделов высшей математики различны как для всего контингента студентов, так и в каждом из потоков.
4. Один и тот же раздел высшей математики оказался самым трудным для студентов одного потока, и в то же время для студентов другого потока он оказался самым лёгким.
5. В любом разделе градация подразделов по степени их "сложности" различна для различных потоков, причём по проценту правильных ответов "сложные" и "лёгкие", подразделы могут отличаться почти в два раза.
6. Система тестирования построена таким образом, что даже среди отличников, она определяет "кто есть кто".

В заключение следует сказать, что введение компьютерного рейтинга означает качественно новый уровень требований, предъявленный как к студентам, так и к преподавателям.

[1] В.Г.Власов, А.А.Кузнецов, А.В.Власов. Изготовление тестов по математике и обработка результатов тестирования. Третий сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике, посвященной памяти С.Л.Соболева (1908-1989). Тезисы докладов, часть V. – Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1998, с. 136.

ДЕКОМПОЗИЦИЯ РАЗНОТЕМПОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СЛАБОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Воропаева Н. В. (*Самара*)

Математическими моделями сложных динамических систем, характеризующихся различными скоростями протекания процессов и медленным затуханием переходных процессов, являются сингулярно возмущенные системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, y, \varepsilon) \tag{1}$$

$$\varepsilon\dot{y} = B(t, x, \varepsilon)y + g(t, x, y, \varepsilon), \tag{2}$$

для которых не выполнены условия теоремы Тихонова об асимптотической устойчивости присоединенной системы.

Для анализа таких систем предлагается использовать метод асимптотической декомпозиции, базирующийся на теории интегральных многообразий. Доказывается существование расщепляющего преобразования

$$\begin{aligned} x &= v + \varepsilon H(t, v, z, \varepsilon), \\ y &= z + h(t, x, \varepsilon), \end{aligned}$$

приводящее систему (1), (2) к "блочно-треугольному" виду

$$\dot{v} = F(t, v, \varepsilon) \tag{3}$$

$$\varepsilon\dot{z} = G(t, v, z, \varepsilon), \tag{4}$$

где медленная подсистема является независимой. Здесь h — интегральное многообразие медленных движений системы (1), (2), H — интегральное многообразие быстрых движений вспомогательной системы.

Система (3), описывающая движение на интегральном многообразии медленных движений, не содержит малого параметра при производной, имеет меньшую размерность, но с высокой степенью точности отражает поведение исходной модели.

При условии невырожденности матрицы $B(t, x, 0)$ функции h и H строятся в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра ε.

Рассмотрены также два специальных класса систем, для которых матрица $B(t, x, 0)$ вырождена, но, тем не менее, интегральное многообразие медленных движений может быть построено в виде асимптотического разложения по степеням ε. Интегральное многообразие быстрых движений должно строиться в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра $\mu = \sqrt{\varepsilon}$.

Алгоритм декомпозиции использован для решения задачи о стабилизации спутника и задачи управления роботом-манипулятором с упругими сочленениями.

Работа выполнена при поддержке гранта "Управление разнотемповыми системами со слабым демпфированием" по фундаментальным исследованиям в области автоматики и телемеханики, вычислительной техники, информатики, кибернетики, метрологии, связи.

ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРИВЫХ [1]

Габушин В.Н. (Екатеринбург)

Пусть $r(t) = (t, f(t), g(t))$, $t \in I$, — вектор-функция, определяющая некоторую кривую в пространстве, $r^*(t) = r(t) - (t, 0, 0)$. Будем предполагать, что она дважды непрерывно дифференцируема. Рассмотрим функционал

$$k_\mu(t) = k_\mu(r, t) = [r'(t), r''(t)]/|r'(t)|^\mu. \tag{1}$$

При $\mu = 3$ по этой формуле вычисляется кривизна кривой. Пусть $\|r\|_p = (\int_I |r(t)|^p dt)^{1/p}$ при $p < \infty$, $\|r\|_\infty = \sup\{r(t) : \ t \in \mathbf{R}\}$.

Если W — некоторое множество вектор-функций, то соответствующее множество кривых будем обозначать той же буквой W. Рассмотрим следующие экстремальные задачи:

$$K_\mu(t) = \sup\{k_\mu(r, t) : r(t) \in W\}, \tag{2}$$

$$I(t) = \sup\{|r''(t)| : r(t) \in W\}, \tag{3}$$

Теорема. *Пусть $I = \boldsymbol{R}$, $\mu \geq 1$, множество W вектор-функций $r(t)$ является выпуклым, и кроме того: 1) если $r(t) \in W$, то $r(t+a) \in W$ для любого $a \in \boldsymbol{R}$; 2) если $r(t) = (t, f(t), g(t)) \in W$, то $r_*(t) = (t, f(-t), g(-t)) \in W$. Тогда $K_\mu(t) = I(t)$, $K_3(t) = I(t)$. Если, кроме того, множество кривых W (множество W вектор функций $r(t)$) таково, что проекция любой кривой из W на плоскость, содержащую ось x, также принадлежит множеству W, то тогда в задаче (2) существует плоская экстремальная кривая или экстремальная последовательность плоских кривых.*

Следствие. *Пусть $n > 2$, $p, q \geq 1$, $I = \boldsymbol{R}$, $W = \{r(t) : \ \|r^*\|_p \leq A, \ \|r^{(n)}\|_q \leq B, \ \mu \geq 1\}$. Тогда $K_\mu(t) = CA^a B^{1-a}$, где $a = (n - 2 - 1/q + 1/p)/(n - 1/q + 1/p)$, а C — точная константа в неравенстве Колмогорова (см. [1]) для функций одной переменной*

$$\|f''(x)\|_\infty \leq C(\|f\|_p^a)(\|f^{(n)}\|_q^{(1-a)}).$$

1. Арестов В.В., Габушин В.Н. Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. ВУЗов. Математика. 1995. N.11. С. 42–68.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 97-01-00518.

В.А. Галкина (г. Ставрополь)

ОБ ОПЕРАТОРАХ, ИМЕЮЩИХ ВЕДУЩЕЕ СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ.

Одним из центральных результатов теории Н.Г. Крейна – М..А. Красносельского линейных положительных операторов является факт существования у положительного оператора (при естественных дополнительных условиях) ведущего собственного значения λ_1, такого, что $\lambda_1 > |\lambda_i|$ $(i = 2,3,\ldots)$, где - λ_i - остальная часть спектра оператора А.

Доклад посвящен усилению, уточнению и , главное, обращению фундаментальных факторов теории линейных положительных операторов. Используются основные понятия и термины из [1]. Ниже E – банаховое пространтство с телесным конусом К. Запись $u >> 0$ означает, что u - внутренний элемент К, а $l >> 0$,что l - равномерно положительный функционал, т.е. $l(x) \geq \gamma \|x\|$, где $\gamma > 0$, γ- const для каждого $x > 0$.

Оператор А называется равномерно положительным, если существует такое $a > 0, a=const$, что для каждого $x>0$ элемент AX принадлежит К вместе с шаром радиуса

$r \geq a \|x\|$.

Теорема 1. Для того, чтобы вполне непрерывный оператор А имел простое собственное значение $\lambda_1 : \lambda_1 > |\lambda_i|$ $(i = 2,3,\ldots)$ такое, что

$$Au = \lambda_1 u \, , \, A^* l = \lambda_1 l \, , \qquad (1)$$

где $u >> 0$, $l >> 0$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторого m_0 все операторы A^m при $m \geq m_0$ были равномерно положительными.

Предположение о полнлй непрерывности оператора А можно заменить менее жестким условием фредгольмовости индекса О оператора (r I - A).

Следующее утверждение дополняет теорему 1.

Теорема 2. Для того, чтобы вполне непрерывный оператор А имел положительное и просое собственное значение r не меньше модулей остальных собственных значений и такое, для которого выполняется (1), где $u>>0$ и $l>>0$ необходимо, а в случае нормального конуса К и достаточно, чтобы для всех достаточно малых $\varepsilon>0$ существовало $m_0 = m(\varepsilon)$, такое , что $(A + \varepsilon T)^m$ является равномерно положительным оператором для всех $m \geq m_0$.

Автор признателен В.Я. Стеценко за обсуждение результатов.

Литература.

1. М.А. Красносельский и др. Приближеное решение операторных уравнений. М., Наука. 1969.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПО ДВУМ СПЕКТРАМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С КУЛОНОВСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

З.М.Гасымов Баку, Азербайджан

Рассматриваются граничные задачи, порождаемые на интервале $(0;\pi)$ уравнением Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \tag{1}$$

с вещественным потенциалом

$$q(x) = \frac{\delta}{x} + q_0(x), \tag{2}$$

где $\delta = const \neq 0, q_0(x) \in L_2[0;\pi]$и разделенными граничными условиями вида

$$y(0) = 0, y(\pi) = 0, \tag{3}$$

или

$$y(0) = 0, y'(\pi) = 0. \tag{4}$$

Очевидно, что указанный потенциал в окрестности точки $x = 0$ имеет особенность, именуемую кулоновской.

Необходимость изучения дифференциальных уравнений с такой особенностью возникает в различных областях математической физики. Так одной из задач квантовой механики является задача о движении электронов в кулоновском поле ядра, имеющая большой практический интерес. Решение ее дает не только теорию спектра водорода, но также приближенную теорию спектров атомов с одновалентным электроном (водородноподобных атомов), например, атома натрия.

Основным результатом, представленной работы является

Теорема 1. *Для того, чтобы две последовательности вещественных чисел $\{\mu_k\}$ и $\{\nu_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ были спектрами граничных задач, порожденных одним и тем же уравнением (1) с вещественным потенциалом (2) и граничными условиями (3) и (4), необходимо и достаточно, чтобы они перемежались, т.е.* $-\infty < \nu_1 < \mu_1 < \nu_2 < \mu_2 < \nu_3 < \ldots$ *и удовлетворяли асимптотическим формулам*

$$\mu_k = k^2 + 2\delta \ln k - 2A + a_k, \tag{5}$$

$$\nu_k = (k - \frac{1}{2})^2 + 2\delta \ln k - 2A + b_k, \tag{6}$$

где A- произвольное вещественное число и $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2, |b_k|^2 < \infty$.

Обратная задача с Кулоновской особенностью рассматривалась ранее в работе [1]. В ней были получены лишь достаточные условия, основывавшиеся на более громоздких асимптотиках, чем в (5) и (6). Наш метод решения заимствован из [2] и сводится к решению обратной задачи рассеяния на полуоси, полное решение которой дается в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] М.Г.Гасымов,Р.Х.Амиров. Прямые и обратные спектральные задачи для оператора второго порядка с кулоновской особенностью. ДАН Азерб.ССР. том.XL,№8,1985.

[2] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Изд.Наукова думка, 1977.

[3] Gasimov Z.M. The inverse problem of scattering for one class of potentials with nonintegrated property. Izv.AN AzR.Series of phys.-tech. and math.sciences.N3-4,v.XVIII,1998.

О СПЕКТРЕ ТРЕХМЕРНЫХ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С ОБОБЩЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ.

Гейдаров А.Г. (Баку, Азербайджан)

Пусть $q(x) \in W_2^{-2}(R^3)$– вещественная обобщенная функция, Δ–трехмерный оператор Лапласа.

Если потенциал $q(x)$ не является регулярной обобщенной функцией, то определение оператора $\Delta^2 + q$ в пространстве $L_2(R^3)$ связано с определенными трудностями. В этом случае с помощью КЛМН теоремы ([1], теорема X.17) можно показать, что существует форм-сумма $A = \Delta^2 + q$ в пространстве $L_2(R^3)$. Оператор A является полуограниченным снизу самосопряженным оператором в пространстве $L_2(R^3)$.

Отметим, что форм-сумма, вообще говоря, отличается от обычной операторной суммы двух операторов.

В данной работе получены следующие результаты о спектре оператора A.

Теорема 1. *Пусть $q(x) \in W_2^{-2}(R^3)$ вещественная обобщенная функция. Тогда существенный спектр оператора A совпадает с полуосью $[0, +\infty)$, т.е. $\sigma_{ess}(A) = [0, +\infty)$*

Пусть $\sigma_{ac}(A)$–абсолютно непрерывная часть спектра оператора A.

Теорема 2. *Предположим, что $q(x) \in D'(R^3)$–вещественная сингулярная обобщенная функция и при некотором $\delta > \frac{3}{8}$*

$$\left(1 + |x|^4\right)^\delta q(x) \in W_2^{-2}(R^3).$$

Тогда $\sigma_{ac}(A) = [0, +\infty)$.

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. том 2. М.: Мир, 1978.

О МАЛЫХ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Глушко А.В. (Воронеж)

Рассматриваемая система описывает в линейном приближении малые акустико-гравитационные колебания вязкой жидкости. Колебания считаются одномерными (в направлении однородного поля тяготения). Рассматриваемая задача Коши имеет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\rho_0^{-1}\frac{\partial u_3}{\partial t}+g\rho_0^{-1}u_2=0;\ \frac{\partial u_2}{\partial t}-(N^2g^{-1}+gc^{-2})\rho_0 u_1+\rho_0\frac{\partial u_1}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-c^{-2}\frac{\partial u_3}{\partial t}-N^2\rho_0 g^{-1}u_1=0;\quad x\in R, t>0 \tag{1}$$

$$u_k(t,x)|_{t=0}=u_k^0(x),\ k=\overline{1,3}. \tag{2}$$

Пусть $u_m^0(x)\in H^2(R)$ и существуют интегралы

$$\int_R |(1-\frac{\partial^2}{\partial x^2})u_m^0(x)|\,dx<\infty;\int_R(1+|x|)|u_m^0(x)|\,dx<\infty, m=\overline{1,3}.$$

Тогда у задачи (1)-(2) существует классическое решение, для компонент которого справедливы следующие асимптотические представления при $t\to\infty$

$$u_1(t,x)=(2\pi)^{-1}(\nu^2/4+c^4A^{-2})^{-1/4}t^{-1/2}[\cos(\varphi+At/2)\int_R u_1^0(x)dx-$$

$$-2gA^{-1}\rho_0^{-1}\sin(\varphi+At/2)\int_R u_2^0(x)dx]+O(t^{-1})(1+|x|);$$

$$u_2(t,x)=u_{2,\text{ст}}+(2\pi)^{-1}(\nu^2/4+c^4A^{-2})^{-1/4}t^{-1/2}[-\frac{1}{4}\rho_0 g^{-1}\sin(\varphi+At/2)\int_R u_1^0(x)dx+$$

$$+\cos(\varphi+At/2)\int_R u_2^0(x)dx]+O(t^{-1})(1+|x|);$$

$$u_3(t,x)=u_{3,\text{ст}}+(\pi)^{-1}(\nu^2/4+c^4A^{-2})^{-1/4}t^{-1/2}[\rho_0 gA^{-1}\sin(\varphi+At/2)\int_R u_1^0(x)dx+$$

$$+c^2(1-2N^2A^{-2})\cos(\varphi+At/2)\int_R u_2^0(x)dx]+O(t^{-1})(1+|x|).$$

Оценки $O(t^{-1})$ равномерны по $x\in R$; $A=2\sqrt{N^2+g^2c^{-2}}$;

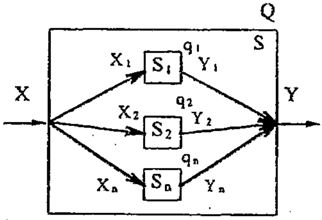
$\varphi=-arctg(2c^2A^{-1}\nu^{-1})$.

УДК 65.011.56:65.015.11

СВОЙСТВО СИММЕТРИЧНОСТИ ОТНОШЕНИЯ КОНФЛИКТА СИСТЕМ ПО ПАРЕТО

С.В. Глущенко, А.Ю. Соляной

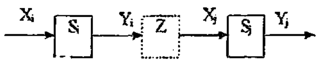
Конфликт — бинарное отношение двух систем [1]. С этой точки зрения весьма интересно исследование его свойств, и в частности, симметрии. Один из видов системного конфликта — конфликт по Парето. Задача векторной оптимизации, решением которой является множество Парето, в структурном представлении систем являет собой систему $S=S_1 \oplus S_2 \oplus ... S_n$ ($\oplus$ - параллельное соединение). Входной и выходной объекты системы S соответственно равны $X=X_1 \cup X_2 \cup ... X_n$ и $Y=Y_1 \cup Y_2 \cup ... Y_n$ и имеют связь $Y_i=R_i(X_i)$. Каждая подсистема имеет свою функцию полезности $q_i(X_i, R_i) \in Q$, $i=1,n$ [2].



Рассматриваются две подсистемы S_i и S_j. Введено в следующее отношение $\succeq\!| = \succ\!| \vee \succeq\!|_c \vee \succeq\!|_н$. Здесь $\succ\!|$ — S_i конфликтует с S_j, $\succeq\!|_c$ — содействует, $\succeq\!|_н$ — не зависит. Базисным фактором для выявления симметрии отношения "$\succeq\!|$" является характер связи подсистем. Показано, что отношение "$\succeq\!|$" в общем случае для параллельного соединения двух систем в условиях конфликта по Парето асимметрично, т.к. отношения "$\succ\!|$" и "$\succeq\!|_c$" — симметричны, а "$\succeq\!|_н$" — асимметрично. Доказано, что отношение "$\succ\!|$" для последовательного соединения систем асимметрично.

Для последовательного соединения двух систем S_i и S_j имеет место выражение:

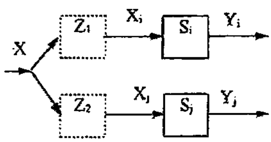
$$X_j = H_{zj} R_z(Y_i) \qquad (1)$$



Здесь $R_z(Y_i)$ - реакция промежуточной подсистемы Z, H_{zj} - матрица взаимосвязи подсистем S_i и S_j [1].

Для параллельного соединения двух систем S_i и S_j имеет место выражение:

$$X_i = H_{z1i} R_{z1}(X), \; X_j = H_{z2j} R_{z2}(X) \qquad (2)$$



Здесь Z_1 и Z_2 - промежуточные подсистемы.

Сформулировано необходимое условие симметричности конфликта между двумя подсистемами:

Необходимым условием существования симметричного конфликта между системами S_i и S_j является выполнение выражений (1) и/или (2) в интерпретациях для обоих систем. Иначе говоря, необходимым условием существования симметричного конфликта между системами S_i и S_j является наличие взаимного воздействия одной системы на другую.

Литература.

1. Сысоев В.В. Формирование конфликта в структурном представлении систем // Информационные технологии и системы. - Воронеж. отд. Междун. акад. информатизации. -1996.- №1 - с.26-30.

2. М. Месарович, Д. Мако, И. Такахара. Теория иерархических многоуровневых систем. М: Мир, 1973. 344с.

ДИФФУЗИОННАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Голованчиков А.Б., Симонова И.Э., Симонов Б.В. (Волгоград)

Диффузионная модель для аппарата конечной длины описывается дифференциальным уравнением

$$A\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - B\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t},$$

где $C = C(x,t)$ –концентрация вещества в точке x в момент времени t ; B –скорость потока в аппарате, не зависящая от времени t и координаты x; A –коэффициент продольной диффузии, которая также является постоянной величиной. Считаются известными начальная концентрация $C(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le b$, и концентрация на левом конце $C(0,t) = \mu(t), 0 \le t < \infty$. На правом конце аппарата граничное условие задано в интегральной форме, отражающей закон сохранения вещества:

$$\int_0^b c(x,t)\,dx = \int_0^b \varphi(x)\,dx + \int_0^t \mu(\tau)\,d\tau - \int_0^t c(b,\tau)\,d\tau.$$

Получено решение этой краевой задачи при некоторых дополнительных условиях гладкости на $\varphi(x)$ и $\mu(t)$. Оно имеет вид:

$$C(x,t) = e^{\frac{B}{2A}x - \frac{B^2}{4A}t}\Big\{\mu(t)e^{\frac{B^2}{4A}t} + \frac{x}{b}\Big(\mu_1(t) - \mu(t)e^{\frac{B^2}{4A}t}\Big) + \int_0^b G(x,\xi,t)\varphi(\xi)e^{-\frac{B}{2A}\xi}d\xi +$$
$$+ \int_0^t\int_0^b G(x,\xi,t-\tau)\Big[-\frac{d}{dt}\Big(\mu(\tau)e^{\frac{B^2}{4A}\tau}\Big) - \frac{\xi}{b}\Big(\frac{d\mu_1(\tau)}{d\tau} - \frac{d}{d\tau}\Big(\mu(\tau)e^{\frac{B^2}{4A}\tau}\Big)\Big)\Big]d\xi\,d\tau,$$

где $G(x,\xi,t)$ –функция мгновенного точечного источника, $\mu_1(t)$ –функция специального вида.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СМО С ДИФФУЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

Н.И. ГОЛОВКО, В.В. КАТРАХОВ, Т.А. ПИСАРЕНКО
(Владивосток)

Рассматривается система массового обслуживания (СМО) типа $M/M/m/N_0$, $0 \leq N_0 \leq \infty$, с экспоненциальным обслуживанием с параметром μ, с m обслуживающими приборами, конечной емкостью накопителя. На вход поступает дважды стохастический пуассоновский поток заявок, интенсивность которого $\lambda(t)$ является диффузионным процессом с коэффициентом сноса a и коэффициентом диффузии b. Интенсивность $\lambda(t)$ принимает значения на интервале $[\alpha, \beta]$ с упругими границами. Стационарные характеристики числа заявок $q_k(x)$, $0 \leq k \leq N+1$, удовлетворяют следующей краевой задаче на отрезке $[\alpha, \beta]$:

$$-xq_0(x) + \mu q_1(x) + \frac{b}{2}q_0''(x) = 0, \quad \alpha < x < \beta,$$

$$xq_{k-1}(x) - (x+\mu)q_k(x) + \mu q_{k+1}(x) + \frac{b}{2}q_k''(x) = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1,$$

$$xq_{N-1}(x) - \mu q_N(x) + \frac{b}{2}q_N''(x) = 0,$$

$$q_k'(r_i) = 0, \quad r_1 = \alpha,\ r_2 = \beta,$$

и условию нормировки

$$q_0 + \ldots + q_{N+1}(x) = \frac{1}{\beta - \alpha},$$

где $x \in [\alpha, \beta]$; α, $\beta \geq 0$; постоянные $\mu, b > 0$.

Для поставленной задачи доказано существование и единственность решения. Получены также достаточные результаты для положительности q_k. Аналогичные и более подробные результаты получены для более простых СМО с отказами.

ОДНА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ [1]

Гончарова М.Н. (Гродно, Республика Беларусь)

В работе рассматривается задача оптимального быстродействия для дифференциальных включений с фазовым ограничением в виде счетного числа линейных неравенств. Для доказательства оптимальности траекторий применяются достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума [1].

Поведение объекта описывается дифференциальным включением

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \in F = \{f \in E^2 | f_1 = x_2, f_2 = u, |u| \le 1\}, \qquad (1)$$

где E^2 - Евклидово пространство переменных величин $f = colon(f_1, f_2)$. Фазовое ограничение определяется с помощью множества X:

$$X = \{x \in E^2 | (\lambda_i, x) \le b_i, \lambda_1 = (-a_i, 1), i = 1, 2, ...\}, \qquad (2)$$

где $a_1 = \frac{(i+1)(i+2)}{2(2(i+1)^2-1)}$;
$b_i = \frac{4i}{i+1} - \frac{(i+2)(-7i^4-4i^3+2i^2+4i+2)}{i^2(i+1)(2(i+1)^2-1)} - \frac{2(i+1)(i+2)}{2(i+1)^2-1}[\frac{\pi^2}{6} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} \frac{1}{k^2}]$.

Требуется найти решение $x(t)$ дифференциального включения (1), удовлетворяющее включению (2) для всех моментов времени t из интервала движения, которое осуществляет переход из произвольной точки $x_0 \in X$ на множество $M_1 = \{0\} \subset X$ за наименьшее время.

Синтез оптимального управления будет зависеть от того, в какой области фазового пространства находится начальная точка x_0.

Сопряженная функция, построенная для доказательства оптимальности траекторий, выходящих из определяемого множества G, имеет счетное число скачков. Показано, что точки, координаты которых имеют значения $\psi_1(\tau_{2i} + 0), \psi_2(\tau_{2i} + 0) = \psi_1(\tau_{2i} + 0)(\tau_{2i+1} - \tau_{2i})$, построенной сопряженной функции в момент скачка справа, располагаются на параболе, определяемой в плоскости $\psi_1 0 \psi_2$ уравнением $\psi_2 = (2 - \psi_1)^2$.

Литература

1. Blagodatskikh V.I., Sufficient Conditions for Optimality in Problems with State Constraints, App. 1. Math. Optim., 7, 149-157 (1981).

[1] Работа финансируется Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь

О СУЩЕСТВОВАНИИ СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ.

Горбенко О.Д., Минаев В.А. (Воронеж)

Состояние равновесия деформируемой системы, соответствующее решению математической задачи, только тогда будет физически осуществимо, когда это решение непрерывно зависит от исходных данных. Вопрос о критерии непрерывной зависимости решения уравнения в частных производных от исходных данных рассмотрен, например, в работах [1, 2].

В данной работе рассматривается продольно-поперечный изгиб упругой прямоугольной пластины, начальное искривление которой описывается функцией $f(x,y)$. В линейной постановке рассмотрена пластина, нагруженная поперечной нагрузкой интенсивности $r(x,y)$ и продольными нагрузками вдоль оси Ox интенсивности q, а вдоль оси Oy – интенсивности p. В результате исследования непрерывной зависимости решения краевой задачи от функции $f(x,y)$ при $f = f_0(x,y)$ на плоскости параметров pq получена граница адекватности линейной модели (корректности постановки задачи).

В случае нелинейной постановки задачи при $r(x,y) \equiv 0$ показано, что граница существования плоского состояния пластины, соответствующего $f(x,y) \equiv 0$, на плоскости параметров pq является так же границей области сохранности пластиной плоской формы.

Литература.

[1] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.

[2] *Артемов М.А., Минаева Н.В.* О существовании состояний системы с распределенными параметрами. Сб. статей «Математическое моделирование систем» Воронеж, 1998. С. 8–12.

МОДЕЛИРОВАНИЕ БОРТОВЫХ УСКОРЕНИЙ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИМИ

Ю. Н. Горелов, С. Б. Данилов (*Самара*)

Рассматривается орбитальное и вращательное движение космического аппарата — микрогравитационной платформы (МГП), основным требованием к которым является обеспечение минимально возможного уровня остаточных ускорений в рабочих зонах расположения специализированного научного и технологического оборудования. Математическое моделирование бортовых полей микроускорений с использованием моделей, разработанных для КА типа "Фотон" и "НИКА-Т", выявило сложную зависимость основных характеристик таких полей от кинематических характеристик движения МГП. Структура бортового поля ускорений в основном характеризуется положением (в связанной системе координат) и размерами т. н. реперного изогравиэллипсоида- области, внутри которой уровень остаточных ускорений не превышает требуемого, например, порядка $10^{-6}g_0$ м/с^2, где g_0-ускорение свободного падения. Центр указанного изогравиэллипсоида является полюсом бортового поля ускорений, то есть точкой с нулевым остаточным ускорением, совмещение которой с центром рабочей зоны МГП обеспечивает нормальное функционирование ее оборудования в условиях практической невесомости. Таким образом, возможна такая постановка задачи оптимального управления бортовым полем МГП, в которой требуется минимизировать расстояние между заданной точкой платформы и полюсом ее бортового поля остаточных ускорений на заданном временном подынтервале. Решение этой задачи отыскивалось в классе локально оптимальных управлений, а также в классе оптимальных периодических режимов (с периодом, совпадающим с периодом обращения МГП по невозмущенной орбите вокруг притягивающего центра). В первом случае — с функцией удельных потерь в виде квадрата микроускорения в заданной точке МГП — на орбитах с высотой полета от 350 до 450 км обеспечивается удерживание полюса поля в окрестности заданной точки с точностью до десяти сантиметров на интервале до нескольких десятков секунд (максимум до 150...200 с). Во втором случае решение отыскивалось методом динамического программирования по схеме оптимального распределения ограниченного ресурса при наличии двух ограничений; при этом были получены периодические режимы управления ориентацией МГП в плоскости орбиты, обеспечивающие минимальный средний (и максимально допустимый) уровень остаточного ускорения в заданной точке и допускающие соответствующую интерпретацию условий управления.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ СИЛАМИ

Горелова Е. Я. (Самара)

Динамика механических систем, в которых наряду с консервативными, диссипативными, гироскопическими и др. силами, действуют "случайные" силы, обладает целым рядом особенностей по сравнению с детерминированными моделями. В данной работе обсуждаются вопросы, связанные с устойчивостью таких систем в среднем квадратическом. В основу положен результат Р. З. Хасьминского [1], согласно которому линейная система дифференциальных уравнений, в коэффициенты которой входят независимые гауссовские белые шумы, устойчива в среднем квадратическом в том и только том случае, когда устойчива некоторая система относительно элементов матрицы моментов второго порядка переменных состояния исходной системы.

Получены следующие результаты.

1. Рассмотрена система дифференциальных уравнений, моделирующая динамику некоторой потенциальной системы, находящейся под действием случайных сил, вида

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + k_1 q_1 + c_1 q_1 + (\sigma_{11} q_1 + \sigma_{12} q_2)\dot{w}(t) = 0, \\ \ddot{q}_2 + k_2 q_2 + c_2 q_2 + (\sigma_{21} q_1 + \sigma_{22} q_2)\dot{w}(t) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $w(t)$ — скалярный стандартный винеровский процесс, и эта же система, в которой действуют также гироскопические силы:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + k_1 q_1 + c_1 q_1 + \gamma q_2 + (\sigma_{11} q_1 + \sigma_{12} q_2)\dot{w}(t) = 0, \\ \ddot{q}_2 + k_2 q_2 + c_2 q_2 - \gamma q_1 + (\sigma_{21} q_1 + \sigma_{22} q_2)\dot{w}(t) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

С использованием результатов [2], исследована устойчивость системы (1) и (2) в среднем квадратическом для случая, когда $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $k_1 = k_2 = 1$, $\gamma = -3$, $\sigma_{11} = 1$, $\sigma_{12} = 2$, $\sigma_{21} = -1$, $\sigma_{22} = 0$.

Применение системы MAPLE V позволяет сделать следующий вывод: *устойчивость в среднем квадратическом системы* (1), *в которой действуют консервативные, диссипативные и случайные силы, может быть разрушена гироскопическими силами.* Заметим, что в [3] показано, что в отсутствие случайных возмущений устойчивость потенциальной системы не может быть разрушена никакими гироскопическими силами.

2. Рассмотрен вопрос о возможности гироскопической стабилизации системы (1). Получен результат, аналогичный теореме Томсона-Тета, содержащей необходимое условие гироскопической стабилизации, а именно, показано, что *если выражение* $\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2 - \sigma_{12}^2\sigma_{21}^2$ *отрицательно, то неустойчивое нулевое положение равновесия системы* (1) *не может быть стабилизировано никакими гироскопическими силами.*

Работа выполнена при поддержке гранта "Управление разнотемповыми системами со слабым демпфированием" по фундаментальным исследованиям в области автоматики и телемеханики, вычислительной техники, информатики, кибернетики, метрологии, связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Хасьминский Р. З. *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.* – М.: Физматгиз, 1969.

[2] Горелова Е. Я. *Устойчивость сингулярно возмущенных стохастических систем* // Автоматика и телемеханика, 1997, № 7, с. 112–121.

[3] Меркин Д. Р. *Гироскопические системы.* – М.: Наука, 1974.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТИПЫ Г-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ОБЩИМИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ.

Григорьева Т.И. (г.Одесса)

Как известно, Н.С.Синюковым [1] определено Г-преобразование, позволяющее из пары геодезических соответствующих римановых пространств $\left(V_n, g_{ij}\right) \xrightarrow{\Psi_i} \left(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}\right)$ построить бесконечную последовательность также геодезически соответствующих римановых пространств $\left(\overset{1}{V}_n, \overset{1}{a}_{ij}\right) \xrightarrow{\Psi_i} \left(\overset{1}{\overline{V}}_n, \overset{1}{\overline{a}}_{ij}\right), \ldots, \left(\overset{m}{V}_n, \overset{m}{a}_{ij}\right) \xrightarrow{\Psi_i} \left(\overset{m}{\overline{V}}_n, \overset{m}{\overline{a}}_{ij}\right), \ldots$

Рассматривается отображение $f_1 : \left(V_n, g_{ij}\right) \to \left(\overset{1}{V}_n, \overset{1}{a}_{ij}\right)$, которое является элементом Г-преобразования.

Основные уравнения f_1 в общей по этому отображению системе координат имеют вид $\overset{1}{\Gamma}{}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) - \Psi^h(x) g_{ij}(x)$, где $\Psi^h = g^{h\alpha}\Psi_\alpha$, Ψ_i - ковектор, по необходимости градиентный. Тензоры $\overline{g}_{ij}$ и A^i_j будем считать дополнительными тензорными структурами в пространствах V_n и $\overset{1}{V}_n$. Найдены следующие геометрические объекты, инвариантные относительно отображения f_1: $K^h_{ij} = \overline{g}_{ij,\alpha}\overline{g}^{\alpha h} - \frac{1}{n+1} A^h_{(i}\overline{g}_{j)\beta,\alpha}\widetilde{A}^\beta_\gamma \overline{g}^{\alpha\gamma}$;

$$\ddot{\mathrm{T}}{}^{kh}_i = \overline{g}^{k\alpha}\Gamma^{\ h}_{i\alpha} - \frac{A^k_i}{A^\alpha_\alpha}\Gamma^{\ h}_{\beta\gamma}\overline{g}^{\beta\gamma};\ Q^{hi}_{ik} = R^h_{\alpha jk}\overline{g}^{\alpha i} + \widetilde{A}^h_\beta \overline{g}^{\alpha\beta} A^i_{[j} R_{k]\alpha} + \frac{1}{1-n} R_{\alpha\beta} A^\alpha_\gamma \overline{g}^{\beta\gamma}\delta^h_{[k} A^i_{j]}.$$

Здесь $A^i_j = e^{2\psi}\overline{g}^{i\alpha}g_{\alpha j}$, $\widetilde{A}^k_i = e^{-2\psi}g^{\alpha k}\overline{g}_{\alpha i}$.

ТЕОРЕМА 1. Пространство V_n является пространством постоянной кривизны тогда и только тогда, когда тензор Римана пространства $\overset{1}{V}_n$ удовлетворяет условию

$$\overset{1}{R}_{mejk} = \frac{1}{\overset{1}{R}{}^\alpha_\beta A^\beta_\alpha}\left(\overset{1}{R}_{e[k} - \overset{1}{R}_{\alpha\beta}\widetilde{A}^\alpha_e \widetilde{A}^\beta_{[k} - \widetilde{A}^\beta_\beta A^\tau_\alpha \overset{1}{R}{}_{e\tau}{}^{\alpha}{}_{[k}\right)\overset{1}{R}{}_{j]\delta}{}^{\alpha}{}_{m} A^\delta_\alpha$$

ТЕОРЕМА 2. Если в пространстве V_n $K^h_{ij} \equiv 0$, то геодезическое отображение $V_n \to \overline{V}_n$ тривиально; если K^h_{ij} удовлетворяет условию $K^\alpha_{i[j}\overline{g}_{k]\alpha} = 0$, то отображение f_1 представляет собой частный случай почти геодезического отображения третьего типа Π_3, рассмотренного Н.С.Синюковым [1].

ЛИТЕРАТУРА: Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств. - М.: Наука, 1979. - 225 с.

К ВАРИАЦИОННОМУ МЕТОДУ РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ АКУСТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ И ВОЛНОВОДОВ

А. А. Губенков (Саратов)

Физические процессы в акустическом устройстве конечного объема V, ограниченного поверхностью S, в достаточно общем случае уравнениями линейной теории упругости могут быть описаны так [1]:

$$\nabla \cdot T = jk\rho\upsilon, \qquad \nabla_s\upsilon = jks:T \tag{1}$$

где T - вектор, составленный из компонент тензора напряжений:

$$T=\begin{bmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \\ T5 \\ T6 \end{bmatrix}, \qquad \nabla_s=\begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta}{\delta z} \\ 0 & \frac{\delta}{\delta z} & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} & 0 & \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} & 0 \end{bmatrix} = \nabla^{t}, \ T1=T_{xx}, T2=T_{yy}, T3=T_{zz}, T4=T_{yz}, T5=T_{xz}, T6=T_{xy},$$

υ - вектор поля скоростей; ρ - плотность среды; s - тензор упругой податливости; t - знак транспонирования, $s:T=\sum s_{ij}Tj$. Поверхность S будем считать свободной.

При такой постановке задачи построенный согласно методике работы [1] билинейный функционал будет иметь вид:

$$k=j\left(\int_V(\nabla\cdot T\cdot \overline{w}+\nabla_s\upsilon\cdot\overline{\Theta})dV-\int_S \overline{w}\cdot Tn\,dS\right)\Big/\int_V(\rho\upsilon\cdot\overline{w}+s{:}T\cdot\overline{\Theta})dV \tag{2}$$

n - нормаль к поверхности, w, Θ - решения сопряженной задачи.

Более предпочтительным в вычислительном плане представляется рассмотрение следующего функционала, легко получающегося из предыдущего (2)

$$F=\int_V(\nabla\cdot T\cdot\overline{w}+\nabla_s\upsilon\cdot\overline{\Theta})dV-\int_S\overline{w}\cdot Tn\,dS+jk\int_V(\rho\upsilon\cdot\overline{w}+s{:}T\cdot\overline{\Theta})dV \tag{3}$$

Очевидно, что стационарное значение этого функционала достигается, когда пробная функция равна собственной функции задачи, а k - собственной частоте. Это сразу же приводит к следующей схеме вычислений. Выбирая полную систему координатных функций и используя процедуру Ритца, можно найти для введенной функции сравнения, представляющей разложение по N координатным функциям, минимально возможные значения F при заданных k и N. А минимумы позволяют определить собственные частоты.

Литература

1. Губенков А. Н., Губенков А. А. Вариационный метод расчета собственных частот акустических резонаторов и волноводов в акустоэлектронике //Материалы международной НТК Актуальные проблемы электронного приборостроения. Т.2 / Саратов, 1998. С. 62-66.

Variational Principle for Nonlinear Problems in Electromagnetic and Mechanical Systems

A. N. Gubenkov. (Saratov)

In operation form the nonlinear problem can be presented for volume V, restricted surface S, so

$$L(u)=f \quad \text{at} \quad u=u(r), r\in V, \qquad M(u)=m \quad \text{at} \quad u=u(r), r\in S \tag{1}$$

We shall put into commission operators P, $\mathcal{P}$, $\mathcal{G}_{(u)}$, $\mathcal{M}_{(u)}$, which are defined by Green's formula

$$\left(L_{(u)}'h, w\right)_v + \left(M_{(u)}'h, Pw\right)_S = \left(h, \mathcal{G}_{(u)}w\right)_v + \left(\mathcal{P}h, \mathcal{M}_{(u)}w\right)_S.$$

where $L_{(U)}'$, $M_{(U)}'$ are Frechet's derivatives of operators L and M,

$$(u, w)_V = \int_V u\overline{w}\,dV, \quad (u, w)_S = \oint_S u\overline{w}\,dS.$$

We shall define the basic functional $I(u,w)$ as

$$I(u,w) = \left(L(u)-f, w\right)_V - (u,z)_V + \left(M(u)-l, Pw\right)_S - \left(\mathcal{P}u, y\right)_S \tag{2}.$$

The immediate variation of this functional shows, that the functional (2) is stationary at $u=u_0$ and $w=w_0$, which are respectively solutions of the problem (1) and the following linear boundary value problem:

$$\mathcal{G}_{(u_0)}w = z\left(w=w(r), r\in V\right); \quad \mathcal{M}_{(u_0)}w = y\left(w=w(r), r\in S\right) \tag{3}$$

The boundary conditions of the problems (1) and (3) are natural. The stationary value of the functional (2) is

$$\mathcal{I}(u_0, w_0) = -(u_0, z)_V - \left(\mathcal{P}u_0, y_0\right)_S \tag{4}$$

By selecting functions z and y, it is possible to make expression (4) equal to the required parameter of the problem (the eigenvalue, scattering matrix etc.) or the required solution (fields). For example, if y=0 and z is delta-function, then $\mathcal{I}(u_0, w_0) - u(r')$ is required solution of the problem (1). If z = y = 0, the functional for definition of eigenvalue may be received from the formula (2). Other cases are also probable.

We assume the concrete nonlinear problem to be described by Maxwell equations, the elasticity theory, piezoeffect equations and nonlinear equations for charge carriers. The basic functional (2) will be accepted as

$$\begin{aligned} I(u,w) = \int_V \Big[& \left(\nabla\cdot T - j\omega\rho v\right)\overline{v^*} + \left(\nabla_S v - j\omega dE - j\omega S{:}T\right)\overline{T^*} + \left(\nabla\times E + j\omega\mu H\right)\overline{H^*} + \\ & + \left(\nabla\times H - j\omega\varepsilon E - j\omega d : T - e\gamma nE - e\mu\gamma^2 nE\times H - e\chi\nabla n\right)\overline{E^*} + \left(j\omega n - \gamma\nabla(nE) - \mu\gamma^2\nabla(nE\times H) - \right. \\ & \left. - \chi\Delta n\right)\overline{n^*} - F\overline{v^*} - v\overline{F_1^*} - T\overline{F_2^*} - H\overline{F_3^*} - E\overline{F_4^*} - n\overline{F_5^*}\Big]dV - \int_{S_1^0}\left[(E-g)\times\overline{H^*} + H\times\overline{g^*}\right]\nu dS - \\ & - \int_{S_2^0}\left[(H-G)\times\overline{E^*} - E\times\overline{\mathcal{G}^*}\right]\nu dS + \chi\oint_S\left(\frac{\partial n}{\partial \nu} - N\right)\overline{n^*}dS - \int_{S_3^0}\left[(E - w_E H - \Phi)\times\overline{H^*} + H\times\overline{\Phi^*}\right]\nu dS - \\ & - \int_{S_1^1}\left[(v-g_A)\overline{T^*} + \overline{g_A^*}T\right]\nu dS + \chi\oint_S n\overline{N^*}dS - \int_{S_2^1}\left[\overline{v^*}(T-\mathcal{G}_A) + v\overline{G_A^*}\right]\nu dS - \int_{S_3^1}\left[(v - w_A : T - \Phi_A)\overline{T^*} + \overline{\Phi_A^*}T\right]\nu dS \end{aligned} \tag{5}$$

Any other functionals (for example, the functional for determination of eigenvalues, scattering matrix, matrix of conductivity, etc.) can be obtained from the basic functional.

О СУММИРУЕМОСТИ ПО РИССУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ, РАЗРЫВНЫМИ НА ДИАГОНАЛЯХ[1]

Гуревич А.П., Хромов А.П. (Саратов)

Пусть A – интегральный оператор:

$$Af(x) = A_0 f(x) + \sum_{k=1}^{n} g_k(x)(f, v_k),$$

где $A_0 f(x) = \alpha_1 \int\limits_0^x f(t)\,dt + \alpha_2 \int\limits_0^{1-x} f(t)\,dt$, $\delta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $g_k(x) \in C^1[0,1]$, $v_k(x) \in C^1[0,1]$, $(f, v_k) = \int\limits_0^1 f(t)\,dt$. Предполагаем, что системы функций $\{g_k(x)\}_1^n$, $\{v_k(x)\}_1^n$ линейно независимы. Далее, предполагаем, что

$$\Delta = \det M \neq 0,$$

где $M = (m_{ij})_1^n$, $m_{ij} = \delta_{ij} + (Lg_j, v_i)$, $Lf = \delta^{-1}(\alpha_1 f'(x) + \alpha_2 f'(1-x))$, δ_{ij} – символ Кронекера. Обозначим $\delta_1 = \alpha_1 + \delta^{-1}(\alpha_1 w(0) + \alpha_2 w(1))$, $\delta_2 = \alpha_2 + \delta^{-1}(\alpha_1 w(1) + \alpha_2 w(0))$, $w(x) = \Delta^{-1} \sum\limits_{j,k=1}^{n} U(g_j)\Delta_{kj} v_k(x)$, $U(f) = \alpha_1(0) - \alpha_2 f(1)$, Δ_{kj} – алгебраические дополнения Δ, $g(x) = \delta^{-1}(-\alpha_1 w'(x) + \alpha_2 w'(1-x))$. Наконец, пусть все элементы матрицы $\Gamma^* \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ -\delta_2 & -\delta_1 \end{pmatrix}$, где $\Gamma^{-1} B \Gamma = D$, $B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\delta} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\delta} \end{pmatrix}$, отличны от нуля.

Теорема. *Для того, чтобы выполнялось*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \left(1 - \frac{\lambda}{r} \exp i(\vartheta - \pi/2)\right)^{\beta} R_\lambda f\, d\lambda \right| = 0,$$

где $\beta > 0$, $\vartheta = \arg\sqrt{\delta}$, $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$, E – единичный оператор, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in C[0,1]$ и

$$V(y) = \delta_1 y(o) - \delta_2 y(1) - (y, g) = 0.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддерке РФФИ, грант N 97-01-00566

О вычислении циклов методом полудискретизации

И.Н.Гурова (Воронеж)

Многие математические модели, описывающие автоколебания , могут быть сведены к задаче о существовании цикла у автономного квазилинейного уравнения

$$x' = Ax + f(x), \tag{1}$$

где A - производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $exp\{At\}$ линейных операторов, действующих в банаховом пространстве E, а нелинейный непрерывный оператор f действует из E в E. В докладе анализируется возможность приближенного вычисления таких циклов при помощи метода полудискретизации. В качестве аппроксимирующей полудискретизационной схемы рассматриваются уравнения

$$x'_h = A_h x_h + f_h(x_h), \tag{2}$$

где h - параметр полудискретизации, операторы A_h - производящие операторы сильно непрерывных полугрупп $exp\{A_h t\}$ линейных операторов, действующих в пространствах E_h, а непрерывные операторы f_h действуют из E_h в E_h.

Предполагаются выполненными следующие условия:

A_1) *Для любого* $x \in E$

$$Q_h exp\{A_h t\} P_h x \longrightarrow exp\{At\}x, \ \ \textit{при}\ h \to 0,$$

равномерно по t *из любого ограниченного отрезка;*

A_2) *Существует константа* $\gamma > 0$, *такая что*

$$\|Q_h exp\{A_h t\} P_h x\| \le e^{-\gamma t}, \quad \textit{для} \quad h \in H, \ \ t \in [0, \infty);$$

A_3) *Оператор* $Q_h f_h P_h x$ *уплотняет по совокупности переменных* h, x *относительно меры некомпактности Хаусдорфа с константой* $k < \gamma$.

Здесь P_h и Q_h - операторы проектирования и вложения, связывающие пространства E и E_h.

Устанавливается факт, аналогичный результату полученному в [1] для аналитических компактных полугрупп.

Литература

[1] Гурова И.Н., Каменский М.И. О методе полудискретизации в задаче о периодических решениях квазилинейных автономных параболических уравнений// Дифференциальные уравнения. - 1996. - Т.32. - N1. - С.101-106.

EXISTENCE OF EXACT METHODS FOR NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION NUMERICAL SOLUTION

Gurjanov A. E. (Saint Petersburg)

Herein a discrete variable method for solving Cauchy problem

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0 \ , \tag{1}$$

where $t, t_0 \in R^1$, $x, x_0 \in R^n$, $f(t,x) \in R^n$ furnishes a vector x_k to each lattice point t_k as an approximation to vector value $x(t_k)$ of the problem (1) exact solution at the point t_k , $k = 1, 2, \ldots$ The applied method is exact (accurate) in the sense that $x_k = x(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, and it will be called the discrete variable exact method. Following theorem results the paper [1].

Theorem 1 . *If in the system (1) $f(t,x) = A(t,x)x$ and if the $n \times n$-matrix $A(t,x)$ every element is a real constant or a function which is $n-1$ times continuously differentiable with respect to t, x and furthermore which is a first integral of the system (1) then for any initial values $t_0 \in R^1, x_0 \in R^n$ and for any positive integration step h exists an integer s less than n and there are existing as the explicit one-step one-level using the first s derivatives of x by t exact methods so the explicit $(s+1)$-step linear exact methods for an accurate numerical solution of the initial value problem (1) by the step h.*

Литература

[1] A.E. Gurjanov, "Linear stationary ordinary differential equations systems numerical solution exact methods," *Leningrad university herald (Vestnik Leningradskogo universiteta),* Leningrad, Series 1, Issue 2 (N 8), 1988, pp. 17–21. In Russian.

Управляемость типичных систем вблизи особых точек[1]

Давыдов А.А.(Владимир), Басто-Гонсалвеш Х.(Порто)

Управляемая система на гладком n-мерном многообразии задается гладким семейством векторных полей на нем, параметризованным точками $(n-1)$-мерной сферы. Значения полей семейства в точке многообразия образуют *индикатрису* допустимых скоростей в этой точке. Пространство систем снабжается тонкой C^k-топологией Уитни. *Типичная* система - это система из некоторого открытого всюду плотного множества в этом пространстве в такой топологии. Достижимость одной точки из другой определяется стандартно в классе кусочно непрерывных управлений.

Точка фазового пространства имеет *свойство локальной транзитивности за малое время* (=SLTP), если для любых времени $T > 0$ и окрестности этой точки существует ее другая окрестность такая, что любые две точки из последней окрестности достижимы одна из другой за время τ, $0 \leq \tau \leq T$, и вдоль траектории, лежащей в первой окрестности. Точка границы множества точек, имеющих SLTP, называется *k-особой*, если существует опорная гиперплоскость к индикатрисе скоростей в этой точке, которая содержит нулевую скорость и ровно k допустимых скоростей в этой точке, а также лежит в касательном множестве к этой границе в этой точке.

Теорема *При $n \geq 3$ любая k-особая точка типичной управляемой системы на n-мерном многообразии имеет SLTP при $3 \leq k \leq n$ и не имеет его при $k = 1$.*

Для 2-особой точки типичной системы найдены некоторые необходимые и некоторые достаточные условия для SLTP. При $n = 2$ в типичной ситуации локальная управляемость полностью изучена для гладких систем в [1] и для гладких динамических неравенств в [2].

Цитированная литература

[1] Давыдов А.А.,*Особенности полей предельных направлений двумерных управляемых систем*// Матем.сб.,1988,Т.136(178),С.478-499.

[2] Давыдов А.А.,*Локальная управляемость типичных динамических неравенств на поверхностях*//Труды МИАН, Т.209(1995) С.73-106.

[1] Исследования поддержаны грантами РФФИ 970100713 и FCT.

ОБ ОТСУТСТВИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ, ОХВАТЫВАЮЩИХ ВСЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ

Денисов В.С., Примакова С.И. (Витебск)

В [I] найдены условия отсутствия предельных циклов, охватывающих все особые точки системы нелинейных колебаний, получающейся при $\psi(y) \equiv y$ из системы

$$\dot{x} = \psi(y) + f(x), \quad \dot{y} = g(x). \tag{I}$$

В докладе получен аналогичный результат для системы (I).

Пусть функции $\psi(y)$, $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на R, гарантируют единственность решения и удовлетворяют условиям:

А. $\psi(y)$ – нечетная возрастающая функция и $\psi(y) \to \pm\infty$ при $y \to \pm\infty$;

В [B_1]. $f(x) > 0\, [f(x) < 0]$, $g(x) \geq 0$ на $(x_{n_{2i-1}}; x_{n_{2i}})$; $f(x) < 0\, [f(x) > 0]$, $g(x) \leq 0$ на $(x_{n_{2i-2}}; x_{n_{2i-1}})$ при $i = \overline{1,k}$; $g(x) > 0$ на $(-\infty; 0)$, $g(x) < 0$ на $(x_{n_{2k}}; \infty)$; $f(x) > 0\, [f(x) < 0]$ на $(x_\beta; 0)$, $f(x) < 0\, [f(x) > 0]$ на $(x_{n_{2k}}; x_\alpha)$; $g(x_i) = 0$ при $i = \overline{0, n_{2k}}$; $f(x_{n_i}) = 0$ при $i = \overline{0,2k}$, где $x_{n_0} = x_0 = 0$.

Обозначим: $$\Phi(y) = \int_0^y \psi(s)\,ds, \quad G(x) = \int_0^x -g(s)\,ds.$$

Теорема. Если выполнены условия А, В [B_1], неравенства:

$$\max\{\Phi^{-1}(\psi^{-1}(-f(x_i))) + G(x_i)\} < \min\{G(x_\beta), G(x_\alpha)\}, \quad i = \overline{0, n_{2k}},$$

$G(x_\beta) \geq G(x_\alpha)$ [или $G(x_\alpha) \leq G(x_\beta)$],

то система (I) в полосе $\bar{x} \leq x \leq x_\alpha$ [$x_\beta \leq x \leq \hat{x}$], где $x_\beta < \bar{x} < 0$ [$x_{n_{2k}} < \hat{x} < x_\alpha$] и $G(\bar{x}) = G(x_\alpha)$ [$G(\hat{x}) = G(x_\beta)$], не имеет предельных циклов, охватывающих все особые точки $(x_i; \psi^{-1}(-f(x_i)))$, $i = \overline{0, n_{2k}}$.

Следствие. Если условие В [B_1] выполняется при $x_\beta = -\infty$, $x_\alpha = +\infty$ и $G(x) \to +\infty$ при $x \to \pm\infty$, то система (I) не имеет предельных циклов, окружающих все особые точки.

Литература

I. Денисов В.С. Спектральнi i еволюцiйнi задачi. Тези доповiдей. Київ, 1991, с.60.

КОНТЕКСТНЫЙ ПОДХОД К ПРЕПОДАВАНИЮ МАТЕМАТИКИ НА ГУМАНИТАРНЫХ ФАКУЛЬТЕТАХ

Е.В. Дикарева ,
Е.М. Лещенко ,
Воронеж

Научно-технический прогресс, являясь характерной чертой нашего времени, определяет возрастание роли математических дисциплин в формировании специалистов самых различных областей науки и техники.

Проблема состоит в несовершенстве преподавания самой математики. Нередко приходится сталкиваться с ситуацией, когда студенты, владея достаточным запасом математических знаний, не могут использовать их на практике, в частности, в смежных дисциплинах. Отмеченные недостатки обусловлены тем, что формирование математического аппарата в недостаточной степени ориентировано на его дальнейшее применение. Поэтому повышение эффективности педагогического процесса с точки зрения его профессионально-прикладной направленности следует считать специальной проблемой.

Авторы, для преподавания математики на юридическом факультете Воронежского института МВД России, используют контекстный подход разработанный А.А. Вербицким.

Контекстным называется обучение в котором с помощью всей системы дидактических форм, методов и средств моделируется предметное и социальное содержание будущей профессиональной деятельности специалиста, а усвоение им абстрактных знаний как знаковых систем наложено на конву этой деятельности.

Как и в традиционном обучении, учебный материал предъявляется здесь в виде учебных текстов как знаковых систем и по-прежнему выступает как информация, которую нужно усвоить. Особенность же состоит в том, что за этой информацией, сконструированными задачами просматриваются реальные контуры профессионального будущего.

Авторами подготовлено методическое пособие по курсу "Теория вероятностей и математическая статистика", включающее примеры, наполненные содержанием реальной деятельности сотрудников милиции.

Использование данного пособия повышает мотивацию к изучению математики и способствует формированию профессионально-ориентированной обучающей среды.

Слабая ϵ - инвариантность в линейных сингулярно возмущенных системах

Дмитриев А.М.(г.Переславль)

Рассмотрим сингулярно возмущенную линейную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + A_2 y + B_1 u, x(0,\epsilon) = x^0, \qquad (1) \\ \epsilon\dot{y} &= A_3 x + A_4 y + B_2 u, y(0,\epsilon) = y^0 \\ I(u) &= c' x(T) \qquad (2) \end{aligned}$$

здесь штрих означает транспонирование, $x \in R^n$, $y \in R^m$, $u(t)$ — скалярная кусочно-непрерывная функция внешних возмущений, коэффициенты всех матриц — дважды непрерывно дифференцируемые функции t, $0 < \epsilon \ll 1$, $u \in M = \{u(t) :| u |\leq K, t \in [0,T]\}$, K — некоторая константа, $I(u)$ — критерий инвариантности.

Введем понятие слабой ϵ - инвариантности

Определение 1 *Динамическая система* (1) *называется слабо ϵ - инвариантной (относительно возмущений u(t)) по критерию* (2), *если* $\forall u_1, u_2 \in M$ $| I_1(u_1) - I_2(u_2) |= O(\epsilon)$.

В задаче (1),(2) нетрудно выписать условия слабой инвариантности с помощью решения вспомогательной линейной сингулярно возмущенной системы, совпадающей с системой для сопряженных переменных принципа максимума Понтрягина. Оказывается, что здесь можно получить декомпозицию свойства слабой инвариантности и проводить проверку соответствующих условий с помощью решения системы меньшего порядка. При этом вместо условий слабой инвариантности получаем условия слабой ϵ-инвариантности.

Утверждение 1 *Если* $(\alpha, B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2) = 0$ *и* $Re\lambda(A_4(t)) < 0$, $t \in [0,T]$ *тогда система* (1) *слабо ϵ - инвариантна относительно критерия* (2), *где α находится из уравнений:* $\dot{\alpha} = -(A_1 - A_2 A_4^{-1} B_2)\alpha$, $\alpha(T) = -c$.

Литература:

1.Розоноэр Л.И., "Вариационный подход к проблеме инвариантности", Автоматика и телемеханика, 1963 N 6 с. 744-756

2.Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.,"Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений", Москва "Высшая школа", 1990

О СТАБИЛИЗАЦИИ ОБОБЩЕННОГО СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Дмитриева М.В., Бойкова Т.А. (г.Ульяновск)

Решается задача синтеза управляющих сил, обеспечивающих асимптотическую устойчивость стационарного движения механической системы с нестационарными связями.

Рассматривается механическая система с нестационарными голономными связями, описываемая n обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, находящаяся под действием потенциальных сил с потенциальной энергией $\Pi = \Pi(t, q)$ и управляющих сил U. Пусть кинетическая T и потенциальная Π энергии системы не зависят явно от последних $(n-m)$ координат $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n$, т.е. первые m координат есть позиционные, остальные – циклические. Уравнения движения такой системы в переменных Рауса $q = (q_1, \ldots, q_m)', \dot{q}, z = (q_{m+1}, \ldots, q_n)', p = (p_{m+1}, \ldots, p_n)'$ имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial R_2}{\partial q} - \frac{\partial R_0}{\partial q} = G\dot{q} + U^1 + C^{-1}B'U^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(BC^{-1}(p+f) - g\right),$$

$$\dot{p} = U^2, \quad \dot{z} = \frac{\partial R}{\partial p}, \tag{1}$$

где $R = L - (\partial L/\partial \dot{z})'\big|_{\dot{z}=C^{-1}(p+f-B'\dot{q})}$ – функция типа Рауса. При $U^1 = U^2 = 0$ и условиях

$$\frac{\partial R_0}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial t}\left(BC^{-1}(p+f) - g\right) = 0 \ \text{ когда } \ q = 0$$

система (1) имеет обобщенное стационарное движение

$$\dot{q}(t) \equiv 0, \quad q(t) \equiv 0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0(t), \quad z = z(t), \tag{2}$$

в котором в отличие от обычного стационарного движения, циклические скорости есть функции времени.

В работе определяются методы построения управляющих сил $U = (U^1, U^2)$, обеспечивающих полную и частичную (по $\dot{q}$ и q) асимптотическую устойчивость движения (2).

В качестве примеров рассмотрены задачи о стабилизации обобщенных стационарных движений конического маятника и симметричного твердого тела с неподвижной точкой в однородном поле тяжести переменной интенсивности.

Работа выполнена по программе "Университеты России"-99.

К расчёту параметров течения вязкой несжимаемой жидкости.

И. А. Дободейч (Воронеж)

Ряд прикладных задач, например, о двумерном напорном течении вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными поверхностями [1], одна из которых движется с заданной скоростью, сводится к решению уравнения

$$(\Psi + f)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X} + c\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) - \Delta\Psi_{(x,y,z)} = \frac{d^2 f}{d z^2} - a_0 , \qquad (1)$$

где $c,\ a_i - Const,\qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Для частного случая

$$f = \eta_{(z)} + a_0 z^2/2 + a_1 z + a_2 , \qquad (2)$$

полагая

$$\Psi = \eta_{(z)}\cdot\Phi(\mathcal{X}) , \qquad \mathcal{X} = c\cdot X - y + F_{(z)} , \qquad (3)$$

где одна из функций $\eta_{(z)}$ или $F_{(z)}$ – произвольная, уравнение (1) сводится к следующему

$$(1+\Phi)\eta'' + (2F'\eta' + \eta F'')\frac{\partial\Phi}{\partial\mathcal{X}} + (1+c^2+F'^2)\eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mathcal{X}^2} = 0. \qquad (4)$$

При

$$(1+\Phi) = \sum_{i=0}^{\infty}(c_i \cdot Ch\lambda_i\mathcal{X} + b_i Sh\lambda_i\mathcal{X}), \qquad (5)$$

уравнение (4) сводится к обыкновенному дифференциальному, решение которого подстановкой [2]

$$\eta = \varphi_{(z)}\cdot exp(-\lambda_i F) , \qquad \lambda_i , c_i , b_i - Const \qquad (6)$$

сводится к известному [2] для уравнения

$$\varphi'' + \alpha_i^2 \varphi = 0 , \qquad \alpha_i^2 = (1+c^2)\lambda_i^2 . \qquad (7)$$

Например, условиям

$$h ,\ d_i - Const , \qquad \Psi_{(z=0)} = \Psi_{(z=h)} = 0$$

и уравнению (7) удовлетворяет

$$n_i = 0, 1, 2, \dots , \qquad \varphi = \sum_0^{\infty} d_i \sin(\alpha_i z) , \qquad \alpha_i = \frac{2n_i+1}{h}\pi .$$

Литература.; 1. Дободейч И. А. К решению одного класса краевых задач // Понтрягинские чтения – IX. Тезисы докладов. – Воронеж, ВГУ, 1998. – 238 с., (с. 65).

2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. Наука, 1971, 576 с..

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Долгий Ю.Ф., Пластинин Н.В. (Екатеринбург)

Рассматривается система дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа

$$\sum_{i=0}^{n}\{A_i(t)\frac{dx(t-i\tau)}{dt}+B_i(t)x(t-i\tau)\}=0, \qquad (1)$$

где $x\in R^m; A_0$ - единичная матрица; $detA_n\neq 0$ при $t\in R$; $A_i, 1\leq i\leq n$ - ω-периодические абсолютно непрерывные на $[0,\omega]$ матрицы-функции; $B_i, 0\leq i\leq n$ - ω-периодические интегрируемые по Лебегу на $[0,\omega]$ матрицы-функции; $\omega=n\tau$.

В качестве решения $x(\cdot,\varphi)$ начальной задачи Коши для начального момента $t_0=0$ и непрерывной начальной функции $\varphi\in C([-\omega,0];R^m)$ берется обобщенное решение, определенное в [1]. Устойчивость системы (1) можно описать в терминах спектра оператора монодромии $U: C([-\omega,0];R^m)\to C([-\omega,0];R^m)$, определяемого формулой $(U\varphi)(\vartheta)=x(\omega+\vartheta,\varphi)$, $\vartheta\in[-\omega,0]$. Вводятся обозначения: $x_j(s)=x(j\tau+s,\varphi)$, $\varphi_j(s)=\varphi(j\tau+s-n\tau), 1\leq j\leq n, s\in[-\tau,0]$; $A_i^j(s)=A_i(j\tau+s), B_i^j(s)=B_i(j\tau+s)$, $1\leq j\leq n, 0\leq i\leq n, s\in[-\tau,0]$; $X=(x_1{}^T,\ldots,x_n{}^T)^T, \Phi=(\varphi_1{}^T,\ldots,\varphi_n{}^T)^T$. Задачу нахождения значений оператора монодромии можно связать с задачей нахождения решений следующей специальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$F(s)\frac{dX}{ds}=G(s)X+R(s)\frac{d\Phi(s)}{ds}+S(s)\Phi(s)$$

с краевыми условиями

$$X(-\tau)=NX(0)+K\Phi(-\tau),$$

где F,R - абсолютно непрерывные матрицы-функции, определяемые через матрицы $A_i, 1\leq i\leq n$; G,S - интегрируемые по Лебегу матрицы- функции, определяемые через матрицы $B_i, 0\leq i\leq n$; N,K - постоянные матрицы. Записанная краевая задача имеет единственное решение $X(\cdot,\Phi)$ при любой непрерывной функции Φ. Это решение определяет линейный непрерывный оператор $\widetilde{U}: C([-\tau,0];R^{mn})\to C([-\tau,0];R^{mn})$, описываемый формулой $\left(\widetilde{U}\Phi\right)(s)=X(s,\Phi), s\in[-\tau,0]$.

Теорема. Точечный и непрерывный спектры операторов U и $\widetilde{U}$ совпадают.

Устойчивость решений системы (1) можно описывать в терминах спектра оператора $\widetilde{U}$. Структура этого оператора позволяет позволяет непосредственно выделять непрерывную часть спектра. Поэтому проблема устойчивости решений линейной периодической системы дифференциальных уравнений нейтрального типа таким образом сводится к задаче изучения точечного спектра оператора $\widetilde{U}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N.99-01-00145.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгий Ю.Ф., Пластинин Н.В. Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа//Тез.докл. Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - IX". Воронеж. 1998. С.67.

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ МОНОДРОМИИ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Ф. Долгий, В.С. Тарасян (Екатеринбург)

Рассматривается линейное периодическое функционально- дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-r}^{0} d_s\eta(t,s)x(t+s), \qquad t \in R^+, \tag{1}$$

где $x : [-r, +\infty) \mapsto R^n$; матричная функция η локально измерима по Лебегу на множестве $R \times R$; при каждом фиксированном $t \in R$ $\eta(t,s) = 0$ при $s \geq 0$ и $\eta(t,s) = \eta(t,-r)$ при $s \leq -r$; а на отрезке $[-r, 0]$ матричная функция $\eta(t,\cdot)$ имеет ограниченную вариацию; при каждом фиксированном $s \in [-r, 0]$ матричная функция $\eta(\cdot, s)$ локально интегрируема по Лебегу; $\eta(t+\omega,\cdot) = \eta(t,\cdot)$ при $t \in R$, $\omega \geq r$.

Оператор монодромии для уравнения (1) $U : C([-r,0],R^n) \mapsto C([-r,0],R^n)$ является вполне непрерывным и определяется формулой [1]

$$(U\phi)(\theta) = V(\omega+\theta,0)\phi(0) + \int_{-r}^{-0} d_\beta\left\{\int_{0}^{\omega+\theta} V(\omega+\theta,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha\right\}\phi(\beta),$$

где матричная функция V является решением уравнения

$$V(t,s) = \begin{cases} 0, & t < s, \\ I - \int_s^t V(t,\alpha)\eta(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha, & t \geq s. \end{cases}$$

Доказано утверждение.

Теорема. Для того, чтобы оператор монодромии был конечномерным, необходимо и достаточно, чтобы матричная функция η допускала представление

$$\eta(\alpha,\beta-\alpha) = \sum_{k=1}^{N} \eta_k^1(\alpha)\eta_k^2(\beta), \qquad \alpha \in [0,+\infty), \beta \in [-r,+\infty),$$

где матричные функции η_k^1 локально интегрируемы по Лебегу, а матричные функции η_k^2 имеют ограниченные вариации.

Полученные конечномерные операторы монодромии могут быть использованы в качестве аппроксимирующих операторов для оператора монодромии общего периодического функционально - дифференциального уравнения. В задаче устойчивости решений функционально - дифференциальных уравнений такие аппроксимирующие операторы могут быть использованы при построении характеристического уравнения оператора монодромии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N.99-01-00145.

Литература

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.

УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ОДАРЕННЫХ

В.Н.Донцов, Н.С.Втулкина, Г.А.Картавцева (Воронеж)

С момента возникновения в Воронежском регионе классов с математической специализацией перед ВГУ и органами образования возникла проблема подготовки и подбора "учителя для одаренных". Численность этой группы учителей невелика, но глубоки масштабы ее педагогического воздействия на все региональное развитие. Обобщение инновационного педагогического опыта позволило нам сформулировать систему акмеологических требований к личности учителя математического класса: 1.академическая компетентность, в т.ч. в области конкурсной и олимпиадной математики; 2.дифференциально-психологическая компетентность и направленность на работу с одаренными детьми; 3.уверенность в своих математико-педагогических возможностях, сила педагогической Я-концепции; 4.ценностная ориентированность на результативность, как в текущей, так и в олимпиадной деятельности учеников; 5.способность к деятельностному сотворчеству с одаренным учеником (способность подхватить и развить его идею, отвечать на неожиданные и острые математические вопросы, осознавать меру помощи одаренному); 6.способность управлять полилинейным, порой парадоксальным мышлением ученика; 7.способность через задачи проектировать учебно-математические "стандарты-рекорды" (С.П. Капица, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий), ориентируясь на которые гимназист развивает свой математический интеллект; 8.способность к "точечному подходу" при реализации принципа единства нормативного и вариативного в индивидуальной работе с одаренными; 9.способность к "мягкой" критике, чувство такта; 10.способность к педагогической эмпатии (к сочувствию и пониманию, желание и готовность помочь ученику в нестандартных математических ситуациях); 11.способность конструктивно преодолевать "звездную болезнь" некоторых учеников; 12.стрессоустойчивость как способность спокойно принимать критику учеников, 13.способность к конструктивному сотрудничеству с вузовским преподавателем с целью создания особой математической среды (Л.С.Выготский, А.Г.Асмолов, А.А.Бодалев, А.А.Деркач, В.Н.Дружинин, И.И.Ильясов, В.А.Крутецкий, Н.В.Кузьмина, А.В.Петровский, М.А.Холодная, В.Д.Шадриков), организованной по принципу структурной триады "прогимназия-гимназия-университет"; 14.стремление к непрерывному математико-педагогическому самообразованию; 15.компетентность в методах проектирования педагогического эксперимента и др.

О МЕТОДЕ РИМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Дорофеев А. В. (Стерлитамак)

В теории краевых задач для гиперболических уравнений важное место отводится построению функции Римана. Для одного класса уравнений III порядка с тремя независимыми переменными

$$U_{xyz} + a_1 U_{xy} + a_2 U_{xz} + a_3 U_{yz} + b_1 U_x + b_2 U_y + b_3 U_z + cU = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты функции трех переменных x, y, z известно два подхода к определению функции Римана. В работе [1] приводится определение через дифференциальные свойства этой функции. В работе [2] функция Римана определяется как решение интегрального уравнения.

В данной работе доказано, что из второго подхода следует выполнимость всех свойств определения в [1]. Для уравнения (1) с постоянными коэффициентами

$$a_1 = \gamma, a_2 = \beta, a_3 = \alpha, b_1 = \beta\gamma, b_2 = \alpha\gamma, b_3 = \alpha\beta, c = \alpha\beta\gamma \qquad (2)$$

в области D, ограниченной плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a > 0$ методом Римана обосновывается однозначная разрешимость задач Гурса и Дарбу.

Задача Гурса. *Найти решение уравнения (1) с коэффициентами (2), чтобы*

$$u(x, y, z) \in C(\overline{D}) \wedge C^2(D) \wedge C^3_{xyz}(D),$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$U(0, y, z) = f_1(y, z), (y, z) \in G_1; U(x, 0, z) = f_2(x, z), (x, z) \in G_2;$$
$$U(x, y, 0) = f_3(x, y), (x, y) \in G_3,$$

где $f_n, (n = 1, 2, 3)$ заданные достаточно гладкие функции, для которых имеют место непрерывные условия согласования на ребрах граней G_n области D.

Используя построенную функцию Римана данного уравнения

$$R(M; M_0) = exp[\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0)],$$

M(x,y,z)- произвольная, $M_0(x_0, y_0, z_0)$- фиксированная точки области D доказана следующая

Теорема. *Если $f_n(t, s) \in C^2(G_n), n = 1, 2, 3,$ то функция*

$$u(x, y, z) = f_3(x, y)R(x, y, 0; M) + f_2(x, z)R(x, 0, z; M) + f_1(y, z)R(0, y, z; M)+$$
$$+f_1(0, 0)R(0, 0, 0; M) - f_3(x, 0)R(x, 0, 0; M) - f_2(0, z)R(0, 0, z; M) - f_1(y, 0)R(0, y, 0; M).$$

является единственным решением задачи Гурса.

Считая формулу решения задачи Гурса как общее представление решения данного уравнения, обосновывается однозначная разрешимость задачи Дарбу, когда краевые функции задаются на двух характеристических гранях G_1, G_2 и на нехарактеристической части области D.

Литература

1. Волкодавов В.Ф., Захаров В.Н. Функции Римана для одного класса дифференциальных уравнений в трехмерном евклидовом пространстве и ее применения. - Самара, 1996.- 52с.

2. Жегалов В.И. Трехмерный аналог задачи Гурса // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. - Новосибирск, 1990.- С.94-98.

НОВОЕ ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.Я.Дубовицкий (Черноголовка)

Введем обозначения: $G \subseteq R^n$ - открытая область; $f(x)$ - гладкое отображение $G \Rightarrow R^k$; точка $x \in G$ называется *особой*, если ранг $f'(x) \leq k$; $E_y = \{x | x \in G, f(x) = y\}$ - множество уровня (или уровень) отображения f.

Уровень E_y, обладающий свойством А присущим всем $y \in R^k$, исключая множество нулевой k - мерной меры Лебега, мы будем называть *типичным*.

В наших работах [1], [2], [3] *установлено*:

Теорема 1. (1950). Пусть $f(x)$ m - раз дифференцируемое отображение $G \Rightarrow R^k$. Если $m \geq n - k + 1 > 0$, то типичный уровень E_y не содержит особых точек и состоит из изолированных $n-k$ - мерных гладких многообразий.

Пусть $\nu \geq 0$ вещественное число.

Теорема 2. (1954). Пусть $f(x)$ m - раз дифференцируемое отображение $G \Rightarrow R^k$. Если $m \geq n - k + 1 - \nu > 0$, то на типичном уровне E_y ν - мерная мера Хаусдорфа μ_ν множества особых точек отображения f равна нулю.

Пусть ν, $\tau > 0$. Назовем множество M τ - финитным, если $\mu_\tau M < +\infty$.

Мы будем называть $x \in G$ τ - точкой отображения f, если ранг $f'(x) \leq \tau$.

Теорема 3. (1966). Пусть $f(x)$ $m > 0$ - раз дифференцируемое отображение $G \Rightarrow R^k$ и M множество τ - точек. Если M $m\omega + \tau$ - финитно, то $\mu_{\omega+\tau} f(M) = 0$.

Т. к. ограниченные множества из R^n n - финитны, то:

Теорема 4. (1966). Пусть $f(x)$ m - раз дифференцируемое отображение $G \Rightarrow R^k$. Если $m \geq \frac{(n-\tau)}{\omega} > 0$ и M множество τ - точек отображения f, то $\mu_{\omega+\tau} f(M) = 0$.

Содержащиеся в теоремах 1.-4. условия о числе последовательных дифференциалов отображения f, как следует из конрпримеров, уменьшить невозможно.

К настоящему времени доказано, что эти теоремы можно *усилить*, заменив в них требования существования последних дифференциалов условием счетной липшицевости предпоследних частных производных отображения f.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант 97-01-00981).

Литература

1. А.Я. Дубовицкий, О дифференцируемых отображениях n - мерного куба в k - мерный, Матем. сб., 32(74), 1953, 443-464.

2. А.Я. Дубовицкий, О структуре множеств уровня дифференцируемых отображений n - мерного куба в k - мерный куб, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 1957, 371-408.

3. А.Я. Дубовицкий, О множестве точек вырождения, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, 1967, 27-36.

ТЕОРЕМЫ ДОВЕРИЯ В ЗАДАЧАХ НА ЭКСТРЕМУМ

Дубовицкий А.Я., Дубовицкий В.А. (Черноголовка)

Рассматривается общая задача минимизации

$$f_0(x) \to \min, f_1(x)/le0, g(x) = 0, x \in K \tag{1}$$

где функции f_i $(i = 0, \ldots, m)$, g определены на открытом подмножестве G банахова пространства X и принимают значения в R, Y соответственно; Y другое банахово пространство; $K \subset X$ - выпуклый конус. Предполагается, что f, g локально липшицевы на G.

Для задачи (1) известны необходимые условия экстремума [2] в форме существования набора нетривиальных сопряженных множителей $\lambda = (\alpha, c)$, $\alpha \in R^{m+1}, c \in Y^*, \alpha \geq 0$ для которых $_x\ L(x, \lambda) \cap K^* \ni 0$, здесь $L(\lambda, x) := \sum_i \alpha_i f_i(x) + c \cdot g(x)$ -функция Лагранжа, K^* - сопряженный к K конус ($K^* = -K^\circ$), $_x$ обозначает выпуклый компакт обобщенных субградиентов [2].

В подклассе локально-выпуклых задач (1) существование нетривиальных множителей Лагранжа равносильно нетривиальной разрешимости уравнения Эйлера [1], т.е. отрицанию существования направления, касательного к ограничению равенства (1) и понижающего в первом порядке ограничения неравенства. Однако в общем случае постановки (1) в классе липшицевых ограничений, столь популярной в современной литературе, связь сопряженных множителей и "алгоритма понижения" полностью утрачена в силу неконструктивного характера традиционного способа вывода множителей Лагранжа (метод штрафов, теорема Экланда). Цель данного исследования состоит в анализе этой связи, представляющей значительный теоретический и прикладной интерес.

Определим вспомогательные функции точки $x \in G$, связанные с ограничениями экстремальной задачи

$$a(x) := \inf\{\min \|_x\ \ L(\lambda, x) - K^*\| : \lambda = (\alpha, c),\ \alpha \in R^{m+1}, \alpha \geq 0, \textstyle\sum_i \alpha_i = 1,\ c \in Y^*\}$$

$$b(x) := \inf\{\min \|_x\ \ c \cdot g(x) - K^*\| : c \in Y^*, \|c\| = 1\}$$

Доказан следующий локальный вариант теоремы "доверия".

Теорема : Пусть в точке $x_0 \in G$ выполнены неравенства $a(x_0), b(x_0) > 0$ и либо Y конечномерно, либо g строго дифференцируема и регулярна вдоль K в смысле [3]. Тогда $\forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ и монотонная вдоль K траектория $x(t)$, $x : [0, \delta] \to K$, $x(0) = x_0$ такая, что $\forall 0 \leq t \leq \delta\ g(x(t)) = 0,\ f_i(x(t)) \leq -t(a(x_0) - \epsilon),\ \|x(t) - x_0\| = t$. Траектория $x(t)$ называется монотонной вдоль K, если $\forall\, 0 \leq t_1 \leq t_2\ \ x(t_2) - x(t_1) \in K$.

Таким образом, если $a(x_0) > a', b(x_0) > 0$, то неравенственные функции можно локально понизить в первом порядке по значению со скоростью спуска не менее a', удовлетворяя при этом ограничение равенства. При этом может не существовать (контрпример) направления, понижающего раздельно субдифференциалы Кларка функций f_i. При доказательстве теоремы траектория "скорейшего" спуска $x(t)$ строится конструктивно на основе итерационного процесса Люстерниковского типа. Условие $b(x_0) > 0$ означает, что в рассматриваемой точке выполнено обобщенное условие Люстерника [3] отображения g. Существенно, что константа "накрывания" b никак не влияет на скорость спуска, существенна лишь ее положительность.

Установлен также глобальный вариант теоремы доверия. А именно, пусть $R > 0$, $D := x_0 + K \cap B_R(x_0)$. Тогда, если $D \subset G$ и $\forall x \in D\ a(x) > a', b(x) > 0$, то существует монотонная вдоль K траектория спуска $x(t)$ со скоростью не ниже a', определенная для $t \in [0, R]$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 97-01-00981).

Ссылки

[1] А.Я.Дубовицкий, А.А.Милютин, Задачи на экстремум при наличии ограничений. ЖВМ и МФ, 1965, 5:3, 395-453.

[2] Ф.Кларк, Оптимизация и негладкий анализ. М.:Наука, 1988.

[3] А.В.Дмитрук, А.А.Милютин, Н.П.Осмоловский, Теорема Люстерника и теория экстремума. УМН, 1980, т.35, 6:216, 11-46.

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НОРМЫ[1]

Дудов С.И., Златорунская И.В. (Саратов)

Пусть функция $n(x)$ удовлетворяет аксиомам нормы на $\mathbb{R}^p$,

$$Bn(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p / n(x-y) \le r\},$$

$$h(A,B) = \max\left\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} n(x-y), \sup_{x\in B}\inf_{y\in A} n(x-y)\right\}.$$

Тогда задачу о наилучшем приближении заданного выпуклого компакта $D \subset \mathbb{R}^p$ шаром нормы $n(\cdot)$ в метрике Хаусдорфа, порожденной этой нормой, можно записать в виде

$$h(D, Bn(x,r)) \to \inf_{x\in\mathbb{R}^p,\ r\ge 0}. \tag{1}$$

Такая задача, видимо впервые, рассматривалась в [1] для случаев евклидовой и "эллипсоидальной" норм.
Обозначим через $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p\backslash D}$, $\rho_A(x) = \inf_{y\in A} n(x-y)$, $R(x) = \max_{y\in D} n(x-y)$, $Q^R(x) = \{z \in D \ / \ R(x) = n(x-z)\}$, $Q^\rho(x) = \{z \in D \ / \ \rho_D(x) = n(x-z)\}$ при $x \notin D$ и $Q^\rho(x) = \{z \in \Omega \ / \ \rho_\Omega(x) = n(x-z)\}$ при $x \in D$, $\partial n(x)$ - субдифференциал нормы в точке x, $K(z,D)$ - конус возможных направлений множества D в точке z, K^+ - сопряжение конуса K, $n^*(v) = \max_{n(w)\le 1}\langle v,w\rangle$, co A - выпуклая оболочка множества A, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - скалярное произведение. Положим $f(x) = \rho_D(x)$ при $x \notin D$ и $f(x) = -\rho_\Omega(x)$ при $x \in D$.

Теорема 1. *Задача (1) эквивалентна задаче*

$$R(x) + f(x) \to \inf_{x\in\mathbb{R}^p}, \tag{2}$$

причем, если пара (x_0, r_0) - решение задачи (1), то x_0 - решение задачи (2) и наоборот, если x_0 - решение задачи (2), то пара $(x_0, (R(x_0) - f(x_0))/2)$ является решением задачи (1).

Теорема 2. *Для того, чтобы точка x_0 была решением задачи (2) необходимо и достаточно, чтобы*

$$o_p \in \partial R(x_0) + \partial f(x_0),$$

где $\partial R(x_0) = \mathrm{co}\{\partial n(x_0 - z) \ / \ z \in Q^R(x_0)\}$, а $\partial f(x_0) = \partial n(x_0 - z) \cap -K^+(z,D)$ для любого $z \in Q^\rho(x_0)$ при $x_0 \notin D$ и $\partial f(x_0) = \mathrm{co}\{v \in -K^+(z,D) \ / \ n^*(v) = 1, \ z \in Q^\rho(x_0)\}$ при $x_0 \in D$.

Литература

[1] М.С.Никольский, Д.Б.Силин. О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала // Труды Матем. института им. В.А.Стеклова, 1995, т.211, с.338-354.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант N 98-01-00048

УСЛОВИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Еремеев В.А. (Ростов-на-Дону)

Выполнение условий эллиптичности уравнений равновесия нелинейной теории упругости [1] (условий сильной эллиптичности, неравенства Адамара и других) играет большую роль в задачах устойчивости упругих трехмерных тел, распространении волн в предварительно-напряженных средах, при исследовании разрывных решений нелинейной теории упругости, теории фазовых превращений в упругих телах при больших деформациях. Составляющей частью исследования эллиптичности краевой задачи в целом является проверка условия дополнительности (условия Шапиро-Лопатинского), налагаемого на краевые условия [2]. Эллиптичность уравнений равновесия вместе с условиями дополнительности позволяет сделать вывод о фредгольмовости оператора, порождаемого линеаризованной краевой задачей теории упругости и судить о регулярности ее решений.

Используя определение устойчивости в малом [1] состояния равновесия и свойства упругого материала можно показать, что выполнение условия дополнительности в некоторой точке границы r_0 эквивалентно требованию устойчивости в малом в классе возмущений, затухающих на бесконечности, однородного упругого полупространства, свойства которого совпадают со свойствами материала в точке r_0, а однородное напряженно-деформированное состояние для полупространства совпадает с состоянием тела в проверяемой точке r_0. Таким образом, сформулировано своего рода "механическое" определение условия дополнительности краевых условий нелинейной теории упругости, заключающееся в определении областей в пространстве деформаций или напряжений, для которых упругое полупространство с указанными выше свойствами устойчиво. Следует отметить, что в отличие от условия эллиптичности уравнений равновесия, выполнение которого налагает ограничения на форму определяющих соотношений нелинейно-упругого тела (и, возможно, деформацию материала), выполнение условия дополнительности, вообще говоря, накладывает ограничения и на форму граничных условий. В качестве примера исследовано выполнение условия дополнительности для материала Адамара.

Эта работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-01019).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

[2] *Егоров Ю.В., Шубин М.А.* Линейные дифференциальные уравнеия с частными производными. Основы классической теории. /В кн. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 30. Дифференциальные уравнения с частными производными–1. ВИНИТИ, 1987. С. 1-262.

R_S-ОПТИМАЛЬНОСТЬ В ИГРАХ.

Ермакова Н.И., Калинина Н.Ю. (Орехово–Зуево)

Рассматривается бескоалиционная игра N лиц при неопределенности

$$\Gamma = \langle \mathbf{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}, Y, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbf{N}} \rangle,$$

где $\mathbf{N} = \{1,2,...,N\}$ - множество номеров игроков; в игре Γ каждый i-й игрок выбирает и использует любую свою стратегию $x_i \in X_i \in comp\mathbf{R}^{n_i}$ и в результате формируется ситуация $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in X = \prod_{i\in\mathbf{N}} X_i$. Независимо от их действий реализуется некоторая неопределенность $y \in Y \in comp\mathbf{R}^m$, причем игроки должны учитывать возможность реализации любой неопределенности. Функция выигрыша i-го игрока задана непрерывной на $X \times Y$ скалярной функцией $f_i(x,y)$. На "содержательном уровне" цель i-го игрока в игре Γ-выбор такой стратегии $x_i \in X_i$,чтобы в сложившейся ситуации $x = (x_1, ..., x_N)$ при реализации неопределенности $y \in Y$ его выигрыш $f_i(x,y)$ был "как можно больше". Предпологается, что игроки при принятии решений используют принцип минимаксного сожаленя Сэвиджа. Рассматривается упорядоченное семейство подыгр со связанными стратегиями, которое порождается исходной игрой Γ и некоторым отношением порядка R_S. Вводится понятие оптимальной подыгры и устанавливаются свойства таких игр. Подыгрой со связанными стратегиями, порожденной игрой Γ, понимается набор

$$\Gamma_M = \langle \mathbf{N}, M, Y, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbf{N}} \rangle,$$

где M непустое компактное подмножество множества X, остальные элементы подыгры определены в игре Γ. В подыгре Γ_M игроки выбирают свои стратегии таким образом, чтобы ситуация $x \in M$. Такой выбор может быть достигнут путем предварительных переговоров.

Пусть $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_M \mid M \in compX, M \neq \emptyset\}$ - множество всевозможных подыгр, порожденных игрой Γ. Аналогично подходу в работе [1] формализуется отношение порядка R_S на множестве $\mathbf{\Gamma}$. Игру $\Gamma_{M^*} \in \mathbf{\Gamma}$ будем называть R_S - минимальной игрой в $\mathbf{\Gamma}$, если не существует игры $\Gamma_M \in \mathbf{\Gamma}$ такой, что $\Gamma_M R_S \Gamma_{M^*}$. $\mathbf{R_S}$ – оптимальной игрой упорядоченного семейства игр $\langle \mathbf{\Gamma}, R_N \rangle$ называется R_S - минимальная игра Γ_{M^*} такая, что $\Gamma_{M^*} \neq \Gamma \to \Gamma_{M^*} R_S \Gamma$.

Исследованы свойства R_S –оптимальных подыгр, установлена структура такой подыгры, взаимосвязь известных решений из теории бескоалиционных игр и R_S–оптимальных подыгр, доказана теорема существования.

Литература.

1. А.Е.Бардин. Структура множества R–оптимальных подыгр со связанными ограничениями и при неопределенности. || Управление сложными системами: Межвуз. сб. научн. тр. Москва. 1999. с.5-9.

Применение обобщенной теоремы Вейля к спектральному анализу дифференциальных операторов

Еровенко В.А. (Минск)

Дифференциальным выражением Фашиана называют дифференциальную операцию вида $(mf)(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t) f^{(j)}(t)$, где $a_k(t) = O(t^k)$. Различные существенные спектры максимальных и минимальных дифференциальных операторов Эйлера, порожденных выражением m с коэффициентами $a_k(t) = a_k t^k$ в пространствах $L^p(1, \infty)$ и $L^p(0, 1)$, $1 \le p \le \infty$, вычислены в предыдущих работах автора.

Рассмотрим дифференциальную операцию Фашиана, которую можно рассматривать как возмущенную дифференциальную операцию Эйлера вида $\omega := \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k(t)) t^k D^k$, $\quad a \le t < \infty$, $0 < a < \infty$, где $b_k(t)$ — комплекснозначные функции такие, что $b_k(t) \in C^k[a, \infty)$, a_k — комплексные числа, $a_n \neq 0$, $1/(a_n + b_n), b_k \in L^\infty(a, \infty)$, $0 \le k \le n$ и $D := d/dt$. Дифференциальное выражение $\varepsilon := \sum_{k=0}^{n} a_k t^k D^k$ с соответствующими степенными коэффициентами называется операцией Эйлера. Обозначим через $T(\omega, p, [a, \infty)), 0 < a < \infty$, максимальный оператор, а через $T_0(\omega, p, [a, \infty)), 0 < a < \infty$, минимальный оператор, определенный на $L^p(a, \infty)$ для $1 \le p \le \infty$. Спектральные, фредгольмовы и полуфредгольмовы свойства различных классов обыкновенных дифференциальных операторов и соответствующие обобщения классической теоремы Вейля в шкале лебеговых пространств исследованы в [1-2].

Пусть коэффициенты b_k формальной обыкновенной дифференциальной операции ω удовлетворяют условиям $b_k(t) \in L^p_{loc}(a, \infty), 0 < a < \infty$, где $1 \le p < \infty$, и пусть $\lim_{s \to \infty} \int\limits_{e^s}^{e^{s+1}} \frac{1}{t} \mid b_k(t) \mid^p dt \; = \; 0, \quad k = \overline{0, n}.$

Т е о р е м а. *Существенные спектры и спектры дифференциальных операторов Фашиана $T_0(\omega, p, [a, \infty))$, $T(\omega, p, [a, \infty))$ и $S(\omega, p, [a, \infty))$, порожденных в $L^p(a, \infty)$, $0 < a < \infty$, $1 \le p < \infty$, операцией $\varepsilon + \sum_{k=0}^{n} b_k t^k D^k$, p-зависимы и вычисляются по формулам:*

$$\sigma_{ek}[S(\omega, p, [a, \infty))] = \sigma^{\pm}_{e2}[S(\omega, p, [a, \infty))] = \{Q(\lambda) : Re\lambda = 0\}, \; k = \overline{1, 3},$$

$$\sigma_{ek}[T_0(\omega, p, [a, \infty))] = \sigma[T_0(\omega, p, [a, \infty))] = \{Q(\lambda) : Re\lambda \ge 0\}, \; k = 4, 5,$$

$$\sigma_{ek}[T(\omega, p, [a, \infty))] = \sigma[T(\omega, p, [a, \infty))] = \{Q(\lambda) : Re\lambda \le 0\}, \; k = 4, 5,$$

где Q — полином, задаваемый равенством: $Q(t) := a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{j=0}^{k-1} \left[t - \left(\frac{1}{p} + j \right) \right]$.

При дополнительных ограничениях на производные коэффициентов $b_k(t)$ можно доказать справедливость полученных формул существенного спектра операторов Фашиана в пространствах $L^\infty(a, \infty)$ [3].

Литература. 1. Erovenko V.A. L^p-essential spectral theory of ordinary differential operators with almost constant coefficients // Matematicki Vesnik. - 1997, Vol.49. - P.177-185. 2. Erovenko V.A. Methods of perturbation theory in the qualitative essential spectral analysis of differential operators // Mathemetical Modelling and Analysis. - 1998, Vol.3. - P.86-92. 3. Еровенко В.А. Спектральные и фредгольмовы свойства возмущеных дифференциальных операторов Эйлера // Доклады НАН Беларуси. - 1998, Т.42. N5. - С.40-44.

Синергопедагогика как возможная модель современного математического образования

Еровенко В.А., Михайлова Н.В.(Минск)

Рассмотрение любого явления возможно только в том случае, если из множества всевозможных связей могут быть выделены только те связи, которые замкнуты на этом явлении. Для математического образования это означает, что взгляд на него "извне" возможен при условии вычленения его связей из широкого социокультурного контекста в который оно включено.

При резком снижении ценности общего образования и культуры для большинства людей, наметилась тенденция к переориентации математического образования с общекультурного содержания на воспроизводство конкретных практических навыков, не требующих длительного профессионального обучения. Уже в университете будущему педагогу внушают, что его хлеб — методика, которая стала прикрытием для тех, у кого нет фундаментальных знаний и общей математической культуры и нет желания их приобретать.

Провозглашенные ценности гуманистического общества наполняются конкретным содержанием тогда, когда становится счастливее каждый без исключения человек. Это должно стать общим законом жизни и современного образования, в том числе и математического. Студентов следует учить умению ориентироваться в современной науке и следить за ее развитием. О высшей школе, о ее взаимосвязях с другими социальными институтами и о попытках понять их, опираясь на современные методы математического моделирования идет речь в статье [1].

Наше время — это сложный и болезненный поиск нового философского миропонимания, поэтому вполне естественно обращение ученых и педагогов к синергетической модели и стремление перенести ее понятия в педагогическую деятельность. Философическая форма синергетического видения научного прогресса и образования содержит в обобщенном виде такие ключевые понятия как открытость системы образования, интеграция естественнонаучного и гуманитарного знания и взаимодополняемость различных теоретических и практических подходов к образованию [2]. Нелинейность и сложность социальной реальности приводит к отказу от линейного мышления и в этом одно из существенных отличий синергопедагогики от предыдущих концепций.

Этапирующая разноголосица в понимании целей и задач современного математического образования — характерная черта постмодернистской эпохи [3]. Поэтому, возможно, что именно через анализ проблем синергетики (или самоорганизации) и лежит дальнейший путь наших представлений о развитии математического образования.

Литература. 1. Малинецкий Г.Г. Высшая школа глазами математиков // Знание-сила. - 1995, N10. - С.17-24. 2. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Антропный принцип в синергетике // Вопросы философии. - 1997, N3. - С.62-79. 3. Еровенко В.А., Михайлова Н.В. // Реализация гуманистических целей университетского математического образования с позиции постмодернистской культуры // Вузовская наука, промышленность, международное сотрудничество. - Мн., 1998, Ч.1. - С.114-117.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ТЕЧЕНИЯ ГРУППЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СТРУЙ

А.Ф.Ефимочкин, Э.Г.Манулиц (Воронеж)

При разработке различных энергетических систем и технологического оборудования возникает необходимость в проведении расчетов (гидравлических, тепловых и др.), связанных со спутным течением рабочих тел через группу параллельных каналов и последующим их смешением в ограниченном пространстве.

Общее аналитическое решение задачи по определению параметров струй (законов распределения скоростей в произвольных сечениях, угла расширения, длины начального участка и др.) пока не найдено, хотя для одиночной струи частные решения известны.

В практике проектных организаций используются экспериментальные зависимости, характеризующие закономерности течения струй, полученные различными исследователями и имеющие ограниченные области применения.

Проведенные нами исследования структур скоростей потоков, истекающих из системы параллельных каналов в общее ограниченное пространство, показали, что наилучшим образом универсальный профиль скоростей турбулентной струи описывается уравнением:

$$\bar{V}_i = 1 - K^{n \cdot K} \qquad (1),$$

где $\bar{V}_i = \dfrac{V_i}{V_{max}}$, $\quad n = n(Re)$, $\quad K = r_i \,/\, (r + b)$,

r - радиус потенциального ядра потока, b - ширина зоны смешения, V_i и r_i - текущие значения скорости и радиуса струи потока в рассматриваемом сечении; V_{max} - максимальное значение скорости в ядре потока, Re - число Рейнольдса.

Расход рабочего тела истекающей струи равен:

$$\dot{m} = \int_F V_i j dF \qquad (2),$$

где F - площадь струи, $\quad j = P \,/\, (RT)$,

P, T - статические давление и температура в камере смешения,

R - газовая постоянная рабочего тела.

В каждом конкретном случае, имея численные значения газового потока (или задаваясь ими) и используя уравнение (1), можно уравнение (2) представить в виде:

$$\dot{m} = A \cdot V_{max}, \qquad A = Const$$

Таким образом, проведя ограниченное количество измерений в ядре потока (V_{max}), определяется расход рабочего тела через каждый канал.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ С НЕПРЕРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ И ВНЕШНИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Ефремов А.А., Панасенко Е.А. (Тамбов)

Пусть R^n – пространство n-мерных вектор-столбцов с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\mathrm{comp}[R^n]$ – множество всех непустых, ограниченных, замкнутых подмножеств пространства R^n; $B[u,r]$ - замкнутый шар пространства R^n с центром в точке u и радиусом $r>0$; $B[u,0]\equiv\{u\}$. Пусть $V\subset R^n$. Обозначим $V^\epsilon\equiv\overline{\bigcup_{u\in V}B[u,\epsilon]}$, если $\epsilon>0$, и $V^0\equiv\overline{V}$; $C^n[a,b]$ – пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to R^n$ с нормой $\|x\|_C=\max\{|x(t)|:t\in[a,b]\}$; $L^1[a,b]$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $x:[a,b]\to R^1$ с нормой $\|x\|_L=\int\limits_a^b|x(s)|ds$.

Обозначим через $K([a,b]\times(0,\infty))$ – множество всех функций $\eta:[a,b]\times(0,\infty)\to(0,\infty)$, обладающих следующими свойствами: при каждом $\delta\in(0,\infty)$ функция $\eta(\cdot,\delta)$ измерима; для каждого $\delta\in(0,\infty)$ существует такая суммируемая функция $m_\delta:[a,b]\to[0,\infty)$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $\tau\in(0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,\tau)\le m_\delta(t)$; при почти всех $t\in[a,b]$ справедливо равенство $\lim\limits_{\delta\to0+0}\eta(t,\delta)=0$; для любого $\delta>0$ существует такое число $\tau(\delta)>0$, что при почти всех $t\in[a,b]$ справедлива оценка $\eta(t,\delta)\ge\tau(\delta)$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t)\in F(t,x(t)),\quad t\in[a,b],\tag{1}$$

где отображение $F:[a,b]\times R^n\to\mathrm{comp}[R^n]$ непрерывно по совокупности аргументов.

Под решением включения (1) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x:[a,b]\to R^n$, удовлетворяющую включению (1) при почти всех $t\in[a,b]$.

Рассмотрим также дифференциальное включение

$$\dot{x}(t)\in\mathrm{co}\,F(t,x(t)),\quad t\in[a,b],\tag{2}$$

где $\mathrm{co}(\cdot)$ – выпуклая оболочка множества.

Пусть $\eta\in K([a,b]\times(0,\infty))$. Дифференциальное включение

$$\dot{x}(t)\in F(t,x(t))^{\eta(t,\delta)},\quad t\in[a,b]\tag{3}$$

будем называть дифференциальным включением с внешними возмущениями.

Обозначим $H_{\eta(\delta)}(V)(H_{\mathrm{co}}(V))$ – множество всех решений включения (3) при заданном $\delta\in(0,\infty)$ (множество всех решений включения (2)), принадлежащих множеству $V\subset C^n[a,b]$.

ТЕОРЕМА. Пусть V – ограниченное, замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$. Тогда для любой функции $\eta(\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times(0,\infty))$ справедливо равенство

$$H_{\mathrm{co}}(V)=\bigcap_{\delta>0}\overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)},$$

где $\overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)}$ – замыкание множества $H_{\eta(\delta)}(V^\delta)$ в пространстве $C^n[a,b]$, V^δ – замкнутая δ-окрестность множества V в пространстве $C^n[a,b]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков А.И., Ефремов А.А., Панасенко Е.А. Асимптотическое представление множеств приближенных решений дифференциальных включений // Вестн. ТГУ, 1998. Т. 3. Вып. 4.

РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Жуковская Т.В. (Тамбов)

В настоящей работе рассматриваются операторы, родственные операторам Вольтерра, действующие в полных функциональных пространствах.

Пусть E - такая система множеств $e_\tau \subset [a,b]$, что $\forall \tau \in [0,b-a]$ $mes\, e_\tau = \tau$ и $\forall \gamma \quad \tau < \gamma \Rightarrow e_\tau \subset e_\gamma$. Рассмотрим некоторое банахово пространство $W_{[a,b]}$ вещественных измеримых на $[a,b]$ функций. Будем предполагать, что для любого множества $e_\tau \in E$, если все члены некоторой сходящейся последовательности $x_i \in W_{[a,b]}$, $x_i \to x$ отвечают условию $x_i(t) = 0$ при $t \in e_\tau$, то и предельная функция $x(t) = 0$ при $t \in e_\tau$. Обозначим через $W(e_\tau)$ пространство сужений функций из $W_{[a,b]}$ на множество e_τ. Норму в $W(e_\tau)$ зададим формулой $\|x_\tau\|_{W(e_\tau)} = \inf \|x\|_{W_{[a,b]}}$, где нижняя грань берется по всем функциям $x \in W_{[a,b]}$, являющимся продолжениями функции $x_\tau \in W(e_\tau)$. Пространство $W(e_\tau)$ является банаховым. Определим оператор $\Pi_{\gamma,\tau} : W(e_\gamma) \to W(e_\tau)$, $\gamma \geq \tau$ равенством $(\Pi_{\gamma,\tau} x_\gamma)(t) = x_\gamma(t)$ при $t \in e_\tau$. Пусть для каждого $x \in W_{[a,b]}$ функция $\|x_\tau\|_{W(e_\tau)} = \|\Pi_{b-a,\tau} x\|_{W(e_\tau)}$ аргумента τ непрерывна.

Оператор $A : W_{[a,b]} \to W_{[a,b]}$ назовем вольтерровым на системе E, если для любого $\tau \in [0,b-a]$ и всех $x, y \in W_{[a,b]}$ из равенства $\Pi_{b-a,\tau} x = \Pi_{b-a,\tau} y$ следует $\Pi_{b-a,\tau} Ax = \Pi_{b-a,\tau} Ay$. Пусть $P_{\tau,\gamma} : W(e_\tau) \to W(e_\gamma)$, $\gamma \geq \tau$, - оператор, продолжающий некоторым образом функцию $x_\tau \in W(e_\tau)$, $x_\tau : e_\tau \to R$ на множество e_γ. Обозначим $A_\tau = \Pi_{b-a,\tau} A P_{\tau,b-a}$, $A_\tau : W(e_\tau) \to W(e_\tau)$.

Теорема 1. *Если вольтерровый на системе E оператор $A : W_{[a,b]} \to W_{[a,b]}$ вполне непрерывен, то для любого $\tau \in [0,b-a]$ оператор $A_\tau : W(e_\tau) \to W(e_\tau)$ также вполне непрерывен.*

Рассмотрим уравнение

$$x = Ax \qquad (1)$$

с вольтерровым на системе E оператором $A : W_{[a,b]} \to W_{[a,b]}$. Локальным решением уравнения (1), определенным на e_τ, назовем функцию $z_\tau \in W(e_\tau)$, которая удовлетворяет уравнению $x_\tau = A_\tau x_\tau$. Локальное решение $z_\xi \in L_{p[a,\xi]}$ называется продолжением решения z_τ, если $z_\tau = \Pi_{\xi,\tau} z_\xi$, $\xi > \tau$. Функция $z_\beta : [a,\beta) \to R$ называется предельно продолженным решением уравнения (1), если при любом $\tau < \beta$ элемент $z_\tau \in L_{p[a,\tau]}$, $z_\tau = \Pi_{\beta,\tau} z_\beta$, является локальным решением уравнения (1), и либо $\beta = b$, либо $z_\beta \notin L_{p[a,\beta]}$.

Теорема 2. *Если вольтерровый на системе E оператор $A : W_{[a,b]} \to W_{[a,b]}$ вполне непрерывен, то уравнение (1) локально разрешимо, любое локальное решение является частью некоторого предельно продолженного решения.*

О ПРОБЛЕМЕ ВЫБОРА ПРОСТРАНСТВА ПРИ ИЗУЧЕНИИ УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Жуковский Е.С. (Тамбов)

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t)-p(t)x(t)-q(t)\dot{x}(h(t))=f(t), \qquad t\in[a,b], \qquad\qquad (1)$$
$$\dot{x}(\xi)=0, \quad \text{если} \quad \xi\notin[a,b],$$

Здесь непрерывная функция h может не удовлетворять условию «независания» [1], что не позволяет рассматривать уравнение (1) в пространствах, элементами которых являются классы эквивалентных измеримых функций [2]. Опишем пространство, в котором мы будем изучать уравнение (1).

Пусть T_0 множество точек, в которых функция $h(\cdot)-a$ меняет знак, $T_1=\bigcup\limits_{a_0\in T_0}\{t|h(\cdot)-a_0 \text{ меняет знак}, a_0\in T_0\},\dots,\ T_{i+1}=\bigcup\limits_{a_i\in T_i}\{t|h(\cdot)-a_i \text{ меняет знак}, a_i\in T_i\}$, $T=\bigcup\limits_i T_i$. Заметим, что множество T не более, чем счетно. Пусть это множество конечно, $|T|=n$. Обозначим через SP пространство кусочно постоянных функций $y_S:[a,b]\to R$, возможно терпящих разрывы в точках множества T и односторонне непрерывных в этих точках. Кроме того, если в точке $a_{i+1}\in T_{i+1}\subset T$ функция $h(\cdot)-a_i$, $a_i\in T_i$ меняет знак с «-» на «+», то y_S в точках a_{i+1}, a_i непрерывна с одинаковой стороны. Если же знак меняется с «+»на «-», то y_S в точках a_{i+1}, a_i непрерывна с разных сторон. Пространство SP изоморфно пространству R^n, его элементы y_S можно задать набором Y значений скачков в точках множества T. Обозначим через B пространство функций $y:[a,b]\to R$, представимых в виде $y=y_C+y_S$, где $y_S\in SP$, а функция y_C непрерывна. Норму элемента $y\in B$ зададим формулой $\|y\|_B=\|y_C\|_C+\|Y\|_{R^n}$. Рассмотрим пространство D таких непрерывных дифференцируемых функций $x:[a,b]\to R$, что $\dot{x}\in B$, $\|x\|_D=\|\dot{x}\|_B+|x(0)|$. Пространство D изоморфно $B\times R$.

Предположим, что $p,q,f\in B$. Тогда уравнение (1) можно записать в виде $Lx=f$ с линейным непрерывным оператором $L:D\to B$. В работе исследуется разрешимость задачи Коши и краевых задач для этого уравнения. На основании результатов [3] предлагается следующее представление оператора Грина $(Wf)(t)=\int\limits_0^t f_C(\xi)\,d_\xi w(t,\xi)+\chi(t)AF$. Здесь $f=f_C+f_S$, F - вектор-столбец значений скачков функции f_s, A - $n\times n$ матрица, $\chi(t)$ - вектор-строка с компонентами $(t-a_i)\chi_{[a_i,b]}(t)$, $\chi_E(\cdot)$ - характеристическая функция множества E, $w(t,\cdot)$ - функция ограниченной вариации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. -М.:Наука, 1991.-280 с.
2. Халмош П. Теория меры. -М.:ИЛ, 1953.-291 с.
3. Жуковский Е.С. К теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения.//Вестник ТГУ.-Тамбов, 1998.-Т.3. Вып.2.- С.177-179.

УДК 519.711.3

М.Г.Завгородний, В.Е.Столяров, О.А.Трибунских

К ВОПРОСУ О ДИАГНОСТИКЕ УТЕЧЕК В ГИДРОСИСТЕМАХ

Для диагностики утечек в гидравлических системах используют, как правило, дискретные модели с сосредоточенными параметрами в узлах системы. Такой подход позволяет определить подсистему (в отдельных случаях участок трубы между двумя узлами), в некоторой точке которой происходит утечка жидкости. Более детальный анализ провести без дополнительных измерений не удается. Однако в ряде технических задач проведение дополнительных измер ений требует больших затрат.

В данном докладе обсуждается вопрос о диагностике утечек на основе непрерывной модели. Опишем гидравлическую систему в виде геометрического графа (топологической сети), где наряду с вершинами графа в его состав включаются и ребра (отрезки), их соединяющие. Такая модель в точности повторяет топологию исходной гидравлической системы. Распределение напора H и расхода Q жидкости зададим дифференциальными уравнениями движения и неразрывности:

$$gS\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\lambda}{2DS}Q|Q|=0, \qquad \frac{g}{v^2}\left[\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{Q}{S}\left(\frac{\partial H}{\partial x}+\sin\alpha\right)\right]+\frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial x}=0,$$

определенными на ребрах графа. Здесь S, D - площадь поперечного сечения и диаметр трубы, λ -коэффициент Дарси-Вейсбаха и v - известная постоянная. В каждой внутренней вершине a (к которой примыкает два или более ребер) заданы условия согласования, следующие из закона Кирхгофа:

$$H_1(a)+H_2(a)+\ldots+H_d(a), \qquad \sum_{i=1}^{d}Q_i(a)=0,$$

где d - число ребер (труб) примыкающих к вершине (узлу) a. В граничных вершинах b_i графа предполагаются известными величины расхода q_i и напора h_i:

$$Q(b_i)=q_i, \qquad H(b_i)=h_i.$$

Полученная краевая задача является переопределенной. В гидравлической системе допускается k стоков с неизвестными координатами и расходами. Число стоков k предполагается известным. Таким образом, имеется $2k$ неизвестных параметров. Для определения указанных параметров подбирается необходимое число граничных условий. Краевая задача доопределяется заданием условий согласования в точках стока. Находится решение краевой задачи. Составляется система из $2k$ алгебраических уравнений. Находятся неизвестные координаты и расходы.

УДК 517.9

ПОСТРОЕНИЕ УСРЕДНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕХКОНТУРНОГО АВТОГЕНЕРАТОРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА MAPLE

Задорожний В.Г., Попов А.В. (Воронеж)

Изучается автогенератор электрических колебаний на трех связанных контурах Ван-дер-Поля. Математическая модель (полученная В.И.Непринцевым) представляет собой систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений с кубической нелинейностью. Мощным средством изучения возможных колебаний является метод усреднения Крылова - Боголюбова [1]. Основная трудность при его использовании - огромные аналитические преобразования. Для выполнения этих преобразований на разных этапах используется пакет компьютерных программ Maple. Проведя с помощью расчетов на компьютере символьные преобразования удалось получить усредненную систему уравнений из шести автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Три уравнения описывают изменение амплитуд, а три других уравнения описывают изменение угловых переменных. Система уравнений для амплитуд имеет в трехмерном фазовом пространстве восемь изолированных особых точек. Получены формулы для нахождения координат особых точек. Одна особая точка нулевая, три особые точки расположены на осях координат, три точки имеют по одной нулевой координате и одна точка имеет все отличные от нуля координаты.

Доказано, что нулевая особая точка всегда является неустойчивой. Особым точкам на осях координат соответствуют одночастотные колебания. Особые точки с одной нулевой координатой соответствуют двухчастотным колебаниям. Особой точке с ненулевыми координатами соответствуют трехчастотные колебания.

Литература. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Наука. М., 1974. — 503с.

СПЕКТР НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СЛОЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Задорожный А.И., Задорожная Н.С. (Ростов-на-Дону)

В [1] рассмотрено влияние молекулярной вязкости на собственные длинноволновые колебания жидкости бесконечной проводимости в однородном магнитном поле. Настоящее сообщение связано с изучением воздействия другого диссипативного фактора - конечности электрической проводимости σ_e на спектр свободных волн произвольной длины в слое идеальной жидкости постоянной глубины.

Сформулирована плоская нелинейная по спектральному параметру $s=\alpha+i\beta$ граничная задача ($z\in[-1;0]$, $z=-1$ - дно, $z=0$ - свободная поверхность) :

$$\begin{cases} sU=-ikQ+ikAX, & sW=-Q'+ikAZ, & ikU(z)+W(z)=0, \\ sX=-W'+\dfrac{1}{Rm}(X''-k^2X), & sZ=ikW+\dfrac{1}{Rm}(Z''-k^2Z), & ikX(z)+Z(z)=0, \\ W(-1)=0,\ \ Z''(-1)=Z(-1)=0, & Q(0)=\dfrac{W(0)}{s}+AX(0), & Z'(0)+kZ(0)=0, \end{cases} \qquad (1)$$

где U,W - амплитуды компонент скорости, Q - давление, X,Z - проекции вектора напряженности возмущенного магнитного поля, k - волновое число, Rm - магнитное число Рейнольдса, A - число Альфвена.

Краевой задаче (1) отвечает более сложный, чем квадратичный [2], операторный пучок, содержащий $\bar{s}$ - комплексно-сопряженное. Из уравнения баланса энергии

$$s\left(\|U\|^2+\|W\|^2\right)+\bar{s}A\cdot\left(\|X\|^2+\|Z\|^2+\frac{|Z(0)|^2}{k}\right)+\frac{|W(0)|^2}{\bar{s}}+\frac{A}{Rm}\left\{\|X'\|^2+\|Z'\|^2+k^2\left(\|X\|^2+\|Z\|^2\right)\right\}=0$$

следует его диссипативность: $\mathrm{Re}(s)<0$. В частности, при $\mathrm{Im}(s)\neq 0$

$$\mathrm{Re}(s)=-\frac{A}{Rm}\cdot\frac{\|X'\|^2+\|Z'\|^2+k^2(\|X\|^2+\|Z\|^2)}{\|U\|^2+\|W\|^2},$$

то есть пропорциональность декремента затухания колебаний функционалу диссипации механической энергии в джоулево тепло.

Получено дисперсионное уравнение для собственных чисел

$$\frac{th(\chi)}{\chi}+\frac{s^2\left\{s^2+kth(k)+Ak^2[1+th(k)]\right\}}{ks^4+k^2th(k)s^2+Ak^4[1+th(k)]}=0,\ \text{где}\ \chi=\sqrt{k^2-Rm(s+\frac{Ak}{s})},\ \text{причем}\quad \mathrm{Re}(\chi)>0.$$

Численное его решение и построение различных асимптотик дало полную картину спектра. Оказалось, что операторный пучок никогда не является сильно демпфированным, то есть при любой магнитной вязкости существуют колебательные моды ($\mathrm{Im}(s)\neq 0$). Имеется кратный комплексный корень, разделяющий в определенном смысле две разновидности поверхностных волн: высоко и низкочастотных ($s\to 0$ при $Rm\to\infty$). Выделен и класс внутренних (магнито)вязких волн альфвеновского типа.

Литература

1. Задорожный А.И. Спектральные свойства длинных МГД-волн в вязкой жидкости. //Теория функций. Дифференциальные уравнения в математическом моделировании. Воронеж: ВГУ, 1993. С.58.
2. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989. 416 с.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Замышляева А.А. (Челябинск, ЧелГУ)

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ банаховы пространства, операторы $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $B_0, B_1, ..., B_{n-1} \in Cl(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Рассматривается задача Коши

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \dots, u^{(n-1)}(0) = u_{n-1} \tag{1}$$

для операторного дифференциального уравнения соболевского типа

$$Au^{(n)} = B_{n-1}u^{(n-1)} + B_{n-2}u^{(n-2)} + ...B_1u' + B_0u, \ker A \neq \{0\}. \tag{2}$$

Как хорошо известно, в этом случае задача (1),(2) разрешима не при всех начальных значениях $u_s, s = 0, 1, \dots, n-1$. Исследование фазовых пространств для такого сорта уравнений начато в [1],[2] при условии полиномиальной A-ограниченности операторного пучка $(B_{n-1}, ..., B_0)$. В [3] представлены результаты о разрешимости неполного уравнения (2) при сильной (A, p)-секториальности оператора B_0 и условии

$$\frac{2\pi}{\theta}k - 1 \leq n \leq \frac{2\pi}{\theta}k + 1, \tag{3}$$

а также построены косинус и синус оператор-функции такого уравнения при уславии (A, σ)-ограниченности оператора B_0. В докладе содержатся новые результаты о разрешимости полного уравнения (2) при $n = 2$ и существовании семейства M, N оператор-функций данного уравнения.

Работа поддержана РФФИ (грант N 97-01-00444), грантом Минобразования РФ и бюджетным финансированием по теме 1.10.96Ф.

Литература

1.Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов// Успехи матем. наук. 1994. Т.49, N4. С.47-74.

2.Свиридюк Г.А., Вакарина О.В. Задача Коши для линейных уравнений типа Соболева высокого порядка// Дифференц.уравн. 1997. Т.33, N10. С.1410-1418.

3.Замышляева А.А. Неполные уравнения соболевского типа высокого порядка// Рус.деп., ВИНИТИ, 1998, N 2001-98

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Зарубин А.Н. (Орел)

При исследовании начально-краевых задач для уравнений смешанного типа с запаздывающим аргументом возникает потребность обращения интегрального преобразования

$$(P\varphi)(x) = \int\limits_0^{+\infty} P(x,t)\,\varphi(t)\,dt = g(x)\,,\ x > 0\,, \tag{1}$$

когда ядро

$$P(x,t) = P^{\pm}(x,t) = \left\{P_k^{\pm}(x,t)\,,\ k\tau \le x \le (k+1)\tau\ (k = 0,\,1,\,2,\,...)\right\}\,, \tag{2}$$

а

$$P_k^{\pm}(x,t) = \sum_{m=0}^{k} \frac{\sqrt{\pi}t\,(x-m\tau)^{m+1/2}}{m!\,(2t)^{m+1/2}}\,J_{m\pm1/2}\Big(t\,(x-m\tau)\Big),$$

где $0 < \tau \equiv \mathrm{const}$, $J_\nu(s)$ – функция Бесселя первого рода.

Пусть

$$(P_0^{\pm}\varphi)(x) = \int\limits_0^{+\infty} P_0^{\pm}(x,t)\,\varphi(t)\,dt = \delta^{\pm}(x)\,,\ x > 0\,, \tag{3}$$

а $\delta^{\pm}(x)$ – решение интегрального уравнения

$$\delta^{\pm}(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m (x-m\tau)^{(1\mp1)/2} \int\limits_0^{x-m\tau} \eta^{(1\pm1)/2}\left((x-m\tau)^2-\eta^2\right)^{m-1}\delta^{\pm}(\eta)\,d\eta =$$

$$= g(x)\,,\ k\tau \le x \le (k+1)\tau\ (k = 0,\,1,\,2,\,...)\,,$$

где

$$\delta^{\pm}(x) = \left\{\,\delta_k^{\pm}(x)\,,\ k\tau \le x \le (k+1)\tau\ (k = 0,\,1,\,2,\,...)\right\}\,,$$

$\gamma_m = \left(m!\,\Gamma(m)2^{2m-1}\right)^{-1}$.

Теорема. *Если $\varphi(x)$ непрерывна на $(0,+\infty)$ всюду (кроме, быть может, конечного числа точек), $\int\limits_0^{+\infty}|\varphi(x)|dx < +\infty$, то преобразование $g(x)$ (1) с ядрами (2) существует и является ограниченной непрерывной на $[0,+\infty)$ функцией, исчезающей на бесконечности. Кроме того, если $\varphi(x)$ кусочно-дифференцируема на $(0,+\infty)$, то справедлива классическая формула обращения, двойственная с (3).*

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Зарубин Е.А. (Орел)

Начальная задача для скалярного уравнения

$$\left.\begin{aligned} y''(x) + \lambda^2 y(x) - y(x-\tau) = 0\,,\ 0 \le x \le k\tau\,, \\ y(x) \equiv 0\,,\ x \in [-\tau, 0]\,;\ y'(0) = 1\ \ (k = 1,\,2,\,\ldots)\,, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

эквивалентна краевой задаче для системы

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{z}''(x) = \mathbf{A}\,\mathbf{z}(x)\,,\ (k-1)\tau \le x \le k\tau\,, \\ \mathbf{z}((k-1)\tau) = \mathbf{B}\,\mathbf{z}(k\tau)\,,\ \mathbf{z}'((k-1)\tau) = \mathbf{B}\,\mathbf{z}'(k\tau) + \mathbf{C}\,, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

если на отрезке $(k-1)\tau \le x \le k\tau$

$$\mathbf{z}(x) = \Big(y(x)\,,\, y(x-\tau)\,,\,\ldots,\, y(x-(k-1)\tau)\Big)^T,$$

матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – жордановы блоки порядка k, собственные значения которых равны соответственно $\lambda_A = -\lambda^2$, $\lambda_B = 0$, а $\mathbf{C} = (0\,,0\,,\ldots,0\,,1)^T$, $0 < \tau \equiv \mathrm{const}$.

Методом факторизации проведено построение решения задачи (2), которое в обозначениях задачи (1) имеет вид

$$y(x) = \Big\{y_n(x)\,,\, n\tau \le x \le (n+1)\tau\ \ (n = 0,\,1,\,2,\,\ldots,\,k-1)\Big\},$$

где

$$y_n(x) = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda x + \frac{1}{\lambda}\sum_{m=1}^{n}\gamma_m \int\limits_0^{x-m\tau} \eta\left((x-m\tau)^2 - \eta^2\right)^{m-1} \sin\lambda\eta\, d\eta\,,$$

причем при $n = 0$ слагаемые со знаком суммирования опускаются, а $\gamma_m = \left(m\,!\,\Gamma(m)\,2^{2m-1}\right)^{-1}$.

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЯДЕР ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С ИНТЕГРАЛАМИ РАЗНЫХ КРАТНОСТЕЙ

Засядко О. В. (Краснодар)

Рассматривается оператор

$$\tilde{Q}u=\int_0^x Q_1(x,y,s)u(s,y)ds+\int_0^y Q_2(x,y,t)u(x,t)dt+\int_0^x\int_0^y Q_3(x,y,s,t)u(s,t)dtds,$$ где

Q_1, Q_2, Q_3 определены, непрерывны и неотрицательны при $0\le s\le x\le t\le y<\infty$.

<u>Определение 1.</u> Оператор $\tilde{Q}$ называется устойчивым, если тривиальное решение уравнения $u-\tilde{Q}u=f$ ограничено при f ограниченном.

<u>Определение 2.</u> Ядра $Q_{1,k}(x,y,s)=\int_s^x Q_1(x,y,\tau)Q_{1,k-1}(\tau,y,s)d\tau$,

$$Q_{2,k}(x,y,t)=\int_t^y Q_2(x,y,\theta)Q_{2,k-1}(x,\theta,t)d\theta,$$

$$Q_{3,k}(x,y,s,t)=\int_0^x\int_0^y\Big\{Q_3(x,y,\tau,\theta)Q_{3,k-1}(\tau,\theta,s,t)+Q_1(x,y,s)Q_{2,k-1}(s,y,t)+$$

$$+Q_{1,k-1}(x,t,s)Q_2(x,y,t)+\int_s^x\big(Q_1(x,y,\tau)Q_{3,k-1}(\tau,y,s,t)+Q_{1,k-1}(\tau,t,s)Q_3(x,y,\tau,t)\big)d\tau+$$

$$+\int_t^y\big(Q_2(x,y,\theta)Q_{3,k-1}(x,\theta,s,t)+Q_{2,k-1}(s,\theta,t)Q_3(x,y,s,\theta)\big)d\theta\Big\}dtds,$$

называются k-тыми итерированными ядрами ядер Q_1, Q_2, Q_3 соответственно.

<u>Теорема.</u>

1) Для устойчивости Q_1, Q_2, Q_3 на $[0,\infty)\times[0,\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы $\sup\limits_{\substack{x\ge0\\y\ge0}}\left(\int_0^x|Q_1(x,y,s)|ds+\int_0^y|Q_2(x,y,t)|dt+\int_0^x\int_0^y|Q_3(x,y,s,t)|dtds\right)<\infty$, и

при некотором k $|A_k|<1$, где

$$A_k=\lim_{\substack{x_0\to\infty\\y_0\to\infty}}\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\sup\left(\int_{x_0}^x Q_{1,k}(x,y,s)ds+\int_{y_0}^y Q_{2,k}(x,y,t)dt+\int_{x_0}^x\int_{y_0}^y Q_{3,k}(x,y,s,t)dtds\right).$$

2) Если Q_1, Q_2, Q_3 устойчивы на $[0,\infty)\times[0,\infty)$, то $|B_k|<1$, где

$$B_k=\lim_{\substack{x_0\to\infty\\y_0\to\infty}}\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\inf\left(\int_{x_0}^x Q_{1,k}(x,y,s)ds+\int_{y_0}^y Q_{2,k}(x,y,t)dt+\int_{x_0}^x\int_{y_0}^y Q_{3,k}(x,y,s,t)dtds\right).$$

КОНУСНАЯ РАВНОВЕСНОСТЬ В БЕСКОАЛИЦИОННОЙ ИГРЕ

Захаров А. В. (Москва)

В [1] конусная оптимальность применена к многокритериальным задачам при неопределеноости, здесь – к бескоалиционным играм с векторной функцией выигрыша.

Рассматривается бескоалиционная игра двух лиц с векторными функциями выигрыша

$$\Gamma = \langle \{1,2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{f_i(x)\}_{i=1,2}, \{K_i\}_{i=1,2} \rangle,$$

где стратегия i-го игрока $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i = 1,2)$, ситуация $x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2$; m_i – вектор-функция $f_i(x)$ является функцией выигрыша игрока i; K_i – телесный, замкнутый и острый конус в $\mathbb{R}^{m_i}$ $(i = 1,2)$; для двух векторов $f_i^{(r)}$ $(r = 1,2)$:

$$f_i^{(1)} \not<_{K_i} f_i^{(2)} \Longleftrightarrow f_i^{(2)} \notin f_i^{(1)} + K_i \;\; (i = 1,2).$$

Определение. *Ситуацию $x^e = (x_1^e, x_2^e) \in X$ назовём равновесной по $<_{K_i}$ в игре Γ, если*

$$f_1(x^e) \not<_{K_1} f_1(x_1, x_2^e), \; \forall x_1 \in X_1;$$

$$f_2(x^e) \not<_{K_2} f_2(x_1^e, x_2), \; \forall x_2 \in X_2.$$

Введённое понятие равновесности по $<_{K_i}$ "достаточно полное". Именно, в случае скалярных функций выигрыша $(m_1 = m_2 = 1)$ и $K_i = \{f_i \in \mathbb{R} \mid f_i \geq 0\}$ $(i = 1,2)$ равновесная по $<_{K_i}$ ситуация является равновесной по Нэшу [2]; при $X_2 = \varnothing$, $f_2(x) = 0$ и $K_1 = \{f_1 \in \mathbb{R}^{m_1} \mid f_1 \geq 0_{m_1}\}$ равновесная по $<_{K_i}$ ситуация x^e совпадает с максимальным по Парето (эффективным) [3] решением в m_1-критериальной задаче $\langle X_1, f_1(x_1) \rangle$, а при $K_1 = \{f_1 \in \mathbb{R}^{m_1} \mid f_1 \leq 0_{m_1}\}$ ситуация x^e совпадает с минимальным по Парето решением в той же задаче. Далее штрих сверху означает операцию транспонирования.

Теорема. *Пусть в игре Γ*

1^0) *множества X_i – выпуклые компакты и компоненты функции выигрыша $f_i(x)$ непрерывны на X;*

2^0) *существуют постоянные ненулевые m_i-вектора $\alpha_i \in K_i$ такие, что $\alpha_1' f_1(x_1, x_2)$ вогнута по x_1 при каждом $x_2 \in X_2$ и $\alpha_2' f_2(x_1, x_2)$ вогнута по x_2 при каждом $x_1 \in X_1$.*

Тогда в игре Γ существует равновесная по $<_{K_i}$ ситуация.

Замечание. Для практического построения равновесной по $<_{K_i}$ ситуации $x^e \in X$ в игре Γ следует:

а) выбрать постоянные вектора $\alpha_i \in K_i$ $(i = 1,2)$;

б) найти ситуацию $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ из условий

$$\max_{x_1 \in X_1} \alpha_1' f_1(x_1, x_2^e) = \alpha_1' f_1(x^e); \quad \max_{x_2 \in X_2} \alpha_2' f_2(x_1^e, x_2) = \alpha_2' f_2(x^e).$$

Тогда x^e будет ситуацией равновесия по $<_{K_i}$ в игре Γ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №98-01-00613).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Захаров А.В., Жуковский В.И.* Многокритериальные задачи при неопределённости с конусом доминирования // Управление сложными системами. Межвуз. сб. науч. тр. М.: РосЗИТЛП. 1999. С.58-61.

2. *Nash J.F.* Non-cooperative games // Annuals of Math. 1951. №2. P.286-295.

3. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА С ЧЕТТЕРИНГ-УПРАВЛЕНИЯМИ

М.И.Зеликин,
Л.Ф.Зеликина [1]
(Москва)

Дается описание фазового портрета оптимального синтеза в зависимости от порядка особых траекторий как для случая одномерного, так и для случая многомерного управления в инволютивном и неинволютивном случаях. Рассмотрен новый класс нелинейных задач с многомерным управлением и с блочной структурой, каждый блок которых задается неинволютивной системой с одномерным управлением, в то время как связь между блоками задается инволютивными соотношениями [1]. Применение принципа максимума Понтрягина позволяет свести задачу оптимального управления к решению краевой задачи для гамильтоновой системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и касательным скачком. Траекториями с учащающимися переключениями (chattering-траекториями) называются такие траектории, которые имеют бесконечное число переключений на конечном интервале времени; переключения накапливаются к точке сопряжения с особыми траекториями. В случае многомерного управления особые экстремали образуют стратифицированное многообразие [2]. В окрестности этого многообразия оптимальный синтез имеет структуру chattering-расслоения с кусочно-гладкими слоями, заполняемыми оптимальными траекториями с учащающимися переключениями, над базой, состоящей из особых оптимальных траекторий. Каждый из стратов базы в свою очередь расслаивается на chattering-слои над стратом меньшей размерности. Построенная теория включает технику разрешения особенностей отображения Пуанкаре поверхности переключения на себя, общие методы построения расслоений со слоями, заполняемыми траекториями с бесконечным числом переключений, и лагранжевых подрасслоений таких расслоений, а также конструктивные достаточные условия оптимальности chattering-синтеза. С помощью разработанных методов решен целый ряд многомерных нелинейных оптимизационных задач прикладного содержания, таких как: задачи космической навигации, задачи робототехники, математической экономики, электротехники и др. [3].

Литература

[1] Зеликин М.И., Зеликина Л.Ф. Структура оптимального синтеза в окрестности особых многообразий для аффинных по управлению задач. // Мат.сб. 189 (1998), с.33-52.

[2] Зеликина Л.Ф. Многомерный синтез и теоремы о магистрали в задачах оптимального управления. // В кн. Вероятностные проблемы управления в экономике. Москва, 1977, с. 33-114.

[3] Zelikin M., Borisov V. Theory of Chattering Control with Applications to Cosmonautics, Robotics, Economics, and Engineering.// Birkhauser, Boston,1994, p. 233.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты # 99-01-01224 и # 96-15-96072.

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зимина Н. А. (г. Краснодар)

Рассматривается интегральное уравнение

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(t,s,x(s))ds, \tag{1}$$

где $K(t,s,\xi)-n$-мерная неотрицательная вектор-функция, определенная при $t,s\in R^1,\xi\in R_+^n$ и удовлетворяющая условию $K(t+\omega,s+\omega,\xi)=K(t,s,\xi)$ при некотором $\omega>0$.

Найдены условия на функцию $K(t,s,\xi)$, гарантирующие существование у уравнения (1) по крайней мере одного непрерывного положительного ω-периодического решения. Если при этом функция $K(t,s,\xi)$ монотонно возрастает по ξ и существует такое $\alpha\in(0;1)$, что $K(t,s,\theta\xi)\geq\theta^{\alpha}K(t,s,\xi)$ для всех $\theta\in(0;1)$, то уравнение (1) будет иметь единственное ω-периодическое решение. Доказательство соответствующих утверждений основано на применении принципа Шаудера и метода монотонных операторов.

При помощи теории вращения векторных полей [1] исследуется случай существования у уравнения (1) нескольких, по крайней мере двух ω-периодических решений.

Литература

1. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. – М., 1975.

КОМБИНИРОВАННОЕ РАВНОВЕСИЕ В БЕСКОАЛИЦИОННОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ИГРЕ

Золотарев В.В., Жуковский В.И. (Москва)

Формализуется новое понятие решения бескоалиционной игры 4-х лиц, в которой два игрока следуют концепции равновесности по Нэшу (I), а другие два – равновесию угроз и контругроз (2).

Рассматривается бескоалиционная игра 4-х лиц

$$\langle \{1,2,3,4\}, \{\mathbb{R}^{n_i}\}_{i=1,2,3,4}, \{f_i(x)\}_{i=1,2,3,4} \rangle \qquad /I/$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, ситуации (набор стратегий) $x=(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^n$ $(n=\sum_{i=1}^{4} n_i)$, на множестве $\mathbb{R}^n$ определена функция выигрыша i-го игрока $f_i(x)$. Цель каждого игрока – выбор и использование такой своей стратегии, чтобы стал возможно большим его выигрыш.

Пусть $f_i(x)=\sum_{j=1}^{4} x_j' \mathcal{D}_{ij} x_j + 2\sum_{j=1}^{4} d_{ij}' x_j$, где $\mathcal{D}_{ij}$ – постоянная симметричная $n_j \times n_j$-матрица, d_{ij} – постоянный n_j-вектор, штрих сверху означает операцию транспонирования.

<u>Определение</u> Ситуацию $x^S=(x_1^e,x_2^e,x_3^S,x_4^S) \in \mathbb{R}^n$ назовем VS-равновесной в игре /I/, если:

I. набор стратегий $(x_1^e,x_2^e) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ является ситуацией равновесия по Нэшу (I) во вспомогательной бескоалиционной игре 2-х лиц

$$\langle \{1,2\}, \{\mathbb{R}^{n_i}\}_{i=1,2}, \{f_i(x_1,x_2,x_3^S,x_4^S)\}_{i=1,2} \rangle ;$$

2. набор стратегий $(x_3^S,x_4^S) \in \mathbb{R}^{n_3} \times \mathbb{R}^{n_4}$ является S-равновесием угроз и контругроз (2) во вспомогательной игре

$$\langle \{3,4\}, \{\mathbb{R}^{n_i}\}_{i=3,4}, \{f_i(x_1^e,x_2^e,x_3,x_4)\}_{i=3,4} \rangle .$$

Далее $\mathcal{D}<0\,(>)$ означает, что квадратичная форма $z'\mathcal{D}z$ определенно отрицательна (положительна).

<u>Утверждение</u> Пусть $\mathcal{D}_{11}<0, \mathcal{D}_{22}<0, \mathcal{D}_{33}>0, \mathcal{D}_{44}>0$ и существуют неотрицательные постоянные числа α_3 и α_4 такие, что $\alpha_3+\alpha_4>0$ и $\sum_{j=3}^{4} \alpha_j \mathcal{D}_{ji} < 0$ $(i=3,4)$. Тогда VS-равновесие игры /I/ имеет вид

$$x_1^e=-\mathcal{D}_{11}^{-1} d_{11},\; x_2^e=-\mathcal{D}_{22}^{-1} d_{22},\; x_3^S=-\Big[\sum_{j=3}^{4}\alpha_j \mathcal{D}_{j3}\Big]^{-1}\Big(\sum_{j=3}^{4}\alpha_j d_{j3}\Big),\; x_4^S=-\Big[\sum_{j=3}^{4}\alpha_j \mathcal{D}_{j4}\Big]^{-1}\Big(\sum_{j=3}^{4}\alpha_j d_{j4}\Big).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 98-01-00613).

Литература.

(I) J.E. Nash. Equilibrium Points in N-Person Games // Proc. Nat. Acad. Sci. 1950. V.36. №1. P.48-49.

(2) В.И. Жуковский. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. М.: МНИИПУ. 1997.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА S^1-ЭКВИВАРИАНТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

И.Ю.Золотарев (Воронеж)

Рассмотрим группу $G = S^1$ и пространство $W = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, на котором S^1 действует ортогональными преобразованиями тривиально по второй компоненте. Пусть Ω — открытое инвариантное ограниченное подмножество в W и $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное S^1-отображение с условием $f(x) \neq 0$, $x \in \partial\Omega$. Обозначим $O(S^1) = \{\mathbb{Z}_k, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где $\mathbb{Z}_\infty = S^1\}$ — систему подгрупп группы S^1. Для $H = \mathbb{Z}_k$ обозначим $U_k = \Omega_H = \{x \in \Omega : G_x = \mathbb{Z}_k = H\}$, где G_x — стабилизатор точки x. Можно рассматривать U_k-допустимое S^1-отображение $f_k(x) = f\,|_{\bar{U}_k}$. Пусть $0 < \eta < \frac{1}{2} \inf\limits_{x \in \partial\Omega} \|f(x)\|$; f_k аппроксимируется C^1-гладким S^1-отображением. Тогда существует [2] U_k-допустимое C^1-гладкое S^1-отображение $\widetilde{f}_k$, для которого 0 — регулярное значение и

$$\sup_{x \in \bar{U}_k} \|f(x) - \widetilde{f}_k(x)\| < \eta.$$

Так как $\forall x \in U_k \quad G_x = \mathbb{Z}_k$, то действие группы $G = S^1$ на U_k индуцирует свободное действие на U_k группы $S^1/\mathbb{Z}_k \approx S^1$, относительно которого отображение $\widetilde{f}_k : \bar{U}_k \subset Fix(\mathbb{Z}_k, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \to Fix(\mathbb{Z}_k, \mathbb{R}^m)$ S^1-эквивариантно; здесь $Fix(\mathbb{Z}_k, \mathbb{R}^m) = V^l$ — линейное пространство размерности $l(k)$ (зависит от k) [3]. Зафиксируем в V^l базис $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_l\}$, задающий в $V^l \subset \mathbb{R}^m$ ориентацию и ортонормальный относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $\mathbb{R}^m$. Тогда группа $G = S^1 = S^1/\mathbb{Z}^k$ будет действовать ортогонально в V^l относительно того же самого скалярного произведения.

Итак, можно считать, что имеется S^1-отображение $\widetilde{f}_k : \bar{U}_k \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, где S^1 действует ортогонально на $\mathbb{R}^l$ и на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n$ (тривиально по второй компоненте $\mathbb{R}^n$) и свободно на $\bar{U}_k$. Следуя работе [3], рассмотрим соответствие $\left[\widetilde{f}_k, \{\bar{e}_i\}_{i=1}^l\right] \longrightarrow \left[M_k^n, \tau^{l(k)}\right]_{S^1}$, где M_k^n — замкнутое, главное G-многообразие, а $\tau^{l(k)} = \{\bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_l\}$ — S^1-нормальное оснащение на M_k^n.

Заметим, что класс бордантности G-оснащенного G-многообразия $\left[M_k^n \tau^{l(k)}\right]_{S^1}$ по определению равен $S^1 - Deg(\widetilde{f}_k, \bar{U}_k)$.

Определение 1. *Назовем S^1-степенью $S^1 - Deg(f, \bar{\Omega})$ непрерывного S^1-отображения f на области $\bar{\Omega}$ множество $\left\{S^1 - Deg(\widetilde{f}_k, \bar{U}_k)\right\}_{k=1}^{\infty}$.*

Теорема. *Пусть $f : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ и $g : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — два допустимых S^1-отображения и $h(x,t)$ — допустимая S^1-гомотопия между ними, тогда $S^1 - Deg(f, \Omega) = S^1 - Deg(g, \Omega)$.*

1. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. - М.: Наука, 1980. - 440с.

2. Кравцевич В., Хуасинг С. Аналитическое определение эквивариантной степени // Известия ВУЗов. Математика, 1996. - N.6. - С.37-54.

3. Борисович Ю.Г., Золотарев И.Ю. К обобщенной теории степени эквивариантных отображений // Труды математического факультета ВГУ, 1998. - N.3. - С.4-9.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА РАЗРУШЕНИЯ МИКРОНЕОДНОРОДНОГО КОМПОЗИТА

Иванищева О.И. , Строков Е.А. (Воронеж)

В работе исследуется влияние разброса упругих и прочностных характеристик микроскопически неоднородного материала ,а также его внутренней геометрии на кривые деформирования.

Рассмотрение проводится с использованием эффективных упругих модулей , полученных в [1]. Последние зависят от структурной характеристики матерала , а также от корреляционных моментов второго и третьего порядков и получены в предположении статистической изотропии случайных полей , описывающих модули сдвига и объемного сжатия материала и их некоррелированности.

При использовании подхода, предложенного в[2], считается , что процесс разрушения микрообъемов тела , находящихся с сложном напряженно-деформированном состоянии, сопровождается накоплением случайно расположенных пор и, следовательно, изменением эффективных характеристик. Предполагается ,что прочностные характеристики микрообъемов являются случайными величинами с заданными законами распределения.

Для частных видов нагружения исследованы кривые зависимостей между математическими ожиданиями напряжений и деформаций ,для предельного значения интенсивностей средних касательных напряжений , подчиняющихся степенному и β-распределению.

Проведен анализ влияния структурной характеристики , разброса упругих параметров , распределения прочностных свойств материала на его макроскопические деформативные свойства при использовании метода последовательных приближений [2].Рассмотрение проведено за рамками корреляционного приближения с учетом моментов третьего порядка случайных полей , описывающих упругие свойства материала.

Литература.

1.Дудукаленко В.В., Иванищева О.И., Легеня Б.И. О влиянии структуры композитного материала на его упругие свойства// ПМТФ.-1973,№2.-С.153-159.

2.Хорошун Л.П., Шикула Е.Н. Влияние разброса прочности компонентов на деформирование зернистого композита при микроразрушениях.//Прикладная механика. – 1997. – 33,№8. – С. 39-45.

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА СОБОЛЕВА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Иванова М.В. (Челябинск)

Обозначим через Q область в пространстве R^{n+1}
$(x,t) = (x_1, x_2, ..., x_n, t)$ - точка этого пространства.
Пусть $\Omega_\tau = Q \cap t = \tau$.
$Q_T = Q \cap [0,T]$
Пусть Ω_0 не пуста и область Q_T "расширяется". т.е.:

$$\forall \quad t_1 \, , \, t_2, \quad 0 \le \ t_1 \ \le \ t_2 \ \le \ T$$

$$\Omega_{t_1} \subset \Omega_{t_2}$$

В криволинейном цилиндре Q_T рассмотрим краевую задачу для псевдопараболического уравнения :

$$\operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad}u_t(x,t)) - c(x)u_t(x,t) = b(x)u(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

$$u(x,o) = \varphi(x) \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u_t}{\partial n}\right|_\Gamma = 0 \tag{3}$$

Где Γ боковая поверхность цилиндра Q_T . n-внешняя нормаль к Γ
Обобщенным решением задачи (1)-(3) будем считать функцию $u(x,t) \in W_2^{0,1}(Q_T)$ что ее $u_t(x,t) \in W_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству :

$$-\int_{Q_T} k(x)\nabla u_t(x,t)\nabla v(x,t)dxdt - \int_{Q_T} c(x)v(x,t)u_t(x,t)dxdt =$$

$$\int_{Q_T} b(x)v(x,t)u(x,t)dx\,dt + \int\limits_{Q_T} f(x,t)v(x,t)dx\,dt$$

$$\forall v(x,t) \in W_2^{1,0}(Q_T)$$

Были доказаны существование и единственность обобщенного решения.
Ранее были доказаны существование и единственность обощенного решения начально-краевой задачи для уравнения (1) и для вырождающегося уравнения в сужающейся области.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ЭТАЛОННЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Игропуло В.С., Самонов В.Е. (Ставрополь)

Как известно [1], уравнения Навье-Стокса не имеют точного аналитического решения. В ряде работ рассматривается их численное решение. Однако, большой интерес представляет получение аналитического выражения, являющегося приближенным решением уравнения, что возможно благодаря использованию специальных методов. Одним из них является метод эталонных уравнений [2], позволяющий выразить искомое приближенное решение через решение другого уравнения, получившего название эталонного (или модельного).

Предлагается обобщение метода эталонных уравнений для решения трехмерных задач и применение его для решения уравнения Навье-Стокса. Пусть уравнение, решение которого требуется найти, имеет вид

$$\rho\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = -gradp + \eta\Delta\overrightarrow{u} \ . \ (1)$$

В качестве эталонного выберем уравнение Навье-Стокса, решение которого считается известным

$$\rho\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -gradP + \eta\Delta\overrightarrow{v} \ . \ (2)$$

Пусть q_1, q_2, q_3 - криволинейные координаты исследуемой системы, а Q_1, Q_2, Q_3 - координаты модели. Выразим компоненты u_i скорости жидкости в исследуемой системе через соответствующие компоненты v_i скорости жидкости в модели:

$$u_i = A_i\left(q_1, q_2, q_3\right)\cdot v_i\left(Q_1\left(q_1, q_2, q_3\right), Q_3\left(q_1, q_2, q_3\right), Q_2\left(q_1, q_2, q_3\right)\right) \ . \ (3)$$

Подставляя (3) в (1), получаем систему уравнений, для коэффициентов $A_i\left(q_1, q_2, q_3\right)$ и координат $Q_i\left(q_1, q_2, q_3\right)$. Эталонное уравнение следует подбирать таким образом, чтобы уравнения для A_i и Q_i имели наиболее простой вид.

Авторами иллюстрируется использование этого метода при исследовании движения магнитной жидкости, вызванного эффектом Марангони.

Литература

[1] Темам Р. Уравнения Навье-Стокса: Теория и численный анализ. - М., 1981.

[2] Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. // Успехи математических наук, вып. 6, 1952. - С. 3 - 96.

ОБ ОБОБЩЕННОМ СПЕКТРАЛЬНОМ РАДИУСЕ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Калитвин А.С. (Липецк)

Для исследования разрешимости уравнений, оценок областей нахождения решений и построения последовательных приближений удобно применять метод неподвижной точки в K - метрическом пространстве, идейную основу которого составляют мажорантные методы Л.В.Канторовича и который активно разрабатывался в последние годы П.П.Забрейко и его учениками. Важнейшее значение при этом имеет понятие обобщённого спектрального радиуса.

Пусть $\mathcal{M}$ — пространство измеримых почти всюду конечных функций, X — банахово идеальное пространство (БИП) функций из $\mathcal{M}$, а K — конус неотрицательных функций из $\mathcal{M}$. Обобщённым спектральным радиусом $\rho(Q)$ оператора $Q : K \to K$ назовем оператор, определённый равенством $\rho(Q)z(\omega) = \overline{\lim}_{n\to\infty}(Q^n z(\omega))^{1/n}$.

Если Q — положительный линейный оператор в X, то в силу определения $\rho(Q)$ и формулы Гельфанда для спектрального радиуса $r(Q)$ оператора Q $\rho(Q)x_0 \le r(Q)$ для любого $x_0 \in X$. Для действующего в $L^p([0,1]\times[0,1])$ $(1 < p \le \infty)$ оператора Харди - Литтльвуда

$$(Qx)(t,s) = \frac{a}{t}\int_0^t x(\tau,s)d\tau + \frac{b}{s}\int_0^s x(t,\sigma)d\sigma + \frac{c}{ts}\int_0^t\int_0^s x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

с частными интегралами, где a, b, c — положительные константы, и $x_0(t,s) = t^\alpha s^\alpha$ $(\alpha > 0)$ $\rho(Q)x_0 = (a+b)(1+\alpha)^{-1} + c(1+\alpha)^{-2} < a+b+c = r(Q)$. Пусть $U = U(T)$ и $V = V(S)$ — БИП или пространства непрерывных функций, а X — одно из пространств: БИП со смешанной нормой $U[V]$ или $V[U]$; пространство вектор-функций $C(U)$ или $C(V)$; $C(T\times S)$.

Теорема. *Пусть* $0 \le l(t,s,\tau) \le a(t,\tau)$, $0 \le m(t,s,\sigma) \le b(s,\sigma)$, $0 \le n(t,s,\tau,\sigma) \le cl(t,\tau)b(s,\sigma)$, *где* a, b, l, m, n — *измеримые функции,* $c = const$, *интегральные операторы*

$$(Au)(t) = \int_T l(t,\tau)u(\tau)d\tau \ \text{ и } \ (Bv)(s) = \int_S m(s,\sigma)v(\sigma)d\sigma$$

действуют в U *и* V *соответственно, а операторы*

$$(Lx)(t,s) = \int_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, (Mx)(t,s) = \int_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,$$
$$(Nx)(t,s) = \int_T\int_S n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

действуют в X. *Если* α *и* β — *позитивные собственные числа операторов* A *и* B *с собственными функциями* $u(t)$ *и* $v(s)$ *соответственно, то* $\rho(K)u(t)v(s) \le \alpha + \beta + c\alpha\beta$, *где* $K = L + M + N$.

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Капустян В. Е. (Днепропетровск)

Известно, что задача синтеза оптимального управления для систем с распределенными параметрами сводится к решению функционального уравнения Беллмана. Если исходная задача линейно - квадратичная и управление не стеснено ограничениями, то уравнение Беллмана разрешимо в квадратичной форме, а ее ядро определяется как решение уравнения типа Риккати в соответствующих функциональных пространствах. Далее будем говорить о задачах оптимальной стабилизации решений краевых задач для параболических уравнений. Для случая сосредоточенного (граничного) управления указанная краевая задача для уравнения типа Риккати в замкнутом виде не разрешима в отличие от распределенного управления. Если управление стеснено локальными ограничениями, то для линейно - квадратичных конечномерных систем А. М. Летов предложил изящный метод прямого решения уравнения Беллмана, пригодный для систем малой размерности. А. И. Егоров перенес указанный метод при специальных ограничениях на управление на построение оптимальных распределенных регуляторов в задачах переноса тепла. В данной работе построен оптимальный ограниченный сосредоточенный параметрический регулятор для стабилизации решений параболических краевых задач. Результат основан на идее Н. Н. Красовского о предельном переходе по параметру в программном оптимальном управлении.

М.Т. Караев (Баку)

О символе Березина операторов и его применениях

Пусть $H(Q)$ функциональное гильбертово пространство (ф.г.п.) над некоторым множеством Q. Для каждого линейного ограниченного оператора A, действующего $H(Q)$, символом Березина называют функцию $\widetilde{A}$, определяемую по формуле

$$\widetilde{A}(\lambda) = \left\langle A\widetilde{k}_\lambda, \widetilde{k}_\lambda \right\rangle \qquad (\lambda \in Q),$$

где $\widetilde{k}_\lambda = \|k_\lambda\|^{-1} k_\lambda$ нормированное воспроизводящее ядро пространства $H(Q)$. Пространство $H(Q)$ называется стандартным, если множество Q можно вложить в некоторое топологическое пространство так, что для любого $\zeta \in \partial Q$ имеем

$$\lim \widetilde{k}_\lambda = 0 \quad (\text{слабо}) \text{ при } \lambda \to \zeta \in \partial Q.$$

В стандартных ф.г.п. компактность оператора A влечет равенство $\lim \widetilde{A}(\lambda) = 0$ при $\lambda \to \zeta \in \partial Q$. Бергер и Кобурн в [1] поставили вопрос о справедливости обращения этого утверждения в пространствах Харди $H^2(\mathbb{D})$ и Бергмана $A^2(\mathbb{D})$ ($\mathbb{D}$ единичный диск в $\mathbb{C}$). В предлагаемой работе приводится несколько примеров, показывающих, что в пространстве $H^2(\mathbb{D})$ и пространстве Бергмана $A^2(\mathbb{D})$ это обращение, вообще говоря, несправедливо. Другие примеры для пространства $H^2(\mathbb{D})$ раньше были приведены в работе [2]. В терминах символов Березина будет дано описание класса Шаттена - фон Неймана, а также описание инвариантных подпространств изометрий.

ЛИТЕРАТУРА

1. C.A. Berger, L.A. Coburn. A symbol calculus for Teoplitz operators. - Proc. Nat. Acad. Sci. USA 83 (1986), 3072-3073.

2. E. Nordgren, P. Rosenthal. Boundary values of Berezin symbols. - Operator Theory: Advances and Applications, 73 (1994), 362-368.

Качалов Ж.В., Потапов В.Н., Цуканова Л.П., Чемакова Г.Л. (Воронеж)

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Исследуется несущая способность пологой конической оболочки, нагруженной осевой силой, передаваемой через жесткую шайбу. Внешний край оболочки шарнирно оперт и может смещаться в меридиональном направлении. Материал оболочки полагается жестко-пластическим. В качестве критерия текучести используется условие пластичности максимального приведенного напряжения, которое в плоскости главных напряжений $\sigma_\varphi, \sigma_\theta$ изображается шестиугольником текучести ABCDEF. Уравнения сторон шестиугольника текучести имеют вид:

AB: $-\sigma_\varphi+2\sigma_\theta=2\sigma_0$; BC: $2\sigma_\varphi-\sigma_\theta=-2\sigma_0$; CD: $\sigma_\varphi+\sigma_\theta=-2\sigma_0$;
DE: $-\sigma_\varphi+2\sigma_\theta=-2\sigma_0$; EF: $2\sigma_\varphi-\sigma_\theta=2\sigma_0$; FA: $\sigma_\varphi+\sigma_\theta=2\sigma_0$.

Здесь σ_0 - предел текучести материала при растяжении.

Для построения гиперповерхности текучести в пространстве результирующих усилий и моментов используется кинематический метод. Пластическое состояние оболочки соответствует двум граням гиперповерхности текучести CD- FA, DE-AB.

Интегрирование двух дифференциальных уравнений равновесия с использованием соотношений для граней гиперповерхности текучести в параметрическом виде, ассоциированного закона течения, выражений для скоростей деформаций и кривизн срединной поверхности оболочки, а также граничных условий и условий непрерывности, дает в итоге: распределение усилий и моментов, скоростей перемещений, выражение для предельной нагрузки и трансцендентное уравнение для радиуса раздела пластических состояний.

Проведена численная реализация на ЭВМ определяющих уравнений, определены границы применимости полученного решения, результаты расчета отражены в графиках.

Формула среднего значения для регулярных решений сингулярного уравнения Гельмгольца

Киприянова Н.И.(Воронеж)

В евклидовом полупространстве E_n^+ рассмотрим область G^+, прилегающую к гиперплоскости $x_n=0$. Граница этой области состоит из двух частей: $\Gamma^+ \in E_n^+$ и части границы Γ^0, лежащей в гиперплоскости $x_n = 0$. Будем предполагать также, что поверхности Γ^+ и Γ^0 в точках пересечения образуют прямой угол. Сингулярным уравнением Гельмгольца будем называть уравнение $Lu = \Delta_B u(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in G^+ \cup \Gamma^0$. Пусть $u_\lambda(x)$— регулярное решение этого уравнения, четное по переменной x_n и $y=(y',0)$- произвольная (внутренняя) точка Γ^0. Точку y примем за начало сферической системы координат $\Theta = \frac{x}{r}$, где $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, $\Theta \in S_1^+$. Обозначим через $\{Y_m^\gamma(\Theta)\}$, $\Theta = \frac{x}{|x|}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ класс весовых сферических функций.

Получена следующая формула среднего значения для регулярного решения $u_\lambda(x) = u_\lambda(y'+r\Theta_n, r\Theta_n) = u_\lambda(r,\Theta)$

$$\int_{S_1^+} u_\lambda(r,\Theta)\, Y_m^\gamma(\Theta)\, \Theta_n^\gamma\, dS = \frac{\Gamma(m + \frac{n+\gamma-2}{2} + 1)}{m!} \left(\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\right)^{m+\frac{n+\gamma-2}{2}} \times$$

$$\times \frac{\mathcal{J}_{\frac{n+\gamma-2}{2}}(r\sqrt{\lambda})}{r^{\frac{n+\gamma-2}{2}}} \int_{S_1^+} \frac{\partial^m u_\lambda(0,\Theta)}{\partial r^m} Y_m^\gamma(\theta)\, \Theta_n^\gamma\, dS, \tag{1}$$

где $\mathcal{J}_\nu$ — функция Бесселя (первого рода) порядка ν.

Отметим, что для обычного уравнения Гельмгольца формула среднего значения получена в работе [1], результаты которой мы использовали при доказательстве.

Литература

1. Ильин В.А., Моисеев Е.И. // Проблемы матем. физики и вычислит. математики. М.: Наука. 1977. С.157-166.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ЛИФТИНГОВ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

В. Кириакиди (Воронеж)

Пусть $\mathcal{K}$ -линейное пространство над полем комплексных чисел. Тогда подпространство $M \subset \mathcal{K}\text{x}\mathcal{K}$: $M = \{\{x,y\}|x,y \in \mathcal{K}\}$ назовем линейным отношением. Линейное отношение назовем сжимающим, (изометрическим), если $[y,y] \leq [x,x]$ ($[y,y] = [x,x]$) для всех $x,y \in M$ (см. [AD]). С пространством $\mathcal{K}$ свяжем пространство Крейна $\mathcal{K}^2 = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ со скалярным произведением

$$< \{x,y\},\{u,v\} >= [x,u] - [y,v], \{x,y\},\{u,v\} \in \mathcal{K}^2.$$

Ранее была докаана теорема существования изометрического лифтинга N для каждого максимального сжимающего отношения $M \subset \mathcal{K}^2$ (см. [K]). В данной работе показана единственность минимального лифтинга такого отношения.

Определение 1 *Два лифтинга N_1 и N_2 ($N_i : \mathcal{K}\oplus\mathcal{H} \to \mathcal{K}\oplus\mathcal{H}, i = 1,2$, $\mathcal{H}$- гильбертово пространство) линейного отношения $M : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ назовем унитарно эквивалентными, если существует такой унитарный оператор $U : \mathcal{K}\oplus\mathcal{H} \to \mathcal{K}\oplus\mathcal{H}$ такой, что $U|_{\mathcal{K}} = I$ и $N_2 = \{\{Ux,Uy\}|\{x,y\} \in N^1\}$.*

Определение 2 *Изометрический лифтинг $N : G \to G(= \mathcal{K}\oplus\mathcal{H})$ максимального сжимающего линейного отношения $M : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ назовем минимальным, если в G нет меньшего, чем G подпространства, содержащего $\mathcal{K}$ и инвариантного относительно N.*

Определение 3 *Подпространство G, будем называть инвариантным относительно N, если существует $N_1 \subset N$, $\mathrm{dom}N_1 = \mathrm{dom}N \cap G$ и $N_1 \subset G\text{x}G$.*

Теорема 1 *Минимальный изометрический лифтинг максимального J- сжимающего линейного отношения определяется единственным образом с точностью до унитарной эквивалентности.*

Пусть $\mathcal{K}$- пространство Крейна с фундаментальным разложением $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$. Еак как M- максимальное сжимающее линейное отношение, то $\pi(M)$- график линейного ограниченного всюду определенного оператора T, для которого минимальная изометрическая дилатация W имеет следующее матричное представление $W = \begin{bmatrix} T & 0 \\ (I - T^*T)^{1/2} & V \end{bmatrix}$ (см. [DR]). С помощью преобразования Потапова-Гинзбурга для линейного отоношения M был получен вид минимального изометрического лифтинга N

$$N = \{\{x + z^+, y + (I - T^*T)^{1/2}(x^+ + y^-) + Vz^+\}|\{x,y\} \in M\},$$

где $x = x^+ + x^-, y = y^+ + y^- \in \mathcal{K}, z^+ \in \mathcal{H}$.

Литература

[AD] T.Ya. Azizov, A.D. Dijksma, *Contractive Linear Relations in Pontryagin Spaces*, Operator Theory: Adv. Appl., Vol. 103 (1998), Birkhäuser, Basel, 19-51.

[DR] M. Dritschel and J. Rovnyak, *Extension theorems for contractive operators in Kreĭn cpaces*, Operator Theory: Adv. Apl., Vol. 47 (1990), Birkhäuser, Basel, 221-305.

[K] В. Кириакиди, *О понятии лифтинга для линейных отношений*, Воронеж, ВГУ, 1999.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПОНЕНТ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Кирин Н.Е. *(Санкт-Петорбург)*

В работах [1,2] исследована универсальная структура интегрального оператора восстановления (или оценивания) по сигналам обратной связи $\{y_i\}$ компонент $\varphi = \varphi(x,p)$ динамических систем, представленных векторным дифференциальным уравнением с неопределённым параметром p:

$$x' = f(x,p,t), \quad t\in[0,1], \quad y_i = g_i(x(t_i)), \quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N < t_{N+1} = 1$$

Вопрос сводится к решению специальной граничной задачи для уравнения характеристик расширенной системы ОДУ. В данной работе рассматривается возможность применения метода конечных элементов к решению такой граничной задачи относительно разрывной в плоскостях $t = t_i$ функции $V = V(x,t)$ с функциями управления $k_i(y_i)$:

$$V_t + V_x f(x,p,t) = 0, \qquad t\in(t_i,t_{i+1}), \qquad i = 0,1,\ldots,N$$

$$V(x,0) = 0,\ V(x,1) = \varphi(x), \quad V(x,t_i+0) - V(x,t_i - 0) = k_i(g_i(x)), \quad i=1,\ldots,N$$

В качестве аппроксимирующих агрегатов искомых функций V, k_i взяты параболические сплайны. Учитывается наличие возмущающих параметров в исходных уравнениях ОДУ и обратной связи. Указывается возможность использования изложенной техники оценивания для решения задач синтеза управления в динамических системах.

Литература

1. Иванов А.П., Кирин Н.Е. Сопряженные задачи теории управления. Л., Изд-во Ленинградского университета, 1988.

2. Кирин Н.Е. Методы оценивания и управления в динамических системах. СПб., Изд-во СПб ун-та, 1993.

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Кириченко А. В. (Саратов)

Задача о нелинейных колебаниях двух оболочек с известной областью контакта Ω_0 определяется следующей системой уравнений:

$$\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\Delta\right)\frac{\partial w_i}{\partial t} + \rho h\left[1 - \frac{h^2}{12}\Delta\right]\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\Delta^2 w_i \nabla_k^2 F_i - L\left(w_i, F_i\right) = \tag{1}$$

$$= g_i(x,y,t) - \frac{kE}{h}\psi(x,y)\left(w_i - w_{3-i} + (-1)^i a\right),$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2 F_i = -\frac{1}{2}L\left(w_i, w_i\right) - \nabla_k^2 w_i, i = 1,2,,$$

$$w_i\Big|_{\partial\Omega_i} = \frac{\partial w_i}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_i} = 0,\ F_i\Big|_{\partial\Omega_i} = \frac{\partial F_i}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_i} = 0, \tag{2}$$

$$w_i\Big|_{t=t_0} = w_{i0}(x,y),\ \frac{\partial w_i}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = w_{i1}(x,y); \tag{3}$$

$\Omega_j \subset R^2, j = 1,2$ - ограниченные области, удовлетворяющие используемым теоремам вложения; $\Omega_0 \subseteq \Omega_1, \Omega_0 \subseteq \Omega_2$; $\partial\Omega_i$ - граница Ω_i; $w(x,y,t)$-функция прогиба; $F(x,y,t)$ - функция усилий; $\varepsilon_2, \rho, h, E, k_1, k_2$ - строго положительные постоянные, $\varepsilon_1 \geq 0$, $0 < \nu < \frac{1}{2}, a \geq 0$;

$$L(w,F) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y},\ \nabla_k^2(\cdot) = k_1\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} + k_2\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2},$$

$$\Delta(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial t^2},\ \Delta^2(\cdot) = \Delta\left(\Delta(\cdot)\right),\ \psi(x,y) = \begin{cases} 1, (x,y) \in \Omega_0 \\ 0, (x,y) \notin \Omega_0 \end{cases}.$$

Задача (1) - (3) определяет математическую модель пологих оболочек в рамках теории Кирхгофа - Лява с винклеровской связью между обжатием и контактным давлением.

Теорема. Пусть выполняются такие условия $ess\,sup\|g_i\|_{L^2(\Omega_i)} < \infty$, $w_{i0} \in H_0^2(\Omega_i)$, $w_{i1} \in H_0^1(\Omega_i)$, $i = 1,2$, то: 1) задача (1)-(3) однозначно разрешима для любого $[t_0, t_1]$, и при этом $F_i, w_i \in L^\infty\left(t_0, t_1; H_0^2(\Omega_i)\right)$, $\frac{\partial w_i}{\partial t} \in L^\infty\left(t_0, t_1; H_0^1(\Omega_i)\right)$;

2) система (1)-(3) обобщенно диссипативна, то есть для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ найдется $R > 0$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{2}\iint_{\Omega_i}\left(\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\Delta w_i\right)^2 + \rho\frac{h^3}{12}\nabla^2\frac{\partial w_i}{\partial t} + \rho h\left(\frac{\partial w_i}{\partial t}\right)^2 + \frac{kE}{h}\psi(x,y)w_i^2\right)d\Omega_i < R.$$

РАЗРЕШИМОСТЬ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Кириченко В.Ф. (Саратов)

Объектом исследования является следующая краевая задача, определяемая уравнениями различного типа и размерности:

$$\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\Delta\right)\frac{\partial w}{\partial t}+\rho h\left[1-\frac{h^2}{12}\Delta\right]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\Delta^2 w+\frac{E\alpha_T}{1-\nu}\Delta\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\theta dz-\nabla_k^2 F-L(w,F)=g(x,y,t),$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2 F+\frac{\alpha_T}{h}\Delta\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\theta dz=-\frac{1}{2}L(w,w)-\nabla_k^2 w, \qquad (1)$$

$$\frac{C_0}{T_0}\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{2\alpha_T^2 E}{h(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\theta dz-\frac{\lambda}{T_0}\Delta_1\theta=-\frac{\alpha_T}{h}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta F)+\frac{E\alpha_T z}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta w),$$

$$w\Big|_{\partial\Omega_1}=\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_1}=0,\ F\Big|_{\partial\Omega_1}=\frac{\partial F}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_1}=0,\ \theta\Big|_{\partial\Omega_2}=0, \qquad (2)$$

$$w\Big|_{t=t_0}=w_0(x,y),\ \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=t_0}=w_1(x,y),\ \theta\Big|_{t=t_0}=\theta_0; \qquad (3)$$

$\Omega_1\subset R^2$ - ограниченная гладкая область; $\partial\Omega_1$ - граница Ω_1; $\Omega_2=\Omega_1\times\left(-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)\subset R^3$, $\partial\Omega_2$ - граница Ω_2; $w(x,y,t)$-функция прогиба; $F(x,y,t)$-функция усилий; $\theta(x,y,z,t)$- функция, определяющая температурное поле; $\varepsilon_2,\rho,h,E,\alpha_T,k_1,k_2,C_0,T_0,\lambda$ - положительные постоянные, $\varepsilon_1\geq 0$, $0<\nu<\frac{1}{2}$;

$$L(w,F)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y},\ \nabla_k^2(\cdot)=k_1\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}+k_2\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2},$$

$$\Delta(\cdot)=\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2},\ \Delta_1(\cdot)=\Delta(\cdot)+\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2},\ \Delta^2(\cdot)=\Delta\left(\Delta(\cdot)\right).$$

Теорема. Пусть выполняются такие условия $ess\ \sup\|g\|_{L^2(\Omega_1)}<\infty$, $w_0\in H_0^2(\Omega_1)$ $w_1\in H_0^1(\Omega_1)$, $\theta_0\in L^2(\Omega_2)$. Тогда: 1) задача (1) - (3) разрешима на произвольном отрезке $[t_0,t_1]$, и при этом

$$F,w\in L^\infty\left(t_0,t_1;H_0^2(\Omega_1)\right),\frac{\partial w}{\partial t}\in L^\infty\left(t_0,t_1;H_0^1(\Omega_1)\right),\theta\in L^\infty\left(t_0,t_1;H_0^1(\Omega_2)\right); \qquad (4)$$

2) решение задачи (1) - (3) может быть найдено методом Бубнова - Галеркина, при этом все множество получаемых приближенных решений слабо компактно в пространствах, соответствующих (4);3) решение линеаризованной задачи (1)-(3) для пластин - единственно.

К УСТОЙЧИВОСТИ КОАЛИЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ

Кирсанов Е.В. /г.Москва/

Рассмотрим игру с заданной коалиционной структурой

$$\langle N, \mathcal{P}, \{\mathbb{R}^{n_i}\}_{i\in N}, \{f_i(x)\}_{i\in N} \rangle \qquad (1)$$

Здесь $N=\{1,\dots,N\}$ множество порядковых номеров игроков, $\mathcal{P}=\{\mathcal{K},\mathcal{L}\}$ коалиционная структура $(\mathcal{K}\cup\mathcal{L}=N,\ \mathcal{K}\cap\mathcal{L}=\emptyset)$, стратегия iго игрока $x_i\in\mathbb{R}^{n_i}$, ситуация $x=(x_1,\dots,x_N)=(x_{\mathcal{K}},x_{\mathcal{L}})\in\mathbb{R}^n$ $(n=\sum_{i\in N} n_i)$ функция выигрыша iго игрока $f_i(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$.

Пусть $x^P=(x_K^P, x_{\mathcal{L}}^P)$ максимальная по Парето ситуация в задаче $\langle\mathbb{R}^n, \{f_i(x)\}_{i\in N}\rangle$. Будем говорить, что в игре (1) при ситуации x^P коалиция $\mathcal{K}$ угрожает коалиции $\mathcal{L}$ /стремясь включить в $\mathcal{K}$ игрока $j\in\mathcal{L}$ /, если существует стратегия $x_K^T\in\prod_{i\in K}\mathbb{R}^{n_i}$ такая, что

$$f_i(x_K^T, x_L^P)\geq f_i(x^P), \forall i\in\mathcal{K},\ f_j(x_K^T, x_L^P) > f_j(x^P)$$

В ответ на x_K^T у $\mathcal{L}$ имеется контругроза, если существует $x_{\mathcal{L}}^c\in\prod_{i\in\mathcal{L}}\mathbb{R}^{n_i}$ такая, что

$$f_i(x_K^T, x_L^c) > f_i(x_K^T, x_L^P), \forall i\in\mathcal{L},\ f_i(x_K^T, x_L^c) < f_i(x^P), \forall i\in\mathcal{K}$$

Коалиционную структуру $\mathcal{P}$ назовем устойчивой в игре (1), если в ответ на любую угрозу любой коалиции у оставшейся имеется контругроза.

<u>Утверждение</u>. Если в игре (1)

1^0 существует постоянный вектор $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$ $(\alpha_i>0, i\in N)$ такой, что для функции $\varphi(x)=\sum_{i\in N}\alpha_i f_i(x)$ имеет место $\lim_{\|x\|\to\infty}\varphi(x)=-\infty$

2^0 функции выигрыша $f_i(x)$ сильно выпуклы по $x_{\mathcal{L}}$ и сильно вогнуты по $x_{\mathcal{K}}$ при $i\in\mathcal{L}$ и сильно вогнуты по $x_{\mathcal{L}}$ и сильно выпуклы по $x_{\mathcal{K}}$ при $i\in\mathcal{K}$,

то коалиционная структура игры (1) устойчива.

УСТОЙЧИВОСТЬ КОАЛИЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ В ОДНОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ИГРЕ

Кирсанов Е.В. (г. Москва)

Рассмотрим коалиционную иерархическую игру при неопределенности

$$\langle I, \mathcal{P}, U, \{X_i^U\}_{i\in N}, Y, \{f_i(u,x,y)\}_{i\in I} \rangle \qquad (1)$$

здесь $I=\{0,N\}$, 0 – центр, $N=\{1,\dots,N\}$ множество игроков нижнего уровня; $\mathcal{P}=\{\mathcal{K},\mathcal{L}\}$ коалиционная структура ($\mathcal{K}\cup\mathcal{L}=N, \mathcal{K}\cap\mathcal{L}=\emptyset$); стратегии центра $u\in U\subset \text{comp}\, R^n$, стратегии i-го игрока из $N - x_i(\cdot)\in X_i^U$ функции $U\to \mathbb{R}^{m_i}$, неопределенность $y\in Y\subset \text{comp}\, R^e$; функции выигрыша $f_i(u,x,y)$ непрерывны, $i\in I$.

Партия игры развивается в три этапа:

1 этап Игроки из N формируют множество оптимальных стратегий $X^0=\{x(\cdot)\}$

2 этап Центр, зная X^0, выбирает свою стратегию $u^*\in U$

3 этап Игроки из N берут произвольную точку из $X^0(u^*)$

При этом все игроки учитывают возможность реализации любого $y\in Y$

Зафиксируем $\hat u\in U, \hat y\in Y$ и рассмотрим коалиционную игру

$$\tilde\Gamma(\hat u,\hat y)=\langle N, \mathcal{P}, \{X_i\}_{i\in N}, \{f_i(\hat u,x,\hat y)\}_{i\in N}\rangle, \ (X_i=X_i(\hat u),\ i\in N) \qquad (2)$$

Будем говорить, что в игре (2) при ситуации $x^P\in X$ коалиция $\mathcal{K}$ угрожает коалиции $\mathcal{L}$, стремясь включить в $\mathcal{K}$ игрока $j\in\mathcal{L}$, если существует стратегия $x_K^T\in X_K=\prod_{i\in K} X_i$ такая, что

$$f_i(\hat u, x_K^T, x_L^P, \hat y)\geq f_i(\hat u, x^P, \hat y),\ i\in\mathcal{K};\quad f_j(\hat u, x_K^T, x_L^P, \hat y) > f_j(\hat u, x^P, \hat y)$$

В ответ на угрозу x_K^T у $\mathcal{L}$ имеется контругроза $x_L^c\in X_L$, если

$$f_i(\hat u, x_K^T, x_L^c, \hat y) > f_i(\hat u, x_K^T, x_L^P, \hat y),\ i\in\mathcal{L};\quad f_j(\hat u, x_K^T, x_L^c, \hat y) < f_j(\hat u, x_K^T, x_L^P, \hat y),\ j\in\mathcal{K}$$

Структуру $\mathcal{P}$ назовем устойчивой, если при $x^P\in X$ Р-максимальной в задаче $\langle X, \{f_i(\hat u,x,\hat y)\}_{i\in N}\rangle$ в ответ на любую угрозу есть контругроза.

Тройка $(u^*, x^*, \{f_i(u^*,x^*,y_s)\}_{i\in I})$ называется гарантирующим Р-устойчивым решением (1), если для $y_s\in Y$ – S минимального решения задачи $\langle Y, \{f_i(u^*,x^*,y)\}_{i\in N}\rangle$

1° $x^*=x^*(u^*), x^*(\cdot)\in X^0$ где X^0 – множество Р-устойчивых решений $\tilde\Gamma(u^*,y_s)$.

2° $u^*=\arg\max_{u\in U}\min_{x\in X^*(u)} f_0(u,x,y_s(u,x))$

<u>Утверждение</u>. Если в игре (1) с коалиционной структурой $\mathcal{P}$

1° Функции $f_i(u,x,y), i\in\mathcal{T}$ сильно выпуклы по $x_{\mathcal{T}}$ и сильно вогнуты по $x_{\mathcal{P}\setminus\mathcal{T}}$, где $\mathcal{T}=\mathcal{K},\mathcal{L}$

2° Функция $\varphi_\alpha(u,x,y)=\sum_{i\in N}\alpha_i f_i(u,x,y)$, где $\alpha_i>0, \sum_{i\in N}\alpha_i=1$ строго выпукла по y, строго вогнута по x и не монотонна по любой из компонент вектора (x,y) хотя бы для одного $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$.

3° Функция $f_0(u,x,y)$ представима в виде $f_0(u,x,y)=-\psi_u(\varphi_\alpha(u,x,y))$ где $\psi_u(\cdot)$ возрастающая функция, для любого $u\in U$,

то $\mathcal{P}$ устойчива и существует гарантирующее Р-устойчивое решение (1).

ОБЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ – БЕССЕЛЯ - ЛАПЛАСА.

Киприянов И.А. (Воронеж)

УДК 517.518

Общеизвестна роль интегральных преобразований в математической физике. Для распределений с компактным носителем преобразование Фурье-Бесселя - Лапласа определяется следующей формулой:

$$\hat{u}_\nu(\zeta)=\left(u(x),e^{-i(x',\zeta')}\, j_\nu(x_n\zeta_n)\right)_\nu, \text{ где } \zeta'=(\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1}),\zeta=(\zeta',\zeta_n)\in\mathbf{C}^n. \quad (1)$$

Оказывается, как и в случае преобразования Фурье-Лапласа, возможно определить $\hat{u}_\nu(\zeta)$ хотя бы на некоторой части $\mathbf{C}$ и для более общих распределений u. Справа в формуле (1) стоит соответствующая весовая линейная форма. При определении более общего преобразования Фурье -Бесселя - Лапласа типа (1) мы поступаем следующим образом. При фиксированном $\eta=(\eta',\eta_n)$, где $\eta'=\operatorname{Im}\zeta'$ сразу возникает вопрос, как распорядиться нормированной бесселевой функцией первого рода, фигурирующей в (1). При фиксированном $\eta=(\eta',\eta_n)$, где $\eta'=\operatorname{Im}\zeta'$ и $\zeta_n=\operatorname{Im}\zeta_n>0$, мы можем, во всяком случае, определить преобразование типа (1) от $\xi=(\xi',\xi_n)$, где $\xi'=\operatorname{Re}\zeta'$, $\xi_n'=\operatorname{Re}\zeta_n'>0$, если $e^{(x',\eta')}\, j_\nu(x_n\eta_n i)u\in S'_+$. Сначала для данного $u\in D'_+(R^n)$ изучается структура множества

$$\Gamma^+(u)=\left\{\eta\in R^n_+ ;\ e^{(x',\eta')}\, j_\nu(x_n\eta_n i)u\in S'_+\right\}. \quad (2)$$

<u>Теорема</u>. Если $v\in S'_+$ и φ – функция класса C^∞_+, у которой производные любого порядка ограничены, то $\varphi v\in S'_+$. Если $\psi\in S'_+$, то преобразование Фурье-Бесселя распределения ψv есть C^∞_+ – функция

$$\xi=(\xi',\xi_n)\to\left(v,e^{-i(x',\xi')}\, j_\nu(x_n\xi_n)\psi\right)_\nu, \quad (3)$$

где справа соответствующая весовая линейная форма.

Для всякого $u\in D'_+(R^n)$ формула (3) определяет выпуклое множество. Дальнейшие его свойства зависят от того, пуста или не пуста внутренность этого множества.

ЕМКОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К ГРАНИЧНЫМ ЗАДАЧАМ И ТЕОРЕМАМ ВЛОЖЕНИЯ

В.С. Климов, Е.С. Панасенко (г. Ярославль, г. Орел)

Пусть К – компактное подмножество n-мерной области G, P – симметричное пространство функций на G. Паре (K,G) сопоставим множество функций $U(K, G) = \left\{ f \in \overset{\circ}{Lip}(G),\ f(x) \geq 1\ \forall x \in K \right\}$ и число $c_P(K, G) = \inf\left\{ \| |\nabla f|; P(G) \|,\ f \in U(K, G) \right\}$, называемое P-емкостью конденсатора (K,G). В докладе анализируются общие свойства P-емкости, устанавливаются емкостные неравенства, связывающие емкость конденсатора с более наглядными геометрическими характеристиками множеств типа лебеговых, хаусдорфовых и поперечных мер, обсуждаются применения емкостных неравенств к граничным задачам и теоремам вложения.

Пусть $\partial\Omega$ – граница области $\Omega \subset R^n$, $x_o \in \partial\Omega$, $\rho > 0$. Положим $F_\rho(x_o) = \left\{ x \in R^n \setminus \Omega\ :\ |x - x_o| \leq \rho \right\}$, $K_\rho(x_o) = \dfrac{F_\rho(x_o) - x_o}{\rho}$, $G = \{x : |x| < 2\}$. Очевидно, $K_\rho(x_o)$ – компактное подмножество открытого шара G, характеризующее относительный размер множества $F_\rho(x_o)$ $(\rho > 0)$. Точку x_o назовем P-регулярной, если существуют такие постоянные $\delta_o > 0$, $r_o > 0$, что при любом ρ из $(0, r_o)$ справедливо емкостное неравенство $c_P(K_\rho(x_o), G) \geq \delta_o$. Простым условием P-регулярности точки x_o является неравенство $mes_n F_\rho(x_o) \geq \theta_o \rho^n$ $(\theta_o > 0,\ 0 < \rho < r_o)$. В докладе приводятся различные обобщения этого результата; в частности, если P есть пространство Орлича L^Ψ, порождаемое N-функцией Ψ и $s^{\frac{1}{n-m}-1} \in L^{\Psi^*}(0,1)$ при натуральном $m \leq n - 1$, то точка x_o P-регулярна, если выполнено геометрическое неравенство

$$D_m(F_\rho(x_o)) \geq \theta_o \rho^m \quad (\theta_o > 0,\ 0 < \rho < r_o),$$

в которой $D_m(F_m(x_o))$ есть m-мерный диаметр множества $F_\rho(x_o)$. В докладе рассматриваются варианты этого условия и его роль в теории граничных задач для эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями.

ВРЕМЕННЫЕ ФОРМЫ ОПЕРАТОРОВ ДИСКРЕТНОЙ СТРУКТУРЫ. ВРЕМЕНА ВРЕМЁН

Ключанцев М.И.(Воронеж)

Структура порождает время. Время определяет временные формы. Временные формы абсолютно непрерывного оператора A введены, например, в [1]. Временные формы операторов в дискретном (по времени) пространстве-времени $DtR(A)$ имеют свои особенности.

Теорема. *Пусть пространство-время $DtR(A)$ дискретно по t и пусть $t = 0, ..., i, i+1, ..., N$. Тогда имеет место представление*

$$A = Ap(i)Ar(i-1), \qquad (*)$$

где $Ap(0) = A, Ar(0) = I$ и $Ap(N) = I, Ar(N) = A$.

Следствием этого результата является то, что *в мире с дискретным временем настоящих моментов времени нет, нет теорем существования (в классической формулировке), и т.д.*

Обобщением временного представления $(*)$ оператора, имеющего дискретную структуру высших порядков (не обязательно равных порядков по i' и j), является

$$A = Ap...pp(i, i'_1, ..., i'_{k-1}, i'_k)Ap...pr(i, i'_1, ..., i'_{k-1}, i'_k - 1)......Appr(i, i'_2, i'_1 - 1)$$

$$Apr(i, i'_1 - 1)Arp(i, j_1)Arrp(i, j_1 - 1, j_2)......Ar...rp(i, ..., j_k)Ar...rr(i, ..., j_k - 1), \qquad (*')$$

где $i = 0, ..., I;\ i'_1 = 0, ..., I'; ...; i_k = 0, ...I'_k; j_1 = 0, ..., I;\ j_k = 0, ..., J_k$.

Обозначая через $DkR(A)$, $DmR(A)$ два пространства-времени, где $k = 0, ..., K$, $m = 0, ..., M$, и рассматривая из $DmR(A)$ записанное в $DkR(A)$ представление $(*)$, получаем

$$A = App(k, m)At(k-1, k)Arr(k-1, m-1). \qquad (*'')$$

Рассуждая аналогичным образом ещё раз, получаем

$$A = Appp(k, m, l)Kl(k-1, m-1, k, m)Arrr(k-1, m-1, l-1), \qquad (*''')$$

где оператор Kl явным образом зависит от $La(k-1, m-1, k, m)$, а La — в свою очередь от $At(k-1, m-1, k, m)$.

Время $m \in DmR(A))$ будем называть временем-времени $k \in DkR(A)$, если имеет место представление $(*'')$, и записывать $m/_k$.

В представлении $(*''')$ время l — это время времён k и m, m и l — времена времени k; в общем случае имеем времена времён. Каждому времени времён $\hat{t}/_{t_1...t_n}$ присвоим ранг, равный числу времён, т.е. $rang\hat{t} = n$.

Можем констатировать: *структуры структур (не обязательно иерархические) порождают времена времён.*

1. Ключанцев М.И. Временные формы оператора и процесс старения// Воронежская зимняя математическая школа "Современные методы теории функций и смежные проблемы". — Воронеж, 1999. — С.210.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ КВАЛИФИЦИРОВАННОЙ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ТОЧНЫМИ ДАННЫМИ

Кокурин М. Ю., Юсупова Н. А. (Йошкар-Ола)

В гильбертовом пространстве H исследуется линейная некорректная задача

$$Au = f, \tag{1}$$

где $A \in L(H, H)$, $A^* = A \geq 0$, $\overline{R(A)} \neq R(A)$, $f \in R(A)$. Следуя [1], рассмотрим класс методов аппроксимации ближайшего к выбранному начальному приближению $u_0 \in H$ решения u_* уравнения (1):

$$u_r = (I - Ag_r(A))u_0 + g_r(A)f, \quad r \in (0, \infty);$$

где $g_r(\lambda)_{r \in (0,\infty)}$ — семейство измеримых по Борелю функций на $[0, M] \supset \sigma(A)$ таких, что

$$\sup_{\lambda \in [0,M]} \lambda^p |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leq C_p r^{-p} \quad (r > 0, \quad 0 < p \leq p_0, \quad p_0 > 0); \tag{2}$$

$\sigma(A)$ обозначает спектр оператора A. Согласно [1, с. 42], $\lim\limits_{r \to \infty} \|u_r - u_*\| = 0$. Для получения квалифицированных по r оценок скорости сходимости на начальную невязку $u_* - u_0$ традиционно налагаются условия истокопредставимости вида

$$u_* - u_0 = A^p v, \quad p > 0. \tag{3}$$

Предложение *([1, с. 42]). Пусть выполняются условия (2), (3). Тогда справедлива оценка*

$$\|A^q(u_r - u_*)\| \leq C_{p+q}\|v\|r^{-(p+q)} \quad (r \in (r_0, \infty), \quad q \geq 0, \quad p + q \leq p_0). \tag{4}$$

Следующая теорема показывает, что оценка (4) при заданном показателе истокопредставимости p не может быть существенно улучшена, даже на дискретном множестве значений параметра регуляризации $r \in \{1, 2, \cdots\}$.

Теорема. *Пусть выполняется условие (2) и справедлива оценка (4) для значений $r = 1, 2, \cdots$. Предположим также, что для всех $\tau \in (0, p_0)$ имеет место соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\tau - 1}|1 - \lambda g_n(\lambda)|^2 \geq \frac{C(\tau)}{\lambda^{2\tau}} \quad \forall \lambda \in (0, M]. \tag{5}$$

Тогда выполняется включение $u_* - u_0 \in R(A^s)$ $\forall s \in (0, p)$.

Условию (5) удовлетворяют, например, метод М. М. Лаврентьева, его итерированный вариант, метод установления, а также явная и неявная итерационные процедуры (см. [1, гл.2]). Отметим, что включение $s \in (0, p)$ в теореме не может в общем случае быть заменено равенством $s = p$ (см. [2, с. 138]).

Литература

1. Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. – М.: Наука, 1986.– 182 с.

2. Кокурин М. Ю. Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач. Йошкар-Ола: МарГУ, 1998.– 292 с.

Условия обратимости операторов с замороженными коэффициентами

И.А. Колесников

Рассматриваются операторы из пространства $l_p = l_p(\mathbf{Z}, X)$ $(p \in [1,\infty])$, каждому оператору $A \in Endl_p$ поставлена в соответсвие матрица $\mathcal{A} = (a_{ij}) = P_i A P_j,\ i,j \in \mathbf{Z}$ (см.[1]). Введем класс m-ленточных операторов с замороженными коэффициентами

$$End_{m,\varepsilon} l_p = \{A \in Endl_p : \|a_{ij} - a_{i+1\ j+1}\| < \varepsilon,\ |i-j| \le m\}.$$

Для оператора $A \in End_{m,\varepsilon} l_p$ рассмотрим две последовательности операторов $\{A^l\}$ и $\{A_l\}$ $(l \in \mathbf{Z})$ вида

$$(A^l)_{ij} = a_{l\ l-i+j}, \quad (A_l)_{ij} = a_{l+i-j\ l},\ i,j \in \mathbf{Z}.$$

При некоторых, не связанных с ε, дополнительных ограничениях на элементы a_{ij}, операторы A^l и A_l обратимы. Обозначим обратные к ним B^l и B_l. Используя матричные элементы операторов B^l и B_l постороим операторы $\overline{B}, \underline{B} \in Endl_p$ с матрицами $\overline{\mathcal{B}} = (\overline{b}_{ij})$ и $\underline{\mathcal{B}} = (\underline{b}_{ij})$

$$\overline{b}_{ij} = (B^j)_{ij}, \quad \underline{b}_{ij} = (B_i)_{ij},\ i,j \in \mathbf{Z}.$$

Если при некоторых условиях на ε будут обратимы операторы $A\overline{B}$ и $\underline{B}A$, то оператор A будет иметь левый обратный $A(\overline{B}(A\overline{B})^{-1}) = I$ и правый обратный $((\underline{B}A)^{-1}\underline{B})A) = I$. Достаточным условием обратимости оператора $A\overline{B}$ является условие $\|A\overline{B} - I\| < 1$. Используя эти достаточные условия и оценки норм матричных элементов операторов B^l и B_l из работы [1] получим следующие условия на ε

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{(1-\overline{\xi})^2}{\overline{M}(2m^2+m+(3m-2m^2)\overline{\xi}^2+2\overline{\xi})}, \frac{(1-\underline{\xi})^2}{\underline{M}(2m^2+m+(3m-2m^2)\underline{\xi}^2+2\underline{\xi})}\right\},$$

где $\overline{M} = \max\limits_{j\in\mathbf{Z}} 2\|(A^j)^{-1}\|$, $\underline{M} = \max\limits_{j\in\mathbf{Z}} 2\|(A_j)^{-1}\|$, $\overline{\xi} = \max\limits_{j\in\mathbf{Z}}\left(\frac{4\|(A^j)^{-1}\|\|A^j\|}{1+4\|(A^j)^{-1}\|\|A^j\|}\right)^{\frac{1}{2m+1}}$,

$\underline{\xi} = \max\limits_{j\in\mathbf{Z}}\left(\frac{4\|(A_j)^{-1}\|\|A_j\|}{1+4\|(A_j)^{-1}\|\|A_j\|}\right)^{\frac{1}{2m+1}}$.

Литература

[1] Баскаков А.Г. *Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов*// Известия РАН, Серия матем., 1997, Т. 61, N 6, с 3-26.

О числе e
Колмыков В.А.

1.Уравнением на множестве M называется выражение

$$f(x) = g(x),$$

где $f, g : M \to M$. Уравнение называется разрешимым, если найдётся такое $x_0 \in M$, что $f(x_0) = g(x_0)$.

2. Пусть M состоит из n элементов. Количество всех уравнений на множестве M обозначим $u_n(= n^n n^n)$, а количество всех неразрешимых уравнений обозначим $q_n(= n^n (n-1)^n)$.

3. Среднее отношение числа всех уравнений к числу неразрешимых есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{q_n} = e.$$

Это – новое определение числа e.

4. Таким образом $\approx 37\%$ уравнений на конечных множествах неразрешимо, а $\approx 63\%$ – разрешимо.

Об интегральных уравнениях типа Фредгольма на графах.
Провоторов В.В. (Воронеж)

На графе-пучке Γ рассматривается интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \int\limits_{\Gamma} K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$, $f(x)$ определены на Γ, $K(x,t)$ – на $\Gamma \times \Gamma$ и принадлежат классу L_2. Показано, что имеют место теоремы Фредгольма, обеспечивающие существование и однозначность решения уравнения (1). Возможны также и обобщения на произвольный граф.

КОЛЕБАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНОЙ НАГРУЗКИ

Коломоец А.А. (г. Саратов)

Рассматривается колебание замкнутой цилиндрической оболочки конечной длины шарнирно опертой по торцам. Оболочка подвержена действию случайного пространственно-временного поля внешней нагрузки. Предполагается, что случайная нагрузка $q(x,y,t)$ - нормальная функция координат x,y и стационарная функция времени t с известными математическим ожиданием и спектральной плотностью. Задача состоит в нахождении статистических характеристик колебательного движения оболочки.

В качестве исходных принимаются линейные дифференциальные уравнения движения несовершенных оболочек в смешанной форме кинематической модели Кирхгофа-Лява [1].

$$\frac{D}{h}\nabla^4(w-w_0)=\nabla_k^2F+\frac{q}{h}-\rho\frac{\partial^2 w}{dt^2}-2\rho\varepsilon\frac{\partial w}{dt},$$

$$\frac{1}{E}\nabla^4F=-\nabla_k^2(w-w_0) \tag{1}$$

Граничные условия

$$w=0;\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0;\ F=0;\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0;\ \text{при } x=0,L \tag{2}$$

Начальные условия

$$w=0;\quad \frac{\partial w}{\partial t}=0;\qquad \text{при}\quad t=0 \tag{3}$$

Искомые функции ищутся в виде

$$w=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M}A_{ij}(t)\sin i\pi x\cos jy,$$

$$F=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M}B_{ij}(t)\sin i\pi x\cos jy, \tag{4}$$

Исследование колебаний выполняется путем многократного численного моделирования поля $q(x,y,t)$ методом статистических испытаний Монте - Карло, решения задачи (1) - (3) и осреднения получаемых решений по ансамблю реализаций. Начально - краевая задача (1) - (3) решается с использованием методов И.Г. Бубнова в высших приближениях и метода Рунге - Кутта.

Литература

1. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки.-М.: Гостехиздат, 1956. - 419 с.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ И УДАРНЫХ ВОЛН В МИКРОПОЛЯРНЫХ КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

Кончакова Н.А. (г. Воронеж)

Микрополярные материалы представляют собой пример сред с дополнительными степенями свободы. Микроматериальные элементы данной категории материалов состоят из жестких нитей и вытянутых зерен. Удлиненные молекулярные элементы содержат, например, полимерные композиты, стекла, керамики, отдельные виды полупроводников и аморфных тел, древесина, некоторые горные породы и минералы. Анизотропные свойства отдельных из описанных веществ могут быть описаны моделью кристаллов кубической симметрии.

При внешних механических воздействиях различного характера в материале возникают деформационные изменения в виде волновых фронтов.

В данной работе рассмотрены условия существования монохроматических плоских волн, распространяющихся в микрополярных средах, обладающих кубической симметрией. Для направлений, совпадающих с координатными осями и с осями кристаллографической симметрии найдены скорости распространения волн и показано, что в рассматриваемых средах могут распространяться следующие типы волн: квазипродольные волны, квазипродольные волны кручения и квазипоперечные волны.

Особое внимание уделено среде Коссера, в которой гармонические волны обладают дисперсией. В связи с этим, на определенной критической частоте может изменяться первоначальный тип волны. Анализ найденных аналитически значений критических частот позволяет выписать условия существования каждой группы волн и получить ограничения на упругие коэффициенты среды, которые допускают возможность зарождения и распространения различных типов волн. Проведена оценка влияния тензора механической активности и параметра кубической анизотропии на значения критических частот.

Выписана определяющая система уравнений, описывающая распространение ударных волн в микрополярном кубическом кристалле. В качестве математической модели рассмотрена упругая среда Коссера Отмечены отдельные особенности распространения ударных волн и обозначены перспективы дальнейших исследований в данном направлении.

КОНВЕКТИВНАЯ ДИФФУЗИЯ В СИСТЕМЕ С ВРАЩАЮЩИМСЯ МЕМБРАННЫМ ДИСКОМ

КОРЖОВ Е.Н., ШАТИЛОВА А.В. (Воронеж)

Задача о конвективной диффузии в системе с вращающимся диском относится к числу классических задач физико-химической гидродинамики [1,2]. Построенная В.Левичем теория ориентирована на электродные и другого рода системы, когда диск не проницаем для растворенного вещества. Для мембранных систем, отличающихся селективной проницаемостью по отношению к различным компонентам раствора, необходимо решение уравнения конвективной диффузии при иных граничных условиях. В частности, при наличии перепада давления между областями, разделенными вращающимся мембранным диском, возникает перенос растворителя, скорость которого может быть пропорциональна величине разности давлений. Поток растворенного вещества к поверхности диска или от неё (условия отсоса/вдува) с учетом конвективной составляющей и селективных свойств мембраны позволяет получить граничное условие для концентрации в виде

$$\frac{\partial C}{\partial z} \pm \frac{v_w}{D} C = \pm \frac{a}{D} \tag{1}$$

где C , D - концентрация и коэффициент диффузии компонент раствора, v_w - скорость проницания через мембрану, a - величина потока вещества через мембрану, z – ортогональная поверхности координата.

Решение задачи конвективной диффузии в этом случае приводит к следующему выражению для распределения концентрации около мембраны

$$C(z) = C^0 \mp \left(a - \frac{v_w}{D}\right) \frac{\int\limits_z^{\infty} \exp\left(\frac{1}{D}\int\limits_0^{\eta} v(\xi)d\xi\right)d\eta}{1 \mp \frac{v_w}{D}\int\limits_0^{\infty} \exp\left(\frac{1}{D}\int\limits_0^{\eta} v(\xi)d\xi\right)d\eta} \tag{2}$$

Здесь $v(z)$ - распределение скорости около поверхности диска, получающееся при решении гидродинамической задачи. Отметим, что при $a = 0$ полученное решение (2) переходит в решение задачи В.Левича для случая гетерогенной реакции первого рода [1], а при $v_w = 0$ - в решение задачи для гидродинамически непроницаемого мембранного диска [3].

Литература

1. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. - М.: Физматгиз, 1959.- 699 с.
2. Химическая гидродинамика: справочное пособие. / Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д. и др. - М.: Бюро Квантум, 1996. - 336 с.
3. Коржов Е.Н. К теории электромассопереноса около вращающейся ионообменной мембраны. // Прикладные задачи механики сплошных сред. - Воронеж: ВГУ, 1988. - с.79-82.

Численный метод восстановления формы пространственной кривой при малых возмущениях кривизны и кручения

Корзунина В.В. (г. Воронеж),
Бакланов М.В. (г. Воронеж)

Обозначенная в заглавии проблема вычислительной геометрии встречается в ряде прикладных задач, например при конструировании пуансонов для гибочно-растяжных прессов и сводится к следующему. Исходная (невозмущенная) пространственная кривая задаётся набором координат своих точек. В этих же точках после решения соответствующей задачи механики определяются приращения значений кривизны и кручения. Необходимо восстановить форму возмущённой кривой. Известно, что даже в случае плоской кривой восстановление формы кривой по кривизне требует специальных численных методов, минимизирующих вычислительную погрешность интегрирования.

В настоящей работе для случая пространственных кривых предложен метод восстановления, основанный на построении фиктивных значений кривизны и кручения кривой. Эти фиктивные значения кривизны и кручения получаются при минимизации погрешностей интегрирования при определении базисных векторов трёхгранника Френе. Трёхгранник Френе рассматривается при этом как твёрдое тело, вращающееся вокруг мгновенной оси, направление которой определяется вектором Дарбу с угловой скоростью, равной полной кривизне кривой.

МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ СВОЙСТВ ПОСТАВЩИКА РЕСУРСА

Л.А.Коробова, Ю.С.Сербулов, В.В.Сипко (г. Воронеж)

При работе предприятия в условиях рынка периодически происходит срыв договоров поставки. Причины срыва договоров поставки самые различные. Поэтому перед предприятием постоянно возникает вопрос: с кем из существующих поставщиков поддерживать отношения? Пусть $S_1, ..., S_i, ..., S_n$ - список поставщиков предприятия, $P_1, ..., P_j, ..., P_k$ - список причин срыва договоров. Каждый поставщик может быть описан в виде $S_i = \{(P_j, p_{ij}), i = \overline{1,n}; j = \overline{1,k}\}$, ($p_{ij}$ = [0, 1] - индикатор частоты отказа). Используя метод Демпстера – Шафера, получены верхняя E^* (мера уверенности) и нижняя E_* (мера неуверенности) оценки поставщика:

$$E^* = \sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{j-1}) \cdot \max_{x \in Aj} f_в(x) \quad и \quad E_* = \sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{j-1}) \cdot \min_{x \in Aj} f_в(x),$$

где x – базовая вероятность; $f_в$ (x) – оценочная функция. Возникла проблема выбора поставщика на полученном интервале $\Delta p = [E_*, E^*]$. Зная вид функции $f_в(p)$ – частоты срыва поставок, определяем интервалы для фиксированного заранее множества значений лингвистической переменной «срыв поставки ресурса»: $\Delta p^{(1)}$, обуславливающий полное доверие к поставщику, $\Delta p^{(1)}$ представляет собой нечеткое подмножество интервала частот $0 \le p \le 1$ с функцией принадлежности $f_{\Delta p^{(1)}}(p)$; $\Delta p^{(2)}$ – отказы в поставке от случая к случаю, с функцией принадлежности $f_{\Delta p^{(2)}}(p)$; и т. д. Строим график функции $f_в(p)$ в координатных осях x - p, а по нему в интервалах $\Delta p^{(1)}$, $\Delta p^{(2)}$ и т. д. в осях $-f_в(x)$ – x графики функций принадлежности $f_в(x^{(1)})$, $f_в(x^{(2)})$ и т. д. Пусть α - степень уверенности того, что ресурс будет доставлен поставщиком, принадлежащим одному из интервалов Δp. Графически определяем оценочное значение каждого поставщика из указанных интервалов. Таким образом, кроме оценочного значения каждого поставщика, получаем распределение поставщиков по группам Δp.

УДК 62-50

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

П.А.КОТОВ

В работе Котова П.А. "К теории устойчивости непрерывных систем регулирования с детерминированными коэффициентами (в печати) имеется ссылка на монографию В.А.Бесекерского, Е.П.Попова "Теория систем автоматического регулирования", изд. "Наука". М., 1975.- 768 с., в которой упоминается о том, что понятие устойчивости системы регулирования связано со способностью возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели ее из этого состояния. Предлагаем развить и дополнить это понятие как противодействие резонансу и стойкость равновесия, соответственно, употребляем совместно термин равновесие и спектр собственных частот . В известной теореме Гурвица об устойчивости линейных систем автоматического управления добавляем положение, что для линейной системы автоматического управления при наличии кратных отрицательных вещественных корней выполнения требований теоремы нуждается в корректировке. В каждом случае необходимость в самостоятельном исследовании с учетом величины и кратности простых отрицательных корней, наличия нулевых и ненулевых начальных условий.

Рассматривается линейная непрерывная система автоматического регулирования (САР) с постоянными коэффициентами при наличии отрицательных простых корней в характеристическом уравнении, среди которых выделяем корни двойной кратности и следующие начальные условия: при $t=t_0$, $y(t_0)\neq 0$; $\dot{y}(t_0)\neq 0$ – остальные начальные условия нулевые.

Так как в решении характеристического уравнения содержится n корней, то переходная составляющая в системе может быть записана в виде

$$y_n(t)=C_1e^{p_1t}+C_2e^{p_2t}+\ldots+C_ne^{p_nt}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – корни характеристического уравнения

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n=0$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий,

Обсуждаем вариант, когда среди корней имеются корни двойной кратности, т.е.

$$y_n(t)=\sum_{i=0}^{1}C_{i+1}t^ie^{pt}+\sum_{k}^{n-1}C_{k+1}e^{p_{k+1}t},\quad k \text{ (кратность)}$$

причем $p_1=p_2=p\neq 0$, $k=2$, $n=6$ и $p_{k+1},\ldots,p_n$ – простые отрицательные корни. В этом случае при оговариваемых начальных условиях, получены результаты, характеризующие поведение переходной составляющей в системе. На некоторых примерах проведено суждение об устойчивости равновесия невозмущенной и возмущенной задач, мгновенной устойчивости системы с линейным дифференциальным оператором инвариантной по части области притяжения множества начальных условий

ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОНОТОННОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Костенко Т.А. (г. Ставрополь).

Рассмотрим банахово пространство E, полуупорядоченное телесным и нормальным конусом K. Пусть B – положительный полуаддитивный и однородный на K оператор. Аналогом спектрального радиуса для оператора B в этом случае является спектральная характеристика $\bar{\lambda}(B)$.

Определение. Рассмотрим множество M чисел $\lambda \geq 0$, для которых не пусто множество элементов $x=x(\lambda)>\theta$, удовлетворяющих неравенству $B(x)\geq\lambda x$. Положим $\bar{\lambda}(B)=sup\{\lambda: B(x)\geq\lambda x, x\in M\}$. M заведомо не пусто, так как $0\in M$, следовательно, $\bar{\lambda}(B)\geq 0$.

В работе предложен метод получения оценок сверху спектральной характеристики монотонного положительного оператора B. Приведем в начале один известный результат [1].

Теорема. *Пусть оператор B u_0–ограничен сверху и для некоторого $v_0>\theta$, $v_0\geq\beta u_0$, где $\beta>0$, выполняется условие $B(v_0)\leq\alpha v_0$. Тогда $\bar{\lambda}(B)\leq\alpha$.*

Указанная теорема допускает следующее развитие:

Следствие. Пусть B u_0–ограниченный сверху оператор и для некоторого $v_0>\theta$, $v_0\geq\beta u_0$, где $\beta>0$, выполняется условие $B^{n_0}(v_0)\leq\alpha v_0$, Тогда $\bar{\lambda}(B)\leq\sqrt[n_0]{\alpha}$.

Приведенный результат при некоторых дополнительных предположениях допускает и другое развитие, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть B u_0–ограниченный сверху оператор и для некоторого $v_0>\theta$, $v_0\geq\beta u_0$, где $\beta>0$, выполняется условие $B^n(v_0)\leq\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i B^i(v_0)$, где $\alpha_i\geq 0$ $i=\overline{0,(n-1)}$. Пусть конус K нормален и телесен. Тогда $\bar{\lambda}(B)\leq 1+\max_i \alpha_i$.*

Теорема 2. *Пусть оператор B u_0-ограничен сверху монотонен, полуаддитивен и однороден на K и для некоторого $v_0>\theta$, $v_0\geq\beta u_0$, где $\beta>0$ выполняется условие $B^n(v_0)\geq\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i B^i(v_0)$, где $\beta_i\geq 0$, $\|B\|^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i<1$. Пусть конус K телесен и нормален и $\bar{\lambda}>0$. Тогда $\bar{\lambda}(B)\leq\sqrt[n]{\|B\|\left(\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i\right)^{-1}}$.*

Литература.

1. Стеценко В.Я. Исследования по теории положительных операторов в пространствах с конусом. Доктор. дисс. -- Воронеж, 1968. – 307 с.
2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962.

РАСЧЕТ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, СОЕДИНЕННЫХ МЯГКИМ ПРИПОЕМ

Крысько В.А., Перегудов А.Б. (Саратов)

Исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной паяной конструкции, находящейся под действием заданной температуры, в линейной постановке рассмотрена с позиции трехмерной теории термоупругости в [1]. Напряжения в такой конструкции возникают из-за различия температурных коэффициентов линейного расширения материалов, когда конструкция: подложка-припой-основание - остывает после завершения процесса пайки. В подложке и основании возникают большие напряжения, сопровождающиеся совместным изгибом конструкции, а в припое возникают довольно существенные касательные напряжения, достигающие величины, превышающей предел прочности припоя.

Работа продолжает исследования таких конструкций с учетом пластичности припоя на основе деформационной теории пластичности. Получить разрешающие нелинейные уравнения в явном виде относительно неизвестных перемещений удается крайне редко и информация о их структуре дается, как правило, не в виде аналитических выражений, а в виде набора алгоритмов, по которым можно получить тот или иной коэффициент системы нелинейных уравнений. Вышесказанное обуславливает использование методов решения нелинейных уравнений, которые были бы основаны на их линеаризации и не требовали получения нелинейных уравнений в явном виде, а довольствовались алгоритмической записью их коэффициентов. Одним из методов является метод упругих решений.

Использование в расчётах специальных объёмных призматических конечных элементов с независимой аппроксимацией перемещений по плану и толщине позволяет существенно упростить вычислительную процедуру метода упругих решений.

В докладе приводится исследование двух типов трёхслойных конструкций, являющихся моделями паяных соединений. Конструкции представляют собой трёхслойную пластину с различными физико-механическими параметрами слоёв. Характеристики пределов текучести материалов верхнего, среднего и нижнего слоёв при этом считаются не зависящими от температуры. Получены модули максимальных значений напряжений и интенсивности напряжений в слоях для различных значений температуры.

1. Блейвас И.М., Павлов С.П., Перегудов А.Б. Исследование напряжённо--деформированного состояния паянной конструкции методом конечных элементов// Температурные задачи и устойчивость пластин и оболочек: Межвуз. научн.сб.- Саратов, 1988.- С.128-130.

ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

О.А. Кузенков, А.И. Эгамов (Н. Новгород)

В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$, где Ω – N-мерная ограниченная область с кусочно-гладкой границей Σ, рассматривается векторное интегро-дифференциальное уравнение с начальным и краевым условием

$$u_t + Lu + u \int\limits_{\Omega} p(x) Lu \, d\Omega = h_1(t) d_1(x),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} + \gamma u \right) \Big|_{\Sigma \times (0,T)} = h_0(t) d_0(x), \quad u|_{t=0} = \varphi(x).$$

Здесь L – линейный симметричный эллиптический оператор, коэффициентами которого являются матрицы размерности $N \times N$, состоящие из измеримых, ограниченных функций в Ω; $\partial u / \partial \overline{n}$ – производная по конормали; γ – неотрицательная константа; $\varphi(x)$, $p(x)$, $d_1(x) \in L_{2,N}(\Omega)$ и $d_0(x) \in L_{2,N}(\Sigma)$ – некоторые фиксированные функции; $h = (h_0(t), h_1(t))$ – управляющая функция, $h_0(t), h_1(t) \in L_{2,1}(0, T)$; управление назовем допустимым, если функции $h_0(t)$, $h_1(t)$ почти всюду не превосходят по модулю 1.

Определим функционалы

$$J_l[h] \equiv \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} F_{l1}(u(x,t), h, x, t) \, d\Omega \, dt + \int\limits_{\Omega} F_{l2}(u(x,T), x) \, d\Omega, \qquad l = \overline{0, l_0},$$

где $u(x,t)$ – решение интегро-дифференциального уравнения, отвечающее управлению h; F_{l1}, F_{l2}, $l = \overline{0, l_0}$ – гладкие функции по аргументу u и непрерывные по остальным аргументам. Предположим, что для любого допустимого h и соответствующего ему решения u функции $\partial F_{l1} / \partial u$, $\partial F_{l2} / \partial u$ суммируемы с квадратом на множествах Q, Ω соответственно.

При условии, что решение интегро-дифференциального уравнения существует, единственно и глобально устойчиво, ставится следующая оптимизационная задача: найти допустимое управление h, минимизирующее функционал J_0 при условиях

$$J_l[h] \le 0, \qquad l = \overline{1, l_0}.$$

При исследовании оптимизационной задачи используется общая методика профессора В.И. Плотникова вывода необходимых условий оптимальности. Получены необходимые условия для нахождения оптимального управления, которые записаны в виде принципа минимума. Учет ограничений в задаче осуществляется посредством обобщенного метода множителей Лагранжа.

ОБ ОБРАТИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С МЕДЛЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Кузнецова В.И. (Липецк)

В пространстве $L_p = L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $1 \le p \le \infty$, рассмотрим интегральный оператор

$$\big((1+K)x\big)(t) = x(t) + \int_{\mathbb{R}^n} k(t, t-s)x(t)\,ds.$$

Будем предполагать, что функция $t \mapsto k(t,\cdot)$ принимает значения в L_1 и удовлетворяет оценке

$$|k(t,\sigma)| \le |\bar{k}(\sigma)|,$$

где $k\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ — функция класса L_1. Положим

$$\omega(h) = \sup\{\|k(t,\cdot) - k(t+h,\cdot)\|_{L_1} : t \in \mathbb{R}^n\}.$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемых условиях при всех $t_0 \in \mathbb{R}^n$ определен оператор

$$\big((1+K_{t_0})x\big)(t) = x(t) + \int_{\mathbb{R}^n} k(t_0, t-s)x(t)\,ds$$

с *замороженным ядром* $k(t_0,\cdot)$. *Будем предполагать, что оператор* $1+K_{t_0}$ *обратим при всех* $t_0 \in \mathbb{R}^n$; известно, что в этом случае обратный имеет вид

$$\big((1+K_{t_0})^{-1}x\big)(t) = x(t) - \int_{\mathbb{R}^n} r(t_0, t-s)x(t)\,ds,$$

где $r(t_0,\cdot)$ — некоторая функция класса L_1.

Предположим также, что r *удовлетворяет оценке*

$$|r(t,\sigma)| \le |\bar{r}(\sigma)|,$$

где $r : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ *— функция класса* L_1.

Теорема. *Если*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\bar{r}(\sigma)| \cdot \max\Big\{\omega(\sigma), 2N_k\Big\}\,ds < 1,$$

то оператор $1+K$ *обратим слева. Если*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\bar{k}(\sigma)| \cdot \max\left\{\frac{\omega(\sigma)\cdot(1+N_r)^2}{1-\omega(\sigma)\cdot(1+N_r)}, 2N_r\right\} d\sigma < 1,$$

то оператор $1+K$ *обратим справа.*

О СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ РЕАКТОРА КОЛОННОГО ТИПА С ИММОБИЛИЗОВАННОЙ БИОМАССОЙ

С.В.Кулакова В.В.Сысоев (Воронеж)

Математическая модель реактора колонного типа с иммобилизованной биомассой представляет собой начально-краевую задачу для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [1] по четырем основным компонентам: субстрату (s), продукту (p), свободной (x^L) и иммобилизованной (x^f) биомассе. Аналитическое решение задачи в общей (нелинейной) постановке не представляется возможным. Поэтому для ее решения была предложена следующая численная схема.

$$\sigma\frac{s_{ij}-s_{ij-1}}{\Delta\tau}+u\left(\chi\frac{s_{i+1j-1}-s_{ij-1}}{\Delta z}+(1-\chi)\frac{s_{i+1j}-s_{ij}}{\Delta z}\right)=$$

$$=-\chi(r^L_{S\,ij-1}x^L{}_{ij-1}+r^f_{S\,ij-1}x^f{}_{ij-1})-(1-\chi)(r^L_{S\,ij}x^L{}_{ij}+r^f_{S\,ij}x^f{}_{ij});$$

$$\sigma\frac{p_{ij}-p_{ij-1}}{\Delta\tau}+u\left(\chi\frac{p_{i+1j-1}-p_{ij-1}}{\Delta z}+(1-\chi)\frac{p_{i+1j}-p_{ij}}{\Delta z}\right)=$$

$$=\chi(r^L_{p\,ij-1}x^L{}_{ij-1}+r^f_{p\,ij-1}x^f{}_{ij-1})+(1-\chi)(r^L_{p\,ij}x^L{}_{ij}+r^f_{p\,ij}x^f{}_{ij});$$

$$\sigma\frac{x^L{}_{ij}-x^L{}_{ij-1}}{\Delta\tau}+u\left(\chi\frac{x^L{}_{i+1j-1}-x^L{}_{ij-1}}{\Delta z}+(1-\chi)\frac{x^L{}_{i+1j}-x^L{}_{ij}}{\Delta z}\right)=$$

$$=\chi((\mu^L{}_{ij-1}-K^a)x^L{}_{ij-1}+K^Sx^f{}_{ij-1})+$$
$$+(1-\chi)((\mu^L{}_{ij}-K^a)x^L{}_{ij}+K^Sx^f{}_{ij});$$

$$\chi=\begin{cases}1, & i\le K(j-1);\\ \dfrac{K^*}{K}, & i=K(j-1)+K^*;\\ 0, & i<Kj.\end{cases}$$

$$\frac{x^f{}_{ij}-x^f{}_{ij-1}}{\Delta\tau}=\chi((\mu^f{}_{ij-1}-K^S)x^f{}_{ij-1}+K^ax^L{}_{ij-1})+$$
$$+(1-\chi)((\mu^f{}_{ij}-K^S)x^f{}_{ij}+K^ax^L{}_{ij});$$

$0\le i<M;\qquad 0<j\le N;$

$$\begin{cases}s_{0j}=s^*(\tau_j)/c;\\ p_{0j}=p^*(\tau_j)/c;\\ x^L{}_{0j}=x^{L*}(\tau_j)/c;\\ x^f{}_{0j}=x^f{}_{0j-1}+\Delta\tau[\chi((\mu^f_{0j}-K^S)x^f{}_{0j}+K^ax^{L*}(\tau_j))+\\ \qquad+(1-\chi)((\mu^f_{0j}-K^S)x^f{}_{0j}+K^ax^{L*}(\tau_j))];\end{cases}\qquad \begin{cases}s_{i0}=s_0(z_i)/c;\\ p_{i0}=p_0(z_i)/c;\\ x^L{}_{i0}=x^L_0(z_i)/c;\\ x^f{}_{i0}=x^f_0(z_i)/c.\end{cases}$$

$0\le j\le N;\qquad\qquad 0<i\le M.$

Использование явных численных формул обусловлено необходимостью решения ряда оптимизационных задач, в основе которых лежит исходная модель работы реактора. В связи с этим для корректного применения предложенной численной схемы необходимо соблюдение следующих условий. Доказано, что схема консервативна, если $\Delta\tau = K\Delta z/u$ (или $\Delta z/u = K\Delta\tau$), здесь K – произвольное целое. А выполнение условия $\Delta\tau \ge \Delta z$ обеспечивает сходимость численного решения к решению системы уравнений модели, если кинетических функции r и μ ограничены. Условию же ограниченности удовлетворяют практически все известные кинетические зависимости как количественные характеристики процессов метаболизма живой клетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулакова С.В., Сысоев В. В. Моделирование биореакторов с неподвижным слоем // Понтрягинские чтения – VIII: Тез. докл. / ВГУ. – Воронеж, 1997. – С 85.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Курдюмов В.П. (Саратов)

Рассматривается задача оптимального управления

$$\frac{du}{dt} = Lu + f, \qquad t \in [0,T], \quad f \in K_1; \tag{1}$$

$$u(0) = \varphi, \qquad \varphi \in K_2, \tag{2}$$

$$I(\varphi, f) = \|u(T) - u_0\|^2 + \|\varphi\|^2 + \|f\|^2 \to \min. \tag{3}$$

Здесь L – интегро-дифференциальный оператор вида

$$\alpha_1 y'(x) + \alpha_2 y'(1-x) + \int\limits_0^1 N(x,t)y(t)\,dt, \quad \alpha_1 y(0) = \alpha_2 y(1),$$

$N(x,t)$ – непрерывная функция, $(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)|\alpha_2| > 0$, $K_i \subset L_2[0,1]$ $(i = 1,2)$, выпуклы и замкнуты; φ и f – управления, $u_0 \in L_2[0,1]$, $\|\cdot\|$ – норма в $L_2[0,1]$.

Оператор L можно считать обращением оператора A из [1], поэтому справедлива теорема из [1] о базисности Рисса из его собственных и присоединенных функций $\varphi_j(x)$, $j = 1,2,\ldots$ в $L_2[0,1]$.

Теорема 1. *Решение задачи (1)-(3) существует и единственно.*

Теорема 2. *Пусть T_m – подпространство из $L_2[0,1]$, порожденное функциями $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1,m}$; $\psi^{(m)}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^{(m)}\varphi_i(x)$, $\theta^{(m)}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i^{(m)}\varphi_i(x)$ – решение задачи (1)-(3) для случая, когда $K_1 = K_2 = T_m$ и пусть $\psi(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0\varphi_i(x)$, $\theta(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i^0\varphi_i(x)$ – решение задачи (1)-(3) для случая, когда $K_1 = K_2 = L_2[0,1]$. Тогда для всех $i = 1,2,\ldots$*

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_i^{(m)} = \alpha_i^0, \qquad \lim_{m\to\infty} \beta_i^{(m)} = \beta_i^0.$$

Литература

1. Курдюмов В.П. Теорема о базисности Рисса корневых векторов одного класса интегральных операторов. // Воронежская весенняя матем. школа "Понтрягинские чтения-1998". Тезисы докладов. С.120.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант N 97-01-00566

ОБ ОБРАТИМОСТИ ОДНОГО ОПЕРАТОРА, ВОЗНИКАЮЩЕГО В ТЕОРИИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ [1]

Курина Г.А. (Воронеж)

При изучении линейно-квадратичных задач управления для дескрипторных систем (см., например, [1]) важное значение имеет существование ограниченного обратного для оператора вида

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & F_2 \\ F_3 & -F_1^* & 0 \\ 0 & F_2^* & -F_4 \end{pmatrix} : D(F_1)\dot{+}D(F_1^*)\dot{+}X_3 \to X_2\dot{+}X_1\dot{+}X_3, \qquad (1)$$

где X_i, $i=\overline{1,3}$, гильбертовы пространства, F_1 - линейный замкнутый оператор с плотной в X_1 областью определения $D(F_1)$, отображающий $D(F_1)$ в X_2, $F_2 \in L(X_3, X_2)$, $F_3 \in L(X_1)$, $F_4 \in L(X_3)$, $F_3 = F_3^* \geq 0$, $F_4 = F_4^* \geq 0$, звездочка при обозначении оператора означает сопряженный оператор.
<u>ТЕОРЕМА.</u> Если для оператора (1) выполнено одно из двух условий: а) операторы F_1, F_4 имеют ограниченные обратные или в) $F_1 \in L(X_1, X_2)$, операторы F_2, F_3 имеют ограниченные обратные, тогда оператор (1) имеет ограниченный обратный.

Доказательство теоремы основано на следующих леммах, которые справедливы при выполнении условий теоремы.
<u>ЛЕММА 1.</u> Не существует последовательности $\{x_n\}$ такой, что
$x_n \in D(F_1)\dot{+}D(F_1^*)\dot{+}X_3$, $||x_n|| = 1$ для всех $n \in I\!N$ и $Fx_n \to 0$.
<u>ЛЕММА 2.</u> Оператор, сопряженный к оператору (1), имеет нулевое ядро.

В случае, когда $F_1 \in L(X_1, X_2)$, в [1] была доказана обратимость оператора (1) на его области значений и установлен вид обратного оператора.
Литература.

1. Курина Г.А. К теории линейно-квадратичных задач управления, не разрешенных относительно производной. //Функциональные пространства и уравнения математической физики. Воронеж, ВГУ, 1988. С. 25-32.

---

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 96-01-01639).

О приводимости неотрицательно гамильтоновой периодической оператор-функции к блочно-диагональной форме [1]

Курина Г.А., Мартыненко Г.В. (Воронеж)

Неотрицательно-гамильтоновой оператор-функцией будем называть линейный ограниченный, непрерывный по t оператор, действующий в вещественном гильбертовом пространстве X и имеющий матричное представление вида

$$\begin{pmatrix} A(t) & S(t) \\ W(t) & -A'(t) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $A(t), S(t), W(t) \in L(X), S(t) = S'(t) \geq 0, W(t) = W'(t) \geq 0$, штрих с обозначением оператора означает сопряженный оператор.

Непрерывную на компакте K оператор-функцию $B(t)$ со значениями в $L(X)$ будем называть условно приводимой, если найдется непрерывная по t оператор-функция $V(t) \in L(X)$, которая при всех $t \in K$ является изоморфизмом и

$$V^{-1}(t)B(t)V(t) = diag(B_-(t), B_+(t)),$$

где $B_-(t) \in L(X_1), B_+(t) \in L(X_2), X$ является прямой суммой подпространств X_1, X_2, и при каждом фиксированном $t \in K$ спектр $B_-(t)(B_+(t))$ расположен в левой (правой) открытой полуплоскости.

ТЕОРЕМА. *Если оператор-функция $A(t) \in L(X)$, где X - вещественное сепарабельное гильбертово пространство, условно приводима при помощи оператор-функции периода 1, то неотрицательно гамильтонова периода 1 оператор-функция (1) также условно приводима при помощи оператор-функции периода 1.*

Оператор будем называть грубым, если у него нет точек спектра, лежащих на мнимой оси.

Доказательство теоремы основано на следующих леммах.

ЛЕММА 1. *Если оператор $A(t)$ является грубым, тогда оператор (1) также является грубым.*

ЛЕММА 2. Пусть для проекторов $P_1 : X \to X_1, P_2 : X \to X_2$ имеют место оценки $||P_1||, ||P_2|| \leq M$, тогда для любого $M > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что из неравенства $||P_1 - P_2|| \leq \varepsilon$ следует изоморфизм отображений $P_1 : X_2 \to X_1, P_2 : X_1 \to X_2$.

ЛЕММА 3. *Пусть $\{B_\mu(t)\}$ семейство оператор-функций из $L(X)$, где X - вещественное сепарабельное гильбертово пространство, непрерывных по совокупности переменных $t \in K$, $\mu \in [0, 1]$, причем при $\mu = 0$ $B_0(t)$ условно приводима и при любых $t \in K$, $\mu \in [0, 1]$ оператор $B_\mu(t)$ является грубым. Тогда при каждом $\mu \in [0, 1]$ $B_\mu(t)$ условно приводима.*

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01639.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛАБОУПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ. [1]

Курина Г.А.,Некрасова Н.В. (г. Воронеж)

При помощи прямой схемы [1] решается задача P_ε:

$$J_\varepsilon(u) = \sum_{k=0}^{N} F_k(x(k)) + \varepsilon^p \sum_{k=0}^{N-1} G_k(x(k), u(k)) \to \min_u, \tag{1}$$

$$x(k+1) = f_k(x(k)) + \varepsilon g_k(x(k), u(k)), \tag{2}$$

$$x(0) = x^0. \tag{3}$$

Здесь $x(k) \in R^m(k = \overline{0,N}), u(k) \in R^r(k = \overline{0,N-1})$, число шагов N фиксировано, $p > 1$ - натуральное число, $F_k(k = \overline{0,N})$, $G_k(k = \overline{0,N-1})$-скалярные функции, $f_k(k = \overline{0,N})$, $g_k(k = \overline{0,N-1})$ - функции со значениями в R^m, ε-малый параметр,входящие в (1),(2) функции предполагаются достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам.

Решение задачи (1)-(3) ищется в виде рядов

$$x(k) = \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j x_j(k), k = \overline{0,N},\ u(k) = \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j u_j(k),\ k = \overline{0,N-1}. \tag{4}$$

Соотношения (4) подставим в выражения (1)-(3) ,правые части в (1),(2) разложим по степеням ε ,затем произведем приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε .Тогда минимизируемый функционал запишется в виде

$$J_\varepsilon = \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j J_j. \tag{5}$$

При некоторых условиях доказаны следующие утверждения.

Теорема1. Коэффициент J_{2m} в разложении (5) известен после решения задач $P_i, i = \overline{0,m}$, из которых находятся $x_i(k)(k = \overline{0,N}), u_i(k)(k = \overline{0,N-1}), i \geq 1$. Пара функций $x_{m+1}(k)(k = \overline{0,N})$, $u_m(k)(k = \overline{0,N-1})$ является решением задачи P_{m+1}, заключающейся в минимизации преобразованного коэффициента J_{2m+1} путем выбора управления $u_m(k)(k = \overline{0,N-1})$ и соответствующей траектории $x_{m+1}(k)(k = \overline{0,N})$.

Теорема2. При достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ задача P_ε однозначно разрешима и имеют место оценки
$x^*(k) - \tilde{x}_n(k) = O(\varepsilon^{n+1})(k = \overline{0,N})$, $u^*(k) - \tilde{u}_{n-1}(k) = O(\varepsilon^n)(k = \overline{0,N-1})$, $J_\varepsilon(u^*) - J_\varepsilon(\tilde{u}_{n-1}) =$
$= O(\varepsilon^{2n+1})$, где (x^*, u^*) -точное решение задачи P_ε, а $\tilde{x}_n(k) = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j x_j(k), \tilde{u}_{n-1}(k) = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^j u_j(k)$.

Теорема 3. При достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ справедливы неравенства $J_\varepsilon(\tilde{u}_i) \leq J_\varepsilon(\tilde{u}_{i-1}), i = \overline{1,n-1}$.

При p=' асимптотика решения задачи (1)-(3) построена в [2].

Литература.

1.Belokopytov S.V. and M.G.Dmitriev (1986).Systems and Control Letters .V.8. P.129-135.
2.Kurina G.A.(1996) .Proc. Internat.Workshop."New computer technologies in control systems." Pereslavl-Zalessky,Russia.P.39-40.

[1]Работа выполнена при частичной поддежке РФФИ (грант 96-01-01639).

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ МАТРИЧНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СО СВОБОДНЫМ ПРАВЫМ КОНЦОМ. [1]

Курина Г.А., Смирнова Е.В. (г. Воронеж)

Рассматривается следующая задача:

$$P_\epsilon : J_\epsilon = \frac{1}{2}x'(T)Fx(T) + \frac{1}{2}\int\limits_0^T [x'(t)Wx(t) + u'(t)Ru(t)]dt \to \min_u \qquad (1)$$

$$A\frac{dx}{dt} = (C_0 + \epsilon C_1)x(t) + Du(t), \qquad (2)$$

$$Ax(0) = x^0, \qquad (3)$$

где $x(t) \in R^m, u(t) \in R^r, t \in [0,T], T > 0$-фиксировано, допустимые управления u(t) являются непрерывными функциями на отрезке $0 \le t \le T$, переводящими фазовую точку из состояния, удовлетворяющего условию (3),в произвольную точку пространства R^m, $\epsilon > 0$ малый параметр, $dim\, Ker\, A = 1$, $F = F' > 0$, $W = W' \ge 0$, $R = R' > 0$, штрих означает транспонирование.

Пусть выполнены условия: $QC_0P = 0$, $QC_1P \ne 0$, $QDR^{-1}D' = 0$, $QC_0A_+(I-Q)C_0P \ne 0$ где A_+ - обратный к оператору $(I-Q)A(I-P) : ImA' \to ImA$, P – ортогональный проектор X на $Ker\, A$, Q – ортогональный проектор X на $Ker\, A'$, соответствующие разложению $X = Ker\, A \dot{+} ImA' = Ker\, A' \dot{+} Im\, A$.

Асимптотика решения задачи P_ϵ строится,используя прямую схему [1]. Решение задачи P_ϵ ищем в виде

$$z(t,\epsilon) = \sum_{j \ge -1} \epsilon^j(\overline{z_j}(t) + \Pi_j z(\tau_0) + Q_j z(\tau_1)), \qquad (4)$$

где $z = (x', u')', \tau_0 = t/\epsilon, \tau_1 = (t-T)/\epsilon, \overline{z}_j(t), \Pi_j z(\tau_0), Q_j z(\tau_1)$ – регулярные, левые и правые пограничные члены соответственно. Подставляя (4) в (1)-(3), получаем разложение критерия качества в степенной ряд по ϵ для определения критериев оптимальности, уравнения состояния и начальные условия для нахождения членов разложения (4).

Используя преобразованное выражение коэффициента J_j при ϵ^j в разложении функционала J_ϵ для $j = 2k-2$ получаем критерий качества в задаче P_{k-1} для нахождения $\overline{z}_{k-1}(t)$; для $j = 2k-1$ получаем задачи $\Pi_{k-1}P$ и $Q_{k-1}P$ для нахождения $\Pi_{k-1}z(\tau_0)$ и $Q_{k-1}z(\tau_1)$ соответственно, $k \ge 0$; из задач P_j, Q_jP получаем, что $\overline{z}_j(t) = 0$, $Q_jz(\tau_1) = 0$.

Доказано, что управление $u_n(t,\epsilon) = \sum\limits_{j=-1}^{n} \epsilon^j \Pi_j u(\tau_0)$ является субоптимальным управлением порядка $2(n+1)$ задачи (1)-(3), т.е. $J_\epsilon(u_n) - J_\epsilon(u^*) \le c\epsilon^{2(n+1)}$, и при этом справедливы оценки $\|u^* - u_n\|_{L_2[0,T]} \le c\epsilon^{n+1}$, $\|x^* - x_n\|_{C[0,T]} \le c\epsilon^{n+1}$, где u^* - оптимальное управление, а x^*- оптимальная траектория задачи (1)-(3), x_n – решение задачи (2),(3) при $u = u_n(t,\epsilon)$, положительная константа c не зависит от t, ϵ.

Установлено свойство невозрастания значений функционала при малом ϵ: $J_\epsilon(u_{n-1}) \ge J_\epsilon(u_n)$.

Литература.

1.Belokopytov S.V. and Dmitriev M.G. (1986). Systems and Control Letters. V.8.P.129-135.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 96-01-01639).

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

Кучкарова А.Н.(Стерлитамак)

Рассмотрим оператор Лаврентьева-Бицадзе

$$Lu \equiv u_{xx} + sgn\, y\, u_{yy}, \tag{1}$$

в области D, ограниченной простой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$, характеристиками $AC_1\,(x+y=-1)$, $C_1O(x-y=0)$, $OC_2(x+y=0)$, $C_2B(x-y=1)$ уравнения (1) при $y<0$, где $O(0,0)$, $C_1(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ и $C_2(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

Обозначим через $D_0 = D\cap\{y>0\}$, $D_1 = D\cap\{y<0 \wedge x<0\}$ и $D_2 = D\cap\{y<0\wedge x>0\}$.

Задача G_λ. Найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D) \wedge C^2(D_0\cup D_1\cup D_2),$$

$$Lu + \lambda u \equiv 0,\ (x,y)\in D_0\cup D_1\cup D_2,$$

$$u(x,y)=0,\ (x,y)\in\Gamma,\quad u(x,y)=0,\ (x,y)\in C_1O\cup OC_2.$$

На основании явных формул решения задач Дарбу в областях гиперболичности [1] задача G_λ сведена к следующей нелокальной задаче для эллиптического уравнения: *найти все значения λ и соответствующие им собственные функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,y)\in C(\overline{D_0}) \wedge C^1(D_0\cup AO\cup OB)\wedge C^2(D_0), \tag{2}$$

$$u_{xx}+u_{yy}+\lambda u = 0,\ (x,y)\in D_0,\ u(x,y)=0,\ (x,y)\in\Gamma, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \int_0^x u_y(t,0)J_0[\sqrt{\lambda}(x-t)]dt,\ 0\le x\le 1, \tag{4}$$

$$u(x,0) = \int_x^0 u_y(t,0)J_0[\sqrt{\lambda}(t-x)]dt,\ -1\le x\le 0, \tag{5}$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя, $\sqrt{\lambda}>0$ при $\lambda>0$.

В случае, когда кривая Γ есть полуокружность $\Gamma_0: x^2+y^2=1\ (y>0)$ методом разделения переменных найдены собственные значения и соответствующие собственные функции задачи (2) - (5) и исследованы их свойства на полноту. Отметим, что в работе [2] методом разделения переменных построено решение задачи Геллерстедта для уравнения (1) с данными $u=0$ на характеристиках AC_1 и C_2B и $u(x,y)=\varphi$ на Γ_0.

Литература

1. Сабитов К.Б. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. №6. С. 1023-1032.

2. Моисеев Е.И. Решение задачи Трикоми в специальных областях. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. №1. С. 93-103.

УСРЕДНЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Лакуста Л. М., Петришин Р. И. (Украина, г. Черновцы)

Рассматривается типичная для многих задач нелинейной механики система $n+m$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon H(h,\varphi,\tau), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(h,\tau) + \varepsilon\Phi(h,\varphi,\tau) \tag{1}$$

с начальными условиями $h(0) = h^0$, $\varphi(0) = \varphi^0$, где h и φ–соответственно $n-$ и $m-$ мерные векторы, ε–малый положительный параметр, $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$, $\tau = \varepsilon t$. Предполагается, что правые части уравнений (1) имеют разрывы на поверхности $S = \{(h,\tau) \in R^n \times [0,L] : \quad F(x,\tau) = 0\}$, т. е. $H(h,\varphi,\tau) = H_l(h,\varphi,\tau), \omega(h,\tau) = \omega_l(h,\tau), \Phi(h,\varphi,\tau) = \Phi_l(h,\varphi,\tau)$, где $l = 1$ при $F(h,\tau) \leq 0$ и $l = 2$ при $F(h,\tau) > 0$. Будем считать, что функции H_l, ω_l и Φ_l непрерывно дифференцируемы на множестве $(h,\varphi,\tau) \in D \times R^m \times [0,L]$, D–ограниченная область, и 2π–периодичны по каждой из координат φ_ν, $\nu = \overline{1,m}$, вектора φ.

Наряду с (1) рассмотрим усреденую по всем угловым переменным φ систему уравнений для медленных переменных

$$\frac{d\overline{h}}{dt} = \varepsilon\overline{H}(\overline{h},\tau), \qquad \overline{h}(0) = h^0.$$

Здесь $\overline{H}(h,\tau) = \overline{H}_l(h,\tau)$, причем $l = 1$ при $F(h,\tau) \leq 0$ и $l = 2$ при $F(h,\tau) > 0$,

$$\overline{H}_l(h,\tau) = (2\pi)^{-m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} H_l(h,\varphi,\tau) d\varphi_1 \dots \varphi_m.$$

Найдены легко проверяемые условия, при которых получена оценка погрешности метода усреднения

$$\|h(t,\varepsilon) - \overline{h}(t,\varepsilon)\| \leq c\sqrt{\varepsilon} \qquad \forall (t,\varphi^0,\varepsilon) \in [0, L\varepsilon^{-1}] \times R^m \times (0,\varepsilon_0]$$

с постоянной c, независящей от ε и φ^0.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФИНИТНЫЕ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКОЙ, В ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В.Л. Леонтьев, Н.Ч. Лукашанец (Ульяновск)

В [1] предложены сеточные базисы ортогональных финитных функций, имеющих сложную структуру и не обладающих симметрией. Здесь рассматриваются и исследуются ортогональные финитные непрерывные функции одного аргумента, обладающие симметрией и более простой структурой, а также их тензорные произведения. Однако, сетки, связанные с конечными носителями таких функций, приемлемы только для областей с участками границы, параллельными координатным осям. Поэтому предлагаются двумерные финитные непрерывные ортогональные функции, полученные из классических функций Куранта на треугольных сетках. При их построении используется кусочно-линейное восполнение, состоящее из трех фрагментов, связанных с тремя подобластями треугольника и с указанными одномерными функциями естественных координат его сторон. Даются оценки точности аппроксимации в пространствах Соболева.

На основе базисов ортогональных финитных функций, связанных с треугольными сетками, строятся вариационно-сеточные методы математической физики и теории оболочек, основанные на условии стационарности функционала Рейсснера. Ортогональность финитных функций, используемых для независимого построения приближенного решения как для основных неизвестных функций, так и для их частных производных, позволяет исключить из системы сеточных уравнений часть узловых неизвестных до начала ее решения на компьютере. Приводятся результаты численных решений краевых задач, подтверждающие доказанные теоремы аппроксимации и демонстрирующие эффективность вариационно-сеточных методов, основанных на использовании смешанного вариационного принципа и предлагаемых сеточных систем ортогональных финитных функций.

1. *Daubechies I.* Orthonormal bases of compactly supported wavelets // Comm. Pure Appl. Math. 1988. 41. N7. P.909-996.

ОБ ОДНОМ БИОТЕПЛОВОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ТЕРМИЧЕСКИМИ ДОЗАМИ

Листров Е.А., Рыжкова Н.А. (Воронеж), Шуринов Ю.А. (Москва).

В [1] задача управления сформулирована для монотонно возрастающей перфузии. В [2] при постоянных значениях SAR наблюдались затухающие осцилляции перфузии и температуры биоткани собаки в течение двух часов СВЧ-облучения.

Для случаев осциллирующей перфузии в докладе предложена система уравнений:

$$\rho\cdot c\cdot\frac{d\theta}{dt}=-Q_s+\rho\cdot c\cdot Q_h;\quad \frac{d}{dt}\left(m\cdot\frac{dQ_s}{dt}\right)+\frac{d}{dt}(b\cdot Q_s)+Q_s=\rho\cdot c\cdot Q_h+$$
$$+\rho\cdot c\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{b\cdot n}{1+a^2\cdot\theta^2}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)+\rho\cdot c\cdot\frac{d}{dt}\left(\gamma^2\cdot\theta\right), \qquad (1)$$

где Q_s - тепловой сток (перфузия и теплопроводность), Q_h - тепловой источник, θ - осредненная температура, m, b, a, n, γ - функции t и Q_h.

Из (1) следует обобщенное биотепловое уравнение:

$$m\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}+b\cdot\left(1+\frac{n}{1+a^2\cdot\theta^2}\right)\cdot\frac{d\theta}{dt}+\left(1+\gamma^2\right)\cdot\theta=\left(1+\gamma_\infty^2\right)\cdot\theta_\infty+\left(b-b_\infty\right)\cdot Q_h+ \qquad (2)$$
$$+m\cdot\frac{dQ_h}{dt}$$

Уравнение (2) при Q_h = const имеет решения, описывающие эксперименты [2].

Литература

1. Шульман З.П., Хусид Б.М., Файн И.В. // ИФЖ. 1995. Т. 68. №3. С. 430.

2. Roemer R.B., Oleson J.R., Certas T.C. // Am. J. Phis. 1985. Vol. 249(18). P. R153-R158.

ОБ ИНДЕКСАХ НЕУСТОЙЧИВОСТИ БИФУРЦИРУЮЩИХ ТОРОВ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Любасова Г.Ю. (Старый Оскол)

В докладе рассматриваются бифуркации инвариантных торов из особых точек в трехмерном случае. Эта задача является многомерным обобщением бифуркации Пуанкаре-Андронова-Хопфа (бифуркация рождения периодического решения из особой точки).

Задача бифуркации инвариантных торов приводит к изучению бифуркаций стационарных точек динамических систем вида

$$\dot{\xi}_j = \xi_j\left(\varepsilon_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(\varepsilon)\xi_k^2\right), \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{1}$$

Основным предположением при этом является невырожденность матрицы $A(0)$ и всех её главных миноров:

$$\begin{gathered} \det A_K(0) \neq 0, \forall K \subset \{1,2,\ldots,n\}, \\ A_K(\varepsilon) = (a_{jk}(\varepsilon))_{(j,k)\in K\times K}, \end{gathered} \tag{2}$$

Это условие позволяет изучать торы различной размерности (от 1 до n).

Индексом неустойчивости стационарной точки (или бифурцирующего тора) назовем количество точек спектра матрицы Якоби правой части системы (1),имеющих положительную вещественную часть.

Автором рассматривалась задача описания набора стационарных точек разной размерности (с вычислением индексов неустойчивости) при определенном значении параметра. Трехмерное пространство параметров разбивается при этом на области, в каждой из которых количество стационарных точек и их индексы сохраняются. Это позволяет исследовать вопрос о возможности сосуществования стационарных точек разной размерности и разных индексов.

В настоящее время полностью исследованы одномерные и двумерные стационарные точки: получены эффективные условия существования и устойчивости бифурцирующих точек, определены области в пространстве параметров, в которых индекс неустойчивости принимает определённое значение. Для трехмерных точек получены пока некоторые частные результаты. Доказаны также теоремы о сосуществовании устойчивых точек разного порядка.

Ляхов Л.Н. (Воронеж)

О слабых В-производных целого порядка от функций из пространства весовых потенциалов Рисса $\mathrm{U}^{\gamma}_{\alpha}(L^{\gamma}_{p})$

Как хорошо известно, интегральные операторы типа потенциала улучшают дифференциальные свойства функций. В наших исследованиях это имеет отношение к дифференцированию, осуществляемому посредством сингулярного дифференциального оператора Бесселя $B_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$. Роль оператора Лапласа в этих рассуждениях играет оператор $(-\Delta_B)^m = \sum_1^n B_i$. В-преобразования Рисса определяются на функциях из весового функционального пространства $L^{\gamma}_{p}(E^{+}_{n})$ по формуле

$$(\mathbf{R}^{\gamma}_{m})(x) = \lim_{\substack{(L^{\gamma}_{p})\\ \varepsilon \to 0}} \int_{(|y|>\varepsilon)^{+}_{n}} \frac{Y^{\gamma}_{m}(y)}{|y|^{n+|\gamma|}} \left(T^{y}_{x} f(x)\right) y^{\gamma}\, dy ,$$

где Y^{γ}_{m} — весовая сферическая функция порядка m.

Слабые В-производные будут пониматься в смысле распределений Φ'_{γ} (типа распределений Лизоркина). А именно, будем говорить, что *локально суммируемая с весом x^{γ} функция f имеет слабую В-производ- ную $\left(B^{\beta} f\right)(x)$, если существует локально суммируемая с весом x^{γ} функция $g \in S'_{ev}$ такая, что* $(g,\omega)_{\gamma} = (f, B_{\beta}\omega)_{\gamma}$, $\omega \in \Phi_{\gamma}(E^{+}_{n})$ $\iff$ $B_{\beta} f = g$. В этом определении В-производные определены с точностью до аддитивного многочлена, четного по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $2m > \alpha$. Тогда для любой функции $\omega \in \Phi'_{\gamma}(E^{+}_{n})$ применением преобразования Фурье-Бесселя легко получить равенство $(-\Delta_b)^m\, \mathrm{U}^{\gamma}_{\alpha}\omega = \mathrm{U}^{\gamma}_{\alpha}\,(-\Delta_B)^m\, \omega(x) = \left(\mathrm{U}^{\gamma}_{\alpha-2m}\,\omega\right)(x)$. Дифференцирование, осуществляемое оператором $(-\Delta_B)^b$, будем понимать в слабом смысле.

Лемма. *Пусть* $2m < \alpha < \frac{n+|\gamma|}{p}$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *Тогда, если* $\varphi \in L^{\gamma}_{p}$, *то* $(-\Delta_B)^m \mathrm{U}^{\gamma}_{\alpha}\,\varphi = \mathrm{U}^{\gamma}_{\alpha-2m}$, *если же* $\varphi \in L^{\gamma}_{r}$ *и* $(-\Delta_B)^m \varphi \in L^{\gamma}_{p}$, *где* $1 < r < \frac{n+|\gamma|}{\alpha-2m}$, *то* $\mathrm{U}^{\gamma}_{\alpha}\,(-\Delta_B)^m\,\varphi = \mathrm{U}^{\gamma}_{\alpha-2m}\varphi$.

Теорема. *Если* $f \in \mathrm{U}^{\gamma}_{\alpha}(L^{\gamma}_{p})$, $1 < p < \frac{n+|\gamma|}{\alpha}$, $\alpha \geq 2m$, *то*

$$\mathbf{D}^{\gamma}_{\alpha} f = \mathbf{D}^{\gamma}_{\alpha-2m}(-\Delta_B)^m f = (-\Delta_B)^m \mathbf{D}^{\gamma}_{\alpha-2m} f .$$

Оценки норм решения задачи, моделирующей колебания вязкой сжимаемой жидкости

С.Л.Ляхова (Воронеж)

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} - [\overline{u}, \overline{\omega}] - \nu \Delta \overline{u} + \nabla u_4 - \nu \beta \nabla \, div \, \overline{u} = 0, \quad \alpha^2 \frac{\partial u_4}{\partial t} + div \, \overline{u} = 0, \quad yx \in R^3, \; t > 0, \tag{1}$$

$$\overline{u}|_{t=0} = \overline{u}^0; \quad u_4|_{t=0} = u_4^o, \; x \in R^3, \; \overline{u}^0 = (u_1^0; u_2^0; u_3^0)^T. \tag{2}$$

Стандартным образом введем нормы

$$\|u(x)\|_q = \int_{R^3} |F_{x\to s}[u(x)]|^2 (1+|s|^2)^q ds;$$

$$\|u(t,x)\|_{q,T} = \sup_{t \in (0;T)} \|u(t,\cdot)\|_q$$

ТЕОРЕМА 1.*При любых* $q \geq 0$, $T > 0$ *справедливы оценки компонент* $u_k(t,x)$, $k = \overline{1,4}$ *решения* $U(t,x)$ *задачи (1)-(2)*

$$\|u_k - u_k^0\|_{q,T} \leq c_k(T) \left(\sum_{i=1}^{3} \|u_j^0\|_{q-2} + \|u_4^0\|_{q-3}\right), \; k = \overline{1,3}$$

$$\|u_4 - u_4^0\|_{q,T} \leq c_4(T) \left(\sum_{i=1}^{3} \|u_j^0\|_{q-3} + \|u_4^0\|_{q-2}\right).$$

ТЕОРЕМА 2. (о выполнении начальных условий (2)). *При любых* $q \geq 0$, $\varepsilon \in [0;1]$ *и при* $t \to +0$ *справедливы оценки для компонент* $u_k(t,x)$, $k = \overline{1,4}$ *решения* $U(x,t)$ *задачи* (1)-(2)

$$\|u_k(t,\cdot) - u_k^0(\cdot)\|_q \leq c_k t^{\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^{3} \|u_j^0\|_{q-2+\varepsilon} + \|u_4^0\|_{q-3+\varepsilon}\right), \; k = \overline{1,3}$$

$$\|u_4(t,\cdot) - u_4^0(\cdot)\|_q \leq c_4 t^{\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^{3} \|u_j^0\|_{q-3+\varepsilon} + \|u_4^0\|_{q-2+\varepsilon}\right).$$

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ

Ливина В.Н. (Воронеж)

В работе [1] исследовались периодические решения уравнения Гинзбурга-Ландау

$$\Delta v + \lambda v(1 - |v|^2) = 0, \tag{1}$$

было построено амплитудное уравнение

$$\begin{cases} \xi_1(1 - \omega^2(|\xi_1|^2 + 2|\xi_2|^2)) = 0, \\ \xi_2(1 - \omega^2(2|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

при редукции на конечномерное подпространство решений линеаризованного уравнения, найдены критические орбиты функционала Гинзбурга-Ландау и для них вычислены индексы Морса. Здесь $\omega = \omega(\lambda)$ — параметр, гладко зависящий от исходного параметра λ.

Теорема 1. *Потенциал V, соответствующий амплитудному уравнению (2), является сужением функционала Гинзбурга-Ландау на пространство решений порождающего (линеаризированного) уравнения при значениях параметров $\varepsilon = -\frac{1}{2}$, $\omega = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$.*

Данная теорема позволяет использовать индексы Морса, вычисленные для редуцированного потенциала, соответствующего амплитудному уравнению, при рассмотрении исходного потенциала, полученного из уравнения Гинзбурга-Ландау.

Теорема 2. *Критические орбиты*

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_1 &= \{|\xi_1|^2 = \sqrt{\tfrac{5}{2}},\ \xi_2 = 0\} && \text{с индексом Морса } \mu_1 = 3,\\
\widetilde{S}_2 &= \{|\xi_1|^2 = -\sqrt{\tfrac{5}{2}},\ \xi_2 = 0\} && \text{с индексом Морса } \mu_2 = 1,\\
\widetilde{S}_3 &= \{|\xi_2|^2 = \sqrt{\tfrac{5}{2}},\ \xi_1 = 0\} && \text{с индексом Морса } \mu_3 = 3,\\
\widetilde{S}_4 &= \{|\xi_2|^2 = -\sqrt{\tfrac{5}{2}},\ \xi_1 = 0\} && \text{с индексом Морса } \mu_4 = 1,\\
\widetilde{S}_5 &= \{|\xi_1|^2 = |\xi_2|^2 = \sqrt{\tfrac{5}{2}}\} && \text{с индексом Морса } \mu_5 = 1,\\
\widetilde{S}_1 &= \{|\xi_1|^2 = |\xi_2|^2 = \sqrt{\tfrac{5}{6}}\} && \text{с индексом Морса } \mu_6 = 2,
\end{aligned}$$

являются бифуркационными множествами, от них при достаточно малых возмущениях по параметру ε ответвляются континуальные множества периодических решений уравнения Гинзбурга-Ландау.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Борисович Ю.Г., Ливина В.Н. Нарушение симметрии в уравнении Гинзбурга-Ландау и рождение континуума периодических решений // Труды математического факультета. Воронеж: изд-во ВГУ, 1998. - N.2. - С.9-13.

[2] Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах // Успехи матем. наук, 1996. - Т. 51. - Вып. 1(307). - С. 101-132.

УДК 664 642.2

НЕЧЕТКАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ, КАК ИНСТРУМЕНТ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Лукинова О.А., Дерканосова Н.М., Шеламова С.А., Сербулов Ю.С.

(г.Воронеж)

Микробиологические системы, в основе которых лежит направленное культивирование совокупности микроорганизмов, отмеченное сложной зависимостью, определяемой взаимоотношением культур, потребностью в различных источниках питания, а также разной реакцией на накопление продуктов метаболизма, pH, температуру и другие условия процесса. При рассмотрении технологических систем микробиологического характера, реально воспроизводимых в производстве хлебобулочных изделий, возникает проблема постоянного влияния посторонней микрофлоры, вносимой , в основном, с мукой, а также водой, воздухом, другими источниками сырья. В этом случае говорить об адекватном математическом описании процесса с использованием традиционных методов не представляется возможным.

В связи с чем предпринята попытка исследования вышеописанной системы на основе теории нечетких множеств , а именно введения применительно к конкретной ситуации понятия нечеткой чувствительности и ее оценки. Теория нечетких множеств, по сравнению с общепринятыми положениями, позволяет улучшить ситуацию следующим образом:

1. Для того, чтобы характеризовать величину отклонения от желательного значения при моделировании разброса параметра системы, введем функцию принадлежности.

2. Нечеткий анализ чувствительности определяется временной областью и не имеет никаких ограничений.

3. Будучи ориентированным на частотную область, классическое определение чувствительности само накладывает серьезные ограничения на типы задач, для которых это понятие становится содержательным. Для обращения с динамическими системами требуется более общее определение. В противоположность традиционному определению чувствительности в частотной области, при котором рассматривается один параметр, "нечеткая чувствительность" определяется во временной области и доставляет информацию о чувствительности системы к одновременным отклонениям по многим параметрам. Алгоритм на основе теории нечетких множеств имеет программное обеспечение

Результаты его реализации применительно к анализируемой ситуации позволяет прогнозировать реакцию системы на изменения ее начальных условий, что позволяет выбрать основной параметр при разработке системы регулирования процесса.

ОПТИМЗАЦИЯ РАБОТЫ БАНКА МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАМИРОВАНИЯ .

Малафеев О.А., Медведева Т.Ф. (Санкт-Петербург.)

Рассматривается дискретная модель работы банка, выдающего ссуды и принимающего вклады. На конечном отрезке времени $[0, T]$ в дискретные моменты $t_i, t_i : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ перед банком стоит проблема выбора клиентов с которыми ему выгоднее работать. Свой выбор на том или ином клиенте банк останавливает, руководствуясь следующим принципом: объем одалживаемых денег в любой период не должен пре.ышать наличный капитал, имеющий в банке к этому моменту. В конце периода t_i в банк возвращаются кредиты с процентами заемщиков, у которых истекли сроки займов, и из имеющихся средств банк производит расчеты по истекшим вкладам, причем, банк исключает из обслуживания тех вкладчиков, которым он по истечении сроков вклада не сможет выплатить деньги из-за отсутствия необходимого наличного капитала в соответствующий период .

При этом в начальный момент времени t_0 банк располагает информацией о планах клиентов (вкладчиков и заемщиков) на весь рассматриваемый период времени $[0, T]$. То есть, банку известны предполагаемые объемы вкладов и займов, а также их сроки. Используя эти данные, банк рассчитывает заемные и ссудные процентные ставки.

Предполагается, что ссудная процентная ставка заемщика является функцией, зависящей от спроса на ссуды, срока займа и объема его вклада. Для вычисления ссудных процентов банк исходит из условий :

1. При увеличении объема займа ссудный процент должен увеличиватся.
2. При увеличении спроса на ссуды банк соответственно увеличивает ссудный процент.
3. Чем больше срок реализации, тем меньше ссудный процент.

Таким образом, заемная процентная ставка является функцией, зависящей от спроса на вклады, объема вклада и срока вклада. При построении функции заемной процентной ставки банк опирается на условия:

1. При увеличении объема вклада увеличивается заемный процент
2. При повышении количества вкладчиков банк уменьшает ставку.
3. Чем больше срок реализации, тем выше заемный процент.

Перед банком возникает задача максимизации прибыли путем выбора оптимальной политики. Политика банка заключается в выборе множества тех вкладчиков и заемщиков, с которыми банку выгодней работать.

Задача решается методом динамического программирования, в результате которого, зная значения начального капитала, получаем последовательность функции, которые определяют максимальный доход за конечное число периодов , и соответствующий им вектор - функции - оптимальное управление на каждом шаге, то есть правило выбора множества поставщиков и потребителей предприятия.

Литература

1. Моделирование конфликтных ситуаций в социально - экономических системах.

Под ред. О.А.Малафеева, А.И.Муравьева, СПбГУ ЭиФ, СПб, 1998, 318с.

Малафеев О.А. - Доктор физ. - мат. наук, профессор,зав. кафедрой Моделирование социально-экономических систем.
e-mail: Oleg.Malafeyev @ paloma.spbu.ru
Медведева Т.Ф. - студентка 5-ого курса СПбГУ, факультет ПМ-ПУ.

УПРАВЛЕНИЕ ДИФФУЗИЕЙ КАПИТАЛА В ЭКОНОМИКЕ

О.А.Малафеев, М.С.Троева (Санкт-Петербург)

В данной работе рассматривается бескоалиционная дифференциальная игра двух лиц, описывающая модель управления процессом диффузии капитала в экономике. Динамика игры описывается следующей краевой задачей [1]

$$\frac{\partial y}{\partial t} = D\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \lambda(w)y, \quad x \in (0,l), \ t > 0,$$

$$D\frac{\partial y}{\partial x} = v, \quad x = 0, \quad t > 0, \qquad -D\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad x = l, \quad t > 0,$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad x \in [0,l], \quad t = 0,$$

где $t \in [0,T]$, $y(x,t)$ – количество капитала в точке x в момент времени t, $\lambda(w) = 1 - c_0 - 2c_1 - w$, $D = c_1 > 0$. Здесь c_0 – склонность предприятия к затратам на внутренние потребности, c_1 – склонность к затратам на соседние предприятия, l – "длина" экономического региона, w – величина ставки налога с капитала предприятия, v – скорость поступления инвестиций; $v \in V \subset R^p$ и $w \in W \subset R^q$, – управляющие параметры игроков I (инвестора) и II (фискального органа) соответственно, V и W – компактные множества из евклидовых пространств R^p и R^q. Кроме того, предполагаем, что капитал, используемый для инвестиций, ограничен.

Игроки выбирают управляющие воздействия основываясь на текущей информации о состоянии процесса с целью получения максимального значения суммарного капитала экономического региона в момент времени T игроком I и максимального значения суммы налоговых поступлений за время T игроком II. В каждый момент $t \in [0,T]$ игрокам известно состояние процесса $y(x,t)$, динамика игры и функции выигрыша.

С использованием результатов работы [2], показывается существование ситуаций ϵ-равновесия в смешанных кусочно-программных стратегиях в рассматриваемой игре.

Литература.

1. *Малафеев О.А., Троева М.С.* Теоретико-игровая модель управления диффузией капитала в экономике. //Тезисы межд. конф. "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация". Том 2. С. 186-189.

2. *Малафеев О.А.* Управление в конфликтных динамических системах. СПб., 1993.

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ В ПОЛУЦИЛИНДРЕ

Малютина О.П. (Воронеж)

В полуцилиндре $G\otimes[0;\infty)$, где G - ограниченная область в R^{n-1} с достаточно гладкой границей ∂G, рассматривается задача с параметром $\lambda\in C$:

$$A\left(x',D_{x'},\alpha(x_n)D_{x_n}\right)u-\lambda u=f\left(x',x_n\right),x'\in G\subset R^{n-1},0<x_n<\infty, \quad (1)$$

$$B_j\left(x',D_{x'},\alpha(x_n)D_{x_n}\right)u\Big|_{\partial G\otimes(0;\infty)}=0,\quad j=1,2,\ldots,m, \quad (2)$$

$$\left(\alpha(x_n)D_{x_n}\right)^{l-1}u\Big|_{x_n=+0}=0;\quad \left(\alpha(x_n)D_{x_n}\right)^{l-1}u\Big|_{x_n=+\infty}=0,\quad l=1,2,\ldots,m, \quad (3)$$

где $D_{x_j}=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ $j=1,2,\ldots,n$; $\alpha(x_n)$- достаточно гладкая заданная на $(0;\infty)$ весовая функция; $\alpha(x_n)>0$ при $x_n>0$; $\alpha(x_n)$ при $x_n=+0$ может обращаться в нуль, однако предполагается, что при этом функция $\dfrac{1}{\alpha(x_n)}$ интегрируема на полуоси $(0;\infty)$.

Предполагается, что главная часть символа $A_o\left(x',\xi',\xi_n\right)$ оператора A при $x'\in\overline{G}$ есть правильно эллиптический многочлен степени $2m$ по $\xi=\left(\xi',\xi_n\right)\in R^n$, а граничные операторы $\left\{B_{oj}\right\}_{j=1}^m$ $\left(ord\,B_j\le 2m-1\right)$ удовлетворяют условию дополнительности к A_o на $\partial G\otimes(0;\infty)$.

Кроме того, предполагается, что $A_o\left(x',\xi',+1\right)=A_o\left(x',\xi',-1\right)$. При определенных условиях на A_o и λ доказывается существование коэрцитивного решения задачи (1)-(3) в весовых пространствах Соболева $H_{2,\alpha}^s\left(G\otimes(0;\infty)\right)$, $s\ge 2m$ при любых $f\in H_{2,\alpha}^{s-2m}\left(G\otimes(0;\infty)\right)$. Установлено, что спектр оператора, порожденного задачей (1)-(3) в $H_{2,\alpha}^o\left(G\otimes(0;\infty)\right)$ дискретен, а его обобщенные собственные элементы образуют плотное множество в $H_{2,\alpha}^o\left(G\otimes(0;\infty)\right)$.

Метод доказательства аналогичен примененному в работе [1].

Литература

1. Малютина О.П. Об одной эллиптической задаче с вырождением в полуцилиндре // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ, Воронеж, 1999. –С.103-110.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВО-СТРУКТУРНЫХ НЕОДНОРДНОСТЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Масликова Т. И., Поленов В. С. (Воронеж)

В докладе рассматривается задача о составлении уравнений движения двухкомпонентных сред. Для программирования параметров пористых структур в металле и прогнозирования их стабильности при эксплуатации в условиях многофакторных воздействий необходимо, прежде всего, исследование модели пористой системы состоящей из твердой фазы с наличием газовой пористости, дающей представление о генезисе фазово-структурных неоднородностей твердого тела, относящейся к модели двухкомпонентной среды.

Динамике двухкомпонентных сред в настоящее время посвящён ряд работ; основоположниками, которых были Био, Френкель, Рахматулин, Цвиккер, Костен и другие, однако исследование таких сред и их математическое моделирование, ещё не может считаться окончательно завершенным, и требует дополнительного изучения и экспериментальной проверки.

В рассматриваемой модели пористой системы, предполагается, что обе фазы являются изотропными и неоднородными средами, в каждой точке существует два вектора смещения: вектор смещения $\vec{u}^{(1)}$ твёрдой фазы (скелета) и вектор смещения $\vec{u}^{(2)}$ второй фазы (газ), а параметры фаз являются функциями координат. Используя теорию Я. И. Френкеля и соотношения между напряжениями и деформациями, установленные Био, с учетом линеаризации уравнения непрерывности, выражающей закон сохранения вещества и полного тензора напряжений в скелете (при наличии давления газа в порах) получена математическая модель, характеризующая процесс динамического деформирования фазово-структурных неоднородностей твердого тела. Она представляет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений, состоящую из обобщенного закона Гука, записанного в перемещениях, в который входят коэффициенты Ламе твердой фазы и модуль сжимаемости второй фазы , зависящие от пространственных координат и уравнений движения упругой среды с порами.

Исследование, полученной модели дает представление о наличии и распространении упругих нестационарных волн в фазово-структурных неоднородностях твердого тела и влиянии неоднородности твердой фазы и пористости на скорости их распространения с изменением интенсивности и геометрических характеристик фронта волны.

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРОВЕРКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ.

Медведева И.Н. (Псков)

Разработка государственных образовательных стандартов влечет за собой создание современных технологий проверки результатов обучения, которые позволили бы осуществлять промежуточный и итоговый контроль знаний студентов.

Главной задачей аттестации образовательного учреждения является установление соответствия уровня и качества подготовки выпускников требованиям гос. стандарта.

Таким образом, создание и апробация современных и эффективных систем проверки знаний студентов имеет большое значение.

При проверке знаний студентов традиционным путем возникает ряд объективных трудностей, которые в ведущем университете страны и провинциальном педагогическом ВУЗе во многом аналогичны[1]. Отметим некоторые из них: несовпадение требований разных преподавателей, возможная небеспристрастность преподавателя к оценке ответов, загруженность преподавателя организацией текущих проверок большого числа студентов, отсутствие четко очерченных объемов знаний, необходимых для каждой положительной оценки и т. д.

Мы разделяем точку зрения, что многие из указанных педагогических и организационных проблем можно разрешить с помощью компьютерного тестирования студентов.

На кафедре алгебры и геометрии Псковского пединститута в течение нескольких лет активно разрабатываются тесты по базовым дисциплинам специальности "математика"; в частности по курсу геометрии разработаны и апробированы тесты по темам "Векторы", "Метод координат на плоскости и в пространстве", "Прямая на плоскости и в пространстве", "Линии и поверхности второго порядка", "Преобразования плоскости", "Многомерная геометрия", "Методы изображений", "Элементы топологии".

В работе используется программная оболочка, обеспечивающая необходимые функциональные свойства системы контроля.

Конечно, чисто математическое определение пригодности теста требует длительного накопления результатов тестирования. Мы имеем не окончательные варианты тестов, но они удовлетворяют допустимым значениям валидности и надежности, и следовательно пригодны в учебном процессе.

[1]В.А. Садовничий Компьютерная система проверки знаний студентов - Высшее образование в России, 1994г., №3, с. 20-26

АВТОМАТИЧЕСКАЯ БЕСКОНЕЧНАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ЦИКЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Мелихов С.Н., Текнечян Е.В. (Ростов–на–Дону)

В работе исследуется структура (в терминах носителей) циклических элементов оператора дифференцирования в пространстве распределений $D'(\mathbb{R}^n)$ $(n \in \mathbb{N})$, наделенном слабой топологией.

Определение. Распределение $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ называется циклическим элементом оператора дифференцирования (ЦЭ) в $D'(\mathbb{R}^n)$, если замыкание линейной оболочки $span\{\, u^{(\alpha)} \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$ всех производных u совпадает с $D'(\mathbb{R}^n)$.

$D'_{cyc}(\mathbb{R}^n)$ обозначает множество всех ЦЭ $u \in D'(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1. Если $u \in D'_{cyc}(\mathbb{R}^n)$, то $supp\, u = \mathbb{R}^n$.

Из приведенных ниже результатов следует, что носитель сингулярности всякого ЦЭ $u \in D'(\mathbb{R})$ пуст.

Теорема 2. Справедливо вложение $D'_{cyc}(\mathbb{R}) \subsetneq C^\infty(\mathbb{R})$.

Замечание. При $n > 1$ множество $D'(\mathbb{R}^n) \setminus C^\infty(\mathbb{R}^n)$ непусто.

При доказательстве теоремы 2 существенно используются следующие результаты: 1) критерий Айдельхайта – Фогта для последовательности Айдельхайта в сопряженном к пространству Фреше; 2) о локальном представлении распределений в виде производных непрерывных функций.

Пусть Y – объединение всех собственных замкнутых инвариантных относительно дифференцирования подпространств $D'(\mathbb{R})$.

Следствие. $D'(\mathbb{R}) \setminus Y \subsetneq C^\infty(\mathbb{R})$.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00178).

ПРИЗНАКИ КРИТИЧНОСТИ СЕКЦИОННЫХ КРИВИЗН ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Мещеряков М.В. /Саранск/

В сообщении предлагается симплектический подход к вопросу о критических точках секционной кривизны K_σ псевдориманова пространства M сигнатуры (p,q). Алгебраические свойства тензора кривизны R позволяют рассматривать его как самосопряженный оператор на алгебре Ли $SO(p,q)$. Тогда $K_\sigma(\xi)=\langle R(\xi),\xi\rangle$, где $\xi=x\wedge y$ бивектор из $SO(p,q)$, задаваемый парой касательных векторов x,y и нормированный в метрике Киллинга $\langle\,,\,\rangle$ на ± 1. Объединение особых орбит присоединенного представления алгебры $SO(p,q)$, состоящих из бивекторов сигнатур $(+,+)$, $(+,-)$, $(-,-)$ дает удобную реализацию грассманиана ориентированных невырожденных двумерных плоскостей в $T_m M$. Квадратичная форма $K_\sigma(\xi)$ определяет на $SO(p,q)$ уравнения Эйлера и их особые точки на указанных выше орбитах, суть критические точки функции K_σ /см.[I]/.

Т е о р е м а. Критические бивекторы $x\wedge y$ это в точности те бивекторы, которые удовлетворяют одному из следующих условий критичности:

$$\begin{cases} R(x\wedge y)x = K_\sigma y \\ R(x\wedge y)y = -K_\sigma x \end{cases}, \qquad \begin{cases} R(x\wedge y)x = -K_\sigma y \\ R(x\wedge y)y = -K_\sigma x \end{cases}, \qquad \begin{cases} R(x\wedge y)x = -K_\sigma y \\ R(x\wedge y)y = K_\sigma x \end{cases},$$

отвечающих соответственно сигнатурам $(+,+)$, $(+,-)$, $(-,-)$.

С л е д с т в и е. Критические плоскости ненулевой секционной кривизны в псевдоримановых симметрических пространствах определяют нормальные вложения трехмерных простых алгебр Ли в алгебру Ли, порожденную голономной системой пространства. Нулевая кривизна связана либо с вложением двумерной абелевой алгебры Ли либо с вложением трехмерной алгебры Гейзенберга.

Для неприводимых римановых симметрических пространств критические точки и значения вычисляются методами теории представлений простых алгебр Ли /см. [2] /.

I.Арнольд В.И. Математические методы классической механики.- М.:Наука, I989.

2.Мещеряков М.В.Оценки секционных кривизн римановых симметрических пространств// УМН.- 1996.-Т.5I,№I.С.157-158.

3.Хелгасон С. Группы и геометрический анализ.-М.:Мир, I987.

СДВИГОВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ДЕФЕКТАМИ ТИПА ТРЕЩИН

Т.В.Мещерякова (Воронеж)

В данной работе рассматривается задача о взаимодействии макротрещины с произвольно расположенными микротрещинами в упругом полупространстве в условиях поперечного сдвига. Сингулярные интегральные уравнения задачи получены в работе [1]. Применяя метод малого параметра, равного отношению длины микродефекта к макротрещине, получена рекуррентная система уравнений. Первое уравнение этой системы - это уравнение для одной трещины в полупространстве, остальные уравнения учитывают наличие микродефектов. Далее, применяя еще раз метод малого параметра (малый параметр равен отношению длины трещины к расстоянию от ее центра до границы полупространства) находим разрывы смещений на линиях трещин. Построены графики зависимости значения коэффициента интенсивности напряжений в вершине макротрещины от ориентации микродефекта. Исследовано изменение значения КИН макротрещины от ее ориентации относительно границы полупространства при наличии микродефекта.

Литература

[1] Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. Распостанение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова Думка, 1978.

Задача синтеза кривой сопряжения А.А.Маркова в угле $\alpha < \pi$

Микка В. П. (Йошкар-Ола)

Определение кривой наименьшей длины в классе гладких кривых с ограниченной кривизной $K(L) \in [-1/\rho, 1/\rho]$ назовем задачей сопряжения А.А.Маркова (см,[1],стр.32,475). А.А.Марков в работе [2], приведя интегральную постановку этой задачи, установил, что кривая наименьшей длины состоит из дуг окружностей радиуса $1/\rho$ и отрезков касательных к ним. Используя необходимое условие экстремума длины, он показал, что оптимальная кривая либо состоит из дуги окружности радиуса $1/\rho$ и отрезка касательной к ней, либо составлена из дут соприкасающихся окружностей радиуса $1/\rho$, обходимых в противоположных направлениях, если в начальной точке кривой фиксировано направление касательной, а в конечной точке касательная произвольная.

Задача сопряжения А.А.Маркова относится к классу задач оптимального управления при наличии оганиченной на фазовые координаты [3], если кривизна $K(L) \in [-k_1, k_1]$ и кривая целиком расположена в угловой области AOB с величиной угла α. Ее решение является выпуклой кривой, если в начальной точке A кривая касается стооны OA, а в конечной точке B она касается стороны BO, при этом оптимальная кривая составлена или из отрезков AA_1, B_1B и дуги окружности радиуса $1/k_2$, или из дуг окружностей радиуса $1/k_2$ и отрезка общей касательной к ним.

В случае, когда кривые касаются стороны OA в точке A и стороны OB в точке B, решением задачи сопряжения в угле является простейшая "цепочка", состоящая либо из дуг окружностей радиусов $1/k_2, 1/k_1$, обходимых в противоположных направлениях и общей касательной к ним, либо из отрезков AA_1, B_1B и двух соприкасающихся дуг окружностей радиусов $1/k_2$, $1/k_1$, обходимых в потивоположных направлениях. При этом решение задачи в угле существует только при дополнительном предположении $OB \geq 1/k_1 ctg\alpha/2$.

Обоснование этого результата можно получить, исходя из свойства "цепочки" при "эллиптических" поворотах, не меняющих длину цепочки и позволяющих ортогонально проектировать цепочку на общую касательную простейшей "цепочки" без увеличения ее длины.

Литература

1. Крейн М. Г., Нудельман А. А., Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.- М.: Наука, 1973.– 552 с.

2. Марков А. А., Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах. // Сообщение Харьковского математического общества, сер.2, 1, N 5,6.- 1889.– 250-276 с.

3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В.,Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов.- 3-е изд. М.: Наука, 1976.– 392с.

ПОСТРОЕНИЕ ДЛЯ СТЕРЖНЕВОГО ЭЛЕМЕНТА ОБЛАСТИ ФИЗИЧЕСКОЙ ОСУЩЕСТВИМОСТИ СОСТОЯНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ РЕШЕНИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Минаев В. А., Барченкова Н. А. (Воронеж)

Рассматривается задача существования состояния $y(x)$ стержневого элемента, находящегося под действием независимых внешних силовых факторов P_i $(i = \overline{1, k})$. При $P_i = 0$ $(i = \overline{1, k})$ ось стержня характеризуется функцией $f(x)$, а направления P_i $(i = \overline{1, k})$ –параметрами γ_i $(i = \overline{1, k})$.

Принимается, что математическая модель деформирования соответствует линейному дифференциальному оператору

$$L\,[y(x), P_1, \ldots, P_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_k, f(x)] = 0. \qquad (1)$$

Пусть при $f(x) = f_0(x)$, γ_i . γ_{i0} $(i = \overline{1, k})$ функция $y_0(x)$ является решением задачи (1). Изучается возможность приближенного описания функцией $y(x) = y_0(x)$ деформированного состояния стерня, если $f(x)$, γ_i $(i = \overline{1, k})$ достаточно мало отличается от $f_0(x)$, γ_{i0} $(i = \overline{1, k})$.

Для этого в соответствии с [1] вводится вспомогательная функция $g(x)$ - решение задачи

$$L\,[y_0(x) + g(x), P_1, \ldots, P_k, \gamma_{10}, \ldots, \gamma_{k0}, f_0(x)] = 0. \qquad (2)$$

Необходимым условием непрерывной зависимости решения задачи (1) от $f(x)$, γ_i $(i = \overline{1, k})$ является требование единственности тривиального решения задачи (2). Это приводит к проблеме нахождения собственных значений оператора (2).

Подход проиллюстрирован на конкретных примерах.

Литература:

1. Минаев В. А., Минаева Н. В. О состояниях механической системы Воронеж, 1998. Деп. в ВИНИТИ 23.12.98. № 3807- В 98.

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЯ

Минаева Н.В., Мяснянкин Ю.М. (Воронеж)

Рассматривается математическая модель в виде обыкновенного дифференциального уравнения с двумя параметрами, характеризующими отличие рассматриваемого объекта и внешних воздействий от некоторых идеальных (несовершенства). При выполнении условий теоремы о неявных функциях [1, 2] и некоторых дополнительных требований ряд, получающийся при нахождении решения методом малых параметров, является сходящимся. В качестве иллюстративного примера рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка, решение которого описывает продольно-поперечный изгиб упруго стержня. В пространстве параметров, описывающих внешнее воздействие, найдена граница области сходимости метода малых параметров. Для частного вида функции, описывающей отличие формы оси стержня в свободном состоянии от прямолинейной (начальное несовершенство), найдено решение, с точностью до величин первого порядка малости описывающее ось изогнутого стержня при значении параметров внешних нагрузок, удовлетворяющих требованию теоремы о неявных функциях.

Литература.

[1] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.

[2] *Минаев В.А., Минаева Н.В.* О состояниях механической системы. М., 1998. 21 с. – Деп. в ВИНИТИ 23.12.1998г. № 3807–В98.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.А. Минюк, В.К. Бойко, Е.А. Панасик (Беларусь, Гродно)

Пусть ненаблюдаемый вектор $x(t), t \in [a,b]$ - решение стохастической системы

$$(Lx)(t)dt \stackrel{def}{=} (Q\dot{x})(t)dt + A(t)x(a)dt = f(t)dt + \sigma_1(t)d\xi_1(t), t \in [a,b], \quad (1)$$

где элементы $n \times m$ матричной функции $\sigma_1(t)$ ограничены и измеримы на $[a,b]$, а остальные параметры объекта (1) определены в [1]. Пусть $H : D^n \to L^r$ - линейный ограниченный оператор, $L^r = L^r[a,b]$ - пространство суммируемых функций $y : [a,b] \to R^n$, причем $\|y\|_{L^n} = \int\limits_a^b |y(t)dt|$. Считаем, что доступный наблюдению r - вектор $z(t)$ связан с $x(t)$ соотношением

$$z(t)dt = (Hx)(t)dt + g(t)dt + \sigma_2(t)d\xi_2(t), t \in [a,b], \quad (2)$$

где r- вектор $g(t)$ принадлежит пространству L^r, элементы $r \times l$ матричной функции $\sigma_2(t)$ ограничены и измеримы на $[a,b]$, причем $N_2(t) = \sigma_2(t)\sigma_2'(t) > 0$ ($'$ - операция транспонирования) при всех $t \in [a,b], \xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ - стандартные винеровские взаимно независимые процессы размерностей m и l соответственно. Искомой является линейная несмещенная оценка вектора $x(b)$, построенная на основе результатов измерений $z(t), a \leq t \leq b$. Обозначим ее $\hat{x}(b)$, а ошибку оценивания $\tilde{x}(b) = x(b) - \hat{x}(b)$. Матрица ковариации в случае несмещенной оценки равна $R(b) = E[\tilde{x}(b)\tilde{x}'(b)]$ (E- символ математического ожидания). Оценка должна быть оптимальной в том смысле, что компонента ошибки оценивания должна иметь минимальную дисперсию, что эквивалентно условию

$$trR(b) \to \min, \quad (3)$$

где tr - символ следа матрицы.

Задача I. Пусть начальное состояние объекта (1) $x(a) = \alpha$, где случайная величина α имеет гауссовское распределение, $E(\alpha) = 0, D(\alpha, \alpha') = D_0 > 0$ и не зависит от случайных процессов $\xi_1(t), \xi_2(t)$. Требуется по измерениям (2) построить алгоритм определения оптимальной оценки $\hat{x}(b)$ вектора $x(b)$ в смысле (3).

Предложен алгоритм решения задачи I.

Литература.1. С.А. Минюк, В.К. Бойко. //Известия РАН. Теория и системы управления. 1998, № 4. С. 91-98.

УДК 517.925

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СЛЕДЫ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С КРАТНЫМ КОРНЕМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Михайлова Е.М. (Москва)

В.А.Садовничий поставил автору следующие задачи.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + (\lambda p_{10}(x) + p_{11}(x))y' + (\lambda^2 p_{20}(x) + \lambda p_{21}(x) + p_{22}(x))y = 0, \tag{1}$$

$0 \le x \le 1$, $p_{ij}(x) \in C^\infty[0,1]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр.

Уравнение

$$\vartheta^2 + p_{10}(x)\vartheta + p_{20}(x) = 0 \tag{2}$$

называется характеристическим для (1). Считаем, что (2) имеет один кратный корень при любом x из [0,1], т.е. $p_{10}^2(x) - 4p_{20} \equiv 0$.

В монографии [1] отмечается, что в этом случае асимптотическое разложение решений дифференциального уравнения (1) определяется не только коэффициентами $p_{i0}(x)$, но и $p_{ij}(x)$, $j \ne 0$ (см. также [2]).

Теорема 1. *Пусть характеристическое уравнение* (2) *имеет корень* $\vartheta = -p_{10}(x)/2$ *кратности 2, функция* $p'_{10}(x)/2 + p_{10}(x)\cdot p_{11}(x)/2 - p_{21}(x)$ *принимает значения на луче, выходящем из начала координат, и они отличны от нуля для любого* x *из* [0,1].

Тогда для решения $y(x,\lambda)$ *уравнения (1) с начальными условиями Коши* $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ *справедливо асимптотическое разложение при* $\lambda \to \infty$:

$$y(x,\lambda) \sim \lambda^{-1/2} \sum_{s=1}^{2} \exp \int_0^x \left(-\frac{p_{10}(t)}{2}\lambda + \varphi_0^s\sqrt{\lambda}\right) dt \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\psi_{s\nu}(x)}{\lambda^{\nu/2}},$$

где $\varphi_0(x) = (p'_{10}(x)/2 + p_{10}(x)p_{11}(x)/2 - p_{21}(x))^{1/2}$; $\varphi_0^1(x) = -\varphi_0(x)$; $\varphi_0^2(x) = \varphi_0(x)$.

Рассмотрим краевую задачу (1), (3):

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{3}$$

Используя теорему 1, находим целую функцию $f(\lambda)$, нулями которой являются собственные числа этой задачи: $f(\lambda) = y(1,\lambda)$. Справедлива следующая формула для регулированных следов.

Теорема 2. *При любом целом* $l < \tau + 1$ *справедливы равенства:*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\lambda_m^{l/2} - (\pi i m / \int_0^1 \varphi_0(t)dt)^{l/2} - \sum_{\nu=0}^{\tau} \frac{\tilde{f}_{\nu+1}(-l/2)(\pi i)^l}{m^{\nu+1-l}(\int_0^1 \varphi_0(t)dt)^l} \right] = \omega_{2+l}^{(0)} - \Phi_\tau^0(-l/2),$$

где $\omega_{2+l}^{(0)}$ – *коэффициенты разложения* $f'(\lambda)/f(\lambda) \sim \sum_{\nu-0}^{\infty} \omega_\nu^{(0)}/\lambda^{\nu/2}$, а $\Phi_\tau^0(-l/2)$ *выражается через дзета-функцию Римана.*

1. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917.

2. Печенцов А.С. Некоторые вопросы спектральной теории краевых задач для дифференциальных уравнений в случае кратного корня характеристического многочлена. Автореферат ... кандидата ф.-м.н. М., 1982.

ОБ ОДНОЙ БЕСКОАЛИЦИОННОЙ ИГРЕ, ПОРОЖДЕННОЙ КООПЕРАТИВНОЙ ИГРОЙ ДВУХ ЛИЦ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Мишин С.С. (Орехово - Зуево)

Рассматривается кооперативная игра двух лиц и при неопределенности

$$\Gamma = \langle \{1,2\}, \{X_1, X_2\}, Y, \{f_i(x_1, x_2, y)\}_{i=1,2} \rangle .$$

Предполагается, что стратегии i-го игрока $x_i \in X_i \in comp\, R^{n_i}$, неопределенности $y \in Y \in comp\, R^m$, функция выигрыша i-го игрока $f_i(x_1, x_2, y)$ (i =1,2) непрерывна на $X_1 \times X_2 \times Y$.

По исходной игре Γ "строится" вспомогательная бескоалиционная игра

$$\Gamma_1 = \langle \{1,2\}, \{Z_1, Z_2\}, \{g_i(z_1, z_2)\}_{i=1,2} \rangle ,$$

где ситуации $z=(z_1,z_2) \in Z_1 \times Z_2$, $Z_1 = X_1 \times X_2$, $Z_2 = Y$, функции выигрыша

$$g_1(z_1, z_2) = (f_1(z_1, z_2) - f_1^0[z_2])(f_2(z_1, z_2) - f_2^0[z_2]),$$

$$g_2(z_1, z_2) = (f_1(z_1, z_2), f_2(z_1, z_2)),$$

$$f_i^0[z_2] = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_j \in X_j} f_i(x_1, x_2, z_2); \quad (i,j=1,2, \ i \neq j).$$

Первый игрок в игре Γ_1 стремится к увеличению своей функции выигрыша, второй игрок - к одновременному уменьшению обоих компонент своей векторной функции выигрыша.

Вводится упорядоченное семейство подыгр со связанными стратегиями, порожденных игрой Γ_1

$$\langle \mathcal{T} = \{\Gamma_M = \langle \{1,2\}, M \subset Z_1 \times Z_2, \{g_i(z_1,z_2)\}_{i=1,2} \rangle\}, R_c \rangle$$

где M- непустое компактное подмножество множества $Z_1 \times Z_2$; остальные компоненты игры Γ_M определены в игре Γ_1. Бинарное отношение строгого порядка R_c, определенное на множестве $\mathcal{T}$ всех подыгр вводится в соответствии с подходом, который предложен в работе [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. R_c- оптимальной игрой упорядоченного семейства игр $\langle \mathcal{T}, R_c \rangle$ называется R_c-минимальная игра Γ_{M^*} такая, что $\Gamma_{M^*} \neq \Gamma_1 \to \Gamma_{M^*} R_c \Gamma_1$.

Исследованы свойства R_c- оптимальных подыгр, установлена взаимосвязь между R_c- оптимальными подыграми, в которых множество ситуаций одноэлементно, с гарантирующими арбитражными S-решениями Нэша [2] игры Γ, доказана теорема существования R_c- оптимальных подыгр.

1. А.Е.Бардин Структура множества R-оптимальных подыгр игры со связанными ограничениями и при неопределенности.//Управление сложными системами. Сборник научных трудов. М.,РосЗИТЛП,1999. С.5-9.
2. K.S.Vaisman About Differential Game under Uncertainty.// Abstr. of Third Intern. Workshop "Non-smooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization". St.-Petersburg,1995. P.45-48.

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИТО НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Морозова Л.А. (Воронеж)

Доказано существование решения для стохастического дифференциального уравнения Ито на бесконечном произведении некомпактных римановых многообразий. Этот результат важен для некоторых задач статистической механики [1].

Пусть M – некомпактное риманово многообразие размерности n с метрическим тензором g. Рассмотрим бесконечное произведение $M \times Z$. Зададим следующие объекты: (i) отображение $a : M \times M \times M \to TM$, удовлетворяющее условию: $a(m, m_1, m_2) \in T_mM$; (ii) поле линейных операторов $A(t,m) : R^n \to T_mM, t \in [0,l]$; (iii) последовательность независимых винеровских процессов $w_k(t)$ в R^n, $t \in [0,l], k \in Z$.

Тогда можем рассматривать на $M \times Z$ бесконечную систему стохастических дифференциальных уравнений Ито в форме Белопольской-Далецкого [2] такую, что для компоненты M_k имеет место уравнение вида:

$$d\xi_k(t) = exp_{\xi_k(t)}(a(t, \xi_k(t), \xi_{k-1}(t), \xi_{k+1}(t))dt + A(t, \xi_k(t))dw_k(t)), \tag{1}$$

где exp – экспоненциальное отображение связности Леви-Чивита метрики g, $\xi_i \in M_i, i = k-1, k, k+1$. Коэффициенты a и A от k не зависят, то есть уравнение инвариантно относительно сдвигов по номеру.

ТЕОРЕМА. *Пусть (i) $a(t, m, m_1, m_2)$ и $A(t,m)$ - локально липшицевы и ограничены по норме; (ii) существует равномерный риманов атлас [3] на M такой, что в картах этого атласа $\|tr\Gamma_x(A, A)\| \le C$, где C - некоторая положительная константа, нормы порождены римановой метрикой. Тогда уравнение (1) с начальными условиями*

$$\xi_k(0) = m_k, m_k \in M_k \tag{2}$$

имеет единственное сильное решение, определенное при $t \in [0,l]$.

Для доказательства мы изометрично вкладываем многообразие M в R^N достаточно высокой размерности, переходим от уравнения на бесконечном произведении многообразий M к уравнению в гильбертовом пространстве l_2 последовательностей векторов из R^N и затем сужаемся опять на произведение многообразий M. Заметим, что если M – компактное многообразие, то условия теоремы очевидно выполняются.

Литература: [1] Albeverio S., Daletskii A. and Kondratiev Yu. A stochastic differential equation approach to some lattice models on compact Lie groups// Random operators and stochastic equations, 1996, V.4,N3, 227-237. [2] Далецкий Ю.Л., Белопольская Я.И. Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. Киев: Выща школа, 1989.-295с. [3] Гликлих Ю.Е. Анализ на римановых многообразиях и задачи математической физики // Воронеж: изд-во ВГУ, 1989.-188с.

УДК 539.3

К теории простого динамического краевого эффекта анизотропной упругой тонкой оболочки вращения

А. А. Мочалин П. А. Мочалин

Рассматривается оболочка вращения, изготовленная из анизотропного материала имеющая одну поверхность упругой симметрии, параллельную срединной. Оболочка отнесена к триортогональной системе координат, связанной с меридианами и параллелями на срединной поверхности.

В качестве уравнений движения выбран вариант двумерной теории оболочек [1]. Соотношения упругости или уравнения состояния выбраны в виде [2], поскольку в [3] указано, что в теории оболочек вид уравнений состояния в определенной степени зависит от наших желаний и целей, которые мы преследуем.

Производя операцию растяжения масштаба и переходя к безразмерным координатам и перемещениям с учетом их интенсивности, связанным с малым параметром тонкостенности ($\varepsilon = h/R \ll 1$), получены асимптотически оптимальные уравнения, описывающие различные типы двумерных НДС в форме, удобной для изучения и решения методами асимптотического интегрирования при условии, что показатель интенсивности по окружной координате строго меньше единицы.

Следуя методу расчленения [3] построена безмоментная составляющая, головная система уравнений которой имеет асимптотическую погрешность $O(\varepsilon^2)$, и моментная составляющая, которая имеет асимптотическую погрешность $O(\varepsilon)$ и строится либо для удовлетворения нетангенциальной части граничных условий, либо для снятия невязки, появляющейся в этих условиях после построения безмоментной составляющей.

Уравнения моментной составляющей приводят к уравнению простого динамического краевого эффекта анизотропной тонкой упругой оболочки из которого следует аналогичное уравнение для изотропной оболочки [4] и уравнение простого статического краевого эффекта анизотропной тонкой упругой оболочки [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гольденвейзер А.Л. Классификация интегралов динамических уравнений линейной двумерной теории оболочек.// Прикладная математика и механика. Том 37. 1973. С. 591-603.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М., Наука, 1974, 448 С.
3. Гольденвейзер А.Л Теория упругих тонких оболочек. М., Наука , 1976, 512 С.
4. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов, 1986. 176С.

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ $t \to \infty$ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Мукминов Ф.Х., Кожевникова Л.М. (Стерлитамак)

Работа посвящена исследованию поведения при $t \to \infty$ решения первой смешанной задачи в цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$, $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, для полулинейного параболического уравнения второго порядка

$$u_t = \operatorname{div}(A(t,x)\nabla u) - a(|u|)u, \quad (t,x) \in D; \tag{1}$$

$$u|_{\{t>0\}\times\partial\Omega} = 0; \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \varphi(x) \in L_2(\Omega)\bigcap L_\infty(\Omega). \tag{2}$$

Здесь $A(t,x)$ — симметрическая матрица размера $n \times n$, элементы которой $A_{ij}(t,x)$, $i,j = \overline{1,n}$ измеримы по $(t,x) \in D$ и удовлетворяют условиям равномерной эллиптичности. Функция $a(u)$ непрерывная неотрицательная монотонно неубывающая. Рассматривается ограниченное неотрицательное решение задачи (1) - (2) с неотрицательной ограниченной финитной начальной функцией.

Через $\lambda(r)$, $\nu(r)$, $r > 0$ обозначим первые собственные значения задачи Дирихле для оператора Лапласа в Ω^r и S_r соответственно, где $\Omega^r = \{x \in \Omega : |x| < r\}$, $S_r = \{x \in \Omega : |x| = r\}$.

Для решения задачи (1) - (2) в области Ω, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{r\to\infty} r^2\lambda(r) = \infty, \quad \lim_{r\to\infty} \lambda(r) = 0, \tag{3}$$

$$\int_1^\infty \sqrt{\nu(s)}ds = \infty,$$

получена равномерная оценка сверху

$$u(t,x) \leq M\exp(-\kappa\lambda(\rho(t))t)\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}, \quad t \geq 1, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Функция $\rho(t)$ определяется из равенства $\lambda(\rho)t = \int\limits_1^\rho \sqrt{\nu(s)}\,ds$.

Для уравнения

$$u_t = \operatorname{div}(A(x)\nabla u) - |u|^q u, \quad q \geq 0 \tag{5}$$

в случае областей вращения

$$\Omega_f = \{x \in R_n,\ x = (x_1, x') : |x'| < f(x_1),\ x_1 > 0\},$$

где $f(r)$ — неотрицательная измеримая функция, получена оценка снизу

$$u(t,x) \geq m\exp(-K\lambda(\rho(t))t), \quad t \geq T, \quad x \in \Omega_f.$$

Относительно области Ω_f предполагается, что выполнены соотношения (3) и следущие условия. Функция $f(r) \geq C$, $r \geq 1$. Пусть существует функция $f_1(r) \leq f(r)$ такая, что $\int\limits_1^r \frac{ds}{f_1(s)} \leq B\int\limits_1^r \frac{ds}{f(s)}$, $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r}\int\limits_1^r \frac{ds}{f_1(s)} = \infty$. Для области Ω_{f_1} найдется постоянная $A > 0$ такая, что для любого максимального шара $B(r,(y,0'))$, $y > 1$, лежащего в Q_{f_1}, справедливо неравенство $A\int\limits_{y-r/2}^{y+r/2} \frac{ds}{f_1(s)} \geq 1$. Таким образом, для таких областей вращения в случае уравнения (5) оценка (4) точна по порядку.

В качестве примера рассмотрена область вращения

$$Q = \{|x'| < 3,\ x_1 > 0\}\bigcup\bigcup_{i=1}^\infty B(3^{\alpha i}, (3^i, 0)),$$

где $0 < \alpha < 1$. Показано, что решение задачи (5), (2) в области Q удовлетворяет неравенствам

$$a\exp\left(-Bt^{\frac{1}{1+2\alpha}}\right) \leq u(t,x) \leq A\exp\left(-bt^{\frac{1}{1+2\alpha}}\right), \quad x \in Q, \quad t \geq T.$$

О РАЗРЕШИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ N–ГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Мусаева И. М.(г. Махачкала)

Рассматривается задача

$$L^n_{p_0}u(t) \equiv \frac{1}{i}\frac{d^n}{dt^n}u(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}[A_{kj}+A_{kj}(t)]S_{h_{kj}+h_{kj}(t)}\frac{1}{i}\frac{d^k}{dt^k}u(t) = f(t), \quad (1)$$

$$u^{(k)}(t) = g_k(t),\ u^{(k)}(t_0+0) = g_k(t_0),\ t \le t_0,\ k = 0,\dots,n-1. \qquad (2)$$

Операторные коэффициенты A_{kj}, $A_{kj}(t) : X \to Y$, X, Y — гильбертовы пространства, $X \subset Y$, $\|\cdot\|_X \ge \|\cdot\|_Y$.

$A_{kj} : Y \to Y$ — замкнутые, $k, j \ge 0$.

$A_{kj} : X \to Y$ — вполне непрерывные, $k \ge 0$, $j \ge 1$, $h'_{jk}(t) \le r < 1$, $k = 0,\dots,n-1$, $j = 0,\dots,m$. Для операторов A_{kj} справедливо неравенство (лемма 2.1 [1])

$$\|A_{kj}u\|_Y < \varepsilon\|u\|_X + \chi_{A_{kj}}(\varepsilon)\|u\|_Y,\ \forall u \in X \subset Y.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

а) существуют пределы $\lim_{t\to\infty} A_{kj}(t) = 0$ *в сильном смысле,* $\lim_{t\to\infty} h_{kj}(t) = 0$, $h_{kj}(t) \in H(t_0,\infty)$, $k = 0,\dots,n-1$, $j = 0,\dots,m$.

б) $R_p(\lambda) \equiv \left(\lambda^n E - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} A_{kj}\lambda^k e^{-i\lambda h_{kj}}\right)^{-1}$ *— регулярна,* $\|R_p(\lambda)\|_X = O(1)$, $\|\lambda R_p(\lambda)\|_X = O(1), \dots, \|\lambda^n R_p(\lambda)\|_Y = O(1)$, $Im\lambda \ge \alpha$,

в) $f(t) \in Y^{0,\alpha}_{(t_0,\infty)}$;

Тогда, если $u(t)$ *— решение задачи (1), (2),* $\sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)}(t) \in L_2((t_0,\infty),X)$, *то* $u^{(n)}(t) \in L_2((t_0,\infty),X)$.

Литература

1. Р. Г. Алиев, Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом с операторными коэффициентами, Махачкала, 1991.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

Мустафокулов Р. (ТГНУ, Душанбе)

Пусть $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$, $\gamma_i = (a_{i-1}, a_i)$ $(i = \overline{1,m})$ и $\Gamma_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \gamma_i$. Рассмотрим на $\Gamma = (a,b)$ краевую задачу

$$Ly \equiv (p(x)y'')'' - (q(x)y')' = f(x) \ (x \in \Gamma_0), \tag{1}$$

$$\begin{cases} y(a_i - 0) = y(a_i + 0),\ y''(a_i - 0) = y''(a_i + 0) = 0 \ (i = \overline{1, m-1}), \\ [(py'')' - qy'](a_i - 0) - [(py'')' - qy'](a_i + 0) - \kappa(a_i)y(a_i) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \alpha(a)[(py'')' - qy'](a_i + 0) + y(a) = 0,\ \beta(a)y''(a) - \delta(a)y'(a+0) = 0, \\ \alpha(b)[(py'')' - qy'](b - 0) - y(b) = 0,\ \beta(b)y''(b) + \delta(b)y'(b-0) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

которая возникает при описании малых упругих колебаний растянутой цепочки из m шарнирно сочлененных стержней. Здесь $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, $\delta(\cdot) \geq 0$; причем $\beta(\cdot) + \delta(\cdot) > 0$.

Пусть $\mathcal{M}$ — множество функций $y(x)$, каждая из которых имеет на Γ_0 абсолютно непрерывные производные до третьего порядка и удовлетворяют условиям (2), (3). Рассмотрим на $\mathcal{M}$ спектральную задачу

$$Ly = \lambda m(x) y \quad (m(x) \geq 0) \tag{4}$$

В [1] установлены осцилляционные свойства (вещественность, положительность и простота всех точек спектра, перемежаемость нулей собственных функций и т.д.) спектра задачи (4) в случае, когда в узлах сочленения стержней отсутствуют упругие опоры (в условиях связи (2) коэффициент $\kappa(a_i) = 0$), а концы цепочки закреплены шарнирно (в краевых условиях (3) коэффициенты $\alpha(\cdot) = \sigma(\cdot) = 0$).

Имеет место утверждение

Теорема. *Пусть* $p(x) > 0$ *при* $x \in \Gamma_0$. *Тогда спектр задачи (4) является осцилляционным, если либо* $q(x) \geq 0$ $(q(x) \not\equiv 0)$ *при* $x \in \Gamma_0$, *либо* $q(x) \equiv 0$ *и* $q(a_i) + \kappa(a_i) > 0$ *при всех* $i = \overline{1, m-1}$, *либо* $q(x) \equiv 0$, $q(a_i) = \kappa(a_i) = 0$ $(i = \overline{1, m-1})$, $m \leq 3$ *и* $\beta(a) = \beta(b) = 0$.

Литература

[1] Покорный Ю.В., Лазарев К.П., ДУ, 1987, т.23, " 4, с.659—670.

УДК 517.518

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА ТИПА БЕСОВА-МОРРИ С ДОМИНИРУЮЩИМИ СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Наджафов А.М. (Баку, Азербайджан)

В.С.Гулиевым построены пространства типа Бесова-Морри $B^l_{p,\theta,a,æ,\tau}(G)$, Трибеля-Лизоркина-Морри $L^l_{p,\theta,a,æ,\tau}(G)$ и в работе [1] изучены дифференциальные разностные свойства функций из этих пространств в случае, когда область G удовлетворяет условию гибкого λ-рога.

В данной работе построено пространство типа Бесова-Морри с доминирующими смешанными производными $S^l_{p,\theta,a,æ,\tau}B(G)$ и изучены с точки зрения теории вложения некоторые свойства пространства $S^l_{p,\theta,a,æ,\tau}B(G)$, где G-область, удовлетворяющая условию гибкого рога, $l \in (0,\infty)^n$, $p \in [1,\infty)^n$, $[t]_1 = \min\{1,t\}$, $\theta,\tau \in [1,\infty]$, $a \in [0,1]^n$, $æ = \{æ_1,\ldots,æ_n\}$, $æ_j > 0, j = 1,\ldots,n$.

Через $S^l_{p,\theta,a,æ,\tau}B(G)$ обозначим банахово пространство локально суммируемых функций на G с нормой

$$\|f\|_{S^l_{p,\theta,a,æ,\tau}B(G)} = \sum_{e\subseteq e_n}\left\{\int_0^1\cdots\int_0^1\left[\frac{\left\|\Delta^{m^e}(h,G)D^{k^e}f\right\|_{p,a,æ,\tau}}{\prod\limits_{j\in e}h_j^{l_j-k_j}}\right]^\theta\prod_{j\in e}\frac{dh_j}{h_j}\right\}^{\frac{1}{\theta}}$$

где $e_n = \{1,2,\ldots,n\}$, e любое фиксированное подмножество множества e_n. $m^e = \{m_1^e,\ldots,m_n^e\}$, $m_j^e = m_j$, при $j \in e; m_j^e = 0$, при $j \in e_n\backslash e$, m_j-натуральные, k_j-целые неотрицательные числа, $m_j > l_j - k_j > 0$, $j = 1,2,\ldots,n$. $D^{k^e}f = D_1^{k_1^e}D_2^{k_2^e}\ldots D_n^{k_n^e}f$, $\Delta^{m^e}(h,G)f = \left(\prod\limits_{j\in e}\Delta_j^{m_j}(h_j,G)\right)f$.

$$\|\cdot\|_{p,a,æ,\tau} = \sup_{x\in G}\left\{\int_0^{\vartheta_1^0}\cdots\int_0^{\vartheta_n^0}\left(\prod_{j=1}^n[t_j]_1^{-æ_j\frac{a_j}{p_j}}\|\cdot\|_{p,G_{tæ}(x)}\right)^\tau\prod_{j=1}^n\frac{dt_j}{t_j}\right\}^{\frac{1}{\tau}}$$

Доказаны теоремы вложения типа ($\theta_1 < \theta_2, \tau_1 < \tau_2, 1 \le m \le n$) :

1) $D^\alpha : S^l_{p,\theta,a,æ,\tau_1}B(G) \subset\succ L_{q',b,æ',\tau_2}(G^m)$

2) $D^\alpha : S^l_{p,\theta_1,a,æ,\tau_1}B(G) \subset\succ S^{l^1}_{q',\theta_2,b,æ',\tau_2}B(G^m)$

3) Обобщенная производная $D^\alpha f$ на G удовлетворяет кратному условию Гельдера в метрике L_q для f из построенные пространства.

1. Гулиев В.С., Наджафов А.М. О некоторых теоремах вложения пространства типа Бесова-Морри и Лизоркина-Трибеля-Морри. /Воронежская зимняя математическая школа. "Современные методы теории функций и смежные проблемы". Воронеж, 1999. Тезисы докладов. стр. 71.

КОМПАКТНОСТЬ ОПЕРАТОРА ГАММЕРШТЕЙНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Насонов С.Н. (Липецк)

Пусть $\phi_j, \psi_j : (0,1] \to R$ – функции класса Φ [1-2], $D = [0,1] \times [0,1]$,

$$H_j^0 = \{h \in C(D) : |h(t,s) - h(\tau,\sigma)| \le a(\phi_j(|t-\tau|) + \psi_j(|s-\sigma|)),$$
$$\lim_{t\to\tau, s\to\sigma} |h(t,s) - h(\tau,\sigma)|/(\phi_j(|t-\tau|) + \psi_j(|s-\sigma|)) = 0\},$$

где $t,\tau,s,\sigma \in [0,1]$, $a = const$. H_j^0 – банахово пространство с нормой

$$\|h\|_C + \sup\{|h(t,s) - h(\tau,\sigma)|/(\phi_j(|t-\tau|) + \psi_j(|s-\sigma|)) : (t,s) \ne (\tau,\sigma)\}$$

$(j = 1,2)$. Через $G = K \circ F$ обозначим оператор Гаммерштейна , где F оператор суперпозиции $(Fx)(t,s) = f(t,s,x(t,s))$, а K – линейный оператор с частными интегралами

$$(Kx)(t,s) = c(t,s)x(t,s) + \int_0^1 l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau$$
$$+ \int_0^1 m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_0^1\int_0^1 n(t,s,\tau,\sigma)d\tau d\sigma.$$

Теорема. *Оператор Гаммерштейна с частными интегралами* $G : H_1^0(\phi,\psi) \to H_2^0(\phi,\psi)$ *и компактен, если выполняются следующие условия:*

$c(t,s) \in H_2^0(\phi,\psi)$;

$\int_0^1 |l(t,s,\tau) - l(\tilde t,\tilde s,\tau)|d\tau \le L[\phi_2(|t-\tilde t|) + \psi_2(|s-\tilde s|)], \int_0^1 |l(t,s,\tau)|d\tau < L'$;

$\int_0^1 |m(t,s,\sigma) - m(\tilde t,\tilde s,\sigma)|d\sigma \le M[\phi_2(|t-\tilde t|) + \psi_2(|s-\tilde s|)], \int_0^1 |m(t,s,\sigma)|d\sigma < M'$;

$\int_0^1 |n(t,s,\tau,\sigma) - (\tilde t,\tilde s,\tau,\sigma)|d\tau d\sigma \le N[\phi_2(|t-\tilde t|) + \psi_2(|s-\tilde s|)]$;

для любых $\varepsilon, r > 0$, *можно указать такое* $\delta > 0$, *что*

$|f(t,s,u) - f(\tau,\sigma,v)| \le \varepsilon[\phi_2(|t-\tau|) + \psi_2(|s-\sigma|) + \phi_2[\phi_1^{-1}(\frac{|u-v|}{r} - \psi_1(|s-\sigma|))] + \psi_2[\psi_1^{-1}(\frac{|u-v|}{r} - \phi_1(|t-\tau|))]]$, *где* $|t-\tau| < \delta, |s-\sigma| < \delta, |u|, |v| < r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений.—М.:Наука, 1980
2. Appel J., Zabrejko P.P. Nonlinear superposition operators. Cambridge University Press. 1990, 182-204

Структурно-функциональный анализ решений модельных дискретных и непрерывных дифференциальных уравнений дробного порядка
Нахушев А.М. (г. Нальчик)

Линейное непрерывное дифференциальное уравнение порядка β имеет вид:

$$\int_{\alpha}^{\beta} a_\xi(x)\, D_{ax}^{\xi}\, u(t)\, d\xi + \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x)\, D_{ax}^{\alpha_j}\, u(t) = f(x), \quad x \in [A, B], \tag{1}$$

где $0 \le \alpha \le \beta \le \infty$, $\beta \ge \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$, $a_\xi(x)$ – суммируемая по ξ функция точки $(\xi, x) \in [\alpha, \beta] \times [A, B]$, $b_j(x)$ и $f(x) \in L[A, B]$, D_{ax}^{ξ} – оператор дробного дифференцирования порядка ξ с началом в точке $a \in [A, B]$ и с концом в точке x [1].

К уравнению вида (1) приводят многие проблемы теории уравнений смешанного типа, физики полимеров и фрактальных сред [2]. В частности, уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}\, t^{\beta}\, u(t) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\, D_{0x}^{\alpha_j}\, u(t) + b(x\, u = c(x) \tag{2}$$

играет важную роль в теории обратных задач для вырождающихся уравнений гиперболического типа, а уравнение

$$D_{\mu t}^{\alpha} N(\tau) = pN(t), \quad t < \mu, \ 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

где μ – время демографического взрыва является моделью народонаселения.

В работе: 1) будет произведен структурно-качественный анализ всех решений уравнений вида (1), которые встречаются при математическом моделировании физических и биологических процессов; 2) решен вопрос о корректной (локальной и нелокальной) постановках задачи Коши для дискретных и непрерывных дифференциальных уравнений; 3) исследованы спектральные свойства операторов $D_{ax}^{\alpha}(t-a)^{\beta}$, $D_{ax}^{-\alpha} d^2/dt^2$; 4) сформулирован и доказан принцип экстремума для широкого класса уравнений вида (2); 5) найдено интегральное представление решений уравнения (2), позволяющее для него правильно сформулировать взвешенную (в особой точке $x = a$) задачу типа Штурма-Лиувилля и найти необходимое и достаточное условия ее однозначной разрешимости; 6) найдены различные применения дифференциальных операторов дробного порядка, в частности замечено, что решение видоизмененной задачи Коши: $\lim\limits_{t \to \mu} (\mu - t)^{\alpha - 1} N(t) = 179 \cdot 10^9$ для уравнения (3) при $p = 0$, $\alpha = 0,01$, $\mu = 2027$ совпадает с эмпирической формулой: $N(t) = 179 \cdot 10^9 \cdot (2027 - t)^{-0,99}$, предложенной Форстером для описания населения мира [3, 4].

Литература

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М., Высш. шк., 1995. – 301 с.

2. *Нахушев А.М., Нахушева В.А., Сербина Л.И.* О некоторых прикладных аспектах дробного исчисления. Тезисы XIV Международной конференции ¡Воздействие интенсивных потоков энергии на вещество¿. Терскол. 1999.

3. *Капица С.П.* Вестник Российской Академии Наук. 1998. Т. 68, № 3. С. 234–241.

4. *Нахушев А.М., Кенетова Р.О.* Математическое моделирование социально-исторических и этнических процессов. Нальчик, Эль-фа, 1998. – 171 с.

Краевая задача для многочленов

С.М. Никольский

Для оператора в n-мерном эвклидовом пространстве $R^n \supset \partial\Omega$

$$LU = \sum_{|\alpha|,|\beta|=l} a_{\alpha,\beta} U^{(\alpha+\beta)}, \qquad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \quad l = 1, 2, \ldots$$

эллиптического с постоянными коэффициентами, и поверхности $\sigma = \sigma_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$, определяемой уравнением

$$H(x) = 1$$
$$H(x) = \sum\nolimits_{|\alpha|,|\beta|=s} b_{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta} \geq c \sum\nolimits_{|\alpha|=s} x^{2\alpha}, \qquad c > 0$$

рассматривается краевая задача первого рода

$$LU = 0, \ x \in \Omega, \qquad U^{(\alpha)}|_\sigma = P^{(\alpha)}|_\sigma,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| \leq s, \quad |\alpha| = \sum_1^n \alpha_i, \quad \partial\Omega = \sigma.$$

Доказывается, что при $s = 1$ для любого заданного многочлена $P = P_n(x)$, $x \in R^n$ степени n решение этой задачи есть тоже многочлен степени n.

Доказательство ведется вариационным методом. Эта теорема обобщает классический результат, изложенный, например, в учебнике С.Л.Соболева по математической физике в трехмерном пространстве, или в n-мерном пространстве в книге Стейна и Вейса по гармоническому анализу.

Огарков В.Б. (г. Воронеж)

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Рассматривается плоское напряжённое состояние ортотропного упругого тела. С использованием потенциала напряжений основное разрешающее уравнение плоской задачи упругого тела имеет вид:

$$\frac{1}{E_1}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}+\left(\frac{1}{G_2}-\frac{2\mu_1}{E_1}\right)\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{1}{E_2}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}=0 \qquad (1)$$

Введём в рассмотрение следующие комплексные функции:

$$\text{Л}_1=iF_1+F_2;\ \text{Л}_2=F_1-iF_2 \qquad (2)$$

$$F_1=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2};\quad F_2=\sqrt{\varpi}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \qquad (3)$$

$$\omega=\frac{E_1}{E_2}-\lambda^2;\quad \lambda=\frac{E_1}{2G_2}-\mu_1 \qquad (4)$$

Тогда для функции Л_1 можно получить следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$i\frac{\partial^2\text{Л}_1}{\partial x^2}+(i\lambda+\sqrt{\omega})\frac{\partial^2\text{Л}_1}{\partial y^2}=0 \qquad (5)$$

Введём теперь в рассмотрение комплексные функции:

$$g_1=\alpha_2+i\alpha_1;\quad g_2=\alpha_1-i\alpha_2 \qquad (6)$$

$$\alpha_1=\sqrt{\lambda-i\sqrt{\varpi}}\,\frac{\partial\text{Л}_1}{\partial y};\quad \alpha_2=\frac{\partial\text{Л}_1}{\partial x} \qquad (7)$$

Для функции Л_1 получено следующее дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных:

$$i\frac{\partial g_1}{\partial x}-\sqrt{\lambda-i\sqrt{\omega}}\,\frac{\partial g_1}{\partial y}=0 \qquad (8)$$

Таким образом, в работе разработан алгоритм приведения основного разрешающего уравнения четвёртого порядка относительно потенциала напряжений к уравнению первого порядка.

Огарков В.Б. (г. Воронеж)

К ВОПРОСУ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКОВ

1. Рассмотрено дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$\frac{d^3f}{dt^3} + a_1\frac{d^2f}{dt^2} + a_2\frac{df}{dt} + a_3 f = Л(t) \qquad (1)$$

Здесь $Л(t)$ – заданная функция; a_1, a_2, a_3 – заданные коэффициенты, $f(t)$ – искомая функция.

Уравнение (1) целесообразно представить в виде системы трёх дифференциальных уравнений. Путём введения потенциальных функций она сводится к системе двух уравнений второго порядка. Эта система приводится к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка, поскольку можно извлечь квадратный корень из матрицы второго порядка. Полученная система приводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка.

2. Рассмотрено также дифференциальное уравнение четвёртого порядка:

$$\frac{d^4f}{dt^4} + a_1\frac{d^2f}{dt^2} + a_2\frac{df}{dt} + a_3 f = Л(t) \qquad (2)$$

Уравнение (2) представлено в форме:

$$\left(A + B\frac{d}{dt}\right)\left(A + B\frac{d}{dt}\right)[f] + \left(C + \frac{d^2}{dt^2}\right)\left(C + \frac{d^2}{dt^2}\right)[f] = Л(t) \qquad (3)$$

Путём сравнения коэффициентов уравнений (2) и (3) получены формулы:

$$A = \sqrt{a_3 - C^2}; \qquad B = \sqrt{a_1 - 2C} \qquad (4)$$

$$C^3 - \frac{a_1}{2}C^2 - a_3 C + \frac{a_3 a_1}{2} - \frac{a_2^2}{8} = 0 \qquad (5)$$

Уравнение (3) приводится сначала к уравнению второго, а затем первого порядка. Таким образом, для решения дифференциального уравнения четвёртого порядка достаточно решить кубическое уравнение (5).

ДОПУСТИМОСТЬ ПАР (α_m, X) ДЛЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА В СВЕРТКАХ

Ойнас И.Л. (Краснодар)

Рассматривается система

$$x_n = \sum_{l=0}^{n} A_{n-l} x_l + f_n, \qquad n \geq 0,$$

где $\{x_n\}$, $\{f_n\}$ - последовательности k-мерных векторов, $\{A_n\}$ - последовательность $k \times k$-матриц, причем матрица $I - A_0$ обратима (I - единичная матрица).

Положим

$\alpha_m = \{ (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) / x_n = c_0 + \frac{c_1}{n+1} + \ldots + \frac{c_m}{(n+1)^m} (n \to \infty)$, где $c_i \in R^k$ либо c_i – матрицы размерности $k \times k$ $\}$

Теорема 1. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} n^m \|A_n\| < \infty$ и матрица $I - \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ обратима в круге $|z| \leq 1$. Тогда при $\{f_n\} \in \alpha_m$ решение $\{x_n\} \in \alpha_m$, т. е. пара (α_m, α_m) допустима относительно уравнения (1).

Теорема 2. Пусть матрица $(I - \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n)^{-1}$ имеет в круге $|z| < 1$ конечное число полюсов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ порядков $m_1, m_2, \ldots, m_p$ соответственно. Пусть далее $\sum_{n=0}^{\infty} n^m \|A_n\| < \infty$ и $\{f_n\} \in \alpha_m$. Тогда для решения $\{x_n\}$ уравнения (1) справедливо представление

$$x_n = \sum_{j=1}^{k} P_{m_j - 1}(n) \lambda_j^{-n} + \sum_{j=0}^{m} \frac{c_j}{(n+1)^j} + \frac{o(1)}{(n+1)^m}, n \to \infty,$$

где $P_r(n)$ – многочлен степени r с векторными коэффициентами, $c_j \in R^k$.

Обозначим через $\lambda_j(A)$ собственные значения матрицы A. Далее соотношения между матрицами понимаются покомпонентно.

Теорема 3. Пусть $A_n \geq 0$ при $n \geq 0$, причем $|\lambda_j(A_0)| < 1$ и $A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k > 0$. Тогда, чтобы пара (α_m, α_m) была допустима для уравнения (1), необходимо и достаточно выполнение условий

1) $\sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty$ и $|\lambda_j(A)| < 1$

2) $\left\{ n^m \sum_{k=n}^{\infty} A_k \right\} \in \alpha_0$

Области, устойчивые по управлению, в модели ядерного реактора

И. И. Олюнина (*Н.Новгород*)

Рассматривается управляемая динамическая система (УДС) с фазовыми ограничениями

$$\begin{cases} x' = ax(1+x) + u(t)y(1+x) \\ y' = x - y, \end{cases} \tag{1}$$

где $(x,y) \in \Omega_0$ $(\Omega_0 : \{|x| \leq \alpha, |y| \leq \beta\}), u(t)$ - произвольная кусочно-непрерывная ограниченная функция, $u(t) \in [m,n]$.

При $u(t) \equiv const = b$ эта система является линейной сосредоточенной моделью динамики ядерного реактора в пренебрежении запаздывающими нейтронами и подробно проанализирована в [1] при $\forall x \in R^2$. Фазовые переменные соответствуют мощности и температуре. Параметры a и b пропорциональны соответственно мощностному и температурному коэффициентам реактивности. Известно [1], что в области $a+b<1$, $a<0$ в автономной системе существует два состояния равновесия - седло C(-1,-1) и устойчивый узел (фокус) P(0,0). Для УДС (1) оба состояния равновесия являются неподвижными и расположены в узловых точках контактной кривой.

Решены задачи построения области управляемости в окрестность неподвижного устойчивого фокуса и зоны иммунитета [2] этого состояния равновесия. Назовем точки касания траекторий сшитой mn (nm)-системы с границей области Ω_0 особыми k-точками этой системы, а положительную (отрицательную) полутраекторию с началом в k-точке ее $\alpha(\omega)$- сепаратрисой; ω-сепаратрисы k-точек входят в границы области управляемости и зоны иммунитета.

При численном исследовании УДС (1) было зафиксировано значение $n=-0.6$, значение m - уменьшалось, начиная с $m=n$. Численное исследование, проведенное в области Ω_0 при $\alpha=5$, $\beta=3$ подтвердило, что вокруг неподвижного устойчивого фокуса в управляемой системе рождается предельный цикл mn-системы той же устойчивости, который расширяется при увеличении промежутка $[mn]$. (Его появление удалось зафиксировать при $[m,n]=[-1.7;-0.6]$). При m=-1.93 цикл касается границы $\partial\Omega_0$ (что соответствует слиянию α- и ω-сепаратрис k-точки). После чего зона иммунитета исчезает "скачком".

Литература

[1] В.Д. Горяченко "Кач. мет. в динамике ядерных реакторов"/М. Энергоатомиздат. 1983г.

[2] Н.Н.Бутенина. Тезисы докладов.ВВМШ "Понтрягинские чтения IX",Воронеж,1998,С.41

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Омар Халед, (Махачкала)

Рассматривается уравнение

$$L_{po}^{2,\omega}u(t)\equiv D_t^2 u(t)-\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{m}\left[A_{kj}+A_{kj}(t)\right]S_{h_{kj}+h_{kj}(t)}D_t^k u(t)=f(t)$$

с неограниченными операторными коэффициентами , где $D_t^k=\frac{1}{i^k}\frac{d^k}{dt^k}$, $A_{kj}(t):Y\to Y$ – замкнутые операторы, $A_{kj}(t):X\to Y$ – ограниченные операторы, X,Y – гильбертовы пространства, $X\subset Y$, $\|\cdot\|_X\geqslant\|\cdot\|_Y$, $S_{h_{kj}}u(t)=u(t-h_{kj})$, $h_{kj}=const$, $h_{k0}=0$, $h_{kj}(t)\in AC(0,\omega)$, $h'_{ks}(t)\leqslant\tau<1$. $f(t)$ – ω – периодическая функция.

Доказывается следующая

Теорема. Пусть выполнены условия:

а) $A_{kj}:X\to Y$ – вполне непрерывные операторы, $j=1,2,\dots,m$, $k=0,1$;

б) $\forall n\,\exists R_n\equiv\left[\left(\frac{2\pi n}{\omega}\right)^2E-\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{m}A_{kj}\exp\left(-i\frac{2\pi n}{\omega}h_{kj}\right)\left(\frac{2\pi n}{\omega}\right)^k\right]^{-1}:Y\to X$,

$$\|R_n\|_X=O(1),\ \|nR_n\|_X=O(1),\ \|n^2R_n\|_Y=O(1),\ |n|\to\infty.$$

в) $f(t)\in L_2((0,\omega),Y)$

Тогда существует $\varepsilon>0$ такое, что при выполнении условий

$$\|A_{kj}(t)\|_Y\leqslant\varepsilon,\quad |h_{kj}(t)|\leqslant\varepsilon,\quad t\in(0,\omega),\ j=0,1,\dots,m,\ k=0,1,$$

оператор $L_{po}^{2,\omega}:X_{(0,\omega)}^{2,0}\to Y_{(0,\omega)}^{0,0}$ непрерывно обратим.

Здесь

$$X_{(0,\omega)}^{2,0}=\left\{u(t),\ \|u(t)\|^2=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\left(\|u(t)\|_X^2+\|u'(t)\|_X^2+\|u''(t)\|_Y^2\right)dt<\infty\right\}$$

$$Y_{(0,\omega)}^{0,0}=\left\{u(t),\ \|u(t)\|^2=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\|u(t)\|_Y^2\,dt<\infty\right\}$$

УДК 517.929 **О НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

ОРУДЖЕВ М.И.

г.Махачкала, аспирант ДГУ, пр.Шамиля 68[a] кв.10, тел.:62-28-51, E-mail: abdulgal@datacom.ru

В настоящей работе изучается уравнение

$$L_{po}u(t) \equiv (D_t - \sum_{j=0}^{m}[A_j + A_j(t)]S_{h_j+h_j(t)} -$$

$$-\int_{\tau_1}^{\tau_2} d_\tau [A(\tau) + A(t,\tau)]S_\tau)u(t) = f(t), \quad t \in R \qquad (1)$$

с неограниченными операторными коэффициентами A_j, $A_j(t)$, области определения которых принадлежат гильбертовому пространству X, области значений – Y, причем X вложено в Y компактно,

$$X \subset Y, \ \|\cdot\|_X \geq \|\cdot\|_Y,$$

$$\|(A_j + A_j(t))u\|_Y \leq C\|u\|_X \quad \forall\ u \in X, \ \mathrm{C} = \mathrm{const}, \ j = 0,1,\ldots,m, \ t \in R,$$

$A(\tau)$ и $A(t,\tau)$ - оператор-функции: $X \to Y$, имеющие ограниченную вариацию по τ (при любом фиксированном t для $A(t,\tau)$).

На оператор-функцию $A(\tau)$ накладывается условие:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\|\frac{dA(\tau)}{d\tau}\right\|_Y^2 d\tau < c < \infty, \ -\infty < \tau_1 < \tau_2 < \infty;$$

$$S_h u(t) \equiv u(t-h).$$

$h_j(t)$ – абсолютно непрерывные функции,

$$h_j'(t) \leq r < 1, \ \ t \in R, \ \ j = 1,2,\ldots,m, \ \ h_0(t) = h_0 = 0.$$

Множество таких $h_j(t)$ обозначим через HR.

Оператор L_{po} рассматривается как оператор, действующий из гильбертова пространства $X_R^{1,\alpha}$ с нормой

$$\|u(t)\|_R^{1,\alpha} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\alpha t)(\|u(t)\|_X^2 + \|u'(t)\|_Y^2)dt\right)^{1/2}$$

в гильбертово пространство $Y_R^{0,\alpha}$ с нормой

$$\|u(t)\|_R^{0,\alpha} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\alpha t)\|u(t)\|_Y^2 dt\right)^{1/2}, \quad \alpha = const \in R,$$

$$L_p \equiv L_{po}\Big|_{A_j(t)\equiv 0,\ h_j(t)\equiv 0,\ j\geq 0}; \quad D_t \equiv \frac{1}{i}\frac{d}{dt}.$$

Операторно-значная функция

$$R_p(\lambda) \equiv (\lambda E - \sum_{j=0}^{m} A_j \exp(-i\lambda h_j) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \exp(-i\lambda\tau)dA(\tau))^{-1} : Y \to X$$

называется резольвентой для оператора

$$A_p = \sum_{j=0}^{m} A_j S_j + \int_{\tau_1}^{\tau_2} dA(\tau)S_\tau.$$

Обозначим $L_0(Y,Y)$ $(L_\infty(X,Y))$ множество замкнутых (вполне непрерывных) операторов из Y в Y (X в Y).

Теорема. Пусть выполнены условия:

а) $A_j + A_j(t) \in L_0(Y,Y) \cap L_\infty(X,Y)$, $t \in R$, $j \geq 1$;/

$$\exists \lim_{|t|\to\infty} \|A_j(t)\|_Y = 0,\ \lim_{|t|\to\infty} h_j(t) = 0,\ h_j(t) \in HR,\ j \geq 0,\ \lim_{|t|\to\infty} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\|\frac{d_\tau A(t,\tau)}{d\tau}\right\|_Y^2 d\tau = 0;$$

$A_j(t)$ непрерывно зависит от $t \in R$, $j \geq 0$; $\dfrac{d_\tau A(t,\tau)}{d\tau}$ сильно непрерывна по $t \in R$:

б) резольвенты $R_P(\lambda)$ и $R_P(\lambda, t) \equiv (\lambda E - A_0 - A_0(t))^{-1}$ для любого фиксированного $t \in R$ регулярны,

$$\|R_p(\lambda)\|_X = 0(1),\ \|\lambda R_p(\lambda)\|_Y = 0(1),\ \|R(\lambda,t)\|_X = 0(1),\ \|\lambda R(\lambda,t)\|_X = 0(1),\ |\lambda| \to \infty,\ t \in R,$$

Тогда коядро оператора $L_{po} : X_R^{1,\alpha} \to Y_R^{0,\alpha}$ конечномерно.

ОБОБЩЕННЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПА КРОНЕКЕРА-КРАСНОСЕЛЬСКОГО

О.В.Осинцева, Е.В.Соломатина (Воронеж)

Фундаментальная роль топологии в исследовании проблемы разрешимости нелинейных задач общеизвестна. Указанная традиция восходит к работам Римана, Кронекера, Пуанкаре и получила мощное развитие в XX веке: Брауэр, Хопф, Лефшец, Лере, Шаудер, Красносельский, Браудер и многие другие. В Воронеже развиваются методы топологической степени и ее обобщений как на однозначные, так и на многозначные отображения.

О.В.Осинцевой построена обобщенная топологическая характеристика $\chi(f, A)$ гладких отображений $f : S^{n-1} \to \mathbf{R}^n \backslash A$ сферы (или диффеоморфного ей многообразия) в евклидово пространство с выброшенным множеством A. В простейшем случае, когда A состоит из единственной точки $a \in \mathbf{R}^n$, возникает классическая ситуация топологической степени $deg(f, a)$, характеризующей решения уравнения $f(x) = a$. В общем случае более чем одноточечного множества A речь идет о разрешимости включения $f(x) \in A$. При этом развивается идея, связанная с физическим представлением о потоке через поверхность $\Gamma = f(S^{n-1})$ напряженности векторного поля, порожденного единичными зарядами, распределенными на множестве A. Возникающая здесь дифференциальная $n-1$-форма ω^{n-1}, как оказывается, связана с топологической характеристикой множества решений включения $f(x) \in A$. Исследован общий случай, когда A состоит из подмногообразий размерности k, $2 \leq k < n$, в $\mathbf{R}^n$; доказаны аналоги классических теорем о сохранении характеристики $\chi(f, A)$ при гомотопии f; теоремы о сумме обобщенных индексов особых точек; получены представления для этих индексов через интегралы соответствующих дифференциальных форм; установлен принцип существования решения для включения $f(x) \in A$.

О ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ ПРОХОЖДЕНИЯ ЧЕРЕЗ ОБЛАСТЬ

Отакулов С., Очилов С. (Самарканд)

Изучается задача оптимизации времени прохождения объекта через возможно движущуюся область, выраженного в форме системы линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием [2].

Рассматривается случай, когда в начальном интервале времени функционирования системы объект находится внутри области, а в конечном не пересекает ее.

Математическая модель задачи имеет вид

$$T(x(\cdot)) = \int_0^1 \delta(x(t), t))dt \to min,$$

где

$$\delta(x(t), t) = \begin{cases} 1, & x(t) \in M(t), \\ 0, & x(t) \notin M(t), \end{cases}$$

при условиях

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t), t \in [0, 1]$$

$$x(t) = x_0(t) \in M(t), t \in [-h, 0], x(1) \not\subset M_1 \cap M(1), u(t) \in U, t \in [0, 1]$$

Здесь $x \in R^n, U \subset R^r, A, A_1 - n \times n$ - матрицы, B $- n \times r$ - матрица, U - множество допустимых управлений,

$\mathrm{M}_1 = \{\mathrm{x} \in R^n : \varphi_j(x) \leq 0, j = \overline{1, m}\}$, $M(t) = \{x \in R^n : \varphi_0(x, t) \leq 0\}, 0 \leq t \leq 1$

Для рассматриваемой задачи сформулированы и доказаны необходимые условия оптимальности. Результаты получены на основе редукции задачи к общей задаче математического программирования и использования обобщенного правила множителей Лагранжа [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума.-М:Наука, 1982г, -144с.

2. Шахидзе А.Н, Очилов С. Необходимые условия оптимальности в задаче оптимизации времени прохождения через область. Деп. в ГФНТИ г.Ташкент 07.11.1996 N2606 – Уз.96.15 стр.

О СУЩЕСТВОВАНИИ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ РЕЗОНАНСНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Павленко В.Н., Винокур В.В.(Челябинск)

Рассматривается третья эллиптическая краевая задача

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + c(x)u(x) = -g\left(x, u(x)\right) + p(x), \quad x \in \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_L} + \sigma(x)u(x) = 0, \quad (2)$$

L – равномерно эллиптический дифференциальный оператор в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелева (mod 0) и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет разрывы только первого рода. Функция $p \in L_q(\Omega)$, $q > 2n/(n+2)$. Предполагается, что ядро N линейной части уравнения с граничным условием (2) ненулевое. В этом случае задача (1) - (2) называется резонансной. Вариационным методом устанавливается следующий результат.

Теорема 1 *Предположим, что*
1) $J(u) \geq 0 \ \forall u \in W_2^1(\Omega)$, *где*

$$J(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} c(x)u^2(x)dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(s)u^2(s)ds;$$

2) Для некоторой $a \in L_q(\Omega)$ *и п. в.* $x \in \Omega$ $|g(x,u)| \leq a(x) \quad \forall u \in \mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{N \ni u, \|u\| \to +\infty} G_p(u) = +\infty$, $G_p(u) = \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u(x)} \left(g(x,s) - p(x)\right) ds$

Тогда существует $u_0 \in W_2^1(\Omega)$, *для которого*

$$J_p(u_0) = \inf_{W_2^1(\Omega)} J_p(u), \quad J_p(u) = J(u) + G_p(u)$$

причем, любое такое $u_0 \in W_2^1(\Omega)$ *удовлетворяет включению*

$$Lu_0 - p(x) \in [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))] \text{ для почти всех } x \in \Omega \quad (3)$$

и граничному условию (2). Если дополнительно предположить, что для уравнения (1) выполнено A-условие [1], то любое u_0, *удовлетворяющее (3) является полуправильным решением [2] задачи (1) - (2).*

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97-01-00444) и Международной Соросовской Программой образования в области точных наук (грант 1044d).

Литература

[1] Павленко В.Н. Вариационный метод для уравнений с разрывными операторами. Учебное пособие. Челяб. гос. унив. - Челябинск, 1997.

[2] Красносельский М.А., Покровский А.В. Об эллиптических уравнениях с разрывными нелинейностями. Доклады РАН, 342, №6, 731-734 (1995).

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ ПЛАСТИНЫ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Павлов С.П. (Саратов)

При изменении формы в задачах оптимизации упругой области может оказаться, что температурное поле тоже изменяется за счет изменения условий теплообмена. Учет влияния этого фактора является одной из основных целей данного доклада.

Предполагается, что температура $\theta(x,y,z,t) = \theta(x,y,t)$, то есть постоянна по толщине. В результате усреднения по толщине пластины трехмерного уравнения теплопроводности и двухмерных граничных условий для теплового поля получаем следующее уравнение для $\theta(x,y,t)$

$$\left(2h\lambda\theta^*_{,\alpha}\right)_{,\alpha} - 2\lambda\theta_{,\alpha}(x,y,h)\cdot h_{\alpha} - 2hC_{\varepsilon}\dot{\theta}^* + 2h\omega_0^* = 0.$$

Рассматривается следующая задача оптимизации: найти границу Γ плоской области Ω, которая минимизирует функционал

$$I_S = \iint_{\Omega} d\Omega \tag{1}$$

при ограничениях на напряженное состояние пластины, определяемое функционалом

$$I_{\sigma} = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(\sigma^e_{ij} - c_{ijkl}\alpha_{kl}\theta\right)\left(\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl}\theta\right)d\Omega. \tag{2}$$

Выводятся условия оптимальности для различных условий закрепления пластины, условий теплообмена на ее кромках и поверхностях. Методом сопряженных переменных получено выражение для производной функционала цели (1) $\dot{I}_S$ при ограничениях (2) $\dot{I}_{\sigma}$ по нормальному смещению искомой границы V_n.

Рассмотрены различные случаи, постановки задач оптимизации. В частности при отсутствие механических нагрузок $\varepsilon^*_{ij} = 0, u^*_i = 0, \bar{f}_i = 0, F_i = 0$ и тогда

$$\dot{I}_{\sigma} = \int_{\Gamma^f}\left\{\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\varepsilon^T_{ij} - c_{ijkl}\alpha_{kl}\theta\right) + q_i\varphi^*_i - \overline{\omega}_0\theta^*\right\}\nu_n d\sigma - \int_{\Gamma^f_u} t^T_i u^T_{i,n}\nu_n d\sigma + \tag{3}$$
$$+ \int_{\Gamma^f_q}\left\{\left(\overline{q}_{\Gamma}\theta^*\right)_{,n} - 2\overline{q}_{\Gamma}\theta^* K_m\right\}\nu_n d\sigma + \int_{\Gamma^f_{\theta}}\left\{-q_i\varphi^*_i + q^*\left(\theta - \theta^0\right)_{,n}\right\}\nu_n d\sigma,$$

где (*) означает сопряженную переменную. Если участки закрепления в однородной пластине при стационарном температурном поле отсутствуют $(\overline{\omega}_0 = 0)$ $\sigma_{ij} = \sigma^T_{ij} = 0$ и $\varepsilon_{ij} = c_{ijkl}\theta_{kl}\theta$, то, как следует из (3), $\theta^* = 0$. Рассмотрены также другие возможные комбинации наличия теплового и механического нагружения пластины.

ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ.

Павлова М. Н. (г. Ставрополь)

В докладе приводится оценка сверху спектрального радиуса $r(A)$ интегральных операторов вида

$$Ax(t) = \int_{\Omega} K(t,s)x(s)ds,$$

где $K(t,s)$- непрерывное матричное - ядро $K(t,s) = (K_{ij}(t,s))$ ($i,j = 1,2...n$). Тогда функции $K_{ij}(t,s)$, заданные для $t,s \in \Omega$, порождают действующий и вполне непрерывный оператор в пространстве $C_n(\Omega)$ непрерывных вектор функций $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)...x_n(t))$ $(t \in \Omega)$.

Теорема. Пусть $r(A)$-спектральный радиус матричного интегрального оператора (1) в пространстве $C_n(\Omega)$,

$$U(s) = \int_{\Omega} \|K(t,s)\|^2 dt, \; V(s) = \int_{\Omega} \|K(s,t)\|^2 dt,$$

покажем, что

$$|r(A)| \le \left[\int_{\Omega} (U(s)V(s))^{\frac{1}{2}} ds \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Для доказательства теоремы рассматривается система

$$r(A)\vec{x}(t) = \int_{\Omega} K(t,s)\vec{x}(s)ds.$$

Решение системы выбирается так, чтобы

$$\int_{\Omega} \|\vec{x}(t)\|^2 dt = 1$$

Проводя преобразования и используя неравенство Гельдера для интегральных операторов, получаем искомый результат. Теорема является развитием известного неравенства Фарнелла.

Литература.

1. Стеценко В.Я. Теоремы Островского и оценки спектрального радиуса матриц и интегральных операторов. Международная конференция, РГУ, 1998, С.

ЗАДАЧА ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ СЛОЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ НАД ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С.Н. ПАРШИНА (ТВЕРЬ)

Пусть неньютоновская жидкость занимает область Ω трехмерного пространства, ограниченную гладкими, замкнутыми свободной и твердой поверхностями, причем Ω является звездной относительно твердой поверхности. Кроме того, обе поверхности задаются с помощью конечных наборов локальных карт. В основу постановки задачи положен следующий закон $T_{ij}(\vec{v}) = -p\,\delta_{ij} + \nu(1+\gamma(|\hat{v}|^2))S_{ij}(\vec{v})$ зависимости тензора напряжений T_{ij} от тензора скоростей деформаций S_{ij}. Здесь p — давление, $\vec{v}$ — вектор скорости, ν — коэффициент кинематической вязкости, $S_{ij}(\vec{v}) = v_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$, $|\hat{v}|^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{3} v_{ij}^2$, $\gamma(t)$ — неотрицательная, монотонно возрастающая, ограниченная функция от $t \geq 0$, $\gamma(0) = 0$, а для некоторых положительных постоянных b, q, c_1 и c_2 на промежутке [0,b) выполняются неравенства $c_1 t^{q/2} \leq \gamma(t) \leq c_2 t^{q/2}$. Кроме того, $\gamma \in C^3$, и все производные функции γ ограничены. На твердой поверхности задан вектор скорости, а на свободной — нормальная компонента тензора напряжений. Определению подлежат вектор-функция $\vec{v}$, скалярная функция p и набор локальных карт, задающих свободную поверхность. Существование решения задачи доказано в пространствах Гельдера. Общая схема доказательства ее разрешимости такова. Сначала методом Галеркина доказано существование обобщенного решения задачи в фиксированной области, затем установлена его единственность и классичность, а также получена оценка решения в пространствах Гельдера. Задача в фиксированной области отличается от исходной отсутствием одного из краевых условий на свободной поверхности, специальная структура которого определяет успех исследования. В левой части этого условия — обратимый нелинейный эллиптический оператор второго порядка, определенный на функциях, задающих свободную поверхность, а правая часть содержит малый оператор, в который свободная поверхность входит неявно через решение задачи с фиксированной границей. Поэтому применение принципа сжатых отображений приводит к доказательству теоремы об однозначной разрешимости исходной задачи.

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ В РЕШЕНИИ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Пеньков В.Б. (Липецк), Пеньков В.В. (Тула)

Под состоянием среды понимается любая совокупность характеристик среды, отвечающим ее определяющим соотношениям. Множество всех возможных состояний внутри объема V образует пространство внутренних состояний Ξ. Следы этих состояний на ∂V формируют пространство граничных состояний Г. Если среда линейна и для нее выполняется теорема взаимности, то пространства Ξ, Г являются гильбертовыми (сепарабельными и изоморфными).

Имея в распоряжении базисы этих пространств, процесс решения основных задач механики можно рассматривать как последовательность рутинных операций по вычислению коэффициентов Фурье.

Для призматического линейно-упругого изотропного тела (балка, пластина, параллелепипед) на основе формы Аржаных – Слободянского решения Папковича – Нейбера построены базисы пространств $\{\xi_k\}\in\Xi$, $\{\gamma_k\}\in\Gamma$, $\xi_k\leftrightarrow\gamma_k$, позволяющие решения основных задач выписать в виде:

$$\xi=\sum_k c_k\xi_k,$$

где для первой и второй задач соответственно используются скалярные произведения (статика без массовых сил):

$$c_k=\int_{\partial V}p_i(\gamma)u_i(\gamma_k)ds,\quad c_k=\int_{\partial V}p_i(\gamma_k)u_i(\gamma)ds.$$

Здесь p_i, u_i означают компоненты векторов поверхностных усилий и перемещений базисного (γ_k) либо результирующего (γ) граничных состояний.

Тестирование выполнено на простейших состояниях среды и показало абсолютные результаты. Компьютерная реализация аппарата обеспечивает строгое (в аналитической форме) вычисление интегралов для коэффициентов Фурье и явное выписывание решения в виде ряда с последующей визуализационной обработкой. Система позволяет генерировать решения задач об изгибе балки, изгибе и обобщенном плоском состоянии пластины, задач Сен – Венана, Мичелла и других. Удобно проводить анализ влияния геометрических параметров тела на погрешность использования для него той или иной технической теории.

На этом подходе можно обосновать также алгоритм решения смешанной задачи.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МНОГОЧАСТОТНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Петришин Я. Р. (Украина, г. Черновцы)

Рассматривается многочастотная колебательная система обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\varphi,\tau), \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x,\varphi,\tau), \tag{1}$$

$$\Delta x_{|\tau=\tau_j^{(s)}} = \varepsilon f_s(x,\varphi), \qquad \Delta\varphi_{|\tau=\tau_j^{(s)}} = \varepsilon g_s(x,\varphi),$$

где $x \in D \subset R^n, \varphi \in R^m, \varepsilon$–малый положительный параметр, $[0,L] \ni \tau = \varepsilon t$ –"медленное время", $s = \overline{1,l}$, $0 < \tau_1^{(1)} < \tau_1^{(2)} < \ldots < \tau_1^l \le 2\pi\varepsilon$, $\tau_{j+1}^{(s)} = \tau_j^{(s)} + 2\pi\varepsilon$ для всех $j \ge 1$ и $s = \overline{1,l}$, правые части уравнений (1) принадлежат некоторым классам гладких и 2π– периодических по φ функций. Такого вида системы возникают при изучении свойств слабо связанных осцилляторов с медленно меняющимися частотами, подвергающимися импульсному воздействию в фиксированные моменты времени.

Зададим для (1) краевые условия

$$\Phi(x_{|\tau=0}, x_{|\tau=L}, \varphi_{|\tau=0}, \varphi_{|\tau=L}, \varepsilon) = 0, \tag{2}$$

в которых Φ–непрерывно дифференцируемая в $D^2 \times R^{2m} \times (0,\varepsilon_0]$ $n+m$-мерная вектор-функция. Для нахождения решения $(x(\tau,\varepsilon); \varphi(\tau,\varepsilon))$ задачи (1), (2) строится усредненная по всем угловым переменным задача

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \overline{a}(\xi,\tau) + \frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{l}\overline{f}_s(\xi), \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \overline{b}(\xi,\tau) + \frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{l}\overline{g}_s(\xi),$$

$$\Phi(\xi_{|\tau=0}, \xi_{|\tau=L}, \psi_{|\tau=0}, \psi_{|\tau=L}, \varepsilon) = 0. \tag{3}$$

Здесь чертой сверху обозначено среднее по φ в кубе периодов соответствующих функций. Усредненная задача проще исходной, так как она не содержит импульсов и уравнения для медленных переменных ξ решаются независимо от быстрых переменных ψ. В предположении существования единственного решения $(\xi(\tau,\varepsilon), \psi(\tau,\varepsilon))$ усредненной задачи (3) установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) и получена оценка вида $\|x(\tau,\varepsilon) - \xi(\tau,\varepsilon)\| + \|\varphi(\tau,\varepsilon) - \psi(\tau,\varepsilon)\| \le c\varepsilon^{\frac{1}{m+1}}$ $\forall(\tau,\varepsilon) \in [0,L] \times (0,\varepsilon_0]$.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТЕЛАХ С ТРЕЩИНАМИ

В.Е. Петрова (Воронеж)

С явлениями теплопроводности и термоупругости в различных телах мы встречаемся ежедневно в повседневной жизни, часто не придавая им значения. Однако, на практике, например, в самолето и ракетостроении, ядерной энергетике, стоительстве, эти явления становятся проблемами, которые приходится решать, прибегая к имеющимся теориям и разрабатывая новые. Создание новых материалов, в частности композиционных, и их применение в технике, привело к необходимости исследования тепловых напряжений в структурно- неоднородных телах. Следует отметить, что в свободном однородном теле, находящемся в условиях плоской деформации или плоского напряженного состояния (плоскость xy), установившийся поток тепла не вызывает напряжений в этой плоскости. В многосвязных телах (тело имеет трещины, неоднородности в виде включений) такие же тепловые потоки приводят к появлению напряжений, что связано с неоднозначностью перемещений. Это свойство впервые было отмечено Мусхелишвили Н.Н. в 1916 г.

Данная работа посвящена следующей задаче. В материале, находящемся под действием однородного теплового потока, имеется макроскопический дефект в виде трещины. Требуется оценить насколько он опасен (в смысле возможности его спонтанного распространения), если он находится в поле множественных микротрещин, какие области расположения микродефектов наиболее опасные, а какие упрочняют материал. Частично такая задача решалась в работах [1], [2]. Исследование напряженно-деформированного состояния проводится в окрестностях макротрещины, и основными характеристиками являются коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). Рассматривается плоская задача термоупругости в квазистатической постановке. В этой постановке задача решается в два этапа: 1) находится температурное поле; 2) определяется соответствующее термоупругое напряженное состояние. Для решения задач применяется метод сингулярных интегральных уравнений и метод малого параметра. За малый параметр принимается отношение длины микротрещины к макротрещине. Получены КИН учитывающие геометрию задачи, а также такие эффекты, как закрытие микротрещин и наличие областей контакта на макротрещине. Проанализировано влияние учета теплопроводности на линиях трещин на величины КИН. Рассмотрены разные области расположения микротрещин и их влияние на КИН макротрещины.

Литература

[1] Tamuzs V., Romalis N. and Petrova V. *Influence of microcracks on thermal fracture of macrocrack*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1993, v.19, p. 207-225.

[2] Tamuzs V., Petrova V. and Romalis N. *Thermal fracture of macrocrack with closure as influenced by microcracks*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1994, v.21, p. 207-218.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ДЕНДРИТА НЕЙРОНА

Покровский А.Н. (Санкт-Петербург)

Задача вычисления внутриклеточного потенциала дендрита рассмотрена в линейном приближении. Геометрия дендрита моделируется конечным графом Γ (деревом) с ребрами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$, конечным множеством узлов $J(\Gamma)$, в которых заканчиваются не менее чем два ребра, и множеством $\partial\Gamma$ "свободных" концов ребер. Малые отклонения потенциала от стационарного значения $u(x,t)$, $u \in R$, $x \in \Gamma$, $t \in R_+$, и фазовых переменных $y(x,t) = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\partial u/\partial t - Lu + qu + (a,y) = f(x)\psi(t); \quad \partial y/\partial t = Ay + bu; \tag{1}$$

$$\partial u/\partial x|_{\partial\Gamma} = 0; \; u(x,0) = 0; \; y(x,0) = 0,$$

где $Lu \equiv r^{-1}\partial/\partial x(p\partial u/\partial x)$; $x \in \Gamma$, $t \in R_+$, $f, \psi, u \in R$, $y, a, b \in R^k$, а в узлах выполняются условия непрерывности u и условия Кирхгофа для $u(x,t)$. Собственные числа α_i, $i = \overline{1,k}$ матрицы A предполагаются различными и отрицательными; $r(x) > 0$; $p(x) > 0$; $q(x) > 0$.

Известно, что спектральная задача для $\bar{u}(x) \in R$, $x \in \Gamma$ на том же графе Γ :

$$-L\bar{u} + q\bar{u} = \lambda\bar{u}; \quad d\bar{u}/dx|_{\partial\Gamma} = 0 \tag{2}$$

имеет простой спектр $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$; $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, и систему собственных функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$. Обозначим f_n коэффициенты разложения функции $f(x)$ из (1), $x \in \Gamma$ по собственным функциям $\varphi_n(x)$; B_n - клеточная матрица $(k+1) \times (k+1)$ с клетками $-\lambda_n$, $-a$, b, A; $\Psi(t) = \binom{\psi(t)}{0}$ - вектор размерности $k+1$; $\binom{u}{y}$ - вектор фазовых переменных задачи (1).

Теорема. Решение задачи (1) можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, \varphi_n(x) \int_0^t \exp[(t-\tau)B_n] \, \Psi(\tau) d\tau .$$

Замечание. Собственные числа $\beta_{n0}, \beta_{n1}, \ldots, \beta_{nk}$ матриц B_n при $n \to \infty$ удовлетворяют условиям: $\beta_{n0} \to -\lambda_n$; $\beta_{ni} \to \alpha_i$, $i = \overline{1,k}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ проект 99-01-00699.

К вопросу о периодичности колебаний упругих сеток [1]

Прядиев В.Л., Копытин А.В., Боровских А.В. (Воронеж)

На геометрическом графе Γ (связном объединении конечного набора несовпадающих отрезков-рёбер из $\mathbf{R}^n$, любые два из которых либо не пересекаются, либо пересекаются концами) рассматривается задача

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (x \in \Gamma, t \in \mathbf{R}), \tag{1}$$

$$u_x(b,t) = 0 \quad (b \in \partial\Gamma, t \in \mathbf{R}), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0 \quad (x \in \Gamma). \tag{3}$$

$\partial\Gamma$ здесь – множество вершин графа степени 1; производная по x в каждой неконцевой точке ребра – это производная по одному из двух возможных единичных направлений; если x – вершина степени выше первой, то уравнение (1) понимается как $\sum\limits_{\gamma \ni x} \dfrac{\partial}{\partial x} u_\gamma(x,t) = 0$, где u_γ – сужение u на ребро γ, а производные берутся в направлении "от x".

При использовании (как эвристического средства) принципа прохождения волны через узел[2], устанавливается следующий аналог формулы Даламбера.

Теорема. Пусть $L(x,t)$ – множество ориентированных путей графа Γ с началом в точке x и длины t, все неконцевые вершины которых суть вершины Γ. Каждой неначальной вершине p пути l поставим в соответствие число $\alpha(p)$, которое равно $2/k(p)$, если соседние звенья пути, примыкающие к p, пересекаются только в точке p, и $(2-k(p))/k(p)$ – в противном случае; $k(p)$ здесь – степень p как вершины Γ. Тогда решение задачи (1)-(3) при $t > 0$ представимо в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{l \in L(x,t)} \prod_{p \in P(l)} \alpha(p)\varphi(e_l), \tag{4}$$

где $P(l)$ – множество неконцевых вершин l, а e_l – конец l.

Если рёбра Γ соизмеримы, то количество точек e_l в (4) при любом t ограничено числом $|\Gamma|/m$ ($|\Gamma|$ – сумма длин рёбер Γ, а m – их общая мера), что облегчает анализ решения. Например, если Γ – граф из трёх рёбер длин π, π и 2π, имеющий три граничных вершины, то решение задачи (1)-(3) представимо в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + f(x,t)\sin\omega t + g(x,t)\cos\omega t, \tag{5}$$

где v, f и g 2π-периодичны по t и выражаются на $\Gamma \times [0;2\pi]$ через φ с помощью конечного числа арифметических действий и суперпозиций; $\omega = \dfrac{2}{\pi}\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

В общем случае графа с соизмеримыми рёбрами представление вида (5) также возможно, с той лишь оговоркой, что количество слагаемых вида $f_i(x,t)\sin\omega_i t + g_i(x,t)\cos\omega_i t$ может вырасти до $|\Gamma|/m$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минвуза: Грант Минвуза (КЦ СПбГУ) № 97-0-1.8-100, Грант Минвуза (КЦ Новосибирского госун-та)

[2] Этот факт, образно говоря, состоит в следующем: если k – степень вершины, которой достигает бегущая по ребру волна, то $2/k$ этой волны проходит на каждое из следующих за этой вершиной рёбер, а $(2-k)/k$ часть её отражается обратно.

УДК 517.95

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ.

Псху А. В. (Нальчик)

Рассмотрим уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$u_{xx} + \text{sign}y\, u_{yy} = 0 \tag{1}$$

и область D, ограниченную: а) отрезком $A'A$ оси $x = 0$, $-1 \le y \le a$; б) отрезком $A'B$ характеристики $x - y = 1$ уравнения (1); в) кривой σ с концами в точках A и B, лежащей в угле $\{(x, y) : x \ge 0,\ y \ge 0\}$. $A = (0,\ a)$, $A' = (0, -1)$, $B = (1,\ 0)$, $1 \le a \le \infty$.

Задача Франкля. Найти решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) в области D, из класса $C(\bar{D}) \cap C^1(D \setminus \{x+y = 0\}) \cap C^2(D \setminus \{x+y = 0\} \setminus \{y = 0\})$ удовлетворяющую следующим граничным условиям:

$$u(x, y) = 0,\ (x, y) \in \sigma = 0;\ u_x(0, y) = 0,\ -1 \le y \le a;$$

$$u(0, y) - u(0, -y) = f(y),\ 0 \le y \le 1,$$

где $f(y)$ - заданная непрерывная функция.

Эта задача была поставлена Ф.И. Франклем ([1]) в 1956 г., и впервые решена А. В. Бицадзе в работе [2], где, при доказательстве единственности, на кривую σ, кроме условия Ляпунова накладывалось условие, что любая прямая семейства $y = const$ должна пересекать σ не более чем в одной точке.

А.П. Солдатов в работе [3] доказал существование и единственность решение этой задачи без ограничений геометрического характера на кривую σ. При этом предполагалось, что кривая σ кусочно-гладкая, а D - конечная область, не имеет острия в своих граничных точках.

В данной работе рассматриваеися задача Франкля при очень общих предположениях отностительно области D и кривой σ. Доказана следующая

Теорема. *Пусть $f \in C^2[0, a]$ и $f'' \in H[0, 1]$, $f(0) = 0$. Кривая σ обладает тем свойством, что ее образ при конформном отображении верхней полуплоскости на некоторую ограниченную область есть объединение конечного числа дуг Жордана, и вместе с отрезками $A'A$ и $A'B$ она ограничивает односвязную область. Тогда существует, и притом единственное, решение задачи Франкля для уравнения* (1).

В заключение выражаю глубокую признательность А. М. Нахушеву за постановку задачи и постоянное внимание, а также А. П. Солдатову за ценные советы и указания при выполнении настоящей работы.

Литература

1. Ф. И. Франкль, Прикладн. матем. и мех., 20, N2, 196 (1956).
2. А. В. Бицадзе, ДАН, 109, N6, 1091 (1956).
3. А. П. Солдатов, Дифференц. уравнения., том 10, N1 (1974).

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г.Нальчик.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ

Пуляев В.Ф. (г. Краснодар)

Изучается уравнение

$$x(t)=\int_0^t Q(t,s)x(s)ds+f(t), \quad t\geq 0 \tag{1}$$

в котором $n\times n$-матрица $Q(t,s)$ удовлетворяет условиям

$$\sup_{t>0}\int_0^t \|Q(t,s)\|ds<\infty,$$

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t \|Q(t+h,s)-Q(t,s)\|ds+\int_t^{t+h}\|Q(t+h,s)\|ds=0$$

и $Q(t+\omega,s+\omega)=Q(t,s)$ при некотором $\omega>0$.

Найдены условия, обеспечивающие нетеровость этого уравнения в пространстве $BC^n(R^1)$– непрерывных и ограниченных на R^1 функций. Показано, что при выполнении этих условий уравнение (1) будет нетеровым и во многих естественных подпространствах $BC^n(R^1)$.

В случае нетеровости установлена структура резольвенты, которая позволяет исследовать асимптотическое поведение решений при $t\to\infty$.

Кроме того, найдены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие устойчивость уравнения и показано, что, как и в случае уравнений с ядром, зависящим от разности, из устойчивости уравнения (1) вытекает его асимптотическая устойчивость.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ И ОГРАНИЧЕННЫХ НА ОСИ ФУНКЦИЙ

Пуляев В.Ф., Савчиц Е. Ю. (Краснодар)

Изучаются свойства линейных операторов $\widetilde{A}$, действующих в $BC^n(R^1)$– пространстве непрерывных и ограниченных на R^1 n-мерных вектор-функций. Найдены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие представление таких операторов в виде

$$\widetilde{A}x = \int_{-\infty}^{\infty} d_s A(t,s)x(s), \qquad (1)$$

где матрица $A(t,s)$ при каждом t имеет ограниченную вариацию по s на R^1.

Показано, что в случае локальной компактности оператора (1), он может быть представлен в виде

$$\widetilde{A}x = \int_{-\infty}^{\infty} a(t,s)x(s)db(s),$$

где $a(t,s)$– $n\times n$-матрица, а $b(s)$ – возрастающая скалярная функция.

В случае локально компактных периодических операторов $\widetilde{A}$ ($A(t+\omega,s+\omega)=A(t,s)$, $\omega>0$) исследуются вопросы обратимости и нетеровости операторов $I+\widetilde{A}$, где I – единичный оператор, в пространстве $BC^n(R^1)$ и различных его подпространствах. Изучается также структура решений уравнения $(I+\widetilde{A})x=0$.

Исследование этих вопросов проводится при помощи методики, развитой в [1,2], а полученные при этом результаты обобщают некоторые результаты указанных работ и могут быть применены для исследования интегро-дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = B(t)x(t) + \int_{-\infty}^{\infty} d_s A(t,s)x(s) + f(t).$$

Литература

1. Пуляев В.Ф. Ограниченные и почти периодические решения линейных интегральных уравнений. I. // Дифференц. уравнения.1989. Т.25, №10. С.1787–1798.
2. Пуляев В.Ф. Ограниченные и почти периодические решения линейных интегральных уравнений. II. // Дифференц. уравнения.1990. Т.26, №8. С.1423–1432.

ОПТИМИЗАЦИЯ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Пустарнакова Ю. А. (Тверь)

В работе рассматривается проблема моделирования и обучения последовательной нейронной сети, состоящей из n нейронов, последовательно соединённых друг с другом так, что i-ый нейрон влияет на $i+1$-ый.

Модель последовательной нейронной сети описывается следующей системой дифференциальных уравнений с запаздыванием, вызванным конечным временем передачи сигнала от входного синапса к выходному синапсу:

$$\dot{x}_i(t) = -\beta_i x_i(t) + f_i\big(\omega_{i-1}(t)\cdot x_{i-1}(t-h_{i-1})\big), \quad i=\overline{1,n}; \tag{1}$$

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t\in[-h,0],\ i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где $\varphi_i(t)$, $x_0(t)$, $\omega_0(t)$ — заданные функции начального состояния системы, $h = \max\limits_i h_i$, $f_i(z)$, $i=\overline{1,n}$, — непрерывно дифференцируемые функции, характеризующие топологию сети и выбирающиеся в виде $f_i(y)=k_i y$, $f_i(y)=k_i \operatorname{arctg} y$.

Функциями управления являются весовые коэффициенты $\omega_i(t)$, которые определяются из условия минимума функционала:

$$J(\omega) = \int\limits_0^T \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \omega_i^2(t)\,dt + \sum_{i=1}^{n} M_i\big(x_i(T)-A_i\big)^2, \tag{3}$$

где M_i, α_i — заданные положительные коэффициенты.

В кольцевой нейронной сети i-ый нейрон действует на $i+1$-ый нейрон, а последний n-ый нейрон влияет на первый. Тогда вместо (1) нейронная сеть описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\beta_1 x_1(t) + f_1\big(\omega_n(t)\cdot x_n(t-h_n)\big),\\ \dot{x}_i(t) &= -\beta_i x_i(t) + f_i\big(\omega_{i-1}(t)\cdot x_{i-1}(t-h_{i-1})\big), \quad i=\overline{2,n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Оптимальное решение находится градиентным методом. Исследуются устойчивость оптимального решения по начальному приближению и зависимость решения от выбора начального управления.

ОПЕРАТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПАР ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ИЗ ОДНОГО БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА В ДРУГОЕ

М.Б.Рагимов, Р.Ш.Гасанова, БГУ им. М.А.Расулзаде, Баку.

Впервые в работе [1] введено понятие о спектральности пары операторов, действующий из одного банахова пространства в другое.

Определение [1]. Пара операторов (A,B) $A,B \in L(X;Y)$ называется спектральной (по Данфорду), если существуют две регулярные счетно аддитивные спектральные меры (называемые спектральными функциями) $E:\Sigma \to L(X)$, $F:\Sigma \to L(Y)$ ($\Sigma - \delta$ - алгебра борелевких подмножеств расширенной комплексной плоскости) такие, что выполнены следующие условия:

1) $AE(\Delta)=F(\Delta)A$, $BE(\Delta)=F(\Delta)B, \Delta \in \Sigma$;

2) $\sigma(A_\Delta, B_\Delta) \subset \overline{\Delta} \subset \overline{C}$ $\forall \Delta \in \Sigma$; $\left(\overline{C}=C\cup\{\infty\}\right)$;

где $A_\Delta, B_\Delta : X(\Delta) \to Y(\Delta)$ сужения операторов A и B соответственно на $X(\Delta)=E(\Delta)X$.

Строится операторное исчисление для ограниченных спектральных пар операторов (A, B) из банахова пространства $L(X;Y)$ – линейных ограниченных операторов, определенных на комплексном банаховом пространстве X со значениями в комплексном банаховом пространстве Y. Для исследования спектральных свойств пар операторов привлекаются левая R_l и правая R_r псевдорезольвенты и теория коммутативных банаховых алгебр. Понятие левой и правой псевдорезольвент пар операторов, действующих из одного банохова пространства в другое, в первые введены в 1991 году в работе [2].

<u>Теорема 1</u>. Если (A, B)–спектральная пара операторов скалярного типа с парой спектральных функций (E, F) , то интегралы:

$\int\limits_{\sigma(A,B)} \lambda BE(d\lambda)$, $\int\limits_{\sigma(A,B)} \lambda F(d\lambda)B$, $\int\limits_{\sigma(A,B)} \lambda F(d\lambda)BE(d\lambda)$ сильно сходится и имеет место

равенство $A=\int\limits_{\sigma(A,B)} \lambda BE(d\lambda)=\int\limits_{\sigma(A,B)} \lambda F(d\lambda)B=\int\limits_{\sigma(A,B)} \lambda F(d\lambda)BE(d\lambda)$

<u>Теорема 2</u>. Пусть $(E;F)$–разложение единицы для спектральных пар $(A,B)\in L(X;\,Y)$ операторов, а $N_0 : X \to Y$ ее квазинильпотентная часть.

Тогда ряды

$$R_r(\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int\limits_{\sigma(A,B)}\frac{E(d\lambda)}{(\mu-\lambda)^n}N_0^n\right]\int\limits_{\sigma(A,B)}\frac{E(d\lambda)}{(\mu-\lambda)}B\ ,$$

$$R_l(\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[B\int\limits_{\sigma(A,B)}\frac{F(d\lambda)}{(\mu-\lambda)^n}N_0^n\right]\int\limits_{\sigma(A,B)}\frac{F(d\lambda)}{(\mu-\lambda)}$$

где $R_r : \rho(A, B) \to L(X)$; $R_l : \rho(A, B) \to L(Y)$; сходятся в равномерной операторной топологии.

Литература

1. М.Б.Рагимов. Спектральная теория упорядоченных пар линейных операторов. Баку – 1993.

M.B.Ragimov. On new results in theory of the Linear Bundles of operators. Türk matematýk deregi IV. Antakya Hatay–1991. p. 97–98.

ЗАДАЧИ ТИПОВ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНОЙ И СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Раджабов Н. (ТГНУ, Душанбе)

Пусть $\Gamma_0 = \{a < x < b\}$ множество точек на вещественной оси содержащей внутри себя точку $x = c$, $a < c < b$. На $\Gamma = \Gamma_0 \backslash \{c\}$ рассмотрим следующую систему

$$(1) \qquad |x-c|^{\alpha} \cdot y'(x) + \sum_{k=1}^{2} P_{jk}(x) y_k(x) = f_j(x), \; j = 1, 2,$$

где $\alpha = const > 0$, $P_{jk}(x)$, $f_j(x)\,(j, k = 1, 2)$ заданные непрерывные функции точек Γ, причем в точке $x = c$ могут иметь разрыв первого рода.

Алгебраические уравнения следующих видов

$$(2) \qquad \lambda^2 \cdot P_{21}(c-0) + (P_{11}(c-0) - P_{22}(c-0)\lambda - P_{12}(c-0) = 0$$

$$(3) \qquad \mu^2 \cdot P_{21}(c+0) + (P_{11}(c+0) - P_{22}(c+0)\mu - P_{12}(c+0) = 0$$

назовем характеристическими уравнениями соответствующих системе (1) в особой точке $x = c$ слева и справа.

Задача R_1. Пусть $a < c < b$ и корни уравнений (2) и (3) вещественные и разные. Требуется найти решение системы (1) из класса $c'(\Gamma)$ при $\alpha > 1$, удовлетворяющее условию

$$[\exp(P_c^{\lambda_j} \cdot \omega_c^{\alpha}(x))(y_1(x) + \lambda_j y_2(x))]_{x=c-0} = A_j \cdot$$

$$[\exp(-P_c^{\mu_j} \cdot \omega_c^{\alpha}(x))(y_1(x) + \mu_j y_2(x))]_{x=c+0} + B_j, \; j = 1, 2$$

в точке $x = c$ и одному из следующих условий в концевых точках интервала Γ_0:

$$1)\; y_j(a) = D_j^1 \; (j = 1, 2); \;\; 2)\; y_j(b) = D_j^2 \; (j = 1, 2);$$

где A_j, B_j, D_j^k, $(j = 1, 2; 1 \leq k \leq 4)$ заданные постоянные, $\omega_c^{\alpha}(x) = [(\alpha - 1)|x - c|^{\alpha-1}]^{-1}$, $P_c^{\lambda_j}$, $P_c^{\mu_j}$, $(j = 1, 2)$ — известные постоянные, зависящие от значений коэффициентов системы (1) при $x \to c \pm 0$.

Замечание 1. Задачи аналогичные задаче R_1 ставятся и в случае, когда корни уравнений (2) и (3) вещественные и разные, $\alpha < 1$, и $\alpha = 1$, а также в случаях, когда корни уравнений (2), (3) вещественные равные и комплексно-сопряженные.

О разрешимости задачи R_1, а также о разрешимости задач указанные в замечании 1, получено утверждение, подобное задаче линейного сопряжения теории аналитических функций.

Литература

1. Rajabov N. Introdui t on to ord nary d fferent al equat ons w th s ngular and super-s nglar ioeffii erts, Dushanbe, 1998, 158 p.

ИНТЕГРИРУЕМОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С АТТРАКТОРАМИ

Редькина Т.В.(г. Ставрополь)

В работе Богоявленского было введено операторное уравнение

$$M_t = P(M) + [M, P]. \qquad (1)$$

Рассмотрим в качестве новой версии M и B в виде $M = \begin{pmatrix} 0 & L \\ L & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, где L и A - дифференциальные операторы, $P(x)$ выберем в виде

$$P(M) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} M^2 + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} M, \ d - const.$$

Равенство (1) дает уравнение интегрируемое методом обратной задачи рассеяния

$$u_{xt} = \left(c + \frac{ax}{8}\right)\left(6\bar{u}_{xx}u_x - \frac{3}{2}u_{xx}\operatorname{Im}u_x - \frac{1}{2}(3\bar{u} - u)_{xxx}\right) + du_x + a|u_x|^2 +$$

$$+ \frac{a}{8}(u - 5\bar{u})_{xxx} + \frac{u_{xx}}{4}\left(\frac{a}{4}\operatorname{Re}u + 2dx\right).$$

Задачу Коши для полученного уравнения рассмотрим в классе функций $u(x,t)$, имеющих следующую асимптотику: $u(x,t) \to g(t)$, $x \to \infty$, $u(x,t) \to h(t)$, $x \to -\infty$. Уравнение (1) является условием совместности системы

$$M\psi = K\psi, \ \dot{\psi} + B\psi = \mu\psi, \ \dot{K} = P(K). \qquad (2)$$

Третье равенство (2) определяет матрицу $K(t)$, продифференцировав его, найдем

$$K(t) = \frac{de^{dt}}{C_1^2 d^2 - (C_2 d + ae^{dt})^2}\begin{pmatrix} C_1 d & C_2 d + ae^{dt} \\ C_2 d + ae^{dt} & C_1 d \end{pmatrix}, \ C_i - const.$$

Первое равенство (2) рассматривается на двух интервалах, для $t > \frac{1}{d}(\ln p_n - \ln a)$ и $t < \frac{1}{d}(\ln p_n - \ln a)$. На каждом из интервалов решается обратная задача рассеяния и определяются данные рассеяния:

$$\ln\alpha(t) = \int_{t_0}^{t}\left(8cf_1^3 - \frac{a}{8}f_1\operatorname{Re}(h+g)\right)dt,$$

$$\ln\beta(t) = \int_{t_0}^{t}\left(4c(f_1^3 + f_2^3) - \frac{a}{4}(f_1^2 - f_2^2) - \frac{a}{8}(f_1\operatorname{Re}h + f_2\operatorname{Re}g)\right)dt,$$

Правая часть третьего равенства (2) может иметь нули $P(K_k^*) = 0$, тогда простейшие решения являются стационарными $K(t) = K_s^*$. В данном случае такими матрицами K^* будут $K_{1,2}^* = \frac{d}{a}\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K_{3,4}^* = -\frac{d}{a}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, $K_{5,6}^* = \begin{pmatrix} \mp 1 & -(1 + d/a) \\ 1 & \pm(1 + d/a) \end{pmatrix}$, причем все значения являются притягивающими, так как при $P'(K_s^*) < 0$, K_s^* - притягивающая точка, при $P'(K_s^*) > 0$, K_s^* - отталкивающая точка. Комбинации притягивающих значений дают все аттракторы. Несмотря на то, что у данного уравнения есть аттракторы, оно имеет первые интегралы.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В ОБЛАСТИ, ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ – ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Репин О.А. (Самара)

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y\, |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0,\ m > 0, \tag{1}$$

в неограниченной области D, эллиптической частью D_1 которой является верхняя полуплоскость, а гиперболической частью D_2 – треугольник, ограниченный характеристиками $\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$, $\eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$ уравнения (1). Пусть $\Theta_0(x)$ – аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $x \in (0,1)$, с характеристикой $\xi = 0$; $\left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f\right)(x)$ – обобщенный оператор дробного интегродифференцирования в смысле М.Сайго [1, 2].

Задача I. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1. $Lu \equiv 0$ в области $D = D_1 \cup D_2$;
2. $u(x,y) \in C\left(\bar{D}\right) \cap C'\left(\bar{D} \setminus (0,1)\right) \cap C^2\left(D \setminus (0,1)\right)$;
3. $u(x,y)$ обращается в нуль на бесконечности;
4. $u(x,+0) = u(x,-0)$, $x \in [0,1]$,
   $\lim\limits_{y\to 0+0} u_y(x,y) = \lim\limits_{y \to 0-0} u_y(x,y)$, $x \in (0,1)$;
5. $u(x,y)|_{y=0} = 0$ при $-\infty < x < 0$, $1 < x < \infty$;
6. $A\left(I_{0+}^{a,b,\beta-a-1} u\left[\Theta_0(t)\right]\right)(x) + B\left(I_{0+}^{a+\beta,b,\beta-1} u(t,0)\right)(x) = \psi(x)$,
   $x \in [0,1]$, где $\beta = \frac{m}{2(m+2)}$, A, B, a, b – действительные числа, $\psi(x)$ – непрерывная функция.

При некоторых ограничениях на заданные константы и функцию $\psi(x)$ доказана однозначная разрешимость задачи I, относящейся к классу краевых задач со смещением по терминологии А.М.Нахушева [3].

Литература: 1) Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions//Math. Rep. Kyushu. Univ. - 1978. Vol.11. №2 - P.135-143; 2) Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов//Из-во Сарат. ун-та. 1992 - 161 с.; 3) Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк. 1995 - 301 с.

ОБ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ.

Рогова Н.В. (Воронеж)

УДК 517.518

Пусть R_+^n обозначает полупространство $x_{n-1} > 0$ точек $x = (x', x_n)$, где $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$. Обозначим через Ω^+ область, расположенную в полупространстве $x_{n-1} > 0$ и прилегающую к гиперплоскости $x_{n-1} = 0$. Граница $\partial\Omega^+$ есть объединение участка Γ^+, лежащего в полупространстве, и участка Γ^0, лежащего в гиперплоскости $x_{n-1} = 0$. Предполагается, что граница области $\Omega = \Omega^+ \bigcup \Gamma^0 \bigcup \Omega^-$, где Ω^- – зеркальное отображение области Ω^+ относительно $x_{n-1} = 0$, есть бесконечно дифференцируемое многообразие размерности n-1 и область Ω расположена локально по одну сторону от $\partial\Omega$.

Определение. Функция u(x) называется B - гармонической в ограниченной области Ω^+, если она четна по x_{n-1}, дважды непрерывно дифференцируема в Ω^+ и удовлетворяет однородному уравнению

$$\Delta_{Bx_{n-1}} u = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} + \frac{\gamma}{x_{n-1}} \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

где γ – фиксированное положительное число.

Задача Дирихле состоит в отыскании такой B - гармонической функции из $W_{2,\gamma}^1(\Omega^+)$, которая на Γ^+ принимает заданное значение $\varphi \in W_{2,\gamma}^{1/2}(\Gamma^+)$.

Теорема. Для того чтобы названная сингулярная задача Дирихле была разрешима вариационным методом, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi \in W_{2,\gamma}^{1/2}(\Gamma^+)$.

Решение названной задачи единственно.

Аналогичное утверждение имеет место и для B - полигармонического уравнения $\Delta_{Bx_{n-1}}^m u = 0$.

В этой работе используются весовые функциональные пространства $W_{2,\gamma}^1(\Omega^+)$ и $W_{2,\gamma}^{1/2}(\Gamma^+)$, введенные ранее в работах И.А. Киприянова.

Возникновение особенностей в двумерной системе уравнений газовой динамики: достаточные условия, оценки времени и локализация[1]

Розанова О.С. (Белгород)

Рассматривается нелинейная система уравнений для неизвестных функций M, P, $\mathbf{V}(v_1, v_2)$ (аналоги плотности, давления и вектора скорости соответственно), определенная на гладком двумерном римановом многообразии Σ с локальными криволинейными координатами (x_1, x_2) (все дифференциальные операции по пространственным переменным выполняются в метрике Σ):

$$M(\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V}, \nabla)\,\mathbf{V}) = -\nabla P + lM\mathbf{V}_\perp - \mu M\mathbf{V}, \qquad (1-2)$$

$$\partial_t M + div\,(M\mathbf{V}) = 0, \qquad (3)$$

$$\partial_t P + (\mathbf{V}, \nabla P) + \kappa\, P\, div\, \mathbf{V} = 0. \qquad (4)$$

Здесь $\mathbf{V}_\perp = (v_2, -v_1)$, константа κ - показатель адиабаты ($\kappa > 1$), l - параметр Кориолиса, $\mu > 0$ - коэффициент рэлеевского трения.

Введем функционал $G_f(t) = \int\limits_\Sigma f(\Theta)\, M(x_1, x_2, t)\, d\Sigma$, где $\Theta = \dfrac{(\mathbf{r}, \mathbf{r})}{2}$, ($(.,.)$ - скалярное произведение в метрике Σ, $\mathbf{r}$ - радиус-вектор точки), а неотрицательная ограниченная функция $f(\Theta)$ с компактным носителем $\mathcal{D}$ принадлежит классу $f(\Theta) \in C^1(\Sigma) \neq const$ и имеет интегрируемую вторую производную.

Теорема 1 *Если в начальный момент времени $t = 0$ выполнено условие $(G'_f(0))^2 \geq LG_f(0)$ с константой L, зависящей только от начальных данных и свойств функции $f(\Theta)$, то в течении времени $t \leq t_* < \infty$ решение задачи Коши для системы (1) - (4), принадлежащее при $t = 0$ классу $H^s(\Sigma)$, $s > 3$, теряет исходную гладкость внутри $\mathcal{D}$.*

[1] Работа частично поддержана грантами РФФИ N 98-02-16160 и Конкурсного центра при Санкт-Петербургском госуниверситете N 97-0-143-54

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ВО ВНЕШНЕМ КОНТАКТЕ С УПРУГОЙ СРЕДОЙ, ПРИ СИЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Ю.А. Россихин, М.В. Шитикова, И.Ш.Алирзаев (Воронеж)

Настоящая работа посвящена исследованию нестационарных колебаний цилиндрической оболочки, находящейся во внешнем контакте с упругой средой. Нестационарные колебания вызываются приложением к внутренней стороне оболочки вектора напряжения. В момент приложения вектора напряжения в среду, окружающую оболочку , начинают распространяться со скоростями упругих волн три поверхности сильного разрыва. За этими поверхностями решение строится в виде лучевых рядов, которые продолжаются до границы контакта оболочки со средой. Контакт между оболочкой и средой принимается жестким.

Движения оболочки описываются системой уравнений, основанной на модели Тимошенко. Решение этих уравнений строится при помощи степенных рядов по времени с неопределенными коэффициентами. Коэффициенты с точностью до произвольных функций, зависящих от цилиндрических координат, взятых на поверхности оболочки, находятся при помощи условия совместности из разрешающей системы уравнений, описывающих динамическое поведение окружающей среды. Произвольные функции, в свою очередь, определяются из начальных и граничных условий, а также из условий контакта оболочки с окружающей средой.

На основе полученного решения проведены численные исследования нестационарных колебаний оболочки, в частности, проанализировано влияние физических свойств материала оболочки и среды на характер колебательного процесса.

Существование гарантирующего равновесия возражений и контрвозражений.

О. В. Русаков. (Москва)

Рассматривается бескоалиционная игра трех лиц при неопределенности

$$\Gamma = \langle\, \mathrm{N} = \{1,2,3\},\ \{\mathbb{R}^{n_i}\}_{i\in \mathrm{N}},\ Y,\ \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathrm{N}}\,\rangle,$$

где N множество порядковых номеров игроков; каждый i-ый игрок выбирает и использует свою стратегию $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, в результате складывается ситуация $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$ $(n = n_1 + n_2 + n_3)$, независимо от действий игроков в игре Γ реализуется некоторая неопределенность $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$, на полученных в результате парах $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times Y$ определена функция выигрыша i-го игрока $f_i(x,y)$ $(i = 1,2,3)$; задачей каждого игрока - добиться возможно большего "своего" выигрыша - значения $f_i(x,y)$ на сложившейся паре (x,y).

Предположим, что в игре Γ фиксированы некоторая ситуация $x^* \in \mathbb{R}^n$ и неопределенность $y^* \in Y$. Игрок 1 обладает *возражением* на ситуацию x^* (при фиксированной неопределенности y^*), если существует его стратегия $x_1^T \in \mathbb{R}^{n_1}$ такая, что $f_1(x_1^T, x_2^*, x_3^*, y^*) > f_1(x^*, y^*)$. В ответ на возражение x_1^T игрок 2 обладает *контрвозражением*, если существует стратегия $x_2^C \in \mathbb{R}^{n_2}$ такая, что

$$f_1(x_1^T, x_2^C, x_3^*, y^*) < f_1(x^* y^*),\ f_j(x_1^T, x_2^C, x_3^*, y^*) > f_j(x_1^T, x_2^*, x_3^*, y^*)\ (j = 2,3).$$

Определение. *Ситуацию $x^S \in \mathbb{R}^n$ назовем гарантирующим равновесием возражений и контрвозражений в игре Γ, если существует неопределенность $y^S \in Y$ такая, что*

1^0) *ситуация x^S максимальна по Слейтеру в задаче $\langle\, \mathbb{R}^n,\ \{f_i(x,y^S)\}_{i\in\mathrm{N}}\,\rangle$;*

2^0) *при $y = y^S$ в ответ на любое возражение на x^S любого игрока у одного из оставшихся имеется контрвозражение;*

3^0) *неопределенность y^S минимальна по Слейтеру в задаче $\langle\, Y,\ \{f_i(x^S,y)\}_{i\in\mathrm{N}}\,\rangle$.*

Теорема. *Предположим, что в игре Γ*

1^0) *множество Y - выпуклый компакт, функции $f_i(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^{n+m})$ выпуклы по y при каждом $x \in \mathbb{R}^n$, существует постоянный вектор $\alpha \in \{\alpha \in \mathbb{R}^3 | \alpha_i \geq 0 (i \in \mathrm{N}),\ \sum_{i\in\mathrm{N}} \alpha_i > 0\}$ такой, что $\lim_{\|x\|\to\infty} \sum \alpha_i f_i(x,y) = -\infty$ равномерно на Y и $\sum \alpha_i f_i(x,y)$ вогнута по x при любом $y \in Y$;*

2^0) *для каждого $y \in Y$ функция $f_1(x,y)$,сильно выпукла по x_1 и x_3 и сильно вогнута по x_2, $f_2(x,y)$,сильно выпукла по x_1 и x_2 и сильно вогнута по x_3, $f_3(x,y)$,сильно выпукла по x_2 и x_3 и сильно вогнута по x_1.*

Тогда в игре Γ существует гарантирующее равновесие возражений и контрвозражений.

Замечание. Условие 1^0 теоремы обеспечивает существование равновесия по Нэшу в специальной бескоалиционной игре двух лиц при неопределенностей (что приводит к выполнению требований 1^0 и 3^0 определения). На основе условия 2^0 теоремы устанавливается наличие контрвозражений в ответ на любое возражение любого игрока.

На основе предложенного подхода получены коэффициентные критерии существования гарантирующего равновесия в дифференциальной линейно-квадратичной позиционной игре трех лиц при неопределенности. При выполнении этих условий, найден явный вид указанного равновесия, а также соответствующий гарантированный вектор выигрышей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 98-01-00613).

Литература

1. *О. В. Русаков.* Гарантирующее равновесие возражений и контрвозражений // Управление сложными системами. Межвуз. сб. научн. тр. М: Рос ЗИТЛП. 1999. С. 30-33.

2. *V. I. Zhukovskiy, M. E. Salukvadze.* The Vector-Valued Maximin. New York ets: Academic Press, 1994.

О РЕШЕНИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЬЮ.

Рыжков А.В. (Воронеж).

Пусть E_{n+1}^{+} - полупространство $x_{n+1}>0$ точек $x=(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=$ $=(x',x_{n+1})$ евклидова $(n+1)$-мерного пространства E_{n+1}. Пусть Ω^{+} - произвольная ограниченная область, расположенная в E_{n+1}^{+} и прилегающая к гиперплоскости $x_{n+1}=0$. Через S_0 обозначим часть границы области Ω^{+}, лежащую на гиперплоскости $x_{n+1}=0$, а через S^{+} - часть границы, лежащую в полупространстве. Граница S^{+} образует с гиперплоскостью $x_{n+1}=0$ прямой угол. В цилиндре $Q^{+}=\Omega^{+}\times[0,T]$ поставим смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x')\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n+1}^2}+\frac{\nu}{x_{n+1}}\frac{\partial u}{\partial x_{n+1}}-a(x')u+f(x,t),\quad \nu>0 \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\qquad u_t\big|_{t=0}=\psi(x), \tag{2}$$

$$u\big|_{S^{+}}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x_{n+1}}\right|_{S^{0}}=0, \tag{3}$$

Будем считать, что

а) $a(x')\geq 0,\quad a_{ij}=a_{ji},\quad \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j+\xi_{n+1}^2\geq\alpha\sum_{i=1}^{n+1}\xi_i^2,\quad \alpha>0$;

б) функции a_{ij}, $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}$, a непрерывны в $\overline{Q}^{+}$;

в) $f\in L_{2,\nu}(Q^{+}),\quad \psi\in L_{2,\nu}(\Omega^{+}),\quad \varphi\in \overset{0\ 1}{W}_{2,\nu}(\Omega^{+})$.

Перечисленные функциональные пространства определены в [1].

Теорема: Пусть коэффициенты уравнения (1) и функции f,φ,ψ удовлетворяют поставленным условиям а) - в), тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1) – (3), причем справедлива следующая оценка

$$\int_{Q^{+}}\left[u^2+\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]x_{n+1}^{\nu}dQ\leq C\int_{\Omega^{+}}\left[\varphi^2+\psi^2+\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2\right]x_{n+1}^{\nu}d\Omega+\int_{Q^{+}}f^2x_{n+1}^{\nu}dQ$$

Литература:

1. Киприянов И.А. «Преобразование Фурье-Бесселя и теоремы вложения для весовых классов.» - труды МИАН СССР им. Стеклова, 1967, т.89, с.130-213.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВЫРОЖДЕННОГО КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА*

Рыхлов В.С. (Саратов)

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ пучок операторов $L(\lambda)$

$$l(y,\lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y,$$

$$U_\nu(y,\lambda) \equiv U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda x) :=$$
$$\left(\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)\right) + \left(\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)\right) = 0, \quad \nu = 1,2,$$

где $p_j, \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{C}$. Пусть ω_1, ω_2 есть корни характеристичского уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$. Предположим, что эти корни лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от начала координат. Не нарушая общности, можно считать, что $\omega_2 < 0 < \omega_1$ и $\omega_1 \le |\omega_2|$. Фундаментальная система решений уравнения $l(y,\lambda) = 0$ есть $y_1(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_2 x)$. Обозначим $v_{\nu j} := U_{\nu 0}(y_j,\lambda)/\lambda$, $w_{\nu j} := \exp(-\lambda\omega_j)U_{\nu 1}(y_j,\lambda)/\lambda$, $\nu, j = 1,2$, и $V_j := [v_{1j}, v_{2j}]^T$, $W_j := [w_{1j}, w_{2j}]^T$, $j = 1,2$. Пусть $\tau := |\omega_2|/\omega_1$, $a_{sk} := \det[W_s, W_k]$, $a_{\bar{s}k} := \det[V_s, W_k]$, $a_{s\bar{k}} := \det[W_s, V_k]$, $a_{\bar{s}\bar{k}} := \det[V_s, V_k]$, $b_0 := -a_{\bar{1}1}/a_{\bar{1}\bar{2}}$, $c_0 := -a_{\bar{1}\bar{2}}/a_{1\bar{2}}$, $d_0 := \ln_0 c_0$ (здесь $\ln_0$ есть фиксированная ветвь натурального логарифма, такая, что $\ln_0 1 = 0$), $\Lambda = \{\lambda_k \in \mathbb{C} : \lambda_k := (2k\pi i + d_0)/\omega_1,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $Y := \{y(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x) + b_0 \exp(\lambda(\omega_1 + \omega_2 x)),\ \lambda \in \Lambda\}$. Очевидно, $\Lambda\backslash\{0\}$ есть множество всех ненулевых собственных значений пучка $L(\lambda)$, а множество $Y\backslash\{y(x,0)\}$ есть множество всех собственных функций (с.ф.) пучка, соответствующих ненулевым собственным значениям.

При основных предположениях $a_{\bar{1}\bar{2}} \ne 0$, $a_{1\bar{2}} \ne 0$, $a_{\bar{1}2} = a_{12} = 0$ справедливы следующие результаты

Теорема 1. *Если $W_2 \ne 0$ или $W_2 = 0$ и $a_{\bar{1}1} = 0$, то система Y образует 1-кратно безусловный базис в $L_2[0,1]$.* □

Теорема 2. *Если $W_2 = 0$, $a_{\bar{1}1} \ne 0$, то система Y образует 1-кратно безусловный базис в $L_2[0,1]$ в случаях*

а) $\tau > 1$, $|b_0|^2 \sum_{s=0}^{l} |c_0|^{-2s} < \tau$, где $l \in \mathbb{N}$ и $\tau - 1 \le l < \tau$;

б) $\tau = 1$ и $b_0 \ne \pm 1$. □

Теорема 3. *Если $W_2 = 0$, $a_{\bar{1}1} \ne 0$ и выполняется условие $\tau < |b_0|^2 \max\{1, |c_0|^{2(1-l)}\}$, то система Y не является 1-кратно полной в $L_2[0,1]$ и имеет там ∞ дефект. При этих же условиях система Y является 1-кратно минимальной в $L_2[0,1]$.* □

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 97-01-00566.

ОБ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ПРОЦЕДУРЕ, ПОРОЖДАЮЩЕЙ СИНГУЛЯРНЫЕ МЕРЫ ЛЕБЕГА-СТИЛТЬЕСА

Рябинин А.А., Ильичев В.А., Митрякова Т.М.

(Нижний Новгород)

Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, β, P), где $\Omega=\left\{\omega: \omega=(t_1,\ldots,t_n,\ldots),\ t_n=\pm 1\right\}$; β - σ-алгебра, порожденная цилиндрами $A_n(\vec{\delta})=\left\{\omega=(\delta_1,\ldots\delta_n,t_{n+1},\ldots),\ \delta_k=\pm 1 - \textit{фиксированы}\right\}$ и пусть $\left\{X_k(\omega)=t_k\right\}_1^\infty$ - последовательность координатных функций на (Ω,β,P). С $\left\{a_k: a_k>0, \sum\limits_{k=1}^\infty a_k=1\right\}$ ассоциируем случайный ряд на (Ω,β,P)

$$S(\omega)=\sum_{k=1}^\infty a_k X_k(\omega)=\sum_{k=1}^\infty \pm a_k .$$

Пусть $F_S(x)$ - функция распределения суммы $S(\omega)$ ряда и μ_S, соответствующая $F_S(x)$, мера Лебега-Стилтьеса.

Теорема. Пусть P и $\left\{a_k\right\}$ таковы, что

1) $P(A_n(\vec{\delta}))>0,\ \forall\vec{\delta}=(\delta_1,\ldots,\delta_n),\ \delta_k=\pm 1;\ \forall n=1,2,\ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n(\vec{\delta}))=0,\ \forall\left\{A_n(\vec{\delta}):\ A_{n+1}(\vec{\delta})\subset A_n(\vec{\delta})\right\}$

3) $a_n>\sum\limits_{k=n+1}^\infty a_k,\ \forall n=1,2,\ldots$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\sum\limits_{k=n}^\infty a_k=0$.

Тогда μ_S - сингулярная мера Лебега-Стилтьеса и $\operatorname{supp}\mu_S\subset[-1,1]$ - множество канторовского типа $[2;0,1-\xi_k;\xi_k]$, где $\xi_1=1-a_1$, $\xi_k=\dfrac{1-a_1-\ldots-a_k}{1-a_1-\ldots-a_{k-1}}$, $k\geq 2$ [1, стр. 313].

В ситуации, когда $P(A_n(\vec{\delta}))=\dfrac{1}{2^n}$ соответствующие вопросы рассматривались в [2], [3].

Литература

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
2. Jessen B., Wintner A., Distribution functions and the Riemann Zeta function, TASM, 1935, V. 38, p. 48-88.
3. Kerscher R., Wintner A., On symmetric Bernoulli convolutions// Amer. J. Math., 1935, V. 57, p. 541-545.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ПРОСТРАНСТВА ХАРДИ СОПРЯЖЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рябогин А.К.

В работе интегральные неравенства используются как средство для нахождения условий принадлежности пространствам Харди сопряженных гармонических функций многих переменных. В частности, с их помощью найдены необходимые и достаточные условия принадлежности гармонического вектора пространствам Харди в некотором интервале показателя степени r.

Пусть $V_i(x,y), i=\overline{1,n}$ - гармоническая функция в $I\!R_+^{n+1}$. Сопряженной к $U(x,y)$ в смысле М. Рисса [1] гармонической функцией называется вектор-функция $V(x,y)=(V_2,\ldots,V_n)$, координаты которой $V_i(x,y), i=\overline{1,n}$ суть гармонические функции, удовлетворяющие обобщенным условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial U}{\partial y}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V_k}{\partial x_k}=0,\ \frac{\partial V_i}{\partial x_k}=\frac{\partial V_k}{\partial x_i},\ \frac{\partial U}{\partial x_i}=\frac{\partial V_i}{\partial y},\ i\neq k;\ i,k=\overline{1,n}.$$

Вектор $F(x,y)=(U(x,y),V(x,y))=(U,V_1,\ldots,V_n)$ называется гармоническим. Мы будем использовать средние вида

$$M_p(y,F)=\left\{\int_{R_n}|F(x,y)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}},\ p>0.$$

Известно [4], что $U(x,y)\in H_p \Leftrightarrow U^+(x)\in L_p \Leftrightarrow N_\alpha(U)(x)\in L_p,\ p>0.$

ТЕОРЕМА . Пусть $0<p<q$ и $F(x,y)=(U,V_1,\ldots,V_n)$ гармонический вектор в R_+^{n+1}, удовлетворяющий условиям:

1) $M_p(y+1,F)\leq C$; 2) $M_p(y, D_{n+1}U)\leq C$; 3) $F(x,y)\in H_q$

Тогда гармонический вектор $F(x,y)\in H_q$ для всех $p\leq r\leq q$.

Заметим, что, вообще говоря, из условий теоремы 1 вытекает более сильное утверждение

Библиография

1. Бонами А.А. Интегральные неравенства для сопряженных гармонических функций многих переменных //Матем. сб. 1972. Т. 87(129). №2. С. 188-203.
2. Рябогин А.К. Сопряженные гармонические функции пространств Харди // Дифференциальные и интегральные уравнения, анализ и алгебра. Элиста: КГУ. 1996. С. 107-112.
3. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.

О НЕКОРРЕКТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Сабитов К.Б., Ильясов Р.Р. (Стерлитамак)

В работе рассматривается уравнение

$$l(u) \equiv S(u) + \lambda u \equiv u_{xx} - u_{yy} + \frac{2q}{x}u_x + \lambda u = 0, \tag{1}$$

где λ - произвольное комплексное число, q – произвольное действительное число, не равное нулю, в области G, ограниченной характеристиками AC $(x+y=0)$, CB $(x-y=1)$, BK $(x+y=1)$ и KA $(x-y=0)$ уравнения (1). Обозначим $D = G \cap \{y<0\}$.

Задача $D_{1\lambda}$. Найти значения параметра λ и соответствующие функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \wedge C^2(D), \tag{2}$$

$$S(u) + \lambda u = 0 \text{ в } D, \tag{3}$$

$$u(x,-x) = 0,\ 0 \le x \le 1/2, \tag{4}$$

$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1. \tag{5}$$

Задача $D_{2\lambda}$. Найти значения параметра λ и соответствующие функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям (2)–(4) и

$$\lim_{y\to 0-0} u_y(x,y) = u_y(x,0-0) = 0,\ 0 < x < 1. \tag{6}$$

Задача Γ_λ. Найти значения λ и соответствующие функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{G}) \wedge C^2(G), \tag{7}$$

$$S(u) + \lambda u = 0,\ (x,y) \in G, \tag{8}$$

$$u(x,-x) = 0,\ 0 \le x \le 1/2, \quad u(x,x) = 0,\ 0 \le x \le 1/2, \tag{9}$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Любое комплексное число λ является точкой спектра задачи (2)-(5) для оператора S при $q < -1$ и соответствующие собственные функции этой задачи определяются по формуле*

$$v(x,y) = -\lambda y[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}]^{-q-1} J_{-q-1}[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}], \quad (x,y) \in D. \tag{10}$$

Теорема 2. *Любое комплексное число λ является точкой спектра задачи (2)-(4), (6) для оператора S при $q < 0$ и соответствующие собственные функции этой задачи определяются по формуле*

$$u(x,y) = \left[\lambda(x^2-y^2)\right]^{-\frac{q}{2}} J_{-q}\left[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\right], \quad (x,y) \in D. \tag{11}$$

Теорема 3. *Любое комплексное число λ является точкой спектра задачи (7)-(9) для оператора S при $q < 0$ и соответствующие собственные функции определяются по формуле (11), где $(x,y) \in G$*

УДК 517.9

О L_2–корректности нелокальных граничных задач

Г.Б. Савченко (Воронеж)

Рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A(-iD)u = f, \tag{1}$$

$$B(-iD)u\Big|_{t=0} - C(-iD)u\Big|_{t=0}, \tag{2}$$

где $f(t,x)$ — заданная, а $u(t,x)$ — искомая функции, определнные в слое $0 \leq t \leq a$; $x \in R^m$. Здесь $A(-iD)$, $B(-iD)$, $C(-iD)$ — дифференцируемые операторы по x с постоянными коэффициентами.

При условиях типа периодичности корректность соответствующей задачи впервые была исследована А.А. Дезиным. Им была показана целесообразность использования нелокальных граничных условий для описания разрешимых расширений дифференциальных операторов [1]. Обобщение этих результатов было проведено в [2].

Исследуется корректность задачи (1)-(2). Доказана теорема, позволяющая выделить классы L_2–корректных граничных задач.

Эти результаты перенесены на системы уравнений вида (1) [3]. Достаточные условия корректности уточнены для систем частного вида. Рассмотрен вопрос о необходимости полученных условий.

Литература

1. Дезин А.А. Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия // Известия АН СССР. сер. математика. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 61–86.

2. Савченко Г.Б. Об одной краевой задаче для систем уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9,3. – С. 527–532.

3. Савченко Г.Б. О корректности одной краевой задачи для систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, XIV, 11(1978), 2079–2082.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В СПЕЦИАЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ

Салаватова С.С. (Стерлитамак)

Для управления и самоуправления процессом формирования специалиста, необходимо, чтобы и преподаватель, и студент четко осознавали цели своей деятельности. "Чтобы эта цель-результат - была раскрыта, надо разработать перечень свойств выпускника-специалиста, которые следует формировать за годы пребывания студента в вузе" (В.А. Сластенин). Эти свойства могут быть составлены только на основе изучения личности и деятельности учителя. Попытки изучения труда и личности приводят к созданию различного рода моделей специалиста: квалификационных характеристик, профессиограмм, профессиональных карт и т.п.

В своей опытно-экспериментальной работе мы используем профессиональную карту, выступающую как модель деятельности учителя математики. Используемая нами профессиональная карта представляет собой модифицированный вариант карты, составленный профессором Н.А. Половниковой. К восьми общепедагогическим функциям учителя: информационной, проектировочно-конструктивной, коммуникативной, организационной, развивающей, ориентационно-воспитательной, мобилизационной, гностической - мы добавили специальную (математическую) функцию. Каждая функция включает ряд умений, опирающихся на соответствующие знания. Так, специальная функция включает умения осуществлять логико-методический анализ конкретных разделов и тем школьного курса математики, а также понятий, аксиом и теорем, применять локальные технологии работы над математическими понятиями, теоремами, задачами, проводить все этапы математического моделирования, использовать основные методы математики для решения различных задач и др. Описанная профессиональная карта удобна в

Обращение к профессиональной карте позволяет преподавателю четко ставить цели каждого занятия, как специальные, так и общепрофессиональные, а студенту - сознательно формировать необходимые для будущей работы умения, оценивать значение каждого предмета в достижении главной цели его пребывания в вузе: формировании способности к творческой деятельности учителя математики.

Разумеется, получение номенклатуры профессиональных и нравственных черт личности учителя, модели его деятельности вовсе не достаточно для достижения целей педвуза, поскольку в этой номенклатуре не содержится "ключа" к формированию необходимых умений и качеств, однако, это уже другое направление исследования проблемы профессиональной подготовки будущих учителей.

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА III РОДА С ОСОБЕННОСТЬЮ

Сапронов И.В., Перловская Т.В. (Воронеж)

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра III рода вида

$$x^{m+1}u(x)=\int_0^x \rho(x,t)K(x,t)u(t)dt + A_j x^p, \tag{1}$$

где $u(x)$ - искомая функция со значениями в конечномерном пространстве, m – целое положительное число, $\rho(x,t)$ - скалярная положительная однородная функция нулевого измерения.

$$K(x,t)=\sum_{\alpha+\beta=m}^{\alpha+\beta=N+m} K^{\alpha\beta}x^{\alpha}t^{\beta},$$

где $K^{\alpha\beta}$ - матрицы размера n x n с вещественными элементами, $A_j x^p=(0...0\underset{j}{1}0...0)^T x^p$, $j=1,2,...,n$, $p=m+1,m+2,...,m+N$.

Уравнение (1) можно свести к уравнению вида

$$x^{m+1}\tilde{u}_j^p(x)=\int_0^x \tilde{K}(x,t)\tilde{u}_j^p(t)dt, \tag{2}$$

где $\tilde{K}(x,t)=\begin{pmatrix}\rho(x,t)K(x,t) & A_j p x^{p-1}\\ 0 & (2m+1)t^m\end{pmatrix}$, $\tilde{u}_j^p(x)=\begin{pmatrix}u_j^p(x)\\ u_{j,n+1}^p(x)\end{pmatrix}$

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$\tilde{u}_j^p(x)=x^m\sum_{i=0}^{k}\tilde{a}_{j,i}^p x^i+\tilde{a}_j^p(x)x^{m+k+1} \tag{3}$$

Подставляя это решение в уравнение (2) и приравнивая коэффициенты при x^{2m+1+i} $(i=0,1,...,k)$ получаем систему уравнений для определения $\tilde{a}_{j,i}^p$. Вектор-функция $\tilde{a}_j^p(x)$ находится методом последовательных приближений из некоторого операторного уравнения при определенном выборе k.

Заметим, что, если $\tilde{u}_j^p(x)=\begin{pmatrix}u_j^p(x)\\ x^m\end{pmatrix}$ является решением уравнения (2), то $u_j^p(x)$ будет решением уравнения (1).

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ЭКВИВАЛЕНТИРОВАНИЯ.

Сазонова С.А., Квасов И.С. (Воронеж)

Цель проведенных исследований заключалась в создании метода решения задач оценивания для трубопроводных систем (тепло-, водо- газоснабжения), использующего два вида экспериментальных данных: манометрическую съемку в отдельных узлах и притоки транспортируемой среды через питатели. В рамках проведенных исследований рассматривался только гидравлический аспект решения этой задачи, то есть проблемы установления погрешности получаемых результатов или функции распределения их ошибок исключались.

Инженерная постановка задачи состоит в определении всех быстро меняющихся параметров режима функционирования трубопроводной системы по результатам замеров части из них. К таким параметрам относятся: расходы среды и потери давления на участках; давления и отборы в узлах. Остальные параметры, характеризующие гидравлические процессы в системе: ее конфигурация, длины участков и их сопротивления считаются неизменными и априорно заданными. Из двух известных подходов к решению задач оценивания состояния выбран метод взвешенных наименьших квадратов.

В качестве компонентов вектора независимых переменных выбраны отборы среды потребителями. В этом случае обеспечивается инвариантность решения при произвольной коммутации запорно-регулирующей арматуры в системе. Для выражения в явной форме зависимости расчетных параметров в целевой функции от компонент вектора независимых переменных предлагается использовать идею функционального эквивалентирования метасистемы рассматриваемых объектов. Возникающую при этом дополнительную неизвестную - гидравлическое сопротивление эквивалентов можно определять в итерационном процессе, считая ее константой на каждом отдельном шаге решения.

Для привлечения экспериментальных данных о притоках среды через питатели предлагается в методе наименьших квадратов вместо традиционной целевой функции представляющей отклонения вычисленных данных от опытных минимизировать функцию Лагранжа, в которой отклонения от упомянутых данных представляют ограничения в форме равенств.

Алгоритмически задача оценивания представляет совместную реализацию двух подсистем нелинейных уравнений (нормальных уравнений в методе наименьших квадратов и модели потокораспределения).

О ВАРИАЦИОННОМ ОПИСАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ.

В.Ж. Сакбаев (Москва)

В работе изучается обратная задача вариационного исчисления.

В работе [1] определены условия на системы ОДУ второго порядка, необходимые и достаточные для существования вариационного описания решений системы в классе функционалов вида $S(x) = \int\limits_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$ (функционалов Эйлера). В работе [1] поставлена задача расширить класс функционалов с целью дать вариационное описание более широкому классу дифференциальных уравнений.

В настоящей работе изучается возможность дать вариационное описание системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. Найден следующий класс функционалов, удовлетворяющих указанному требованию: функционал $S(x)$ определен на пространстве функций $C^1([0,T], R^n)$ соотношением

$$S(x) = S(x,t)|_{t=T}, \quad S(x,t) = \int\limits_0^t L(x(z), \dot{x}(x), S(x,z))dz. \tag{1}$$

Функция L дважды непрерывно дифференцируема по совокупности аргументов, причем существуют такие положительные постоянные M, d_0, D_0, что $|\frac{\partial L}{\partial S}| \leq M$ и

$$d_0 \leq |\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j}| \leq D_0.$$

Теорема 1 *Соотношение (1) задает на пространстве $C^1([0,T], R^n)$ функционал $S(x)$, дифференцируемый по Фреше в каждой точке пространства $C^1([0,T], R^n)$.*

Функция $x \in C^1([0,T], R^n)$ является стационарной точкой функционала $S(x)$ тогда и только тогда, когда $x \in C^2([0,T], R^n)$ и удовлетворяет условиям:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},s) = \frac{\partial L}{\partial x}(x,\dot{x},s) + \frac{\partial L}{\partial s}(x,\dot{x},s)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},s);$$

$$\frac{d}{dt}s(t) = L(x,\dot{x},s), \quad s(0) = 0.$$

Полученные уравнения Эйлера-Лагранжа можно с помощью преобразования Лежандра представить в гамильтоновых переменных. Установлена связь стационарных точек функционала (1) с решениямими уравнений с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(x, \frac{\partial S}{\partial x}, S) = 0,$$

где функция $H(x,p,S)$ является преобразованием Лежандра функции $L(x,v,S)$.

Литература

Филиппов В.М.// Вариационные принципы для непотенциальных операторов. М. Изд. УДН, 1985.

ФАЗОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Свиридюк Г.А.(Челябинск)

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, а оператор $M \in Cl(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (L,p)-секториален [1]. Пусть оператор $N \in C^\infty(\mathcal{U}_N;\mathcal{F})$, где $\mathcal{U}_N = [\mathcal{U}_0,\mathcal{U}_1]_\alpha$ — некоторе интерполяционное пространство, $\alpha \in [0,1)$, $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$, а $\mathcal{U}_1$ — это линеал $\mathrm{dom}M$, снабженный нормой графика $\|\cdot\|_{\mathcal{U}_N} = \|M\cdot\|_{\mathcal{F}} + \|\cdot\|_{\mathcal{U}}$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1}$$

для полулинейного операторного дифференциального уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u)\,, \tag{2}$$

причем случай $\ker \neq \{0\}$ не исключается.

Хорошо известно [2], что задача (1), (2), вообще говоря, при любом $u_0 \in \mathcal{U}_N$ неразрешима. Поэтому актуальным является поиск и описание множества $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_N$ таких начальных значений, при которых задача (1), (2) корректна. Такое множество принято называть фазовым пространством уравнениея (2) [3]. В докладе обсуждаются вопросы существования фазовых пространств и их морфология. Абстрактные результаты иллюстрируются конкретными начально-краевыми задачами для уравнений и систем уравнений в частных производных, возникших в приложениях [4].

Работа поддержана грантами РФФИ N 97-01-00444 и Минобразования РФ по направлению "Математика".

Литература

[1] *Свиридюк Г.А.* К общей теории полугрупп операторов // УМН. 1994. Т. 49, N 4. С. 47-74.

[2] *Свиридюк Г.А.* Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева // Изв. РАН, сер. матем. 1993. Т. 57, N 3. С. 192-207.

[3] *Свиридюк Г.А.* Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором // Алгебра и анал. 1994. Т.6, N 5. С. 252-272.

[4] *Свиридюк Г.А., Якупов М.М.* Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова // Дифференц. уравн. 1996. Т. 32, N 11, С. 1538-1543.

Стратегия Штакельберга для повторяющейся
2*2 биматричной игры с двухшаговой памятью.

Семенищев А. А. (Екатеринбург)

Рассматривается биматричная игра типа «дилемма заключенного», в которой каждый из игроков имеет две стратегии: отклоняться от сотрудничества (стратегия D) или кооперироваться с партнером (стратегия C). Матрица выигрыша первого игрока имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} p^{-} & p^{++} \\ p^{--} & p^{+} \end{pmatrix}, \text{ причем } \quad p^{--} < p^{-} < p^{+} < p^{++}, \quad \frac{p^{++} + p^{--}}{2} < p^{+}$$

Матрица выигрыша второго игрока определяется как $B=A^T$. Если положить $p^{--} = 0; p^{++} = 1$, то игра задается двумя параметрами (p^{+}, p^{-}), где

$$0 < p^{-} < p^{+} < 1, \quad p^{+} > 1/2 \qquad (1)$$

Рассматривается игра, повторяющаяся бесконечное число раз при условии, что каждый игрок на текущем шаге принимает свое решение, используя информацию о решениях, принятых обоими игроками на предыдущих двух шагах игры. Математической моделью памяти служит граф, содержащий 16 вершин – всевозможные состояния двухшаговой памяти. Таким образом, стратегия игрока – это функция, заданная на графе, и принимающая значения из множества {D, C}. Показано, что в такой игре существует несколько циклических траекторий, соответствующих циклам ориентированного графа (в частности, может быть один). Их количество и вид определяется в каждом случае конкретными стратегиями игроков. После конечного числа повторений игра выходит на один из этих циклов, поэтому при бесконечном повторении игры в качестве выигрыша игрока принимается его средний выигрыш на этом цикле, пренебрегая выигрышами, полученными в переходном режиме.

Мы рассматриваем эту игру в иерархической постановке с лидером – первым игроком. Стратегия, объявляемая лидером, должна быть такова, чтобы в совокупности с рациональным ответом ведомого образовать единственный цикл, на котором выигрыш лидера больше, чем p^{-} (такой выигрыш гарантируется игрокам в случае симметричной игры). Для анализа возможных циклов разработан алгоритм, который позволяет по заданному выигрышу лидера определить, существует ли цикл с таким выигрышем, и в случае положительного ответа построить его. Так, например, был найден самый длинный цикл, содержащий все вершины графа.

В результате получено разбиение области допустимых значений параметров игры, заданной неравенствами (1) на шесть подобластей, для каждой из которых сконструирована стратегия лидера, гарантирующая ему выигрыш, больший чем p^{-}, при условии рационального поведения ведомого. Таким образом, в данной постановке «дилемма заключенного» решена.

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ, грант 97-01-00161.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Семыкина Н. А. (Тверь)

В работе рассматривается задача оптимального управления с фазовыми ограничениями в которой требуется найти минимум функционала

$$J(x,u) = -\int_0^T x^1(t)\,dt$$

при динамических ограничениях

$$\dot{x}^1 = x^2,\ \dot{x}^2 = -x^1 + u,\ t \in [0,\pi],$$

фазовых и промежуточном ограничениях

$$D_1 \le x^1(t) \le D_2,\ t \in [0,\pi]; \quad x^1(t_1) = a,$$

где a, D_1, D_2—заданные положительные числа такие, что $D_1 < a < D_2$. Ограничения на функцию управления

$$u(t) \ge 0, \quad \text{п.в.}\ t \in [0,\pi],$$

граничных условиях

$$x^1(0) = x^1(\pi) = D_1.$$

Задача решается методом функции штрафа. Штрафные функции выбираются в виде

$$P_k = A_k \sum_i \int_{t_1}^{t_2} [\max\{0, g_i(t,x(t))\}]^2\,dt$$

$$L_k = -B_k \sum_i \ln|g_i(t,x(t))|, \quad F_k = C_k^2 \sum_i \frac{1}{g_i(t,x(t))}.$$

Проводится анализ сходимости алгоритма с различными функциями штрафа в зависимости от выбора начального приближения и функции управления.

Литература.

1. Андреева Е. А., Клотцлер Р. Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsproblemen.–ZAMM, 1984, 64.

2. Андреева Е. А., Надь Е. Двойственность в теории экстремальных задач. Тверь, 1985.

Качественный анализ одной математической модели турбулентной диффузии

Сербина Л.И. (г. Нальчик)

Полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии имеет вид [1]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U(z)\,\frac{\partial q}{\partial x} - w\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\,k_1(z)\frac{\partial q}{\partial z} + k_2(y)\,U(z)\,\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}. \tag{1}$$

Здесь: $q = q(x, y, z, t)$ – концентрация примеси в приземном слое $0 < z < h$ в точке $Z = (x, y, z)$ атмосферы в момент времени t от начального $t = 0$ до расчетного $t = T$; $U(z)$ – скорость ветра; w – установившаяся скорость падения частиц примеси под действием гравитационных сил; $k_1(z)$ - вертикальный коэффициент турбулентной диффузии; коэффициент $k_2(y) = d\sigma/dy$, где σ - дисперсия концентрации примеси в направлении перпендикулярном направлению ветра.

Считают, что при логарифмическом профиле концентрации можно положить

$$k_1(z) = k_0\, z, \quad U(z) = k\, z^n, \quad k_0, k, n = const > 0. \tag{2}$$

Пусть $q = u_1(x, z, t) + yu_2(x, z, t)$. Тогда из (1) в силу (2) имеем, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k_0 z^n\,\frac{\partial u}{\partial x} - w\,\frac{\partial u}{\partial z} = k_0\,\frac{\partial}{\partial z}\,z\frac{\partial u}{\partial z}, \quad u = u_i, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Решения $u = u(z, t)$ уравнения (3), которые не зависят от x удовлетворяют уравнению

$$\partial u/\partial t = k_0 z\,\partial^2 u/\partial z^2 + (k_0 + w)\,\partial u/\partial z. \tag{4}$$

Если $w \neq k_0$, то для уравнения (4) граничное условие первого рода на подстилающей поверхности $z = 0$ для всех $t \in [0, T]$ задается в виде $\lim\limits_{z\to 0} z^{w/k_0 - 1}u = \tau(t)$ и в виде $\lim\limits_{z\to 0} u/log\, z = \tau(t)$, если $w = k_0$. Граничное условие второго рода имеет вид $\lim\limits_{z\to 0} z^{w/k_0}\partial u/\partial z = \nu(t)$.

Стационарные решения $u = u(x, z)$ уравнения (3) определяются как решения уравнения

$$k_0 z^n\,\partial u/\partial x = k_0 z\,\partial^2 u/\partial z^2 + (k_0 + w)\,\partial u/\partial z. \tag{5}$$

Уравнение (5), как и (4), относится к классу уравнений параболического типа с неотрицательной характеристической формой [2].

В работе проведен качественный анализ решения первой и второй краевых задач для уравнения (4) с граничным условием первого и второго рода при $z = 0$.

Литература

1. *Буйков М.В.* Метеорология и гидрология. 1990. № 9, С. 52-56.

2. *Нахушев А.М.* Диференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1.

СИДОРЕНКО А.А. (Воронеж)

КРИТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ С РАСТЯЖЕНИЕМ ПРОФИЛЬНЫХ ЗАГОТОВОК

При формообразовании профильных заготовок методом обтяжки может происходить потеря устойчивости некоторых участков заготовки в виде образования гофра. Для обеспечения отсутствия гофра напряжения сжатия на внутреннем волокне профиля не должна превышать критической величины.

В работе определены предельные радиусы изгиба некоторых материалов, при котором максимальные напряжения в волокнах сжатых элементов достигают критической величины $\sigma_{кр.}$, вслед за которой начинается местная потеря устойчивости. Критический радиус кривизны зависит от упруго-пластических свойств материала и соотношения высоты и ширины сжатого профиля. Установлено, что профили из более пластичных материалов, характеризующиеся меньшим значением касательного модуля упрочнения, допускают изгиб на большую величину без местной потери устойчивости сжатых пластинчатых элементов сечения.

Критерием отсутствия гофр в процессе формообразования является условие положительности деформаций всех волокон профиля в каждый текущий момент времени

$$e_{min} \geq 0. \qquad (1)$$

Если гофрообразование допускать в процессе формообразования, то необходимо проверять условия разглаживания гофр в конечной стадии деформирования. Условием разглаживания гофр является условие (1), которое должно выполняться по всей длине и толщине заготовки в конечный момент формообразования. Условие отсутствия потери устойчивости сжатия в текущий момент времени можно записать в виде

$$e_{min} \geq e_{кр.} \qquad (2)$$

Здесь $e_{кр}$ — критическое значение деформации сжатия, при которой происходит потеря устойчивости профильной заготовки. Величина $e_{кр}$ зависит от формы сечения профильной заготовки, от длины участка, от условий трения, механических свойств материала и т.д. Для определения $e_{кр}$ в каждом конкретном случае необходимо решать задачу устойчивости.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СЛЕДЫ ВОЗМУЩЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Сидоренко С.В. (Москва)

Пусть T - самосопряженный положительно определенный линейный оператор с компактной резольвентой, действующий в комплексном гильбертовом пространстве H. Предполагается, что его собственные значения допускают асимптотику вида

$$\lambda_n = Cn^\alpha + O(n^\beta), n \geq 1,$$

где $\alpha > 1$, $0 \leq \beta < \alpha$ и (e_n) –ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора T.

Рассмотрим возмущенный оператор $A = T - V$, где V - ограниченный оператор. Его собственные значения $(\mu_1, \mu_2, ...)$ считаются упорядоченными по неубыванию их вещественных частей.

Теорема. *Пусть числа α и β удовлетворяют одному из условий:*

1) $\alpha - \beta \geq 1$;

2) $\alpha > \beta, \alpha - \beta < 1, 2\alpha > \beta + 2$.

Тогда существует такая возрастающая последовательность (n_k) натуральных чисел, что имеет место следующая формула регуляризованных следов

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} (\mu_j - \lambda_j + (Ve_j, e_j)) = 0.$$

По сравнению с известными результатами, относящимися к рассматриваемому классу линейных операторов упрощена формула регуляризованных следов, отсутствуют условия на "гладкость" возмущения V.

Получены формулы регуляризованных следов и для степеней собственных значений возмущенных самосопряженных операторов. Доказательство полученных результатов опирается на возможность сколько угодно точной аппроксимации конечной части спектра оператора A. Для этого используется метод простой итерации.

Литература

Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Изд–во МГУ. 1986.

ГССС - СИТУАЦИЯ В ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

Смирнова Е.Б. (Орехово-Зуево)

Рассматривается дифференциальная позиционная кооперативная игра N лиц без побочных платежей при неопределённости

$$\Gamma = \langle N,\ \Sigma,\ \{\{U_i\}_{i\in N}, V^*\},\ \{F_i(x^{(1)}[\theta],\dots,x^{(N)}[\theta], y[\theta])\}_{i\in N}\rangle.$$

Здесь $N=\{1,2,\dots,N\}$; управляемая система Σ описывается N+1 системами обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^{(i)} = f^{(i)}(t, x^{(i)}, u^{(i)}),\quad x^{(i)}[t_0] = x_0^{(i)},\ i\in N,$$

$$\dot{y} = \varphi(t, y, v),\quad y[t_0] = y_0,$$

где $x^{(i)}\in R^{n_i}$, $y\in R^k$, $(t_0,x_0^{(1)},\dots,x_0^{(N)},y_0)\in[0,\theta)\times R^{n_1}\times\dots\times R^{n_N}\times R^k$, θ=const, $t\in[t_0,\theta]$, управление i-го игрока $u_i\in P_i\in \mathrm{comp}\, R^{p_i}$, неопределённый параметр $v\in Q\in \mathrm{comp}\, R^q$; множество стратегий i-го игрока

$$U_i = \{U_i \div u_i(t,x,y)\ /\ u_i(t,x,y)\subseteq P_i,\quad \forall(t,x,y)\in[0,\theta)\times R^n\in R^k\},\quad i\in N;$$

ситуация $U = (U_1,\dots,U_N)\in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1\times\dots\times\mathcal{U}_N$, $U_{N\backslash i} = (U_1,\dots,U_{N-1}, U_{N+1},\dots,U_N)$;

$x=(x^{(1)},\dots,x^{(N)})\in R^n$, множество неопределённостей

$$\mathbf{V}^* =\{V \div v(t,y)/\ v(t,y)\subseteq Q\}\in\mathbf{V}=\{V \div v(t,x,y)\ /\ v(t,x,y)\subseteq Q,\ \ \forall(t,x,y)\in[0,\theta)\times R^n\in R^k\},$$ где

$$\forall y\in Y(y[\theta,t_0,y_0,V\div Q]= \bigcup_{V\in\mathbf{V}} y[\theta,t_0,y_0,V]$$ соответствует $V^\wedge\in\mathbf{V}^*/y=y[\theta,t_0,y_0,V^\wedge]$, $\forall y[\bullet,t_0,y_0,V^\wedge]$.

Компоненты вектор-функций $f^{(i)}(\bullet)$, $\varphi(\bullet)$ непрерывны, локально липшицевы по $x^{(i)}$, y соответственно, $\|f^{(i)}\|\le\gamma^{(i)}(1+\|x^{(i)}\|)$, $\|\varphi\|\le\gamma^{(N+1)}(1+\|y\|)$, $\gamma^{(j)}$ = const > 0 (j=1,...,N+1); квазидвижения $x^{(i)}[t]=x^{(i)}[t,t_0,x_0^{(i)},U_i]$ $(y[t]=y[t,t_0,y_0,V])$, $t_0\le t\le\theta$, системы Σ, порождённые стратегией $U_i\in\mathcal{U}_i$ (неопределённостью $V\in V^*$), определяются согласно [1]. $F_i(x^{(1)}[\theta],\dots,x^{(N)}[\theta], y[\theta])$ - функция выигрыша i-го игрока, функции $F_i(x,y)$-непрерывны ($i\in N$).

<u>Определение.</u> Ситуацию $U^{ss} = (U^{ss}_1,\dots, U^{ss}_N)$ назовем ГССС-ситуацией игры Г, если существует неопределенность $V^s\in\mathbf{V}^*$ такая, что $U^{ss}\in\mathcal{U}(V^s)$;

для $\forall x^{(i)}[\bullet,t_0,x_0^{(i)},U_i]$, $x^{(i)}[\bullet,t_0,x_0^{(i)},U_i^{ss}]$ несовместны системы неравенств

1) $\Phi_i(x[\theta,t_0,x_0,U], y[\theta,t_0,y_0,V^s]) < \Phi_i(x[\theta,t_0,x_0,U^{ss}], y[\theta,t_0,y_0,V^s])$ $(i\in N)$ для $\forall U\in\mathcal{U}(V^s)$,

2) $\Phi_i(x[\theta,t_0,x_0,U^{ss}], y[\theta,t_0,y_0,V]) > \Phi_i(x[\theta,t_0,x_0,U^{ss}], y[\theta,t_0,y_0,V^s])$ $(i\in N)$ для $\forall V\in V^*$; где

$$\mathcal{U}(V^s)=\{U\in\mathcal{U}|\max_{x[\bullet]}\Phi_i(x[\theta,t_0,x_0,U],y[\theta,t_0,y_0,V^s])\le\min_{U_i}\max_{U_{N/i},\,x[\bullet]}\Phi_i(x[\theta,t_0,x_0,U],y[\theta,t_0,y_0,V^s]),i\in N\},$$

$$\Phi_i(x[\theta,t_0,x_0,U],y[\theta,t_0,y_0,V])=\max_{U^*,x[\bullet]} F_i(x[\theta,t_0,x_0,U^*], y[\theta,t_0,y_0,V])-F_i(x[\theta,t_0,x_0,U], y[\theta,t_0,y_0,V]),$$

$x[\theta,t_0,x_0,U]=(x^{(1)}[\theta,t_0,x_0^{(1)},U_1],\dots, x^{(N)}[\theta,t_0,x_0^{(N)},U_N])$, $i\in N$.

Установлены некоторые свойства ГССС- ситуаций , доказана компактность их области достижимости, найдены необходимые и достаточные условия существования в игре Г.

Литература

1. В.И. Жуковский, М.Е. Салуквадзе. Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. Тбилиси "Мецниереба",1996.
2. E.B. Smirnova. GSSS-situations of differential cooperative games under uncertainty //Математика. Компьютер. Образование: Тез. докл., Пущино, 1999, с.323.
3. E.B. Smirnova. About One Imputation for Game of Two Persons under Unsertainty. //Тез докл.,Japan, NAGA 1998, A 031.

К РАСЧЕТУ ТЕЧЕНИЙ В ЗОНЕ ОБРАТНЫХ ТОКОВ

С.А. Соколов (Воронеж)

При создании камер сгорания ряда прогрессивных изделий возникает ряд проблем. Одной из них является исследование зоны обратных токов, сопутствующих механизму смесеобразования, воспламенения и стационарного горения топлива. При исследовании динамики больших вихрей, их изучение ведется без привлечения полуэмпирических теорий турбулентности, на базе моделей идеальной среды. В данном случае течение в зоне обратных токов, имеющей треугольное очертание, рассматривается как потенциальное. И, в подобной постановке, описывается уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi_{ГД}}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \varphi_{ГД}}{\partial y}\right]=0,$$

где x, y – координаты точек поля; $\varphi_{гд}$ – гидродинамический потенциал скоростей.

На границе между истекающей струей и зоной обратных токов для расчета параметров истечения струи в ограниченное пространство, в качестве граничных условий принимается:

$$\Phi_{ГД_i}=\frac{\sum\limits_1^i \sqrt{|Eu_i|}}{\sum\limits_1^k \sqrt{|Eu_i|}}.$$

где $\Phi_{ГД}=\dfrac{\Delta\varphi_{ГД}}{\Delta\varphi_{ГД_{max}}}$ – безразмерный гидродинамический потенциал; $Eu=\dfrac{\Delta P}{\rho_0 V_0^2}$ – критерий Эйлера, находится из следующей системы уравнений:

$$Eu=w_p^2\Theta_p\left(\frac{2r_x^2}{r_0^2}-1\right),\qquad r_x^2=\frac{1+r_0^2 w_p\Theta_p}{w_x\Theta_x+w_p\Theta_p},\qquad r_x^2=\frac{1}{w_p^2\Theta_p+w_x^2\Theta_x},$$

где $\dfrac{F}{F_0}=r_0^2$; $\dfrac{F_x}{F_0}=r_x^2$; $\dfrac{\varpi_x}{\varpi_0}=w_x$; $\dfrac{\varpi_p}{\varpi_0}=w_p$; $\dfrac{\rho_x}{\rho_0}=\Theta_x$; $\dfrac{\rho_p}{\rho_0}=\Theta_p$;

F_0, F – площади сечений струи (начального и конечного); F_x – площадь сечения струи на расстоянии x; ω_0, ρ_0 – начальная скорость и плотность истечения струи; ω_x, ρ_x – средняя скорость и плотность прямого потока в сечении F_x; ω_p, ρ_p – средняя скорость и плотность обратного течения в сечении F-F_x.

Для двух других границ вводится условие непроницаемости.

Обобщение результатов возможно произвести в виде зависимости гидродинамического коэффициента μ от расхода в зоне обратного тока.

К УСТОЙЧИВОСТИ КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ ОВАЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ.

Спорыхин А.Н., Щеглова Ю.Д. (Воронеж)

Дано решение задачи о напряженном состоянии скручиваемого стержня овального поперечного сечения из упругопластического упрочняющегося материала и исследована устойчивость этого состояния при малых докритических деформациях.

Основные соотношения для определения напряженно-деформированного состояния приводятся в цилиндрической системе координат. Решение задачи о напряженном состоянии определяется методом малого параметра. За нулевое приближение выбирается решение задачи кручения стержня кругового поперечного сечения из упрочняющегося упругопластического материала. Найдено поле напряжений и перемещений в первом приближении. Выведено уравнение, определяющее границу раздела зон упругого и пластического деформирования.

Для определения напряженно-деформированного состояния в пластической зоне были привлечены:

- условие пластичности

$$\left(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^{p}\right)\left(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^{p}\right) = k^2 \ ;$$

- ассоциированный закон пластического течения

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda\left(s_{ij} - c\varepsilon_{ij}^{p}\right),$$

где c – параметр упрочнения.

При этом полная деформация складывается из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{p} + \varepsilon_{ij}^{e} \ .$$

Уравнения равновесия, соотношения Коши и соотношения закона Гука приняты в обычной форме. Граничные условия в напряжениях и условия непрерывности решений на упругопластической границе замыкают краевую задачу.

Устойчивость исходного состояния исследуется в рамках уравнений трехмерной линеаризированной теории устойчивости второго варианта. При этом при динамическом подходе в возмущениях компонент вектора перемещений, тензора напряжений и тензора деформаций выделен временной множитель. Получена краевая задача относительно значений ω_k. Критическое значение крутки, соответствующее потери устойчивости определяется из условия

$$\min J_m \omega_k = 0 \quad , \quad (k = 1,2,\ldots)$$

Результаты вычислений приводятся в виде графиков. Дано сравнение с известными решениями.

Степанов Г.Д. (Воронеж)

ЗНАКОПОСТОЯНСТВО МИНОРОВ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОНИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ

Прямоугольная $m \times n$-матрица $A = \|a_{ij}\|$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ с вещественными элементами называется знакопостоянной класса p (короче SC_p-матрицей), если у нее все ненулевые миноры p-го порядка имеют одинаковые знаки. Если у SC_p-матрицы все миноры p-го порядка отличны от нуля, то она называется строго знакопостоянной класса p матрицей (SSC_p-матрицей). Известно, что знакопостоянство миноров, в частности, позволяет делать определенные выводы о поведении спектра.

Будем использовать два варианта подсчета числа перемен знака вещественного вектора $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, дающие соответственно две характеристики — минимальное число перемен знака $S^-(\xi)$ и максимальное число перемен знака $S^+(\xi)$. Для вектора, не содержащего нулевых координат, эти характеристики совпадают и полагаются равными числу индексов i $(i = \overline{2, n})$, при которых $x_{i-1}x_i < 0$. Для ненулевого вектора, у которого есть нулевые координаты, число $S^-(\xi)$ полагается равным аналогичной характеристике вектора, получающегося из ξ вычеркиванием всех нулевых координат, а $S^+(\xi)$ полагается равным максимально возможному значению аналогичной характеристики у векторов, получающихся из исходного заменой нулевых координат на ± 1. Для нулевого $\xi \in R^n$ по определению считается $S^-(\xi) = -1$ и $S^+(\xi) = n$.

Имеется тесная связь между разными вариантами знакопостоянства класса p и преобразованиями конических множеств вида $\{\xi : 0 \leqslant S^-(\xi) < p\}$, $\{\xi : S^+(\xi) < p\}$ и т.п. Важными, но далеко не исчерпывающими примерами таких взаимосвязей служат следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $0 < p \leqslant min(m, n)$. Для того, чтобы матрица A была SSC_p-матрицей, необходимо и достаточно, чтобы для всех $\xi \in R^n$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant S^-(\xi) < p$, выполнялось условие $S^+(A\xi) < p$.*

Теорема 2. *Пусть $0 < p < min(m, n)$. Для того, чтобы матрица A была SC_p-матрицей, необходимо и достаточно, чтобы для всех $\xi \in R^n$, удовлетворяющих условию $S^-(\xi) < p$, выполнялось условие $S^-(A\xi) < p$.*

Из теоремы 1 сразу вытекает ("складывается, как из кирпичиков") критерий строгой знакорегулярности матриц Ф.Р.Гантмахера и М.Г.Крейна, а из теоремы 2 — известная теорема И.Шенберга о знакорегулярных матрицах.

Матричные результаты позволяют установить аналогичные взаимосвязи для ядер интегральных операторов, преобразующих функции одной переменной. В приложениях, для матриц более простой представляется непосредственная проверка знакопостоянства миноров, однако для интегральных операторов, ядрами которых являются функции Грина краевых задач, непосредственная проверка знакопостоянства миноров обычно невозможна, но зато появляется возможность эффективной проверки эквивалентных условий, формулируемых в терминах конических множеств.

РЕШЕНИЯ ТИПА ЙОСТА КВАЗИЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Степин С.А. (Москва)

Исследован вопрос об асимптотическом поведении решений квазилинейного уравнения второго порядка

$$y'' + Q(x)y + y^{\kappa} = 0, \tag{1}$$

где коэффициент $Q(x) > 0$ при $x \in [x_0, +\infty)$ и $\kappa \in \mathbb{N}$. Для уравнения вида (1) известны условия, при которых его решения с достаточно малыми начальными данными имеют асимптотические представления

$$\begin{aligned} y(x) \ = \ & Q^{-1/4}(x) \exp\Big(i \int_{x_0}^{x} \sqrt{Q(t)}\, dt\Big) \big[A + o(1)\big] \ + \\ & + \ Q^{-1/4}(x) \exp\Big(-i \int_{x_0}^{x} \sqrt{Q(t)}\, dt\Big) \big[B + o(1)\big], \end{aligned} \tag{2}$$

при $x \to +\infty$, т.е. асимптотически эквивалентны решениям соответствующего линейного уравнения. С помощью развиваемого подхода, представляющего собой нелинейный вариант метода ВКБ, удается построить решения типа Йоста уравнения (1), для которых в роли "начальных данных" выступают параметры A, B асимптотики (2).

Теорема. *Пусть $Q(x) > 0$ при $x \geq x_0$, $Q \in C^2[x_0, +\infty)$ и сходится интеграл*

$$\int_{x_0}^{\infty} \big\{|Q''(x)|\, Q^{-3/2}(x) + Q'(x)^2 Q^{-5/2}(x) + Q^{-(\kappa+1)/4}(x)\big\}\, dx \ < \ \infty.$$

Тогда для произвольных $A, B \in \mathbb{C}$ уравнение (1) имеет решение $y(x)$ с асимптотикой (2).

На примере второго уравнения Пенлеве показано, что условия теоремы являются в определенном смысле точными.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Сугак Дмитрий Владимирович (Санкт-Петербург)

В работе рассмотрена задача оптимального управления объектом, описываемым системой дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа второго порядка. Исследован случай так называемой сингулярной системы уравнений. В такой системе данному управлению может не соответствовать какое-либо состояние, либо таких состояний может быть бесконечно много, либо состояние одно, но неустойчивое. Разработке специальных методов, применимых к исследованию задач управления сингулярными распределенными системами, были посвящены работы Ж. Л. Лионса, И. Экланда, П. Марселини, Ж. Моссино, П. Ривера и многих других авторов. Следует, однако, отметить, что в подавляющем большинстве упомянутых работ рассматривалась простейшая постановка задачи. Она характеризуется тем, что множество допустимых процессов описывается только дифференциальным уравнением и связанными с ним граничными условиями. В данной работе исследован более общий и сложный случай, когда в описании упомянутого множества присутствуют так называемые фазовые ограничения. Они требуют, чтобы фазовый вектор системы не покидал заданного множества. В такой постановке задача оптимального управления распределенной сингулярной системой, несомненно, представляет значительный интерес и впервые исследуется автором. Основное достижение работы — нахождение и обоснование аналога принципа максимума Понтрягина.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Ay &= f\left[x, y(x), u(x)\right], \quad u(x) \in K, \quad x \in \Omega, \\ y|_\Gamma &= 0, \end{cases} \qquad (*)$$

где $y(\cdot) = (y_{(k)}(\cdot))_{k=1}^h : \Omega \to I\!R^h$ — состояние, $u(\cdot)$ — управление и A — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка: $Ay(\cdot) = p(\cdot)$, где $p(x) = |p_k(x)|_{k=1}^h$, $p_k(x) = -\sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\alpha_{ij}^{(k)}(x)\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right]$ $\forall k = 1, \ldots, h$, $\alpha_{ij}^{(k)} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ и $\sum_{i,j=1}^{l} \alpha_{ij}^{(k)}\xi_i\xi_j \geq \Lambda|\xi|^2$, $\forall \xi \in I\!R^l, x \in \overline{\Omega}, k = 1, \ldots, h$ при некотором $\Lambda > 0$. Рассматривается задача оптимального управления: $J(y, u) := \int_\Omega L\left[x, y(x), u(x)\right] dx \to \inf$ на множестве $D := \{[y(\cdot), u(\cdot)] : y(\cdot) \in H_0^1(\overline{\Omega} \to I\!R^h) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \to I\!R^h),\ u(\cdot) \in L^\infty(\Omega \to I\!R^m)$, верно $(*)$ и $g_i(x, y(x)) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega, i = 1, \ldots, q\}$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены предположения 1–3, и (y^0, u^0) — оптимальный процесс в задаче (3.2). Тогда существует функция $p(\cdot) \in W_0^{1,\sigma}(\Omega \to I\!R^h)$, где $\sigma < l/(l-1)$, заряды $\mu_i(dx) \in M(\Omega), i = 1, \ldots, q$ и число $\lambda^0 \in I\!R$ такие, что*

$$A^*p(x) - \nabla_y H\left[x, y^0(x), u^0(x)\right] + \sum_{i=1}^{q} \mu_i(dx)\nabla_y g_i[x, y^0(x)] = 0, x \in \Omega, \qquad (3.3)$$

$$H\left[x, y^0(x), u^0(x)\right] = \max_{v \in K} H\left[x, y^0(x), v\right] \text{ для почти всех } x \in \Omega, \qquad (3.4)$$

$$\lambda^0 \geq 0, \mu_i(dx) \geq 0, \operatorname{supp}\mu_i(dx) \subset \{x : g_i[x, y^0(x)] = 0\} \quad \forall i = 1, \ldots, q, \qquad (3.5)$$

$$\lambda^0 + \int_\Omega |p(x)|\, dx + \sum_{i=1}^{q} \mu_i(\Omega) > 0. \qquad (3.6)$$

Здесь $H(x, y, u) = p^*(x)f(x, y, u) - \lambda^0 L(x, y, u)$ — функция Гамильтона и $A^*y = p(x)$, где $p(x) = |p_k(x)|_{k=1}^h$, $p_k(x) = -\sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\alpha_{ij}^{(k)}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right] \quad \forall k = 1, \ldots, h.$

УДК 539.3

Сумин В.А. (Воронеж)

К устойчивости нелинейно-упругих тел при кручении.

В статической постановке рассматриваются задачи о потере устойчивости цилиндра кругового и эллиптического поперечного сечений из нелинейно-упругого материала описываемого потенциалами Трелоара, Муни и двухконстантным. Первые два потенциала описывают поведение несжимаемого материала, а последний потенциал описывает поведение сжимаемого материала. В основном (недеформируемом) состоянии используются соотношения описывающие поведение нелинейно-упругого материала [2].

Методом решения поставленных задач является разложение компонент перемещения в докритическом состоянии в ряд Тейлора по малому параметру. В качестве малого параметра бралась крутка. С учетом этого разложения выписана замкнутая система уравнений для определения компонент перемещения до третьего порядка включительно. Были получены в явном виде компоненты перемещения в недеформируемом состоянии.

В рамках метода возмущений рассматривалась устойчивость основного состояния деформирования по отношению к малым и конечным возмущениям [1], [3]. При использовании устойчивости основного состояния в "большом" линеаризация уравнений не проводилась. В конечном итоге были получены графические зависимости для "малых" возмущений – между моментом и безразмерной круткой, а для "конечных" возмущений – между моментом и модулем начальных возмущений для материалов резины 2959 и полистирола.

Литература

1. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наукова Думка, 1973. - 271 с.
2. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. - М.: Мир, 1965. - 456 с.
3. Спорыхин А.Н., Сумин В.А. Кручение цилиндра круглого поперечного сечения при больших деформациях. Вестник факультета ПММ. Воронеж, 1998, 161 – 163 с.

К ПРОБЛЕМЕ СИНГУЛЯРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Сумин В.И. (Нижний Новгород)[1]

В [1] предложено *управляемую начально-краевую задачу* (УНКЗ) называть сингулярной, в частности, тогда, когда некоторым требуемым для получения *необходимых условий оптимальности* (НУО) вариациям управления либо не отвечает, либо неизвестно, отвечает ли, глобальное решение данной УНКЗ. Для вывода НУО при этом предложено переходить от классического случая "управление $\longrightarrow$ состояние" к рассмотрению эквивалентной оптимизационной задачи на классе пар "управление, состояние" и ограничение в виде управляемого уравнения "снимать" методом адаптированного штрафа. Как следует из результатов [1], вывод НУО при этом может быть существенно более сложным, чем аналогичный вывод по классической схеме варьирования управлений. В докладе показывается, что ряд конкретных УНКЗ, рассматриваемых в [1] как сингулярные, можно к таковым не относить и при выводе соответствующих НУО придерживаться классической схемы. Приведем пример. Пусть: $n \in \{1,2\}$, $Q \subset R^n$ - ограниченная односвязная область; $\partial Q \in C^2$; $\Pi \equiv Q \times [0,T]$; $D \subset L_2 \equiv L_2(\Pi)$ - выпукло; $\alpha(.) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, $\overline{w}(.) \in L_6$ - заданы. Рассмотрим на классе пар "управление v, состояние w" оптимизационную задачу

$$F[w,v] \equiv 6^{-1}\|w-\overline{w}\|_{L_6}^6 + 2^{-1}N\|v\|_{L_2}^2 \to \min, \ \{w,v\} \in L_6 \times D; \tag{1}$$

$$\begin{gathered} w_t' - \Delta w = w^3 + w \cdot v(x,t) \ , \ \{x,t\} \in \Pi; \\ w(x,0) = \alpha(x), \ x \in Q; \quad w(x,t) = 0, \ x \in \partial Q, \ t \in [0,T], \end{gathered} \tag{2}$$

понимая решение УНКЗ (2) в смысле $W_{3/2}^{2,1}(\Pi)$ (каждому $v \in L_2$ отвечает не более одного такого решения (2)). Задача (1), (2) при $n = 1$ - модельная в [1, гл.1, §16] для иллюстрации способа получения НУО методом адаптированного штрафа. Получение НУО для (1), (2) при $n = 2$ указано в [1, гл.1, §20, задача 22] как нерешенная задача. В обоих случаях множество Ω тех $v \in D$, каждому из которых отвечает единственное в $W_{3/2}^{2,1}(\Pi)$ решение w_v УНКЗ (2), относительно открыто в D в топологии L_2 (обращая главную часть УНКЗ (2) (см., например, [2]), получаем в пространстве $L_{3/2}(\Pi)$ эквивалентное функциональное уравнение, к которому применима стандартная теорема о неявной функции). Задача (1), (2) переписывается в виде

$$J[v] \equiv F[w_v, v] \to \min, \ v \in \Omega. \tag{3}$$

Функционал $J[.]$ дифференцируем по Фреше в смысле L_2 над Ω. Применяя в задаче (3) классическое варьирование управлений, получаем при $n = 1$ НУО типа интегрального принципа максимума [1, гл.1, §16], при $n = 2$ - НУО той же структуры. Аналогичным образом могут быть решены и некоторые другие поставленные в [1] задачи получения "сингулярных НУО".

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М. "Наука", 1987.

2. Сумин В.И. Об устойчивости существования глобального решения первой краевой задачи для управляемого параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1986. Т.22. № 9. С.1587-1595.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ №98-01-00793

ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Сумин М.И. (Нижний Новгород)

Рассматривается задача быстродействия с функциональным параметром $q \in L_2(\Omega)$ в операторном ограничении

$$T \to \inf, \quad z[\pi,T](\cdot,T) = q, \quad (\pi,T) \in \mathcal{D}. \tag{1}$$

Здесь $z[\pi,T] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ - соответствующее паре (π,T) решение третьей краевой задачи для линейного параболического уравнения

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j}(x,t) z_{x_j} + b_i(x,t) z_{x_i} + a(x,t) z + f(x,t) u(x,t) = 0,$$

$$z(x,0) = v(x),\ x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial N} + \sigma(x,t) z = w(x,t),\ (x,t) \in S_T,$$

$\pi \equiv (u,v,w)$ - тройка, состоящая из распределенного, начального и граничного управлений соответственно, T - время, $\mathcal{D} \equiv \{(\pi,T) : \pi \in \mathcal{D}^T, T \geq 0\}$, $\mathcal{D}^T \equiv \{\pi : u \in \mathcal{D}_1^T, v \in \mathcal{D}_2, w \in \mathcal{D}_3^T\}$, $\mathcal{D}_1^T \equiv \{y \in L_\infty(Q_T) : y(x,t) \in U \subset R^m$ п.в. на $Q_T\}$, $\mathcal{D}_2 \equiv \{y \in L_\infty(\Omega) : y(x) \in V \subset R^1$ п.в. на $\Omega\}$, $\mathcal{D}_3^T \equiv \{y \in L_\infty(S_T) : y(x,t) \in W \subset R^1$ п.в. на $S_T\}$, U, V, W - выпуклые компакты.

Обсуждаются следующие, связанные с задачей (1), вопросы: 1) связь выполнимости (невыполнимости) принципа максимума в случае существования решения в задаче (1) с гладкостью границы множества достижимости $z[\mathcal{D}^T,T]$ в точке q, где T - оптимальное время; 2) примеры конкретных задач (1), для которых принцип максимума не справедлив; 3) типичность выполнимости принципа максимума для семейства задач (1). В частности, одним из обсуждаемых в докладе является следующий результат.

Теорема 1. *Пусть Ω - ограниченная область с липшицевой границей, коэффициенты $a_{i,j}$ удовлетворяют стандартному условию равномерной эллиптичности, b_i, a, f, σ - ограниченные функции. Тогда для любого $C > 0$ множество всех $q \in \overline{\bigcup_{T \leq C} z[\mathcal{D}^T,T]}$, для которых оптимальная пара (π,T) в задаче (1) удовлетворяет принципу максимума, всюду плотно в $\overline{\bigcup_{T \leq C} z[\mathcal{D}^T,T]}$.*

На конкретном примере показывается невозможность в общей ситуации усиления этого результата. В докладе обсуждаются также дополнительные условия на исходные данные задачи (1), при которых выполнимость принципа максимума в ней гарантируется при выбранном фиксированном значении параметра q. Кроме того, обсуждается видоизменение получаемых результатов в случае нелинейного вхождения управления u в коэффициенты b_i, a, f, отсутствия условия выпуклости компактов U, V. Указывается, что в этом случае все получаемые результаты остаются справедливыми, но должны быть переформулированы в терминах так называемых минимизирующих приближенных решений в смысле Дж.Варги.

[1] Работа поддержана грантом РФФИ № 98-01-00793.

ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ ПРИВОДИМОСТИ ДВУХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ К "ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ".

Л.И. Сухочева (Воронеж)

Известно, что не каждую пару A, B самосопряженных матриц можно одновременно привести к "диагональному виду", т.е. найти базис, в котором одновременно формы (Ax, x) и (Bx, x) имеют канонический вид.

Если одна из матриц (например, B) невырождена, то это можно сделать тогда и только тогда, когда выполнены следующие эквивалентные условия:

a) существует такая положительная матрица S, что матрицы $S^{-1}A$ и $S^{-1}B$ коммутируют;

b) матрица $B^{-1}A$ подобна самосопряженной.

Указанные условия имеют место, если например, A - положительная матрица.

Эти результаты могут быть обобщены на бесконечномерный случай и удается выделить класс операторов, которые одновременно приводятся к "диагональному виду".

Теорема 1 *Пусть A, B - непрерывные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H, A - положительный, B - непрерывно обратим и порождает B - метрику $[x, y] = (Bx, y)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

a) оператор $B^{-1}A$ подобен самосопряженному;

b) оператор $B^{-1}A$ имеет максимальное равномерно B - положительное N_+ и максимальное равномерно B - отрицательное $N_=$ инвариантные подпространства, B - ортогональные друг другу и потому $H = N_+[\dot{+}]N_-$;

c) существует такой равномерно положительный непрерывный оператор S, что операторы $S^{-1}A$ и $S^{-1}B$ коммутируют. (При этом в качестве оператора S можно взять такой оператор, что $S^{-1}B = J$, где $J = P_+ - P_-$ разность B - ортогональных проекторов на N_+ и N_- соответственно.)

В формулировке теоремы и при ее доказательстве использована традиционная терминология теории операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой см., например [1]

Литература

[1] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. - М.: Наука, 1986. - 352 с.

УДК 519.87

В.В. Сысоев, А.А. Свинцов

ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОБМЕНА ИНФОРМАЦИЕЙ В УСЛОВИЯХ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ ПАРАМЕТРОВ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ

При исследовании процесса обмена информацией в системах передачи данных в условиях помех возникают задачи анализа эффективности алгоритмов обмена информацией, имеющие большую размерность и сложность. Применение традиционных аналитических методов (теория массового обслуживания, теория телетрафика, теория графов) решения подобных задач не позволяет получить требуемый для практических нужд объем оценок основных показателей качества процесса обмена информацией.

В настоящем докладе предлагается имитационная модель процесса обмена информацией в условиях нестационарности параметров внешней среды, доведенная до практической реализации и апробированная при решении ряда практических задач.

Имитационная модель имеет три уровня. Основной функцией первого уровня является организация взаимодействия модулей, имитирующих функционирование элементов сети.

Второй уровень предназначен для описания функционирования каждого элемента сети, входного потока требований на обслуживание и потока помеховых воздействий. Этот уровень является изменяемой частью модели. Интерфейс между первым и вторым уровнем разработан таким образом, что позволяет без перестройки всей модели менять набор функциональных модулей, описывающих функционирование каждого элемента сети. Это дает возможность независимо разрабатывать модели функционирования элементов сети, модели входного потока и помеховой обстановки.

Третий уровень модели представляет собой набор независимых модулей, реализующих алгоритмы маршрутизации и управления потоком.

Приводятся результаты оценки адекватности, устойчивости и чувствительности модели.

Анализируются некоторые новые регрессионные зависимости, полученные при моделировании процесса обмена информацией в условиях нестационарности параметров внешней среды.

ИМИТАЦИОННЫЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ СИСТЕМ СБОРА ДАННЫХ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ТРУБОПРОВОДНЫМИ СЕТЯМИ

Сысоев В.В., Столяров В.Е., Квасов И.С. (Воронеж)

Уровень развития систем сбора данных (ССД) для трубопроводных сетей (тепло-, водо- и газоснабжения) играет важную роль в управлении функционированием этими объектами. В связи с этим на практике имеют место задачи синтеза ССД, ключевым моментом в которых считается рациональный выбор критерия оптимизации.

Формально можно сформулировать два типа критериев оптимизации: экономические и информационные, причем первый в силу слабой обеспеченности сведениями об ущербах от недостатка информации практически не применяется. Второй тип базируется на оценках топологической и нелинейной наблюдаемости с помощью вычисления характеристик (определителей или следа) ковариационных матриц Фишера и в настоящее время считается традиционным, во всяком случае, для электроэнергетических систем. Однако накопленный опыт показывает, что информационные критерии применимы исключительно к наблюдаемым системам и оказываются практически бесполезными при утрате объектом управления этого свойства. Отмеченное обстоятельство является принципиальным препятствием адаптации накопленного опыта в решении задач синтеза систем сбора данных к трубопроводным сетям в силу их слабой оснащенности контрольно-измерительными приборами.

Проведенные исследования показали, что один из способов преодоления указанных проблем связан с применением имитационного моделирования, что обусловлено, по крайней мере, двумя причинами:

1. На систему сбора данных для трубопроводных сетей возлагается решение не только задач статического и динамического оценивания, а также идентификация метрических характеристик структурных элементов и диагностика утечек, для которых хотя и применяются идентичные методы с точки зрения формализации, но сами задачи являются противоположными по своей сущности.
2. Оба вида упомянутых задач в связи с появившимися в последнее время идеями функционального эквивалентирования могут быть реализованы на основе однотипной по структуре математической модели потокораспределения.

В докладе обсуждаются алгоритмические вопросы реализации имитационного подхода к задачам синтеза систем сбора данных для трубопроводных сетей.

КВАЗИРЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Ткач Л.И. (Тамбов)

Пусть Y - банахово пространство, $U \subset Y$, $\overline{U}$ - замыкание множества U, $\mathrm{co}\, U$ - выпуклая оболочка множества U; $\overline{\mathrm{co}}\, U = \overline{\mathrm{co}\, U}$; $\overline{\mathrm{ext}}\, U$ - замыкание множества крайних точек множества U, $\Omega(Y)$ - множество всех непустых, ограниченных,замкнутых, выпуклых подмножеств пространства Y.

Пусть R^n - пространство n-мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$; $L^n[a,b]$, $C^n[a,b]$ - пространства суммируемых, непрерывных функций $x : [a,b] \to R^n$ с обычными нормами.

Обозначим через $\Pi(L^n[a,b])$ множество всех непустых, замкнутых, ограниченных и выпуклых по переключению подмножеств из $L^n[a,b]$ (см.[1]).

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \tag{1}$$

где многозначный оператор $\Psi : C^n[a,b] \to \Omega(C^n[a,b])$ компактен, многозначное отображение $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi(L^n[a,b])$ обладает свойством: для каждого ограниченного множества $B \subset C^n[a,b]$ образ $\Phi(B)$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Линейный непрерывный интегральный оператор $V : L^n[a,b] \to C^n[a,b]$ переводит каждое слабо компактное в $L^n[a,b]$ множество в компактное в $C^n[a,b]$.

Функция $x \in C^n[a,b]$ называется квазирешением включения (1), если существует такой $v \in \Psi(x)$ и такая последовательность $w_i \in \Phi(x), i = 1,2,\ldots$, что $y_i = v + Vw_i \to x$ в $C^n[a,b]$ при $i \to \infty$.

Рассмотрим также включения

$$x \in \Psi(x) + V\overline{\mathrm{co}}\Phi(x), \tag{2}$$

$$x \in \Psi(x) + V(\overline{\mathrm{ext}}(\overline{\mathrm{co}}\Phi(x))). \tag{3}$$

Пусть $\mathcal{H}$ - множество всех квазирешений включения (1), H_{co} - множество всех решений включения (2), $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}$ - множество всех квазирешений включения (3). Тогда справедлива

ТЕОРЕМА. $\mathcal{H} = H_{\mathrm{co}} = \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1.Булгаков А.И., Ткач Л.И. Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений //Матем. сб. 1998. Т.189 N6. С.3-32.

УДК 517.9

Разрешимость начально-краевой задачи для нерегулярного уравнения теплопроводности в весовых пространствах Соболева

С.А. Ткачева (Воронеж)

Рассматривается начально-краевая задача для нерегулярного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty \tag{1}$$

$$u\Big|_{x=+0} = \mu(t); \quad u\Big|_{t=+0} = 0, \tag{2}$$

где переменный коэффициент "весовая" функция $\alpha(x)$ положительная достаточно гладкая для всех $x \in R_1^+$. В точках $x = +0$ и $x = +\infty$ функция $\alpha(x)$ может иметь особенность (обращается в нуль), однако, при этом функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ интегрируема в окрестности точки $x = +0$ и неинтегрируема в окрестности точки $x = +\infty$.

Гладкость решения задачи (1)-(2) рассматривается в весовых пространствах Соболева–Слободецкого. При некоторых дополнительных условиях на функцию $\alpha(x)$ (см. [1]), доказано существование единственного решения $u(x,t) \in W_{\alpha,p}^{2l,s}(R_1^+ \times (0,T))$, $(0 < t \le T < \infty)$, для которого выполнена оценка

$$\|u\|_{W_{\alpha,p}^{2l,s}(R_1^+ \times (0,T))} \le c\|\mu\|_{W_{\alpha,p}^{l+s/2-1/2p}(0,T)},$$

где нормы в соответствующих весовых пространствах Соболева–Слободецкого определены в [1].

Литература

1. В.П. Глушко, С.Н. Ткачева Уравнение теплопроводности с вырождением в пространствах Гельдера и Слободецкого // Матем. заметки. – Т. 58, вып. 2. – С. 189–203.

УДК 519.711.3 Трибунских О.А.

ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ВОДОИСПАРИТЕЛЬНОГО КОНДИЦИОНЕРА

Рассмотрим механизм перераспределения потоков воздуха в водоиспарительных кондиционерах с регенеративным принципом охлаждения. Как известно (см.[1]), поток воздуха , который движется от вентилятора по основным каналам (его расход G), разделяется на две части : часть воздуха поступает в охлаждаемое помещение (расход G_1), а часть направляется во вспомогательные каналы (расход G_2).

Изменение давления по длине каналов воздуховодного тракта может быть описано как и в [2] нелинейным дифференциальным уравнением следующего вида

$$p'(x)=-\frac{A}{2d_i p(x)}\lambda RT(x)V_i\rho \quad , \tag{1}$$

где А-известная постоянная; λ - абсолютный коэффициент вязкости; R - универсальная газовая постоянная ; d_i - эквивалентный диаметр каналов; Т(x) - функция изменения температуры в каналах; $_i\rho$ - скорость воздуха и его плотность, $i=\overline{1,2}$.

Из законов Кирхгофа следует, что в точке разделения основного потока (точка А)

$$G = G_1 + G_2, \qquad P_A = P_{1A} = P_{2A} . \tag{2}$$

Давление на входе основных каналов определяется положением рабочей точки на характеристике вентилятора, а краевые условия в точках выброса потоков и имеют вид

$$P_B = P(G), \qquad p_1=p_0+\frac{\rho V_1^2}{2} \quad , p_2=p_0+\frac{\rho V_2^2}{2} \quad , \tag{3}$$

где p_0 - атмосферное давление.

Таким образом, мы получили математическую модель кондиционера (1)-(3) в виде краевой задачи на динамической сети. Основные подходы для приближенного решения задач этого типа изложены в [3]. Изменяя ширины каналов, мы можем оптимизировать кондиционер по холодопроизводительности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кокорин О.Я. Установки кодиционирования воздуха.-М.; Машиностроение, 1971.- 344 с.

2. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. - М.; Недра, 1975. - 296 с.

3. Завгородний М.Г., Трибунских О.А. Приближенные методы решения краевой задачи на геометрическом графе // Депонировано в ВИНИТИ 04.06.98 № 1726-В98.

ON DEFINING EQUATIONS METHOD FOR PROBLEM OF IDENTIFIABILITY OF DIFFERENTIAL-DIFFERENCE SYSTEM WITH SMALL DELAY

Tsekhan O.B.(Grodno, Belarus)

The defining equations play the same role in control theory as a characteristic equations in stability theory. By transforming of investigated dynamic system into an algebraic system of matrix equatios we can formulate the conditions for the identifiability (controllability, observability, stabilisability) of the original (differential, difference, stationary, time variable, with delay, neytrale tipe, with small parameter) system in terms of solutions of these algebraic equations, called defining.

So, when we invastigate the identifiability of differential-difference system with small delay (DDSSD)

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t)=A_1x(t)+A_2x(t-\mu)+C_1y(t-\mu)+B_1v,\ x\in R^{n_1}, y\in R^{n_2}, v\in R^q,\\
&y(t)=A_3x(t)+A_4x(t-\mu)+C_2y(t-\mu)+B_2v,\ t\in]\mu,T], \mu\in(0,\mu^0], \mu^0\ll 1,\\
&x(t,\mu)=\phi(t), y(t,\mu)=\psi(t), t\in[0,\mu], \qquad (1)\\
&w(t,\mu)=D_1x(t)+D_2y(t), w\in R^{n_3}, n_3\leq n_1+n_2, t\in]\mu,T],
\end{aligned}$$

with help of approach [1], the identifiability problem for the next k-approximation ($k=0,1$) boundary layer systems (kBLS) arise:

$$y_0(\tau)=C_2y_0(\tau-1),\ w_0(\tau)=D_2y_0(\tau-1), \qquad ({}_0BLS) \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}
&y_1(\tau)=C_2y_1(\tau-1)+\mu A_{i1}\int_{\tau-1}^{\infty}y_0(t)dt+\mu A_{i2}\int_{\tau-2}^{\infty}y_0(t)dt+\\
&\quad+(\Phi_{00}+\mu\Phi_{10}+\mu\tau\Phi_{11})v+r(\tau,\mu), \qquad ({}_1BLS) \qquad (3)\\
&w_1(\tau)=D_2y_1(\tau-1)+\mu D_{i1}\int_{\tau-1}^{\infty}y_0(t)dt+\mu D_{i2}\int_{\tau-2}^{\infty}y_0(t)dt+\\
&\quad(\Pi_{00}+\mu\Pi_{10}+\mu\tau\Pi_{11})v+r(\tau,\mu),\ \tau=t/\mu\in]i,i+1], i=\overline{0,[T/\mu]}.
\end{aligned}$$

The sufficient conditions of kBLS(2),(3) identifiability has the form: there is exist $n, n=\overline{0,[T/\mu]}$, such that

$$rank\begin{bmatrix} W_p^m(i+1) \\ i=\overline{0,n} \\ p=0,1 \end{bmatrix}=q,\ \mu^*\in(0,\mu^0].$$

Here $W_p^m(i+1)$ are the solutions of kBLS defining equations, which are constructed on (2)(3) according to the next correspondences:

$y_m(\tau)\mapsto Y_p^m(\tau)$, $\int_i^{\tau}y_0(t)dt\mapsto(\tau-i)Y_{p-1}^0(i)$, $Y_p^m\in R^{n_2\times q}$, $W_p^m\in R^{n_3\times q}$,

$w_m(\tau)\mapsto W_p^m(\tau)$, $\mu^m v\mapsto V_p^{k-m}$, $\tau\in]i,i+1], i=\overline{0,[T/\mu]}, V_p^m\in R^{q\times q}$.

Note also, that the kBLS defining equatins can be written both in terms of these systems parameters and in terms of the original DDSSD (1) parameters.

1. Kopeikina T.B., Mantsevich O.B. On one approach to solution of problem of controllability of linear time-variable singularly perturbed systems.- Minsk,1990.-58p.(Preprint/AN BSSR.Institut matematiki, №42(442)) (in russia).

[0]Work is supported by Fundamental research Fond of Republic of Belarus

О НЕКОТОРЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В $\mathbb{R}^n$

Тюрин В.М. (г. Липецк)

Пусть X – банахово пространство; C^m – стандартное нормированное пространство функций $u:\mathbb{R}^n \to X$, непрерывных и ограниченных вместе с производными $D^\alpha u$ до порядка m включительно ($m \in \mathbb{Z}_+, C^0 = C$); $C^{m+0\gamma}$ - нормированное пространство, состоящее из функций $u \in C^m$ с конечной нормой

$$\|u\|_{C^{m+0\gamma}} = \|u\|_{C^m} + \langle u\rangle_\gamma^0, \quad (0<\gamma<1)$$

где $\langle u\rangle_\gamma^0$ - суммарная гёльдеровская полунорма.

В докладе изучаются локальные коэрцитивные оценки для линейного дифференциального оператора $P:C^m \to C$, действующего по формуле

$$Pu = \sum_{|\alpha|\le m} A\alpha(x)\, D^\alpha u \qquad (m \in \mathbb{N}),$$

в которой коэффициенты $A\alpha:\mathbb{R}^n \to \hom(X,X)$ - непрерывные ограниченные функции ($\hom(X,X)$ - пространство линейных ограниченных операторов $B:X\to X$ с равномерной топологией). Приведем один точный результат.

Теорема. Если оператор $P:C^m \to C$ ε – коэрцитивен относительно полунормы $\langle\cdot\rangle_\gamma^0$, то в произвольной точке $\xi\in\mathbb{R}^n$ для любой функции $u\in C^{m+0\gamma}$ и любых $\varepsilon>0$, $T > 1 + \sqrt{n}/2$ справедливо локальное равномерное неравенство

$$\sum_{|\alpha|\le m}\ \sup_{|x-\xi|\le T}\|D^\alpha u(x)\| \le \varepsilon(M_0^1 + M_1^1(\varepsilon)T^{-\gamma})\langle u\rangle_\gamma^0 + k(\varepsilon)\sup_{|x-\xi|\le 2T}\|Pu(x)\| + M_2^1(\varepsilon)T^{-\gamma}\|Pu\|_C.$$

Постоянные M_0^1, M_1^1, M_2^1 не зависят от T, u, а M_0^1 не зависит также от ε. Величина $k(\varepsilon)$ определяется свойствами коэрцитивности оператора $P:C^m\to C$ и представляет выпуклую, полуаддитивную, убывающую функцию от ε, при этом

$$k(\varepsilon) \le (\varepsilon-\varepsilon_0)^{-1}\cdot\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} k(s)\,ds \qquad (\varepsilon_0<\varepsilon).$$

Локальные равномерные неравенства применяются при исследовании свойств обратимости оператора P в различных функциональных пространствах и в теоремах вложения.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОКСТЕРА

Удоденко Н.Н. (Воронеж)

Пусть дан неориентированный граф Γ, $|\Gamma| = N < \infty$ ($|\Gamma|$ — число вершин графа) с какой-либо нумерацией вершин, $\chi(\Gamma, \lambda) = |\lambda I - C|$ — характеристический многочлен преобразования Кокстера (ПК) графа (определение ПК см. в [1]).

Обозначим через $\lambda^*(\Gamma)$ ведущее собственное значение ПК графа Γ, через $\Gamma * \alpha_{N+1}$ обозначим граф, полученный из Γ соединением изолированной вершины α_{N+1} ребрами с какими-либо вершинами графа Γ.

В [2] были сформулированы следующие гипотезы:

Гипотеза 1. $\lambda^*(\Gamma * \alpha_{N+1}) > \lambda^*(\Gamma)$.

Гипотеза 2. *Пусть многочлен $\chi(\Gamma, \lambda)$ имеет корни, не равные 1. Тогда коэффициенты многочлена $\chi(\Gamma, \lambda)$ возрастают по модулю от концов к середине.*

Гипотеза 3. *Пусть многочлен $\chi(\Gamma, \lambda)$ имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$ с алгебраическими кратностями $2l$ и m соответственно. Тогда коэффициенты многочлена $\chi(\Gamma, \lambda)/(\lambda - 1)^{2l}(\lambda + 1)^m$ при степенях, отличных от N-й и нулевой, отрицательны.*

Гипотеза 4. *Множество комплексных корней многочлена $\chi(\Gamma, \lambda)$ является объединением множеств комплексных чисел, каждое из которых является множеством корней некоторой степени из 1 (исключая, быть может 1).*

Обозначим через $\chi(\Gamma, \mu) = |\mu\Gamma - A|$ характеристический многочлен матрицы смежности графа Γ (определение матрицы смежности см. в [3]).

Гипотеза 5. *Пусть многочлен $\chi(\Gamma, \mu)$ имеет корень μ_0 кратности p. Существует такая нумерация вершин, при которой многочлен $\chi(\Gamma, \lambda)$ имеет корень λ_0 той же кратности.*

В работе приведено доказательство гипотезы 1 и приведены контрпримеры к остальным гипотезам, а также сформулированы некоторые открытые вопросы спектральной теории преобразований Кокстера.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн И.Н., Гельфанд И.М., Пономарев В.А. Функторы Кокстера и теорема Габриэля // УМН. 1973. - Т.28. - N.2. - С.19-33.

[2] Субботин В.Ф., Удоденко Н.Н. О некоторых результатах и задачах представлений графов и спектральной теории преобразований Кокстера // Деп. в ВИНИТИ. N 6295-В88.

[3] Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов. Теория и приложения. Киев: Наукова Думка, 1984. - 384с.

ОБ ОБРАТИМОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОКСТЕРА ЛОКАЛЬНО-КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

Удоденко Н.Н. (Воронеж)

В данной работе используются понятия из [1,2]. В [3] было определено преобразование Кокстера (ПК) C локально-конечных графов, в [4] были найдены условияна графы, при которых ПК действует в ℓ_∞ и является ограниченным или неограниченным оператором. Эти классы графов обозначим через $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Обозначим через $\mathfrak{M}_3$ класс локально-конечных графов с условием $3 \leq deg\,\alpha_i \leq k$ ($deg\,\alpha_i$ — степень вершины α_i, k для каждого графа свое). Через $\mathfrak{M}_4$ обозначим дополнение к $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \cup \mathfrak{M}_3$.

Теорема 1. *Существует такая нумерация вершин графа $\Gamma \in \mathfrak{M}_3$, что ПК графа является ограниченным оператором, действующим в ℓ_∞.*

Следствие 1. *Для любого сколь угодно большого числа $P \in \mathbb{R}$ существует такая нумерация вершин графа $\Gamma \in \mathfrak{M}_3$, что $||C||_{\ell_\infty} > P$.*

Теорема 2. *Для графа $\Gamma \in \mathfrak{M}_4$ существует такая нумерация вершин, что ПК действует в ℓ_∞ и является неограниченным оператором.*

Ориентируем граф каноническим образом, заменив ребра стрелками, идущими от вершин с бо́льшим номером к вершине с меньшим номером.

Теорема 3. *Для обратимости ПК графа Γ необходимо и достаточно, чтобы в канонически ориентированном графе Γ было бесконечное число $(-)$ допустимых вершин.*

Просчитанные примеры говорят о том, что верна

Гипотеза. *Если ПК обратимо, то спектр состоит из точек единичной окружности комплексной плоскости, причем если $\lambda \neq 1$, то точки спектра являются собственными значениями, $\lambda = 1$ — точка непрерывного спектра. Если ПК необратимо, то спектр состоит из точек единичного круга, причем все $\lambda \neq 1$ являются собственными значениями, $\lambda = 1$ — точка непрерывного спектра.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн И.Н., Гельфанд И.М., Пономарев В.А. Функторы Кокстера и теорема Габриэля // УМН, 1973. - Т.28. - N.2. - С.19-33.

[2] Данфорд Н., Шварц Д. Линейные операторы. Общая теория. - М., 1962.

[3] Удоденко Н.Н. О спектре преобразований Кокстера локально-конечных графов // Стохастический и глобальный анализ. Воронеж, 1996. - С.90-91.

[4] Удоденко Н.Н. Об ограниченности преобразований Кокстера локально-конечных графов // Современные методы в теории краевых задач. Воронеж, 1997. - С.152.

РОЖДЕНИЕ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА ПРИ НАЛИЧИИ НУЛЕВЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Усачёв Ю.В. (Рязань)

Рассмотрим $2n+l$-мерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Lx + X(x,\varepsilon), \tag{1}$$

где ε – параметр, вектор-функция $X(x,\varepsilon) \in \mathbb{C}^{N+2}_{x,\varepsilon}(|x| \leqslant x_0, |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0)$ и имеет по x, ε в нуле порядок малости $N+1$, $N \geqslant 1$. Предполагается, что спектр матрицы L состоит из n пар различных чисто мнимых собственных значений $\pm i\lambda_1, \dots, \pm i\lambda_n$, $n \geqslant 1$, и нулевого собственного значения, алгебраическая кратность которого l равна его геометрической кратности. Кроме того, будем считать, что собственные значения $\pm i\lambda_1, \dots, \pm i\lambda_n$ соизмеримы, причём существует натуральное число s, $s \leqslant n-1$, такое что

$$\sum_{k=1}^{s} q_k\lambda_k \neq 0, \text{ где целые числа } q_k \text{ такие, что } 0 < \sum_{k=1}^{s} |q_k| \leqslant N+2;$$

$$p_1\lambda_{s+1} - r_{11}\lambda_1 - \dots - r_{1s}\lambda_s = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ;$$
$$p_{n-s}\lambda_n - r_{n-s,1}\lambda_1 - \dots - p_{n-s,s}\lambda_s = 0,$$

где $p_i, r_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < \sum\limits_{j=1}^{s} r_{ij} + p_i \leqslant N+2$, $i = \overline{1, n-s}$, $j = \overline{1,s}$.

Определение. Будем говорить, что точка $\varepsilon = 0$ есть точка рождения s-мерного инвариантного тора системы дифференциальных уравнений (1), если для любого числа $\delta > 0$, существует $\varepsilon = \varepsilon^*$, такое что $0 < |\varepsilon^*| \leqslant \delta$ и система уравнений (1) имеет s-мерный инвариантный тор $x = x(c, \varepsilon^*)$, $c = (c_1, \dots, c_s)$, удовлетворяющий условию $|x(c, \varepsilon^*)| \leqslant \delta$.

В докладе исследуется вопрос рождения s-мерного инвариантного тора системы дифференциальных уравнений (1) из положения равновесия $x = 0$ при $\varepsilon = 0$ [1 – 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бибиков Ю.Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л., 1991.

2. Усачёв Ю.В. О бифуркации инвариантных торов системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, N 6. С. 856 – 857.

2. Усачёв Ю.В. К вопросу о бифуркации инвариантного тора системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, N 11. С. 1578 - 1579.

О ПРИБЛИЖЕНИЯХ К СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОРАМ ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ускова Н.Б. (Воронеж)

Пусть $A : D(A) \subset H \to H$ – линейный замкнутый оператор, действующий в комплексном гильбертовом пространстве H и имеющий область определения $D(A)$. Пусть λ_1 – простое изолированное собственное значение оператора A; $Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $A^* f_1 = \bar{\lambda}_1 f_1$ и P_1 – проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\sigma_1 = \{\lambda_1\}$, $P_2 = I - P_1$, $P_1 x = (x, e_1) f_1$, $H_i = RanP_i$.

Введем в рассмотрение операторные пространства: End$H$ – пространство линейных операторов, действующих в H и $L_A(H)$ – пространство операторов, подчиненных оператору A, т.е. $B \in L_A(H)$, если существует такая константа $c > 0$, что $\|Ax\| \leq c(\|x\| + \|Bx\|)$, $\forall x \in D(A)$ и $\|B\|_A = \inf c$. Заметим, что End$H \subset L_A(H)$.

Определим оператор $S \in$ End$H$ равенствами $(A - \lambda_1 I)S = S(A - \lambda_1 I) = P_2$, $SP_1 = P_1 S = 0$. Отметим, что если A – самосопряженный оператор, то оператор S также самосопряжен и $\|S\| = (dist\{\lambda_1\}, \sigma(A)\backslash\{\lambda_1\})^{-1}$.

Пусть оператор A возмущается оператором $B \in M$. Введем следующие обозначения: $B_{ij} = P_i B P_j$, $b_{ij} = \|P_i B P_j\|$, $s = \|S\|$, $b_1 = \|B_{21} e_1\|$. Норма оператора понимается в пространстве M. Символом $\tilde{b}_{22}$ обозначим норму оператора $X_{21} e_1 \mapsto B_{22} S X_{21} e_1 \; : H_2 \to H_2$, а символом $\tilde{b}_{12}$ – норму оператора $X_{21} e_1 \mapsto B_{12} S X_{21} e_1 : H_2 \to H_2$. Методом подобных операторов доказана

Теорема 1. Пусть возмущение B такое, что выполняется условие $\tilde{b}_{22} + b_{11} s + 2\sqrt{b_1 s \tilde{b}_{12}} < 1$, или, более грубое условие $s(b_{22} + b_{11} + 2\sqrt{b_1 b_{12}}) < 1$. Тогда соответствующие приближения к собственному вектору e_1 и собственному значению $\tilde{\lambda}_1$ оператора A – B есть

$$\tilde{e}_1^{(1)} = e_1 + SB_{21} e_1, \quad \lambda_1^{(1)} = \lambda_1 - (Be_1, f_1) - (B_{12} S B_{21} e_1, f_1),$$

$$\tilde{e}_1^{(2)} = e_1 + S(B_{22} S B_{21} e_1) - B_{11} S(SB_{21} e_1) + SB_{21} e_1 ,$$

$$\tilde{\lambda}_1^{(2)} = \lambda_1 - (Be_1, f_1) - (B_{12} S B_{22} S B_{21} e_1, f_1) + B11(B_{12} S(SB_{21} e_1), f_1) + (B_{12} S B_{21} e_1, f_1),$$

причем справедливы оценки

$$\|\tilde{e}_1 - e_1\| \leq \frac{2sb_1}{1 - \tilde{b}_{22} - b_{11} s}, \quad |\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1 + (Be_1, f_1)| \leq \tilde{b}_{12} \frac{2b_1}{1 - \tilde{b}_{22} - b_{11} s},$$

$$\|\tilde{e}_1 - \tilde{e}_1^{(1)}\| \leq s \frac{2(\tilde{b}_{22} b_1 + b_{11} s b_1 + \tilde{b}_{12} b_1^2 s)}{1 - \tilde{b}_{22} - b_{11} s - 2\tilde{b}_{12} b_1 s}, \quad |\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_1^{(1)}| \leq \tilde{b}_{12} \frac{2(\tilde{b}_{22} b_1 + b_{11} s b_1 + \tilde{b}_{12} b_1^2 s)}{1 - \tilde{b}_{22} - b_{11} s - 2\tilde{b}_{12} b_1 s},$$

$$\|\tilde{e}_1 - \tilde{e}_1^{(2)}\| \leq s \frac{2(\tilde{b}_{22}^2 b_{21} + 2\tilde{b}_{22} s b_1 b_{21} + b_{11}^2 s^2 b_{21})}{1 - \tilde{b}_{22} - b_{11} s - 2b_1 s\tilde{b}_{12}},$$

$$|\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_1^{(2)}| \leq \tilde{b}_{12} \frac{2(\tilde{b}_{22}^2 b_{21} + 2\tilde{b}_{22} s b_1 b_{21} + b_{11}^2 s^2 b_{21})}{1 - \tilde{b}_{22} - b_{11} s - 2b_1 s\tilde{b}_{12}}.$$

ЛИНЕЙНАЯ ИГРА ИМПУЛЬСНОЙ ВСТРЕЧИ СО СМЕШАННЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЕ ПРОТИВНИКА

Ухоботов В.И. (Челябинск)

Рассматривается линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания, в которой на выбор управления первого игрока наложены импульсные ограничения [1,2]. Управление второго игрока стеснено как геометрическими, так и интегральными ограничениями. Терминальным множеством является линейное подпространство в исходном фазовом пространстве.

С помощью линейной замены переменных задача сводится к игре с простым движением, вектограммы игроков в которой зависят от времени. В новом фазовом пространстве терминальным множеством является начало координат. Для решения этой задачи используется метод одномерного проектирования [3]. Фиксируется линейный функционал из пространства, сопряженного к фазовому. Рассматривается одномерное движение образа фазовой точки при этом линейном отображении. Для этой одномерной игры найдены необходимые и достаточные условия окончания. Эти условия, записанные для каждой одномерной игры, дают необходимые условия окончания в исходной задаче.

Из необходимых условий определяется нижняя оценка необходимого начального запаса ресурсов первого игрока, которая является только функцией начального момента времени. С помощью этой оценки в стабильном мосте удается выделить линейную по начальному запасу ресурсов первого игрока составляющую. Вторая составляющая удовлетворяет определенным требованиям стабильности, и для ее вычисления в работе разрабатываются методы. Излагается алгоритм построения импульсного управления по известному стабильному мосту. Рассматриваются примеры.

Литература

1. Красовский Н.Н., Третьяков В.Е. К задаче преследования в случае ограничений на импульсы управляющих сил //Дифференц.уравнения. 1966. Т.2. №5. С.587-599.
2. Субботина Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков//Прикл.мат.и мех.1975.Т.39.вып.3. С.397-406.
3. Ухоботов В.И. Метод одномерного проектирования в линейной игре с интегральным ограничением и однотипные игры.//Изв.АН.Техн. кибернетика. 1994. №3. С.192-199.

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА СОБОЛЕВА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Ушаков В.И. Иванова М.В. (Челябинск)

Обозначим через Q область в пространстве R^{n+1}
$(x,t) = (x_1, x_2, ..., x_n, t)$ - точка этого пространства.
Пусть $\Omega_\tau = Q \cap t = \tau$.
$Q_T = Q \cap [0,T]$
Пусть Ω_0 не пуста и область Q_T " сужается ". т.е.:

$$\forall \; t_1, \; t_2, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$$

$$\Omega_{t_2} \subset \Omega_{t_1}$$

В криволинейном цилиндре Q_T рассмотрим краевую задачу для псевдопараболического уравнения :

$$\operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad}u_t(x,t)) - c(x)u_t(x,t) = b(x)u(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

$$u(x,o) = \varphi(x) \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u_t}{\partial n}\right|_\Gamma = 0 \tag{3}$$

Где Γ боковая поверхность цилиндра Q_T . n-внешняя нормаль к Γ
Обобщенным решением задачи (1)-(3) будем считать функцию $u(x,t) \in W_2^{0,1}(Q_T)$ что ее $u_t(x,t) \in W_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству :

$$-\int_{Q_T} k(x)\nabla u_t(x,t)\nabla v(x,t)dxdt - \int_{Q_T} c(x)v(x,t)u_t(x,t)dxdt =$$

$$\int_{Q_T} b(x)v(x,t)u(x,t)dx\;dt + \int_{Q_T} f(x,t)v(x,t)dx\;dt$$

$$\forall v(x,t) \in W_2^{1,0}(Q_T)$$

Была доказана следующая теорема :

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ.

Пусть область Q_T "сужается" и выполняются следующие условия:
(i) функция $\varphi(x) \in L_2(\Omega_0)$,функция $f(x,t) \in L_2(Q_T)$
(ii) функции $c(x), b(x), k(x)$—измеримые на Ω_0, такие что $\forall x \in \Omega_0$
$0 < b \leq b(x) \leq B, 0 < k \leq k(x) \leq K, 0 < c \leq c(x) \leq C$
(iii) Границу Q_T можно представить в виде $\Gamma = (x, \psi(x))|x \in \Omega_0, \psi(x) : R^n \to R$. Где $\psi(x)$—гладкая функция,$\nabla\psi(x) \neq 0$. Тогда решение задачи (1)-(3) существует и единственно.

О свойствах граничного потенциала для линеаризованного уравнения Кортевега – де Фриза

Фаминский А.В. (Москва)

Исследование вопросов разрешимости смешанных задач для уравнения Кортевега – де Фриза (КдФ) $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$ приводит к необходимости изучения специальных решений линеаризованного уравнения КдФ $v_t + v_{xxx} = 0$ типа граничного потенциала. Пусть для некоторой функции μ при $t \geq 0$ и $x \neq 0$

$$J(t,x;\mu) \equiv \int_0^t \frac{1}{t-\tau} A'' \left(\frac{x}{(t-\tau)^{1/3}} \right) \mu(\tau)\, d\tau, \tag{1}$$

где $A(\theta) = F^{-1}[e^{i\xi^3}]$ — функция Эйри. Тогда можно показать, что (при соответствующих условиях на μ) $J_t + J_{xxx} = 0$, $J|_{x=0+0} = \mu/3$, $J|_{x=0-0} = -2\mu/3$.

Известно, что функция Эйри быстро убывает вместе со всеми своими производными при $\theta \to +\infty$. Поэтому, при $x > 0$ свойства граничного потенциала J можно исследовать исходя из самой формулы (1) аналогично тепловым потенциалам.

С другой стороны, при $\theta \to -\infty$ функция $A(\theta)$ убывает медленно, осциллируя, так что ее производные уже неограничены. Поэтому, для исследования свойств потенциала J при $x < 0$ используется преобразование Фурье и изучаются соответствующие осцилляторные интегралы. С помощью этого подхода установлены, например, следующие неравенства: для любых $T > 0$ и $\epsilon > 0$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|J(t,\cdot;\mu)\|_{L_2^x(-\infty,0)} \leq c(T,\epsilon)\|\mu\|_{H_1^{5/6+\epsilon}},$$

$$\sup_{x \leq 0} \|J(\cdot,x;\mu)\|_{L_2^t(0,+\infty)} \leq c\|\mu\|_{H_2^{1/3}}$$

и ряд других. Полученные оценки позволили доказать результаты о нелокальной разрешимости и корректности смешанных задач для уравнения КдФ при нерегулярных граничных данных.

О ВЫРОЖДЕННЫХ СЖИМАЮЩИХ ПОЛУГРУППАХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Федоров В.Е., Гранков К.Г. (Челябинск)

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ гильбертовы пространства, оператор $L : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ линейный непрерывный ($L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$), оператор M : dom M $\to \mathcal{F}$ линейный замкнутый плотно определенный в $\mathcal{U}$ ($M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$). Рассмотрим уравнение соболевского типа

$$L\,\dot{u}(t) = Mu(t). \tag{1}$$

В случае непрерывной обратимости оператора L уравнение (1) можно редуцировать к эквивалентному ему уравнению $\dot{u} = L^{-1}Mu$. Уравнение такого вида имеет сжимающую сильно непрерывную разрешающую полугруппу, если оператор $L^{-1}M$ диссипативен [1] и $\mathrm{im}(I - L^{-1}M) = \mathcal{U}$.

В данной работе частичное обобщение этого результата построено в духе теории вырожденных полугрупп операторов [2,3]. Найдены достаточные условия существования сжимающей полугруппы уравнения соболевского типа (1).

Через $[\cdot,\cdot]$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ мы обозначаем скалярные произведения в пространствах $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

(i) $\forall u \in \mathrm{dom}M \quad \mathrm{Re}[Lu, Mu] \le 0$;

(ii) $\exists \alpha > 0 \ (\alpha L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$;

(iii) *скалярные произведения в пространствах связаны следующим образом:* $\langle\cdot,\cdot\rangle = [(\alpha L - M)\cdot, (\alpha L - M)\cdot]$.

Тогда существует сжимающая полугруппа уравнения (1).

Заметим, что условие (iii) в приложениях бывает довольно естественным.

[1] Балакришнан А.В. *Прикладной функциональный анализ.* – М.: Наука, 1980. – 383 с.

[2] Свиридюк Г.А. *К общей теории полугрупп операторов* // Успехи матем. наук. – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 47-74.

[3] Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. *О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами* // Сиб.матем.журн. – 1998. – Т.39. – № 3. – С.604-616.

[1] Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грант № 97-01-00444, и грантом Минобразования РФ по направлению "Математика".

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К УРАВНЕНИЯМ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА

Феоктистов В.В. (Москва)

Введением обобщенного преобразования [1], включающее преобразования Дородницына-Степанова-Иллингворта, система уравнений вязких сжимаемых нестационарных пограничных слоев с градиентом давления, как плоских, так и осесимметричных, сводится к системе уравнений со сменой направления параболичности.

После применения указанного преобразования, уравнение неразрывности для сжимаемого осесимметричного пограничного слоя в случае нестационарного течения переходит в форму уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости плоского течения.

Вводя функцию тока $u = \delta\psi/\delta y$, $v = -\delta\psi/\delta x$, для скорости во внешнем потоке $U=u_o x^m t^n$, уравнение количества движения принимает вид (аналогично и уравнение сохранения энергии):

$$\frac{\delta}{\delta\eta}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta\eta^2}\right) + 2(1-\beta)\xi\left(\xi - \frac{\delta f}{\delta\eta}\right)\frac{\delta^2 f}{\delta\xi\delta\eta} + \left\{ [1+s(2-\beta)]f + 2(1-\beta)\xi\frac{\delta f}{\delta\xi} - \right.$$
$$\left. -\gamma(1-\beta)\xi\eta\right\}\frac{\delta^2 f}{\delta\eta^2} + \beta - \beta\left(\frac{\delta f}{\delta\eta}\right)^2 + 2(1-\beta)\xi\gamma\frac{\delta f}{\delta\eta} = 0$$

Здесь $\psi(t,x,y) = x^s(t\xi/B^2)^{1/2}U(t,x)\ f(\xi,\eta)$, $\xi = Ax/(Ut)$
$\eta = Bx^{-s}y/(t\xi)^{1/2}$, $A = (1-\beta/2)/(1-\beta)/(1-\gamma)$, $B = A/[(2-\beta)\nu_o]^{1/2}$.

Обобщенное уравнение является новым, в нем ν_o – коэффициент кинематической вязкости, $\beta = 2m/(m+1)$ – характеризует градиент давления, $\gamma = n/(n+1)$ – параметр нестационарности потока, s – параметр осесимметричности ($s = 0$ – плоское течение).
Краевые условия: -на поверхности тела ($\eta = 0$, $\xi \geqslant 1$) $f(\xi,0) = 0$, $\delta f(\xi,0)/\delta\eta = 0$; -на внешней границе пограничного слоя ($\eta=\infty$, $\xi\geqslant 1$) $\delta f(\xi,\infty)/\delta\eta = 1$. В силу того, что коэффициент при частной производной по ξ меняет знак, необходимо ставить краевые условия: при $\xi = 0$, $(0 < \eta < \infty)$, $\delta f(0,\eta)/\delta\eta = \delta f_0(\eta)/\delta\eta$; при $\xi = 1$, $(0 < \eta < \infty)$, $\delta f(1,\eta)/\delta\eta = \delta f_1(\eta)/\delta\eta$. $f_1(\xi,\eta)$ – решение поставленной задачи для $\xi > 1$, с заданием начального распределения профиля скоростей $\xi = \infty$, $(0 < \eta < \infty)$; $\delta f(\infty,\eta)/\delta\eta = \delta f_t(\eta)/\delta\eta$.

В областях, где коэффициент при производной по ξ меняет свой знак применяется метод интегральных соотношений. Система полученных дифференциальных уравнений с жордановой главной матрицей в окрестности иррегулярных особых точек интегрируется методом блок-диагонализации.

1. Феоктистов В.В., Феоктистов П.В. Инвариантные решения нестационарных пограничных слоев и их связь с нелинейными уравнениями переменного типа//Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана: Машиностроение.-1997.- N 1.- С. 14-22.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ И ПОСТРОЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

З.Е.Филер (Кировоград, Украина)

В "методе интервалов" решается "граничное" уравнение и выясняется, где выполняется неравенство. Множество X его решений не структурировано, его точки равноправны, хотя имеют различный "запас справедливости", знание которого часто не менее важно, чем утверждение $x \in X$. Для действительных x и f неравенство $f(x) > 0$ можно решать с помощью уравнения $f(x) = t$: $x = f^{-1}(t)$, $X = \{f^{-1}(t)|t > 0\}$; $f^{-1}(t)$- обратная к $f(x)$ (возможно многозначная). Точки $x(t)$ образуют классы, имеющие общий "запас прочности" t. Для векторов x и f вводится вектор $\overrightarrow{t}$ с координатами $t_k > 0$. Это позволяет решать неравенства и для x и f в C. Например неравенство $ax + b > 0$ при a, b, $x \in C$ эквивалентно системе $a_1x_1 - a_2x_2 + b_1 = t$, $a_2x_1 + a_1x_2 + b_2 = 0$, где индекс 1- для действительной, а 2-для мнимой части числа. Решение-множество точек прямой $a_2x_1 + a_1x_2 + b_2 = 0$, где $t > 0$. В действительном случае она лежит на оси OX_1. Аналогичен подход к неравенству $Ax^2 + Bx + C < 0$ при $A > 0, B, C \in R$ и $D < 0$; он дает прямую $x_1 = -B/(2A)$ без отрезка, где $x_2 \in [-y_0, y_0]$, $y_0 = \sqrt{|D|}/(2A)$. Использование невязки позволяет не обращать внимания на знаки коэффициентов и поведение функции f, учтя это при анализе структуры X. Это снижает возможность ошибок при решении неравенств.

Метод пригоден и для решения линейных дифференциальных неравенств $L_n[y] > f(x)$ при $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$, $k = 0, 1, .., n-1$, ибо сводится к использованию обобщенной формулы Тейлора (методу Коши): $y(x) = T_L(x-x_0)+R_L(f+t)$, где L - многочлен Тейлора $T_L(x-x_0) = \sum y_0^{(k)} u_k(x-x_0)$, а остаточный член $R_L(f+t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(x-z)(f(z)+t(z))dz > R_L(f)$ в интервале, где $u_k(x) > 0$; систему $u_k(x)$ образуют решения однородного автономного уравнения с единичной начальной матрицей, когда $u_k^{(j)}(0) = \delta_{jk}$. Нелинейные неравенства можно решать итерациями.

Классическое неравенство Шварца в гильбертовом пространстве получается для ортов a^0, b^0 из равенства $|a^0 - cb^0|^2 = 1+c^2-\overline{c}(a^0, b^0)-c\overline{(a^0, b^0)}$ при $c = sgn(a,b) = (a,b)/|(a,b)|$. Умножение на $|a||b|$ дает $|(a,b)| = |a||b|(1-|a^0-cb^0|^2/2)$, неравенство $|(a,b)| \leq |a||b|$ и его относительную невязку $\delta t = |a^0 - cb^0|^2/2$. Это верно и для пространства с кватернионным скалярным произведением (a,b). Получены следствия в пространствах l_2 и $L_2[a,b]$, уточняющие известные неравенства.

Подчеркивается эквивалентность неравенства $f(x) \geq 0$ и уравнения $f(x) = |f(x)|$ являющегося тождеством на X. Строгое неравенство $f(x) > 0$ эквивалентно уравнению $sgn(f(x)) = 1$. Деление отношение на уравнения, тождества и неравенства относительно.

ЗАДАЧА О ТЕПЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕФТЯНОЙ ПЛАСТ ПРИ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ АНОМАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А.И.Филиппов, Г.Я.Хусаинова (Стерлитамак)

Основным способом воздействия на призабойную зону нефтегазовых пластов с целью повышения нефтеотдачи является термический. Традиционно повышение температуры осуществляется обычными нагревателями, потоком электромагнитной энергии, внутрипластовым горением.

В работе рассматривается задача о температурном поле в прискважинной зоне нефтяного пласта, когда передача тепловой энергии в пласт осуществляется за счет поля давления. Полезным термодинамическим эффектом в этом случае выступает баротермический [1], при этом учитываются аномальные свойства жидкости в запарафиненных зонах.

Рассматривается пласт, состоящий из двух кольцеобразных зон с различающимися коллекторскими свойствами: проницаемостью и пористостью, при этом границы каждой зоны имеют форму боковой поверхности цилиндра, соосного скважине. На забое скважины скорость движения жидкости меняется по периодическому закону и на границе между зонами выполняется условие непрерывности потока жидкости.

Математическая постановка задачи включает уравнение баротермического эффекта, в предположении равенства температур скелета и флюида, уравнение неразрывности, уравнение движения для вязкопластичной жидкости и уравнение состояния флюида.

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{c_ж}{c_п}\nu_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial r} + \varepsilon\frac{\partial P_1}{\partial r} - \eta G_0 sign(\frac{\partial P_1}{\partial r})\right) = a\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right), r_0 \le r \le R_1,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{c_ж}{c_п}\nu_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial r} + \varepsilon\frac{\partial P_2}{\partial r} - \eta G_0 sign(\frac{\partial P_2}{\partial r})\right) = a\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_2}{\partial r}\right), R_1 \le r \le R_2,$$

Начальные и граничные условия

$$T_1\Big|_{t=0} = T_2\Big|_{t=0} = T_0, T_2\Big|_{r=R_2} = T_0, T_1\Big|_{r=R_1} = T_2\Big|_{r=R_1}$$

Поле давления описывается уравнениями:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = \chi_1\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\frac{\partial P_1}{\partial r} - G_0 sign\left(\frac{\partial P_1}{\partial r}\right)\right)\right), r_0 \le r \le R_1,$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = \chi_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\frac{\partial P_2}{\partial r} - G_0 sign\left(\frac{\partial P_2}{\partial r}\right)\right)\right), R_1 < r \le R_2.$$

Начальные и граничные условия:

$$P_1\Big|_{t=0} = P_2\Big|_{t=0} = P_0, P_2\Big|_{r=R_2} = P_0,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = \frac{-\mu}{k_1}A\omega cos(\omega t0 - G_0 sign(cos(\omega t)), P_1\Big|_{r=R_1} = P_2\Big|_{r=R_1}$$

Решение задачи о температурном поле в линеаризованном приближении в аномальных жидкостях осуществляется следующим образом: находится распределение давления, затем вычисляется поле скорости на основании закона фильтрации для вязкопластичной жидкости, далее отыскивается поле температур для полученных полей скорости и давления. Получены аналитические решения и пространственно-временные распределения температуры.

Литература

1. Филиппов А.И. Скважинная термометрия переходных процессов. - Саратов: Изд-во Саратов. Ун-та, 1989. - 116 с. 2. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидродинамика. М.: Недра, - 1993. - 416 с.

МАЛЫЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМ НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ И ПОСТОЯННЫМ СВОБОДНЫМ ЧЛЕНОМ

Фомин В.И. (г.Тамбов)

В банаховом пространстве E вырождающееся уравнение :

$$t^{\alpha}x'(t) = Ax(t) + f, t \in (0, +\infty), \tag{1}$$

с неограниченным оператором A, имеющим ограниченным обратный A^{-1}, и $\alpha \in R, \alpha \geq 1$, стабилизируется малым параметром $\epsilon \in (0, \epsilon_0](\epsilon_0 = const, \epsilon > 0)$:

$$(t+\epsilon)^{\alpha}x'_{\epsilon}(t) = Ax_{\epsilon}(t) + f,\ t \in [0,\infty);\ \ x_{\epsilon}(0) = x_{\epsilon,0}, x_{\epsilon,0} \in D(A). \tag{2}$$

Пусть A -производящий оператор полугруппы $U(t)$ класса C_0. Тогда задача (2) имеет решение: в случае $\alpha = 1$

$$x_{\epsilon}(t) = -A^{-1}f + U[\ln(1+\frac{t}{\epsilon})](x_{\epsilon,0} + A^{-1}f),$$

в случае $\alpha > 1$

$$x_{\epsilon}(t) = -A^{-1}f + U[\frac{1}{\alpha-1}(\frac{1}{\epsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\epsilon)^{\alpha-1}})](x_{\epsilon,0} + A^{-1}f).$$

В частности, при $x_{\epsilon,0} = -A^{-1}f$ решение задачи (2) совпадает со стационарным решением $x_0(t) = -A^{-1}f$ уравнения (1). Если тип ω полугруппы $U(t)$ отрицателен и при $\epsilon \to 0$ начальные значения $x_{\epsilon,0}$ растут по норме не очень быстро, а именно при $\alpha = 1$

$$\lim_{\epsilon\to 0}(\epsilon^{-\omega-\sigma}||x_{\epsilon,0}||) = 0,$$

при $\alpha > 1$

$$\lim_{\epsilon\to 0}[\exp(\frac{\omega+\sigma}{\alpha-1}\frac{1}{\epsilon^{\alpha-1}})||x_{\epsilon,0}||] = 0,$$

где σ -произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число, то :

$$x_{\epsilon}(t) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} x_0(t),\ t \in (0,\infty). \tag{3}$$

Если $||x_{\epsilon,0}|| \leq K, \epsilon \in (0, \epsilon_*]$, где $K = const, \epsilon_*$ -произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число ($\epsilon_* \leq \epsilon_0$), то в предельном переходе (3) имеет место почти равномерная сходимость по t ([1, с.347]).

Данная работа продолжает исследования из [2], где предельный переход (3) был обоснован для достаточно гладких решений задачи (2).

Литература

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. -М.: Наука, 1967.-464 с.

2. Фомин В.И. Малые возмущения сингулярного дифференциального уравнения с постоянным неограниченным операторным коэффициентом // Дифференциальные уравнения.-1989.-Т.25.N9.-С.1629-1630.

О ПРИНЦИПАХ И ЗАКОНАХ ДИАЛЕКТИКИ В МАТЕМАТИКЕ

Фомин В.И. (г.Тамбов)

Такие особенности математики, как высокая степень абстрактности и идеализации, умозрительный характер ее методов, сложность эмпирического подтверждения математических знаний, не только ставят математику в число наиболее трудных для изучения дисциплин, но и способствуют появлению у студентов ложного представления о ее оторванности от реального мира, практической деятельности человека. Поэтому важно, чтобы в процессе обучения будущие специалисты понимали, что математика, изучая пространственые формы и количественные отношения действительного мира, отражает в своих понятиях, аксиомах и теориях его диалектическую сущность ибо ..."объективная диалектика царит во всей природе..."([5, с 526]); что способы такого отражения, т.е. логические методы математики тоже имеют диалектический характер, так как "наше субъективное мышление и объективный мир подчинены одним и тем же законам и что поэтому они не могут противоречить друг другу в своих результатах , а должны согласовываться между собой" ([5, с 581]). Проявление в математике одного из основополагающих принципов диалектики - принципа движения, изменения, развития можно показывать на примере переменных величин в процессе преподавания теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления, теории случайных процессов. Другой основополагающий принцип диалектики - принцип всеобщей взаимосвязи, взаимозависимости, взаимодействия отражается во взаимосвязи математических понятий, аксиом, теорий, в частности, в фундаментальном понятии математики - понятии функциональной зависимости. Проявление одного из основополагающих законов диалектики - закона единства и борьбы противоположностей можно объяснять на примере следующих понятий и операций: положительное и отрицательное, конечное и бесконечное , ограниченное и неограниченное, дискретное и непрерывное, дифференцирование и интегрирование и т.д. Другой основополагающий закон диалектики - закон отрицания отрицания отражается в отрицании старого через свое обобщение : новые математические понятия и теории, развиваясь на базе старых понятий и теорий, отрицая устаревшие знания, вбирают в себя все ценное, все положительное, что было в них. Например, анализ развития понятия функции показывает, что отрицание старых взглядов о функции, вскрытие их ограниченности происходит в процессе выработки нового понятия функции через обобщение прежних представлений о функции.

Литература

Энгельс Ф. Диалектика природы.- Маркс К., Энгельс Ф. Соч., 2-е изд., т.20, с.339-626.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Хачев М.М. (г. Нальчик)

В бесконечной цилиндрической области Ω трехмерного пространства (x, y, z), ограниченной поверхностями:

$$
\begin{aligned}
&S_0 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(2+m)^2} y^{2+m} = \frac{1}{4}, \quad y \geq 0, \quad -\infty < z < +\infty;\\
&S_1 : x = 0, \quad -\alpha \leq y \leq 0, \quad -\infty < z < +\infty;\\
&S_2 : x = 1, \quad -\alpha \leq y \leq 0, \quad -\infty < z < +\infty;\\
&S_3 : 0 \leq x \leq 1, \quad y = -\alpha, \quad -\infty < z < +\infty;
\end{aligned}
$$

для уравнения

$$
\operatorname{sgn} y\, |y|^m (V_{xx} + V_{zz}) + V_{yy} = 0, \quad m > 0 \tag{1}
$$

доказаны теоремы единственности и существования решения задачи Дирихле: найти решение $V \equiv V(x, y, z)$ уравнения (1) в области Ω со следующими свойствами:

1) $V \in C(\overline{\Omega})$;

2) $V \in C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$;

3) V удовлетворяет краевым условиям:

$V|_{S_0} = \Phi(x, z), \quad V|_{S_3} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -\infty < z < +\infty;$

$V|_{S_1} = 0, \quad V|_{S_2} = 0, \quad -\alpha \leq y \leq 0, \quad -\infty < z < +\infty;$

$\lim\limits_{z \to \pm\infty} V = 0$ равномерно относительно $(x, y) \in \overline{\Omega} \cap \{z = 0\}$,

где $\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (y < 0)$ - эллиптическая и гиперболическая части смешанной области Ω соответственно.

Die Lösung einer von M.G. Krein Aufgabe.

С.А. Хорошавин[1] (Воронеж)

Ist $x(t)$, $x \in \mathbf{R}$ eine Bahn von eines HAMILTONschen linearen endlich-dimensionalen Systems, so gilt die folgende

Zerspaltungseigenschaft. *Beliebige Bahn $x(t)$ wird folgendermäßig dargestellt:*

$$x(t) = x_-(t) + x_+(t) \; ; \; |x_\pm(t)| \leq P_\pm(t) \text{ bei } t \to \pm\infty \qquad (*) \; ;$$

(*hier sind $P_\pm$ einige Polynome und $x_\pm$ sind einige Bahnen des dasselben dynamichen Systems.*)

Aber wie steht es damit, wenn man ein unendlich-dimensionales dynamisches System betrachtet?

Es ist ersichtlich dabei, daß die obige Zerspaltungseigenschaft reformuliert zu sein braucht. Hier ist zu beachten, daß nicht nur kontinuierliche "Zeit" (d.h. $t \in \mathbf{R}$), sondern auch irgendeine abstrakte "Zeit" (z.B. $t \in \mathbf{Z}$, $t \in \mathbf{N}$,) von Interesse ist: es geht jetzt um "die symplektischen Darstellungen einer Halbgruppe". Der Raum des von solchen Darstellungen Operierens braucht reell nicht zu sein. Es handelt sich um "J-unitäre und J-isometrishe Darstellungen" u.ä. (Die Aussage "T ist J-unitär " bedeutet: $T^*JT = J = TJT^*$; dabei $J^* = J, J^2 = I$ vorausgesetzt ist. Ist aber $J^* = -J, J^2 = -I$, so ist J der von einer symplektischer Struktur Operator; da ist T ein in bezug auf diese Struktur symplektischer Automorphismus.) Also,

Definition.

$$S_0(T) := \{x \in H | \quad \|T^N x\| \to 0 \text{ bei } N \to +\infty\}.$$
$$S(T) := \{x \in H | \, \exists C \geq 0 \, \forall N \geq 0 \quad \|T^N x\| \leq C a^N\}.$$
$$S_+(T) := \{x \in H | \forall a > 1 \, \exists C \geq 0 \, \forall N \geq 0 \quad \|T^N x\| \leq C a^N\}.$$

<u>Satz 1.</u> *Wie auch eine positive Zahl $c > 0$ ausgewählt sein mag, es gibt einen J-unitären Operator U, daß*

$$S_+(c^{-1}U) = S_+(c^{-1}U^{-1}) = \{0\}.$$

<u>Satz 2.</u> *Es gibt einen J-unitären Operator $\hat{W}$ und einen maximalen semidefiniten Teilraum L, so daß gilt*

a) $\hat{W}L = L, \quad 1 \leq |spectrum\hat{W}|L| \leq 2, \quad r(\hat{W}|L) = 2,$

trotzdem ist $L = \overline{S_0(\hat{W})} = \overline{S(\hat{W})}$.

b) $\hat{W}L^\perp = L^\perp, \quad |spectrum\hat{W}|L^\perp| \leq 1,$

jedoch ist $\overline{S(\hat{W})} \cap L^\perp = \{0\}$.

DIESE ARBEIT IST DURCH РФФИ N 98-01-01035 (RUSSLAND) FINANZIERT.

[1] Крейн М.Г., ДАН СССР. 1964. **Т.154**, N 5, С. 1023–1026.

[2] Хорошавин С.А., Известия РАЕН. МММИУ. 1997. **Т.1**, N 2, 95–101
Chorošavin S.A., TRANSACTIONS of RANS, series MMMIC 1997. **v.1**, N 2, 95–101

[3] Хорошавин С.А., Известия РАЕН. МММИУ. 1998. **Т.2**, N 2, 97–103
Chorošavin S.A., TRANSACTIONS of RANS, series MMMIC. 1998. **v.2**, N 2, 97–103

[1] E-mail address: petrova@imath.vsu.ru

Некоторые свойства отображений в банаховых пространствах [1]

Царьков И.Г.

Пусть X— банахово пространство, $r \geq 0$, через $B(r) \subset X$ обозначим шар с центром в нуле радиуса r. Из совместного с Е.Т. Шавгулидзе результата следует, что всякий шар в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве можно изометрически вложить в шар меньшего (ненулевого) радиуса, при этом такое вложение будет бесконечно дифференцируемым отображением с ограниченными производными. Напомним, что инъективное отображение одного метрического

пространства (с геодезическими) в другое называется изометрическим, если образ любой спрямляемой кривой является спрямляемой кривой той же длины. Как показывает следующее утверждение, в $L_p[0,1]$ для $p \in (2, \infty)$ это уже неверно.

Теорема 1 *Пусть $p \in (2,\infty)$. Тогда для любых $r, R > 0$: $R > r$ не существует изометрического отображения шара $B(R) \subset L_p[0,1]$ в шар $B(r) \subset L_p[0,1]$, имеющего равномерно непрерывную 1-ю производную.*

Теорема 2 *Пусть H—сепарабельное гильбертово пространство над $\mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют числовая последовательность $\{C_n = C_n(\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathbb{R}_+$ и последовательность действительных финитных бесконечно дифференцируемых по Фреше функций $\{\varphi_k : H \to \mathbb{R}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ таких, что $\forall m, k \in \mathbb{Z}_+$ $\left\|\sum_{i=k}^{m+k} \varphi_k^{(n)}\right\| \leq C_n$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ $(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(n)})$ равномерно на каждом компакте в H сходится к 1 (0), и диаметр носителя φ_k меньше ε.*

Из этого утверждения следует положительный ответ на вопрос, поставленный Е.Т. Шавгулидзе: можно ли представить гладкую функцию на бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве в виде суммы гладких финитных функций, с возможностью почленного дифференцирования.

Следствие 1 *Пусть H—сепарабельное гильбертово пространство над $\mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}_+ \bigcup\{\infty\}$. Тогда для любой r-дифференцируемой по Фреше функции $f : H \to \mathbb{R}$, существует такая последовательность финитных r-дифференцируемых по Фреше функций $\{\varphi_k : H \to \mathbb{R}\}$ с диаметрами носителей непревосходящих ε , что для всех $n \in \mathbb{Z}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(n)}$ равномерно на каждом компакте в H сходится к $f^{(n)}$.*

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00357)

МНОГОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Цирулёва В.М.(Тверь)

В работе исследуется задача оптимального управления системой, описываемой уравнениями в частных производных. Подобные системы моделируют процессы теплопроводности, диффузии, фильтрации, ими описываются процессы очистки водоемов, процессы, возникающие в гидростатике, нагнетании жидкости в пористую среду при вторичной добыче нефти и т.д. В большинстве случаев систему уравнений в частных производных можно записать в виде:

$$\frac{\partial x^i(t)}{\partial t_j} = f_j^i(t, x(t), u(t)), \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \quad \text{п.в.} t \in \Omega \subset R^n, \qquad (1)$$

где функция состояния удовлетворяет фазовым ограничениям и граничным условиям

$$x(t) \in X(t), \quad t \in \Omega; \qquad (2)$$

$$b(t, x(t), v(t)) = 0, \quad \text{п.в.} \quad t \in \partial\Omega. \qquad (3)$$

Требуется найти оптимальные управления $u(t)$ внутри области и $v(t)$ на ее границе, удовлетворяющие ограничениям

$$u(t) \in U(t) \subset R^n, \quad \text{п.в.} \quad t \in \Omega, \qquad (4)$$

$$v(t) \in V(t) \subset R^p, \quad \text{п.в.} \quad t \in \partial\Omega \subset R^p, \qquad (5)$$

и минимизирующие функционал

$$J(\omega) = \int\limits_{\Omega} f^0(t, x(t), u(t))dt + \int\limits_{\partial\Omega} l(\tau, x(\tau), u(\tau))d\tau \qquad (6)$$

при ограничениях (1)-(5). На функции и множества наложены дополнительные ограничения гладкости. Рассматривается один из возможных подходов к решению этой проблемы. Суть его состоит в редукции исходной задачи к конечномерной, получении для последней необходимых условий оптимальности и последующем предельном переходе для получения условий оптимальности в задаче (1)-(6). Для прямоугольного вида множества Ω и $m = 2$ разработанный численный метод реализован для задачи оптимального управления процессом нагрева стержня. Путем численных экспериментов исследовалась сходимость метода и устойчивость по начальным данным.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Черевко И.М. (Черновцы)

Рассматривается система уравнений с малым запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x, y_t, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y}(t) &= L(t, y_t) + \varepsilon g(t, x, y_t, \varepsilon), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $x \in R^n, y \in \Omega = \{y \in R^m, |y| < \rho\}, y_t = y(t+\theta), -\varepsilon\Delta \le \theta \le 0, \varepsilon > 0, \Delta > 0$, $L(t,\varphi)$ - линейный по φ функционал, $f(t, x, y, \varepsilon)$, $g(t, x, y, \varepsilon)$ - нелинейные функции, определенные в области $S = R \times R^n \times C[-\varepsilon\Delta, 0] \times [0, \varepsilon_0]$.

Определение. Множество точек $M \subset S$ будем называть интегральным многообразием системы (1), если для произвольной точки $(t_0, x_0, y_{t_0}) \in M$ выполняется условие $(t, x(t), y_t) \in M$ для всех $t \in R$, где $(x(t), y_t)$ - решение системы (1) с начальным условием (t_0, x_0, y_{t_0}).

Изучаются достаточные условия существования интегрального многообразия медленных переменных

$$y_t = \varepsilon h(t, x, \varepsilon), \qquad (2)$$

движение на котором осуществляется в соответствии с уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x, \varepsilon h(t, x, \varepsilon), \varepsilon). \qquad (3)$$

Анализ уравнения (3) позволяет упростить решение задачи об устойчивости исходной системы (1).

Для полного разделения быстрых и медленных переменных системы (1) исследованы условия существования интегрального многообразия быстрых переменных

$$x = H(t, y_t, \varepsilon) \qquad (4)$$

С помощью интегральных многообразий (2), (4) построена замена переменных, приводящая систему (1) к блочно треугольному виду.
при помощи которых система (2) приводится у блочно треугольному виду.

Исследованы условия, при выполнении которых интегральные многообразия можно искать в виде разложений по степеням малого параметра ε.

ОЦЕНКА РАДИАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ВНУТРЕННЕМ КАСАНИИ ГЛАДКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Чигарев А.В., Кравчук А.С. (Минск)

Повышение требований к точности исполнительных механизмов стимулирует разработку методов теоретического анализа влияния основных геометрических параметров детали, характера ее нагружения на жесткость соединения. Необходимо отметить, что решению данной проблемы посвящено много как теоретических, так и экспериментальных работ. Однако неопределенность некоторых понятий, отсутствие достаточно точных и теоретически обоснованных зависимостей для определения напряженного состояния в области контакта, а иногда и сложность используемого математического аппарата не дают возможности выработки общих рекомендаций по методам оценки контактных перемещений при решении некоторых практически важных задач. Так, разнообразие эмпирических и полуэмпирических зависимостей для определения контактной жесткости при внутреннем касании цилиндрических тел установленных для определенного ряда сочетаний геометрических и технологических параметров данного вида сопряжений не обладают необходимой общностью результатов, характерной для зависимостей полученных на основе, в частности, теории упругости. Кроме того, значительным недостатком подобного подхода является отсутствие какого либо физического анализа происходящих процессов, а, следовательно, сложности, а порой и невозможности использования подобных результатов для дальнейшего развития теоретических методов исследования.

На основе решения контактной задачи двумерной теории упругости для упругой изотропной пластины единичной толщины, имеющей гладкий круглый вырез и жесткого диска, предложена методика определения перемещений в области контакта. Использовано приближенное решение соответствующего интегро-дифференциального уравнения. Это позволило получить выражение для нормальных радиальных перемещений контура отверстия, а также определить перемещения обусловленные упругой податливостью пластины в целом и локальной деформацией контура. Построены зависимости перемещения жесткого диска в от геометрических параметров задачи.

Таким образом, разработан подход, наиболее полно учитывающий как геометрию взаимодействующих деталей, так и возможность получения приближенного решения.

ОБ УСЛОВИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ (РЕЗОНАНСОВ) ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С МАЛЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ.

Чубурин Ю.П. (Ижевск).

Рассмотрим оператор Шредингера в $L^2(\mathbf{R}^3)$ вида $H = -\Delta + V_0\theta(x_3) + \epsilon W(x)$, где $V_0 < 0$, $\theta(x_3)$ - функция Хевисайда, а вещественная функция $W(x)$ является периодической по переменным x_1, x_2 с периодом единица и удовлетворяет оценке $|\ W(x)\ | \leq C\exp(-a \mid x_3 \mid)$, $a > 0$ (потенциал описывает поверхность кристалла). Изучение H сводится к исследованию семейства операторов $H(k_\parallel)$ в $L^2(\Omega)$ такого же вида, определенных на блоховских по x_1, x_2 функкциях, где $\Omega = [0,1)^2 \times \mathbf{R}$, $k_\parallel = (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2$ - квазимпульс. Решения $\psi \neq 0$ уравнения

$$\psi(x) = -\epsilon \int_\Omega G_{k_\parallel}(x, y, E, V_0) W(x) \psi(y) dy, \tag{1}$$

где $G_{k_\parallel}(x, y, E, V_0)$ - функция Грина оператора $H_0(k_\parallel) = -\Delta + V_0\theta(x_3)$ (продолженное, вообще говоря, по E ядро резольвенты), для вещественных E - это собственные функции оператора $H(k_\parallel)$ из $L^2(\Omega)$, отвечающие собственным значениям E. Функция $G_{k_\parallel}(x, y, E, V_0)$ имеет ветвление по параметру E в точках $E = k_\parallel^2$ и $E = V_0 + k_\parallel^2$ (вторая точка - граница существенного спектра), и в случае существования решений для E на втором листе соответствующие значения E являются резонансами; при этом ψ экспоненциально возрастает.

Пусть $W_0 = \int_\Omega W(x)dx \neq 0$, $V_0 = -A\epsilon^\sigma$, где $A > 0, \sigma > 0$. В случае $\sigma > 2$ для всех достаточно малых $\epsilon > 0$ существует единственное (с точностью до числового множителя) решение уравнения (1) в классе $\{\psi : \sqrt{W}\psi \in L^2(\Omega)\}$, причем для $W_0 < 0$ соответствующее E - это собственное значение, а для $W_0 > 0$ - резонанс. Если $\sigma = 2, W_0 < 0, A < (1/2)W_0^2$, то для всех достаточно малых ϵ существует единственное (с точностью до множителя) решение уравнения (1) в указанном классе, являющееся собственной функцией из $L^2(\Omega)$.

Описана асимптотика собственных значений (резонансов) $E = E(\epsilon)$ при $\epsilon \to 0$ (она различна для $\sigma > 2$ и $\sigma = 2$). Для оставшихся $\sigma \in (0, 2)$ решений уравнения (1), отвечающих каким-либо асимптотическим формулам, не существует.

О локальной единственности решений задачи Коши дифференциальных уравнений со взвешенными производными.

Шананин Н. А. (Москва).

Пусть в открытом множестве $\Omega \subset R^n$ определен линейный дифференциальный оператор

$$P = \sum_{\langle\varrho,\alpha\rangle\leq m} a_\alpha(x)\,(-i\partial)^\alpha, \qquad \varrho = (\varrho_1,\ldots,\varrho_n) \in \mathcal{N}^n,$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $a_\alpha(x)$, $\langle\varrho,\alpha\rangle = \varrho_1\alpha_1 + +\varrho_2\alpha_2 + \ldots + \varrho_{n+1}\alpha_{n+1}$. Полную совокупность координат x разделим на две части $x' = \{x_j \mid \varrho_j = \mu(= \min_l \varrho_l)\}$ и $x'' = \{x_j \mid \varrho_j > \mu\}$, аналогично двойственные переменные $\xi \in R^n$ разобьем на две части ξ' и ξ''. Оператору P поставим в соответствие пучок символов

$$\mathcal{H}\,(x,\xi,h) = \sum_{j=1}^{\mu-1} h^j \sum_{\langle\varrho,\alpha\rangle=m-j} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha, \qquad h \in R.$$

Поверхность $S = \{x \in U \mid \varphi(x) = 0\}$, где U - открытое подмножество в Ω, $\varphi(x)$ - вещественная $C^\infty(U)$-функция и $d\varphi \neq 0$ на U, называется нехарактеристической в точке $x^0 \in S$ для оператора P), если $\mathcal{H}\,(x^0,\varphi_{x'}(x^0),0,0) \neq 0$. Предположим, что

(1) в точке $x^0 \in S$ для любого вектора $\xi^0 \in R^n$ не коллинеарного $(\varphi_{x'}(x^0),0)$ многочлен $\mathcal{H}\,(x^0,\xi'^0 + z\varphi_{x'}(x^0),\xi''^0,0)$ от $z \in C$ имеет m/μ простых корней.

При выполнении (1) для каждой точки $(x^0,\xi^0,0)$, указанного вида, найдется окрестность, в которой характеристический многочлен $\mathcal{H}\,(x,\xi + zh^{\varrho-\mu}\varphi_x(x),h)$ (где $(zh^{\varrho-\mu}\varphi_x(x))_j = zh^{\varrho_j-\mu}\varphi_{x_j}(x), j = 1,2,\ldots,n$) имеет m/μ простых корней $z_l(x,\xi,h)$. Предположим, что каждый из корней удовлетворяет одному из условий

(2a) $\operatorname{Im} z_l(x^0,\xi^0,0) \neq 0$;

(2b) $\operatorname{Im} z_l(x,\xi,h) = 0$ в некоторой окрестности точки (x^0,ξ^0).

Теорема. *Пусть S не является характеристической для P в точке $x^0 \in S$ и выполнены условия (1) и (2). Тогда, если функция и при $\langle\varrho,\alpha\rangle \leq \leq m-\mu$ имеет производные $\partial^\alpha u \in L_2(U)$, $Pu \in L_2(U)$, $u = 0$ в $U_- = = \{x \in U \mid \varphi(x) < 0\}$ и для любого компактного подмножества $K \subset U$ с некоторой константой $C(K)$ для почти всех $x \in K$ выполняется неравенство $|Pu| \leq C(K)\sum_{\langle\varrho,\alpha\rangle\leq m}|\partial^\alpha u|$, то $u = 0$ в некоторой окрестности точки x^0.*

КОНТРОЛЬ ЗА ПРОЦЕССОМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАБОЛЕВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ВАКЦИНАЦИИ

Шаповалова И. А. (Тверь)

Процесс распространения заболевания описывается следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и постоянным запаздыванием по фазовой переменной

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -f^l(x(t), y(t)) + \lambda - \mu x(t) - u(t), \\ \dot{y}(t) = f^l(x(t), y(t-h)) - (\gamma + \mu) y(t), \end{cases}$$

$$l = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y(t) < M, \\ 2, & \text{если} \quad y(t) \geq M, \end{cases} \qquad t \in [0, T],$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(t) = \alpha(t)$, $t \in [-h, 0]$.

Здесь T – фиксированное время, на котором рассматривается процесс; $x(t)$ и $y(t)$ - количество людей, восприимчивых к заболеванию и инфицированных людей в момент времени t соответственно; γ^{-1} - коэффициент, характеризующий время естественного выздоровления; λ - скорость рождения людей; μ - коэффициент смертности.

Функция $f^l(x(t), y(t))$ характеризует число встреч инфицированных людей с людьми, восприимчивыми к заболеванию. Эта функция может скачкообразно измениться на поверхности переключения $S(t, y(t)) = y(t) - M$. Функция управления $u(t)$ характеризует скорость введения вакцины в момент времени t. Затраты на проведение вакцинации ограничены: $0 \leq u(t) \leq u_0$, $t \in [0, T]$.

Целью управления процессом является минимизация функционала

$$J(u) = \int\limits_0^T e^{-rt}(y(t) + cu(t))dt,$$

где c - относительная стоимость вакцинации; r - дисконтирующий множитель.

В работе сформулирована краевая задача принципа максимума; изучены особые режимы оптимального управления; непрерывная задача оптимального управления аппроксимирована дискретной задачей оптимального управления; построен алгоритм поиска численного решения; проведен анализ параметров.

ЗАДАЧА ХОЛЬМГРЕНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С ДВУМЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Шарафутдинова Г.Г. (Стерлитамак)

Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv sgny|y|^m u_{xx} + sgnx|x|^m u_{yy} = 0, \quad m > 0, \tag{1}$$

в области D, ограниченной гладкой кривой Γ, лежащей в первой четверти, с концами в точках B и B_1, отрезком AB оси OX и отрезком AB_1 оси OY, где $A(0,0), B(1,0), B_1(0,1)$.

Задача Хольмгрена (задача Н). Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D \cup AB \cup AB_1) \wedge C^2(D); \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \ (x,y) \in D; \tag{3}$$

$$u|_\Gamma = \varphi(s), \ 0 \le s \le l; \tag{4}$$

$$u_y(x, 0+0) = \nu_1(x), \ 0 < x < 1; \tag{5}$$

$$u_x(0+0, y) = \nu_2(y), \ 0 < y < 1, \tag{6}$$

где φ, ν_1 и ν_2 — заданные достаточно гладкие функции, l — длина кривой Γ, s — длина дуги, отсчитываемой от точки B.

Теорема 1. Если существует решение задачи (2) – (6), то оно единственно.

В случае, когда кривая Γ совпадает с нормальной кривой $\Gamma_0 : x^{m+2} + y^{m+2} = 1$, решение задачи H для уравнения (1) построено в явном виде.

Теорема 2. Если $\varphi(x) \in C[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\nu_1(x), \nu_2(y) \in C(0,1) \wedge L_1[0,1]$, то существует единственное решение задачи N и оно определяется формулой

$$u(x_0, y_0) = \int_0^1 \varphi(x)\delta_s[G]ds + \int_0^1 x^m \nu_1(x) G(x, 0; x_0, y_0)dx + \int_0^1 y^m \nu_2(y) G(0, y; x_0, y_0)d$$

где

$$G(x,y;x_0,y_0) = Q(x,y;x_0,y_0) - (r_0^2)^{-2q} Q(x,y;\overline{x}_0,\overline{y}_0),$$

$$\delta_s[G] = y^m \frac{\partial G}{\partial x}\frac{dy}{ds} - x^m \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dx}{ds},$$

$$Q(x,y;x_0,y_0) = k(r_1^2 r_2^2)^{-q} F(q,q,2q;1-\sigma), \qquad \left.\begin{matrix} r_1^2 \\ r_2^2 \end{matrix}\right\} = (x^\alpha \mp x_0^\alpha)^2 + (y^\alpha \pm y_0^\alpha)^2,$$

$$1 - \sigma = \frac{16(xyx_0y_0)^\alpha}{r_1^2 r_2^2}, \quad k = -\frac{\Gamma^2(q)}{\pi 4^{1-2q}\Gamma(2q)}, \quad q = \frac{m}{2(m+2)}, \quad \alpha = \frac{m+2}{2},$$

$$\overline{x}_0 = x_0(r_0^2)^{2q-1}, \quad \overline{y}_0 = y_0(r_0^2)^{2q-1}, \quad r_0^2 = x_0^{m+2} + y_0^{m+2}.$$

Отметим, что в работе [1] задача Н изучена для уравнения (1) при $m = 1$.

Литература.

1. М.М.Смирнов. Уравнения смешанного типа. М.,1985.

АППРОКСИМАЦИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ СГЛАЖИВАЮЩИХ СПЛАЙНОВ

Шаталов Ю.С., Лукащук С.Ю. (г. Уфа)

Как эффективный инструмент восстановления зависимостей по эмпирическим данным сплайны давно и успешно применяются в различных разделах прикладной вычислительной математики. Менее заметны методы сплайн-функций в моделировании динамики финансовых и экономических показателей (ФЭП); они еще на заняли там свою потенциально обширную нишу в качестве мощного инструмента аппроксимации и прогнозирования. В докладе сделана попытка частично восполнить этот пробел.

Рассмотрены два типа прогнозов, выполняемых с применением сглаживающих кубических сплайнов - линейный и параболический. Линейный прогноз основан на предположении о том, что за пределами наблюдаемого промежутка времени ФЭП развивается линейно. Параболический прогноз основан на гипотезе, что экстраполируемый за пределы заданного временного промежутка ФЭП является продолжением последней кубической параболы сплайна, сохраняя ее тенденцию.

Сделан анализ погрешностей прогнозирования. Получены оценки систематической составляющей погрешности, связанные с ошибками аппроксимации сплайнами, а также построены доверительные интервалы для случайной составляющей погрешности прогноза. Показано существование оптимума названных величин при заданном уровне доверительной вероятности прогнозирования.

Приводятся результаты тестовых расчетов, а также данные вычислительных экспериментов по прогнозу суммы выручки реального коммерческого предприятия, видом деятельности которого является оценка недвижимости.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕННЫХ НЕВАНЛИННОВСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА В АЛГЕБРУ ЭНДОМОРФИЗМОВ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

Ширинов Ф.Б., БГУ им М.А.Расулзаде, Баку

Пусть E_x – топологическое векторное пространство, а E_y -комплексное банахово пространство. Через $L(E_x(E_y;E_y))$ обозначим пространство неванлинновских отображений топологического пространства E_x в алгебру эндоморфизмов $L(E_y;E_y)$ банахова пространства E_y. Пусть оператор $A(\beta)\in L(E_x;L(E_y;E_y))$ удовлетворяет условию:

$\Lambda_{hk}\{A(\beta)hA(\beta)k\}=0(1)\forall h,k\in E_x$, где β-малый параметр, Λ_{hk} есть оператор кососимметризации. Операторнозначное отоброжение $A(\beta)\in L(E_x;L(E_y;E_y))$ в комплексной области назовём аналитическим семейством в смысле Като тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) при всяком $\beta_0\in C$ оператор $A(\beta)$ удовлетворяющий условию (1) замкнут и его резольвентное множество $\rho(A(\beta))\subset E_x^*$ непусто;

2) при всяком $\beta_0\in C$ существует ненулевой функционал $\lambda_0\in\rho\big(A(\beta_0)\big)\subset E_x^*$, такой что, $\lambda_0\in\rho\big(A(\beta)\big)$ при β близких к β_0, $(A(\beta)h_0-\lambda h_0E)^{-1}$ при некоторых $h_0\in\mathrm{E}_x$ есть аналитическое отоброжение β вблизи β_0.

Теорема 1. Пусть отоброжение $A(\beta)\in L(E_x;(E_y;E_y))$удовлетворяет условию $\Lambda_{hk}\{A(\beta)hA(\beta)k\}=0\forall h,k\in\mathrm{E}_x$ при некоторых $\beta\in C$ и аналитично в смысле Като. Тогда область $D_{\beta\lambda}=\{(\beta,\lambda):\beta\in C,0\neq\lambda\in\rho(A(\beta))\}$ открыта и функция $(A(\beta)h-\lambda h_0))^{-1}\in L(E_y:D(\lambda))$, где $A(\beta)\in L(E_x;(E_y;E_y))$определенная в области $D_{\beta\lambda}$, является аналитической функцией двух переменных (β,λ).

Теорема 2. Пусть отображение $A(\beta)\in L(E_x;(E_y;E_y))$ удовлетворяет условию $\Lambda_{hk}\{A(\beta)hA(\beta)k\}=0\forall h,k\in\mathrm{E}_x$ и аналитично в смысле Като. Далее, пусть λ_0- невырожденный собственный функционал отображения $A(\beta)\in L(E_x;(E_y;E_y))$. Тогда при β, близком к β_0, существует в точности один собственный функционал $\lambda(\beta)\in\sigma(A(\beta))$ вблизи λ_0. И это точка изолирована и невыражденна. $\lambda(\beta)$ есть аналитический собственный функционал β при β, близких к β_0 и существует аналитический собственный вектор $y(\beta)$ оператора $A(\beta)\in L(E_x;(E_y;E_y))$ при β вблизи β_0, то есть $A(\beta)h\acute{o}(\beta)=\lambda(\beta)h\acute{o}(\beta)$, $h\in\mathrm{E}_x$.

Теорема 3. Пусть отображение $A(\beta)h=H_0h+\beta Vh\in L(E_y,E_y)$ удовлетворяет условию $\Lambda_{hk}\{(H_0h+\beta Vh)(H_0k+\beta Vk)\}=0\forall h,k\in E_x,\beta\in C$.
Тогда если $H_0h+\beta Vh\neq0$, то спектр отображения $H_0+\beta V:E_x\to L(E_y,E_y)$ не пуст и совпадает с множеством: $\sigma(H_0h+\beta Vh),\lambda(\beta)\in\sigma(H_0+\beta V)$.

Автор приносит блогадарность профессору А.Г.Баскакову за постановку задачи.

ВНУТРЕННЯЯ ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОБОБЩЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ.

Широкова Е.А. (Казань)

Назовем классической постановку внутренней обратной краевой задачи по параметру s, приведенную в работах Г.Г.Тумашева, М.Т.Нужина и Ф.Д.Гахова: найти функцию $w(z)$ и конечную область D_z, в которой она аналитична и имеет непрерывную вплоть до границы $\partial D_z = \Gamma_z$ производную, если граничные значения этой функции в терминах дуговой абсциссы s неизвестного контура Γ_z имеют вид $w = w(s) = u(s) + iv(s), s \in [0, l]$, при условии, что

$$u'(s), v'(s) \in C_\alpha[0, l], 0 < \alpha \leq 1, w(0) = w(l),$$

$$|w(s_1) - w(s_2)||s_1 - s_2|^{-1} \geq m > 0, |s_1 - s_2| < l/2.$$

Рассмотрим постановку внутренней обратной краевой задачи при более слабых по сравнению с указанными ограничениях на исходные данные. Следует найти функцию $w(z)$ и конечную область D_z с границей Γ_z, в которой функция аналитична, если граничные значения $w(s) = u(s) + iv(s), s \in [0, l]$, этой функции в терминах дуговой абсциссы s неизвестного контура Γ_z удовлетворяют следующим условиям: $u(s), v(s)$ абсолютно непрерывны на $[0, l]$,

$$|w'(s)| \in L_{1+\epsilon}[0, l], \epsilon > 0, |w'(s)|^{-1} \in L_\delta[0, l], \delta > 0, w(0) = w(l),$$

$$|w(s_1) - w(s_2)||s_1 - s_2|^{-1} > 0, 0 < |s_1 - s_2| < l/2,$$

и для почти всех $s_1, s_2 \in [0, l]$ справедливо неравенство

$$|\arg w'(s_1) - \arg w'(s_2)| \leq K \mid \int_{s_1}^{s_2} |w'(s)| ds \mid^\alpha, 0 < \alpha \leq 1.$$

Класс функций, указанный в постановке задачи не пуст и не является тривиальным. Задача решается сведением к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимому в пространстве $L_\nu, \nu > 1$.

Индефинитные операторные модели для сильно сингулярных возмущений

Шондин Ю.Г. (Нижний Новгород)

Пусть $A_0 \geq 0$ —неограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ и для целого $m \geq 0$ $(\mathcal{H}_j)_{j=-m-1}^{m+1}$— определяемая по A_0 шкала гильбертовых пространств, задающих оснащение $\mathcal{H}_0$. Скалярные произведения в $\mathcal{H}_j$ индуцируются формами $\langle\cdot,\cdot\rangle_j \equiv \langle (A_0+1)^j\cdot,(A_0+1)^j\cdot\rangle_0$. Пусть $\chi \in \mathcal{H}_{-m-1} \setminus \mathcal{H}_{-m}$ и для $j \geq 1$ $A_j = A_0|_{\mathcal{H}_j}$, A_{-j}— замыкание A_0 в $\mathcal{H}_{-j}$ и $\varepsilon_j = (A_{-m-1}-\mu)^{-j}\chi$.

В [1,2] рассматривалась операторная реализация формального сингулярного возмущения $A_0 + t^{-1}\chi\langle\cdot,\chi\rangle_0$ как канонического самосопряженного расширения H^t, $t \in \mathbf{R}\cap\{\infty\}$ некоторого неплотно заданного симметрического оператора S в пространстве Понтрягина Π_m. Реализация характеризуется $2m+1$ вещественными параметрами: t и $(g_k)_{k=2}^{2m+1}$.

В докладе рассматривается прямое построение операторной модели для упомятух сингулярных возмущений. Введем при $i = 0,1$ банаховы пространства $\mathcal{P}_i$ из элементов $u = u_{m+i} + \sum_{j=1}^{2m+i} U_j\varepsilon_j$, с нормами $p_i(u) := \|u_{m+i}\|_{m+i} + \sum_{j=1}^{2m+i}|U_j|$. Рассматривая $\chi \in \mathcal{H}_{-m-1} \setminus \mathcal{H}_{-m}$ как линейный непрерывный функционал $\chi(\cdot)$ на $\mathcal{H}_{m+1}$, продолжим его до непрерывного функционала на $\mathcal{P}_1$: $\phi(u) = \chi(u_{m+1}) + \sum_{i=1}^{2m+1} g_jU_j$, $u \in \mathcal{P}_1$ с вещественными g_j. При $t \neq \infty$ рассмотрим оператор $A_{-m-1} + t^{-1}\chi\phi(\cdot)$ из $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_0$ в $\mathcal{H}_{-m-1}$. Его ограничение A^t на $\operatorname{dom} A^t = \{u \in \mathcal{P}_1 \mid \phi(u) + tU_1 = 0\}$ при $t \neq \infty$ является плотно определенным и замкнутым оператором в $\mathcal{P}_0$. Пусть $A^\infty = A_{-m-1}\,|_{\mathcal{P}_0}$ и $S^0 = A^\infty|_{\{u \in \operatorname{dom} A^\infty | \phi(u)=0\}}$.
Функционал ϕ обеспечивает естественное расширение $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ с $\mathcal{H}_0$ до эрмитовой индефинитной формы $[\cdot,\cdot]_\phi$ на $\mathcal{P}_0$. A^t в $\mathcal{P}_0$ симметричен относительно этой формы. Пополнение $\mathcal{P}_0$ в новой топологии, ассоциированной с формой $[\cdot,\cdot]_\phi$, является пространством Понтрягина Π_m. Справедливы следующие результаты.

1. Замыкание S^0 в Π_m есть симметрический неплотно заданный операторо S; замыкание A^t при $t = \infty$ является самосопряженным линейным отношением H^∞, а при $t \neq \infty$— самосопряженным оператором H^t. При этом, H^t, $t \in \mathbf{R} \cap \{\infty\}$ являются самосопряженными расширениями оператораS.

2. Функция $Q(z) = \phi\left((A_{-m-1}-z)^{-1}\chi\right)$, $z \in \rho(A_0)$ является Q–функцией, ассоциированной с S и H^∞, и принадлежит классу N_m.

Рассматривая для A_0 реализацию как оператора умножения в $L^2(\mathbf{R}, d\sigma)$, мы устанавливаем связь с моделями Йонаса-Лангера-Тексториса для циклических самосопряженных операторов в пространстве Понтрягина.

1. Шондин Ю.Г. Записки науч. семинаров ПОМИ. Т. 222. Исследования по линейным операторам и теории функций. В. 23. С. Пб.: Наука, 1995. С. 246–292.

2. Dijksma A., Langer H., Shondin Yu., Zeinstra C. Self-adjoint operators with inner singularities and Pontryagin spaces// Operator Theory: Adv. Appl. (submitted)

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ В УНИВЕРСИТЕТЕ

Щербакова С. Ю. (г. Тверь)

На каждой ступени своего развития общество предъявляет к образованию определенные требования, и степень совпадения определяющих основ существующей системы образования с тенденциями развития общества является мерой ее эффективности. Бертран Рассел, указывая на один из недостатков современного высшего образования, писал, что "оно слишком часто стало упражнением в приобретении определенных навыков и слишком редко - расширением ума и сердца..." Поэтому в настоящее время возрастает роль непрерывности и преемственности в обучении и воспитании. Бесспорно, что воспитательный потенциал реализуется через содержание образования, для чего должны быть в наибольшей мере задействованы все идейно-воспитательные возможности каждой учебной дисциплины. Математике в силу ее специфики отводится важная роль. Строгость математических доказательств, рассуждений и методов в наибольшей степени способствуют формированию приемов мыслительной деятельности, что помогает ориентироваться во всех сферах человеческой жизни. Изучение математики как многолетний опыт неосознанного применения приемов умственной деятельности может дать хороший эффект. Однако несомненно, что высокоорганизованное математическое мышление студентов не является просто побочным продуктом усвоения математических знаний, оно развивается в результате особой организации учебной деятельности и осознание содержания умственных действий повышает эффективность овладения ими. Такая работа приобретает особый смысл при подготовке учителей математики, так как только учитель с высоким уровнем развития математического мышления способен успешно осуществлять умственное воспитание учащихся в процессе обучения математике. К числу основных задач, направленных на развитие математического мышления студентов, относим обучение их логической организации материала, математическому моделированию, применению математической теории и т.д. В докладе предполагается раскрыть некоторые возможности формирования приемов мыслительной деятельности студентов -- будущих учителей математики в рамках изучения курсов "История и методология математики", "Основания геометрии", "Научные основы школьного курса математики".

УДК 519.61

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПРЕДОБУСЛАВЛИВАТЕЛЕЙ ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

М.Е. Эксаревская
(Воронеж)

В [1] В.П. Ильиным и в [2] И.А. Блатовым была поставлена задача получения оценок скорости сходимости итераций метода неполной факторизации, учитывающих повышение "степени неявности" алгоритма. Частичное решение этой задачи было дано И.А. Блатовым [2] для дискретного уравнения Пуассона на квадрате в случае точных и блочных методов неполной факторизации и автором в [3] для модельной параболической краевой задачи. Однако, оставался открытым вопрос о точности полученных оценок в связи с наличием в них логарифмических множителей.

В работе предложено рассмотреть краевую задачу

$$Mu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,y),\ t_0 < t \le T < \infty,\ u|_\Gamma = 0 \tag{1}$$

в единичном квадрате $\Pi : [0,1] \times [0,1]$. Здесь Γ - граница Π, $\Delta u \equiv \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$ - оператор Лапласа, $f(x,y)$ - непрерывная функция. Для решения этой задачи в области Π вводится равномерная сетка с шагом $h = 1/(n+1)$, а третья переменная дискретизируется по времени с шагом τ. В результате разностной аппроксимации данной задачи на каждом шаге по времени необходимо решать с.л.а.у., матрица A которой является симметричной M-матрицей со строгим диагональным преобладанием, усиливающимся с ростом отношения $\frac{h^2}{\tau}$. Рассматривается неполная факторизация $\tilde{A}$ и неполная блочная факторизация $\hat{A}$ матрицы A. Пусть $K_1 = \tilde{A}^{-1}A$, $K_2 = \hat{A}^{-1}A$. Доказаны две следующие теоремы.

Теорема 1. Найдутся такие константы $C_1 > 0, C_2 > 0$, что при всех $n \ge 4, k \le n$ справедливы оценки

$$C_1 \frac{n^2}{k^2}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{k+1} \le cond(K_1) \le C_2 \frac{n^2}{k^2}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{k+1}. \tag{2}$$

Теорема 2. Найдутся такие константы $C_1 > 0, C_2 > 0$, что при всех $n \ge 4, k \le \sqrt{n}, \theta = 1$ справедливы оценки

$$C_1 \frac{n}{k}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{k+1} \le cond(K_2) \le C_2 \frac{n}{k}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{k+1}, \tag{3}$$

причем оценки снизу в (3) справедливы при всех $k \in [1, n]$, $\theta \in [0,1]$, где θ - компенсационный параметр.

Литература

1. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. - М.: Наука, 1995. - 286 с.

2. Блатов И.А. Об оценках LU-разложений разреженных матриц и их приложениях к методам неполной факторизации //Сибирский матем. журнал, 1996, N 1, С. 819-836.

3. Эксаревская М.Е. Об оценках элементов LU-факторизаций для модельной параболической краевой задачи//Математическое моделирование систем (сборник трудов). - Воронеж, 1998, С. 201-206.

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОМ ФУНКЦИОНИРОВАНИИ ГИРОСКОПОВ ФУКО НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

Юрьева О.Д. (г.Ульяновск)

Пусть симметричный ротор гироскопа помещен в кожух (поплавок) и имеет относительно него постоянную собственную угловую скорость $\dot\varphi_1$, J— осевой момент инерции ротора. По оси $O\zeta$ с основанием прибора связан правый трехгранник $O\xi\eta\zeta$, имеющий абсолютную угловую скорость $u(u_\xi, u_\eta, u_\zeta)$ и скорость начала координат v_0. Кожух гироскопа установлен в подшипниках, ось которых совпадает с $O\zeta$, причем ось собственного вращения гироскопа Oz перпендикулярна оси вращения кожуха $O\zeta$ (находится в плоскости $O\xi\eta$ и проходит через точку O). Массу системы (ротор+кожух) обозначим m. Центр тяжести системы совпадает с началом координат O. Пусть также $Oxz\zeta$ является трехгранником главных осей инерции кожуха. Момент инерции кожуха относительно $O\zeta$ и Oz обозначим A и B. Момент инерции кожуха относительно третьей оси Ox такой, что моменты инерции системы относительно Ox и Oz равны. Через α обозначается угол между осью $O\eta$ и осью гироскопа, при этом положительное направление угловой скорости кожуха $\dot\alpha$ совпадает с положительным направлением $O\zeta$. Относительно оси вращения кожуха $O\zeta$ действуют: момент сил вязкого сопротивления $-k(\dot\alpha + w_\zeta)$ $(k > 0)$ и момент коррекции $M_\xi^k(t)$. Здесь $w_\zeta(t)$ — угловая скорость трехгранника $O\xi\eta\zeta$ относительно основания прибора.

Уравнения движения имеют вид

$$A\ddot\alpha = -J\dot\varphi_1(u_\eta \sin\alpha + u_\xi \cos\alpha) - A\dot u_\zeta - k(\dot\alpha + w_\zeta) + M_\xi^k.$$

Пусть гироскоп Фуко установлен на объекте, находящемся в данный момент на широте φ и движущемся по поверхности Земли курсом λ со скоростью v относительно Земли.

Для гироскопа Фуко ось $O\zeta$ вертикальна, $O\xi\eta\zeta$ является трехгранником Дарбу, ориентированным географически по направлениям ост, норд, зенит. При этом,

$$w_\zeta = \dot\lambda, \quad u_\xi = -\frac{v}{R}\cos\lambda, \quad u_\eta = \Omega\cos\varphi + \frac{v}{R}\sin\lambda, \quad u_\zeta = \Omega\sin\varphi + \frac{v}{R}tg\varphi\sin\lambda,$$

где Ω — угловая скорость Земли, R — радиус Земли. На основе информации о скорости v и курса λ на кожух гироскопа накладывается момент коррекции

$$M_\xi^k(t) = k\dot\lambda - J\dot\varphi_1\frac{v}{R}\cos\lambda + A\dot u_\zeta,$$

где $\dot u_\zeta = \Omega\frac{V}{R}\cos\varphi\cos\lambda + \frac{\dot v}{R}\sin\lambda tg\varphi + \frac{v}{R}\dot\lambda\cos\lambda tg\varphi + \frac{v^2\sin 2\lambda}{2R^2\cos^2\varphi}$.

Тогда уравнения движения гироскопа допускают частное решение, в котором ось гироскопа Oz постоянно указывает направление на север. При условиях:

$$J\dot\varphi_1(\Omega\cos\varphi + \frac{v}{R}\cos\lambda) \geq k_0; \qquad 2k + \frac{(\Omega\cos\varphi + \frac{v}{R}\sin\lambda)^{\cdot} + \frac{v}{2R}\cos\lambda}{\Omega\cos\varphi + \frac{v}{R}\sin\lambda}A \geq k_0, (k_0 = const)$$

это состояние будет равномерно асимптотически устойчиво. И, соответственно, гироскоп Фуко может использоваться в качестве компаса. Аналогично, найден момент коррекции и условия, при которых гироскоп Фуко может служить указателем широты местности.

УДК 517.9

О спектральных свойствах граничной задачи для одного класса эллиптических уравнений второго порядка с вырождением

Н.А. Ярцева (Елец)

В работе рассматривается уравнение

$$(L-\lambda)u \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(a(t)\frac{\partial u}{\partial t}\right)+b(t)\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta_x u-\lambda u=f(x,t) \tag{1}$$

в прямом произведении $x\in Q$ — n-мерного куба: $-\pi\leq y_i\leq\pi$, $j=\overline{1,n}$; на полуось $R^+ : 0<t<\infty$ с условиями

$$u\Big|_{\partial Q}=0;\quad u\Big|_{t=+0}=u\Big|_{t=+\infty}=0. \tag{2}$$

Предполагается, что $a(t)$ и $b(t)$ достаточно гладкие на $[0,\infty)$ функции, удовлетворяющие условиям: $a(+0)=a'(+0)=a''(+0)==0$, $a(t)>0$ при $t>0$, $b(+0)<0$; $b(t)=\mathrm{const}$ при $t>d>0$. Кроме того предполагается, что существует интеграл

$$\int\limits_d^\infty \frac{ds}{\sqrt{a(s)}}<\infty.$$

В частности, функция $a(t)=t^{2m}$ при $m>1$ удовлетворяет условиям данной работы.

Установлено: 1) существование резольвенты R_λ задачи (1)-(2) при $\operatorname{Re}\lambda\geq 0$ в специальным образом построенных весовых пространствах типа Соболева; 2) дискретность спектра задачи (1)-(2) в $L_p(Q\otimes(0,\infty))$; 3) полнота системы собственных и присоединенных функций задачи (1)-(2) в $L_p(Q\otimes(0,\infty))$. Результаты работы распространяются на вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка более общего вида, чем (1).

УДК 637.1: 658.5

ОПТИМИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ БИЗНЕС - ЦЕНТРА

Бубнов А.И. (Москва), Шишлянников Д.И. (Воронеж), Щукин В.М.(Смоленск)

Информационная деятельность бизнес-центра заключается в накоплении, переработке, представлении информации различного характера для выполнения следующих задач:

– долговременное планирование основной деятельности бизнес-центра, включая капитальное строительство, кредитование ;

– бухгалтерский учет деятельности бизнес-центра и отдельных фирм;

– расчет прибыли за отчетный период , в том числе с учетом взаимозачетов, кредитов, изменения курса валют;

– выбор арендаторов по их заявкам из имеющейся базы данных;

– обеспечение перекомпоновки помещений в зависимости от заявок арендаторов.

Для успешного решения перечисленных задач необходимы их математические модели. В состав каждой модели входят несколько взаимосвязанных критериев.

Рассмотрим особенности выбора бизнес-организаций по их заявкам из имеющейся базы данных. Все претенденты характеризуются показателями:

– вид деятельности;

– требуемые помещения , оснащение их средствами коммуникационной связи;

– предлагаемая стоимость оплаты услуг, вид оплаты;

– надежность, порядочность фирмы, имеющиеся рекомендации и т. д..

Данная задача осложняется отсутствием математических зависимостей для расчета указанных показателей и, соответственно, невозможностью применения стандартных методов векторной оптимизации. Современные базы данных (БД) ,например БД Access, позволяют выполнить оптимизацию по одному дискретному параметру; для оптимизации по нескольким критериям предлагается создать нестандартный запрос для БД, который бы выполнял чтение необходимой информации из БД, формирование ее в виде массива, сортировку массива в соответствии с безусловным критерием предпочтения векторной оптимизации и представление полученного множества Парето в отдельной таблицы. Это выполняется с использованием алгоритмического языка Visual Basic для БД Access.

РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧЕНИКОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

А.Н. Белоногова, О.В. Занина, Т.Ю. Доровская (Воронеж)

Под самостоятельной работой следует понимать все виды активной познавательной и научной деятельности, требующие самостоятельных поисков, ответов на вопросы, возникающие в ходе изучения учебного материала или проведения исследований.

Самостоятельная работа в системе учебного процесса в средней школе должна рассматриваться и как средство обучения, и как форма учебно-научного познания.

Формирование знаний, умений и навыков учащихся осуществляется в соответствии с выработанной структурой в три этапа:

1. Фактические знания: знание понятий, определений, законов, знание теорем, правил, формул, алгоритмов, автоматические умения.
2. Умение применять фактический материал к решению задач:

умение строить отдельные суждения, отдельные умозаключения.

3. Развитие творческого мышления:

умение ставить цель, анализировать, умение строить алгоритм, умение сравнивать и обобщать, умение самоанализа и самооценки.

В соответствии с этим выделяются три вида самостоятельных заданий: репродуктивные, реконструктивные и вариативные.

Особо остановимся на этапе развития творческого мышления. На этом этапе организация самостоятельной работы предусматривает формирование продуктивных действий: развивать способность к анализу и синтезу, абстрагированию и обобщению, умение применять формирование понятия в других разделах курса математики и смежных дисциплинах. При выполнении заданий учащемуся надо установить тип задания и метод его решения, воспользоваться незнакомой литературой, найти выход из нестандартной ситуации (например, при выполнении типовых расчетов).

Вариативные задания характеризуются более высоким уровнем воспроизводящей деятельности и переходом ее в творческую деятельность.

Хорошим стимулом самостоятельной работы является проблемный метод изучения нового материала с применением метода аналогии и сравнения.

В докладе рассмотрены задания, используемые для развития творческого мышления учащихся 10 – 11 классов лицея № 1.

Разнообразные формы самостоятельной работы учащихся активизируют учебный процесс, способствуют лучшему усвоению программы, обеспечивают преемственность между средней школой и ВУЗом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зильберг Н.И. Урок математики: подготовка и проведение. М. 1996 г.
2. Далингер В.А. Самостоятельная работа – основа развивающего обучения. Математика в школе. 1994 г., № 6.
3. Кушнир И.А. Уравнения. Киев, 1996 г.

ЗАЧЕТНАЯ СИСТЕМА ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА В 10 ЭКОНОМИЧЕСКОМ И ГУМАНИТАРНОМ КЛАССАХ.

БОРИСОВА Е.А.,г.ВОРОНЕЖ.

В докладе представлено обобщение опыта работы по зачетной системе в профильных 10 экономических и гуманитарных классах.

Реализация этой системы предполагает проведение уроков-лекций, семинарских и практических занятий, а также проведение зачетных работ /текущих и итоговых/.

По каждой теме курса определены основные знания, умения и навыки, которые являются обязательными для всех учащихся. Например, в разделе "Знания" указано, какие формулы учащиеся должны уметь выводить, а когда можно пользоваться таблицей, какие теоремы должны знать с доказательством и т.д. В разделе "Умения и навыки" приводятся, например, виды уравнений, неравенств, которые должны уметь решать учащиеся, виды преобразований выражений, которые должны уметь выполнять и т.д.

По каждой теме разработаны варианты самостоятельных и контрольных работ /текущий зачет/ и варианты зачетных работ, которые проводятся по окончании изучения каждой темы.

Зачеты могут содержать вопросы из раздела "Знания" /теоретические/, из раздела "Умения и навыки" /практические/, зачеты могут быть комбинированными. По каждому виду работ определены обязательные задания на оценку "3" и задания на оценки "4" и "5".

Такая система изучения материала оказалась достаточно эффективной, а проведение зачетов по окончании изучения каждой темы позволяет более объективно оценивать знания, умения и навыки учащихся.

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ В КУРСЕ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ.

О.К.Плетнева, Ю.В.Покорный, К.П.Лазарев (Воронеж).

Последние годы в материалах вступительных экзаменов в ВУЗы и выпускных экзаменов для математических классов стали широко использоваться задачи с параметрами. Они вызывают большие затруднения у выпускников, абитуриентов и даже у учителей, особенно районных школ.

Основная проблема заключается в том, что учащиеся общеобразовательных классов в курсе средней школы не изучают отдельной темы, в которой рассматривались бы задачи такого плана, и воспринимают их как что-то неизвестное и очень сложное. Они и не подозревают, что с подобными задачами им приходилось сталкиваться уже в младшей школе при знакомстве с выражениями, содержащими переменные и буквы.

Задачи с неопределенными коэффициентами - суть параметрами естественно вводить в младших классах для обобщения отдельных тем. Так, например, после прохождения темы "Линейные уравнения" полезно решить уравнение вида: $a(a-x) - (a-2)(a+3) = 0$, где a - любое вещественное число, и на нем рассмотреть все возможные случаи, которые могут возникнуть при решении линейного уравнения.

Авторы считают целесообразным оснащение большей части разделов программы задачами с параметрами, которые бы органично завершали изученные темы и не только являлись бы хорошим показателем уровня усвоения пройденного материала, а играли бы и пропедевтическую роль.

Заметим, что наиболее емкий и прозрачный взгляд на задачи с параметрами может быть достигнут в терминах функций двух переменных.

Организация исследовательской деятельности учащихся в классах с углубленным изучением математики.

Тамахина Т.В, Доровская Т.Ю
г.Воронеж.

"Осознай, что уже знаешь, и ты научишься летать".
Р.Бах . Чайка по имени Джонатан Левингстон.

Одной из важных задач, стоящих перед современной школой, является развитие самостоятельности, инициативности, формирование умений интенсивно трудиться, включаться в творческий процесс в различных видах деятельности.

Это возможно через приобщение учащихся к научно-исследовательской работе, разработке проектов, выполнению творческих работ, организация которых, при соблюдении ряда условий, позволяет школьникам активно включаться в продуктивную деятельность.

Опытно-экспериментальная работа с одаренными детьми по математике в лицее N1 осуществляется по следующим направлениям:

1. Заочное обучение в физико-математической школе при МФТИ.
2. Исследовательская работа учащихся по ряду тем :

Общие признаки делимости. Число пи. Принцип Дирихле и неравенство Коши. Построения с помощью одного циркуля. Аффинные преобразования плоскости. Фракталы. Шифры и криптограммы.

Особенно поощряется, если тема предложена самим учащимся и при работе над ней использовались компьютерные разработки.

В течении года на индивидуальных консультациях ученики с помощью учителя изучают выбранную тему, затем пишут реферат, выступают с сообщениями на научных чтениях и это не случайно, ибо ученик претендующий на глубокие знания по математике должен уметь самостоятельно изучать математическую литературу, изученное грамотно излагать своими словами.

Учащиеся с удовольствием погружаются в атмосферу творческого поиска, сотрудничества и общения.

3. Овладение компьютерными технологиями при изучении математики.

Критериями оценки исследовательской деятельности учащихся выступают знания и умения, которые позволяют выпускнику школы активно включаться в ВУЗовскую образовательную систему и продолжать научно-исследовательскую работу на более высоком уровне.

К РАСЧЁТУ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Артемов М.А., Кудашев О.Г., Митрофанов Г.П., Мяснянкин Ю.М., Свиридов Ю.Т.(Воронеж)

В раде случаев при расчете многослойных конструкций необходимо учитывать силы трения между слоями. Исследуется влияние трения на напряженное и деформированное состояние двух тонких цилиндрических трубок, вставленных друг в друга без натяга, которые подвергаются действию внутреннего и внешнего и межоболочечного давлений и нагреву. В условиях осевой симметрии ставится задача выбора фазовой траектории в пространстве давлений и температуры перевода системы оболочек в состояние с заданной конечной температурой и минимальными зазорами с соблюдением условий прочности. Ввиду нелинейности, обусловленной трением, конечное напряжённо-деформированное состояние зависит от траектории термосилового нагружения.

Известно [1-5], что при плавных нагрузках напряженно-деформированное состояние может быть безмоментным, термоупругим и краевым эффектом. В процессе нагружения (без потери контакта) между оболочками возникают нормальное давление P и сила трения интенсивности τ, которая обусловлена их взаимным проскальзыванием в осевом направлении. Закон трения принимается в виде $\tau=\lambda\gamma P$, где γ -коэффициент трения; $\lambda=1$ или $\lambda=-1$ в зависимости от направления перемещения.

Если происходит относительное проскальзывание, то касательное напряжеиие τ и нормальное давление P между оболочками распределяются вдоль образующей по экспонециальному закону. Для зон, где нет проскальзывания, $\tau=0$, P=const.

Рассмотрены случаи различных закреплений краёв оболочек.

При достаточно малых P и зазоре по всей длине может происходить проскальзывание. С увеличением давления P зона, в которой $\tau=0$, P=const, распространяется от середины трубок к краям. При достаточно большом давлении P или в длинных трубках влияние трения играет роль краевого эффекта. Если трубки сварены по краям, то реализуется решение $\tau=0$, P=const по всей длине.

Представленная модель позволяет оценить картину конечного состояния системы и выбрать оптимальную траекторию нагружения.

Литература

1. Власов В.З. Избр. труда. М., 1962. Т. 1,2. 2. Ляв А. Математическая теория упругости. М., 1935. 3. Пономарев С. Д. и др. Расчет на прочность в машиностроении. М., 1958. Т.2. 4.Прочность, устойчивость, колебания: Справочник / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М., 1968. Т.1. 6. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., 1966.

О новых результатах в теории бифуркаций минимальных поверхностей и упругих систем

Борисович А.Ю. (Воронеж)

В работе рассмотрены нелинейные краевые задачи, возникающие в проблемах геометрии (минимальные поверхности и др.), в задачах исследования устойчивости упругих конструкций и их колебаний на упругом основании.

Основным аппаратом является моделирование геометрических и физических моделей в категории нелинейных фредгольмовых операторов, зависящих от физических параметров и обладающих различной симметрией. Получен ряд конкретных результатов.

Осцилляция решений разностного уравнения первого порядка

Матакаев А.И. (г. Черкесск)

Теорема 1. Пусть

1) $f(n,z)$ – функция двух переменных n и z и для $\forall z \neq 0$ $f(n,+z) \geq 0$, $f(n,-z) \leq 0$, $\tau(n)$ – натуральнозначная функция натурального аргумента, $|f(n,z)| \geq a(n)|Z|^{\alpha}$, где $a(n) \geq 0$, $0 < \alpha < 1$;

2) существует функция $\Phi(n)$ такая, что $\forall n \geq n_0 \in \mathrm{N}$ $\Delta\Phi(n) = q(n) \geq 0$, причем выполнено одно из следующих условий:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(n) = 0$; б) существуют постоянные числа α и β и последовательности $\{n_j'\}, \{n_j''\}$ такие, что $\lim\limits_{j\to+\infty} n_j' = \lim\limits_{j\to+\infty} n_j'' = +\infty$, $\Phi(n_j') = \alpha$, $\Phi(n_j'') = \beta$, $\alpha \leq \Phi(n) \leq \beta$;

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf \sum\limits_{\tau(n)}^{n} a(m) = +\infty$.

Тогда каждое решение уравнения

$$\Delta u(n) + f[n, u(\tau(n))] = q(n)$$

в случае 2а) либо осциллирует, либо стремится к нулю при $n \to +\infty$; в случае 2б) либо осциллирует, либо $\lim\limits_{n\to+\infty}[u(n) - \Phi(n)] = -\alpha$, ($\lim\limits_{n\to+\infty}[u(n) - \Phi(n)] = -\beta$)

Редукция уравнения четвертого порядка с двумя краевыми условиями к уравнению второго порядка
Боровских А.В. (Воронеж)

Рассмотрим уравнение

$$(py'')'' - (qy')' = f(x) \tag{1}$$

на $[a, b]$ с краевыми условиями

$$y''(a) = y''(b) = 0. \tag{2}$$

Множество функций, удовлетворяющих (1)-(2), образует двумерную гиперплоскость.

Зададимся вопросом, существует ли уравнение вида

$$-\left(\frac{1}{\alpha}y'\right)' = g(x), \tag{3}$$

которое имеет в точности то же множество решений? Естественно, изучается случай $p(x) > 0$ и ищется $\alpha(x) > 0$. Кроме того, естественно, интересует возможность определить α напрямую по коэффициентам p, q, r, а функцию $g(x)$ – еще и по $f(x)$.

Теорема 1. Задача определения коэффициента и правой части уравнения (3) сводится к нахождению решений системы краевых задач

$$\begin{cases} -(p\alpha')' + q\alpha = C \\ \alpha'(a) = \alpha'(b) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{p^2}{\alpha}(g\alpha^2)'\right)' + g\alpha^2 \frac{p}{\alpha^2}(p''\alpha + p\alpha'' - q\alpha) = pf \\ g(a) = g(b) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 2. Если $p(x) > 0, q(x) \geq 0$, то система (4)-(5) имеет единственное (с точностью до умножения на константу) решение, позволяющее однозначно определить уравнение (3), причем функция $\alpha(x)$ оказывается строго положительной.

Теорема 3. Уравнение четвертого порядка на сети (геометрическом графе), определяемое дифференциальными выражениями вида (1) на ребрах графа, условиями $y''(b) = 0$ во всех внутренних и граничных вершинах графа, а также условиями непрерывности и условиями баланса третьих квазипроизводных во всех внутренних вершинах графа может быть сведено к уравнению второго порядка на том же графе, определяемым дифференциальными выражениями типа (3) на ребрах графа и условиями непрерывности и баланса первых квазипроизводных во внутренних вершинах графа.

ТОЖДЕСТВА КРИВИЗНЫ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВ С КАНОНИЧЕСКОЙ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРОЙ

Дашевич О.В.(Минск)

Хорошо известно, что тождества для тензора кривизны аффинной связности ∇ на многообразии M несут важнейшую информацию о строении M. Оказалось, что для серии аффинных связностей на регулярных Ф-пространствах с канонической почти комплексной структурой J справедливы тождества, обобщающие известные ранее факты о тензоре кривизны.

Пусть G/H - однородное регулярное Ф-пространство, порожденное автоморфизмом Ф связной группы Ли G, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ - каноническое редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, соответствующее автоморфизму $\varphi = d\Phi_e$. Важнейшим подклассом таких пространств являются однородные Ф-пространства порядка k ($\Phi^k = id$), которые для $k = 2$ дают классические однородные симметрические пространства. Автоморфизм Ф порождает диффеоморфизм D ("симметрию") регулярного Ф-пространства G/H, совпадающий для $k = 2$ с классической симметрией в симметрическом пространстве.

Недавнее открытие [1] богатого семейства канонических структур классических типов (почти произведение, почти комплексная, f-структура К.Яно) на регулярных Ф-пространствах позволило получить, в частности, результаты об их согласованности с инвариантными аффинными связностями. В разное время Н.А.Степановым, В.В.Балащенко, Ю.Д.Чурбановым и автором было показано, что для $k = 3, 4, 5$ каноническая связность ∇ (т. е. обладающая тривиальной функцией Номидзу α) является единственной аффинной связностью, согласованной с G, D и одной или несколькими каноническими структурами. Предположение о единственности такой связности для произвольного регулярного Ф-пространства привело к ряду геометрических результатов [2] общего характера. Используя их, доказана

ТЕОРЕМА. *Пусть G/H - регулярное Ф-пространство, допускающее каноническую почти комплексную структуру J. Пусть каноническая связность является единственной почти комплексной связностью структуры J, инвариантной относительно G и D. Тогда тензор кривизны R произвольной инвариантной относительно G и D аффинной связности ∇ с функцией Номидзу α удовлетворяет следующим тождествам:*

$$R(X,Y)J_0Z - J_0R(X,Y)Z = 2J_0\,\alpha([X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z),$$

$$J_0 \circ (R(X,Y) + R(J_0X, J_0Y)) = (R(X,Y) + R(J_0X, J_0Y)) \circ J_0,$$

где $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$, а J_0 есть значение структуры J в точке $o = H \in G/H$.

Литература: 1. Балащенко В.В., Степанов Н.А.//Матем.сб. 1995. Т.186.N11. С.3-34.
2. Дашевич О.В.//Изв.вузов. Матем.1998. N10. С.23-31.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ III ЭТАПА XXV ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

В.Н.Донцов

Проводя дидактико-акмеологическое исследование в контексте основополагающего педагогического принципа развивающего обучения, нами выявлен ряд особенностей в итогах областной математической олимпиады 1999г. в Воронежской области. Приведем некоторые из результатов. 1.По медианному критерию Джонкхиера выявлена статистически значимая упорядоченность в возрастании медиан распределения общего олимпиадного интеллекта в зависимости от территориального типа школы (в таблице приняты следующие обозначения: школы общеобразовательные-ОШ, нового типа-НШ, областного центра-ОЦ, райцентра-РЦ, сельские-СШ, р-уровень значимости):

9 класс (n=18)	СШ<ОШРЦ<НШОЦ<НШРЦ<ОШОЦ	p=0.13
10 класс (n=24)	СШ<ОШОЦ<ОШРЦ<НШРЦ<НШОЦ	p=0.21
11 класс (n=34)	ОШРЦ<СШ<ОШОЦ<НШРЦ<НШОЦ	p=0.01

В динамике от выборки 9-го класса к выборке 11-го обнаружена прогрессивная неустойчивость выявленных упорядоченностей в развитии олимпиадного математического интеллекта (ОМИ). 2.Взаимовлияние биологического и социально-педагогического факторов на развитие ОМИ имеет специфику. Среди 9-классников первые пять мест заняли школьники общеобразовательных школ Воронежа (№43,38,69) и райцентров (№2 Нововоронежа и №2 Лисок). Среди 11-классников практически все первые 10 мест заняли учащиеся школ нового типа (колледж№1, ЭПСШ №15, лицей №27, ВУВК №2, гимназий Воронежа (№1, 9),.Павловска, Борисоглебска и Семилукского УВК). 3.Половой диморфизм в развитии ОМИ характеризуется углублением его дифференциации между юношами и девушками. Если среди 76 призеров районного тура Всероссийской олимпиады соотношение числа юношей и девушек составляло 2:1, то среди 15 призеров областного тура (9-11 кл.) оно приблизилось к отношению 3:1. 4.В целом для участников III этапа олимпиады характерно статистически значимое (по критерию Уилкоксона) доминирование алгебраического склада ума, проявленного при составлении и решении диафантовых уравнениий 2-ой степени, при решении задачи на квадратный трехчлен с тремя параметрами и др..В наименьшей степени был проявлен геометрический тип мышления, (в задачах на применение алгебраического метода оценки в планиметрии и на метод образного, ,геометрического зрения). Гармонический склад ОМИ проявили лишь некоторые призеры олимпиады из числа 11-классников:для них свойственен высокий уровень алгебраического. геометрического и логического (способность решать задачи на чашечных весах без гирь, на шахматной доске) компонентов ОМИ. Исследование подчеркивает важность создания при ВОИПКРО аналитического центра по региональному изучению и управлению развитием математически одаренных детей.

О ЗАВИСИМОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОТ ПАРАМЕТРОВ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ

Исраилов И. (Самарканд)

Рассматривается минимаксная задача вида

$$\underset{x(\cdot)}{Sup}\ g(x(t_1)) \underset{u(\cdot)}{\rightarrow} \min$$

$$\begin{gathered}\dot{x} \in A(t)x + b(t,u), x(t_0) \in D, \\ u(t) \in U(t), t \in T = [t_0, t_1],\end{gathered} \tag{1}$$

где $x \in R^n, u \in R^m, b(t,u) \subset R^n, D \subset R^n, U(t) \subset R^m$.

Изучается корректность постановки задачи (1) относительно малых изменений данных(параметров); т.е. если задачу (1) заменить подобной ей задачей

$$Sup\ \ \tilde{g}(\tilde{x}(\tilde{t}_1)) \rightarrow \underset{\tilde{u}(\cdot)}{\min}$$

$$\begin{gathered}\dot{\tilde{x}} \in \tilde{A}(t)\tilde{x} + \tilde{b}(t,\tilde{u}), \tilde{x}(t_0) \in D, \\ \tilde{u}(t) \in U(t), t \in \tilde{T} = [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1],\end{gathered} \tag{2}$$

где параметры $(\tilde{g}(\cdot), \tilde{A}(\cdot), \tilde{b}(\cdot), \tilde{D}, \tilde{U}(\cdot), \tilde{T})$ близки (в некотором смысле) к параметрам $(g(\cdot), A(\cdot), b(\cdot), D, U(\cdot), T)$ задачи (1), то можно ли ожидать близость (в некотором смысле) оптимального управления $\tilde{u}^0(t)$ и оптимального значения

$$\underset{\tilde{u}(\cdot)}{\min}\ \underset{\tilde{x}(\cdot)}{Sup}\, \tilde{g}(\tilde{x}(\tilde{t}_1))$$

функционала $\tilde{g}(\tilde{x}(\tilde{t}_1))$ задачи (2) к оптимальному управлению $u^0(t)$ и оптимальному значению

$$\underset{u(\cdot)}{\min}\ \underset{x(\cdot)}{Sup}\, g(x(t_1))$$

функционала $g(x(t_1))$ задачи (1). В результате исследования получена зависимость оптимального значения функционала и оптимального управления в задаче (1) от параметров (условий) задачи.

РЕДУКЦИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Кирсанов М.Н. (Воронеж)

Для линейного однородного дифференциального уравнения произвольного порядка выявляется условие, при котором возможна редукция. Метод основан на последовательном дифференцировании уравнения, в результате чего получается система линейных уравнений относительно функции и ее производных. Искомое условие следует из равенства нулю определителя системы. Для дифференциального уравнения с коэффициентами специального вида аналогичную процедуру использовал *Д.Митринович* [1,с.561].

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение порядка N

$$y^{(N)}h_N(t)+....+y^{(i)}h_i(t)+....+\ddot{y}h_2(t)+\dot{y}h_1(t)+yh_0=0.$$

h_0 =const. Последовательно дифференцируя уравнение $K-1$ раз, составим систему K уравнений, которую запишем в матричном виде $\mathbf{A}_K\vec{U}=0$, где $\vec{U}=\{y,\dot{y},\ddot{y},\ldots,y^{(N+K-1)}\}$. Элементы матрицы a_{mn}, $(m=1,2,...,K,\ n=1,2,...,N+K)$ определяются по формуле $a_{mn}=a_{m-1\ n-1}+\dot{a}_{m-1\ n}$. Разделим матрицу A_K на две части, выделив из первых K столбцов квадратную матрицу $\mathbf{B}_K$, а последние столбцы объединив в матрицу $\mathbf{C}$. Система примет вид $\mathbf{B}_K\vec{V}_1=-\mathbf{C}\vec{V}_2$, где $\vec{V}_1=\{y,\dot{y},\ddot{y},\ldots,y^{(K-1)}\}$, $\vec{V}_2=\{v,\dot{v},\ddot{v},\ldots,v^{(N-1)}\}$, $v=y^{(K)}$. Обозначим правую часть системы вектором $\vec{W}=-\mathbf{C}\vec{V}_2$. Окончательно имеем $\mathbf{B}_K\vec{V}_1=\vec{W}$. Решение системы запишем по правилу Крамера

$$y^{(i)}\Delta_K=\Delta_{Ki},\qquad i=0,1,2,...,K-1, \tag{1}$$

где $\Delta_K=\det\mathbf{B}_K$, а Δ_{Ki} - определитель матрицы, полученной заменой i-го столбца матрицы $\mathbf{B}_K$ на вектор $\vec{W}$. Пусть T - область изменения переменной t. Если для всех $t\in$ T определитель системы Δ_K равен нулю, то для тех же t равна нулю и правая часть (1), представляющая собой линейное дифференциальное уравнение порядка $N-1$ для переменной $v=y^{(K)}$. Вид этого уравнения не зависит от i, так как определители Δ_{Ki} и Δ_{Kj} отличаются друг от друга только множителем $y^{(i)}/y^{(j)}$. Таким образом, равенство $\Delta_K=0$ — условие редукции, а $\Delta_{Ki}=0$ - уравнение порядка $N-1$.

В частности показано, что уравнение $s(t)y^{(3)}+f(t)\ddot{y}-ht\dot{y}+hy=0$ может быть проинтегрировано в явном виде, если $s(t)=(ht^3/(k+1)-tf(t))/(k-1)$ при натуральном $k\geq 2$.

Получены точные решения уравнений, не содержащиеся в [1,2] и недоступные для системы MAPLE V R4.

Описанная процедура применима к некоторым нелинейным уравнениям, легко распространяется на неоднородные уравнения и тесно связана с постановкой обобщенной задачи Коши (с высшими производными в начальных условиях [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Камке Е.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.

2. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997.

3. Кирсанов М.Н. Математические основы некоторых задач механики// Строительство. - 1996.-N6.

ДВУХОСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА С ПРИЗМАТИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ.

Ковалев А.В., Яковлев А.Ю.(г. Воронеж)

Методом малого параметра [1] решена задача об определении напряженно деформированного состояния в бесконечной толстой пластине ослабленной отверстием близким по форме к правильному многоугольнику, в которое запрессовывается упругое включение, имеющее форму близкую к призматической. На бесконечности к пластине приложены взаимно перпендикулярные усилия с интенсивностями p_1 и p_2. Решение получено в полярных координатах (ρ, θ). Уравнения внешнего и внутреннего контуров включения выбираются в виде:

$$\rho_1 = \alpha(1 + \delta d_1 \cos m\theta);$$
$$\rho_2 = \beta(1 + \delta d_2 \cos n\theta);$$

Где ρ_1, ρ_2 -соответственно, внешний и внутренний радиус включения; α, β -радиусы для невозмущенного включения; δ -малый параметр отвечающий за возмущение формы границы от круговой и за возмущение граничных условий; m, n-количество углов ; α, β - константы;

Свойства материала в пластической зоне пластины описываются условием пластичности Мизеса. Полные деформации представляются в виде сумм упругой и пластической составляющих. Упругие деформации связаны с напряжениями соотношениями линейного закона Гука. Пластические деформации определяются ассоциированным законом пластического течения. Разложение по малому параметру сводит решение исходной задачи к последовательному решению статически определимых задач. В качестве нулевого приближения выбирается решение задачи о равномерном растяжении на бесконечности толстой пластины с круговым отверстием, в которое запрессовывается упругая толстостенная труба с внешним радиусом α и внутренним β.

Получено два приближения для напряжений, перемещений и радиуса упругопластической границы. Проведен численный эксперимент. Оценено влияние возмущения формы границы на напряженно деформированное состояние.

Литература.

1. Ивлев Д.Д., Ершов Л.В., Метод возмущений в теории упругопластического тела, «Наука», М., 1978.

ПОСТРОЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Оруджев Э.Г.(Баку)

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Y^{(2n)}(x)+\sum_{l=1}^{2n}(\sum_{k=0}^{l}P_{lk}(x)\lambda^k)Y^{(2n-l)}(x)=0, \quad x\in(-\infty,+\infty), \tag{1}$$

где P_{ll}-комплексные числа,$P_{lk}(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} P_{lkm}e^{i\alpha_m x}$, $l =\overline{1,2n}, k =\overline{0,l-1}$, ряды $\sum\limits_{l=0}^{2n-1}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\alpha_m^l|P_{lkm}|$ сходятся, множество $G=\{\alpha_m\}$удовлетворяет условиям: 1)$0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots$, $\lim\limits_{m\to\infty}\alpha_m=+\infty$; 2)если $\alpha_r,\alpha_s\in G$, то $\alpha_r+\alpha_s\in G$. Еще предпологаем, что корни θ_νхарактеристического полинома $F(\theta)=\sum\limits_{i=1}^{2n}P_{ii}\theta^{2n-i}, P_{00}=1$,различны, отличны от нуля и такие, что плоскость λ разбивается на секторы $R_k, k\leq 4n$,в каждом из которых, при подходящей нумерации этих корней выполняются неравенства типа Тамаркина.

Теорема 1 *При вышесказанных предположениях на коэффициенты, уравнение (1) в каждом секторе R_k имеет фундаментальные системы решений, представимые в виде*

$$Y_\nu(x,\lambda)=e^{\theta_\nu\lambda x}+\sum_{l=1}^{2n}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=m}^{\infty}\frac{U^j_{ms}(\lambda)e^{(\theta_\nu\lambda+i\alpha_s)x}}{i\alpha_m\left[\sum\limits_{k=0}^{2n-1}\frac{(i\alpha_m)^k}{(k+1)!}F^{(k+1)}(\theta_\nu)\lambda^{2n-1-k}\right]},(\nu=\overline{1,2n}),$$

где $U^j_{ms}(\lambda)=\sum\limits_{\nu=0}^{2n-1}U^j_{ms\nu}\lambda^{2n-1-\nu}$, коэффициенты $U^j_{ms\nu}$ однозначно определяются через P_{lkm}, причем ряды $\sum\limits_{j=0}^{2n-1}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_m}\sum\limits_{s=m}^{\infty}\alpha_s^j\left|U^j_{ms\nu}\right|$ сходятся; Функции $Y_\nu(x,\lambda)$,а также производные $Y_\nu^{(k)}(x,\lambda)$, $k=\overline{1,2n-1}$являются непрерывными функциями по совокупности (x,λ)для $x\in(-\infty,\infty),\lambda\in R_k$,и все $Y_\nu^{(k)}(x,\lambda)$, $k=\overline{1,2n}$ оказываются мероморфными функциями по λ, полюсы которого являются решениями уравнения $\sum\limits_{k=0}^{2n-1}\frac{(i\alpha_m)^k}{(k+1)!}F^{(k+1)}(\theta_\nu)\lambda^{2n-1-k}=0$.

Хочу выразить благодарность акад. АН Азербайджана Гасымову М.Г. за совет в выборе направления исследования.

Литература

[1] М.Г.Гасымов Спектральный анализ одного класса обыкновенных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами. //ДАН СССР, 1980, том.252,№2,стр.277-280.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛУПРЯМОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Павленко В.Н.(Челябинск)

Рассматриваются уравнения вида

$$Au + \lambda Tu = 0 \tag{1}$$

с параметром $\lambda > 0$, где A линейный ограниченный самосопряженный оператор, действующий из вещественного рефлексивного банахова пространства E в сопряженное E^*, оператор $T : E \to E^*$ квазипотенциальный (возможно, разрывный), причем $T0 = 0$.

Число λ_0 называется собственным значением уравнения (1), если при $\lambda = \lambda_0$ уравнение (1) имеет ненулевое решение. Вариационным методом установлен следующий результат.

Теорема 1 *Предположим, что*
1) отрицательное подпространство оператора A конечномерно;
2) оператор T компактный, причем

$$\lim_{t\to+0} \langle T(u+th) - Tu, h\rangle \le 0, \quad \forall u, h \in E$$

3) функционал $f_\lambda = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle + \lambda\varphi(u)$. ($\varphi$ – квазипотенциал оператора T с $\varphi(0) = 0$) для любого $\lambda > 0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} f_\lambda(u) = +\infty;$$

4) существует $u_0 \in E$, для которого $\varphi(u_0) < 0$.

Тогда для некоторого $\lambda_0 > 0$ для произвольного $\lambda > \lambda_0$ найдется $0 \ne u_\lambda \in E$, такое, что $f_\lambda(u_\lambda) = \inf_E f(u)$ и любое такое u_λ является ненулевым решением уравнения (1) и точкой радиальной непрерывности оператора T.

Данная работа включает модель М. А. Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости [1].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97-01-00444) и Международной Соросовской Программой образования в области точных наук (грант 1044d).

Литература

[1] Гольдштик М.А. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости. // ДАН СССР.–1962.–т.147,№6.– с. 1310-1313.

О РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С КВАЗИПРОИЗВОДНОЙ[1]

Ю.В. Покорный, С.А. Шабров (Воронеж)

В работе обсуждается задача

$$-\left(u'\right)'_{\sigma} + qu = f(x,u), \qquad u(0) = u(l) = 0, \tag{1}$$

рассматриваемая в классе абсолютно непрерывных функций $u(x)$, первые производные которых $u'(x)$ являются σ-абсолютно непрерывными функциями. При этом σ — некоторая монотонная функция, вообще говоря разрывная, обобщенный потенциал $q(x)$ — обобщенная σ-производная от некоторой неубывающей функции $Q(x)$ и правая часть $f(x,u)$ есть обобщенная производная $\dfrac{d}{d\sigma(x)}F(x,u)$. Предполагается, что $f(x,u)$ является σ-непрерывной функцией и, вдобавок, обладает совокупным свойством $[\sigma \times u]$-непрерывности.

Главное продвижение в данной задаче — доказательство возможности сведения ее к нелинейном интегральному уравнению

$$u(x) = \int\limits_0^l G(x,s)f(s,u(s))d\sigma(s),$$

где интеграл понимается по Лебегу-Стилтьесу и $G(x,s)$ — функция Грина краевой задачи

$$-u''_{x\sigma} + qu = z, \qquad u(0) = u(l) = 0.$$

Для построения функции Грина пришлось модернизировать классическую теорему Фубини на случай интеграла Лебега-Стилтьеса по треугольной области. Удалось показать, что в силу неотрицательности $q(x)$ функция Грина $G(x,s)$ существенно положительна. Линейный интегральный оператор, порождаемый $G(x,s)$ как ядром, оказывается вполне непрерывным в специальных парах функциональных пространств, что обеспечивает полную непрерывность в пространстве σ-непрерывных функций нелинейного интегрального оператора порождаемого правой частью уравнения (1). Последнее открывает возможность использования общих теорем анализа.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Минвуза РФ области естественных наук (№ 95-0-1.8-97).

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКИ

Свиридюк Г.А., Брычев С.В. (Челябинск)

Модель межотраслевой экономики с учетом инвестиций может быть записана в виде

$$(I - A)x(t) - Bx(t) + Bx(t+1) = y(t)\,, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор валового выпуска, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — вектор конечного спроса; первое слагаемое в (1) характеризует общий объем производства, второе — издержки по инвестициям, сделанным в прошлом, третье — новые инвестиции [1]. Модель (1) может быть записана в дифференциальной форме

$$B\dot{x} = (A - I)x + y\,. \tag{2}$$

Здесь матрица B — диагональная, с неотрицательными элементами; матрица A неотрицательная, с элементами не большими единицы; компоненты векторов x и y тоже неотрицательны.

Теорема 1 *При любом $y \in R^n_+$ и любом $x_0 \in R^n_+$ таком, что*

$$x_0 \in \mathcal{M}_y = \{z \in R^n_+ : (I - P)z = M_0^{-1}(Q - I)_y\}\,,$$

существует единственное решение $x \in C^\infty(R; \mathcal{M}_y)$ задачи Коши $x(0) = x_0$ для системы (2).

Заметим, что матрицы P, Q и M_0 можно конструктивно построить по матрицам B и $I - A$ [2].

Работа поддержана грантами РФФИ N 97-01-00444 и Минобразования РФ по направлению "Математика".

Литература

[1] *Леонтьев В.*Межотраслевая экономика. М.: Экономика, 1997.

[2] *Свиридюк Г.А.* К общей теории полугрупп операторов // УМН. 1994. Т. 49, N 4. С. 47-74.

О СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ульянова Е.Л. [1] **(Воронеж)**

В гильбертовом пространстве $L_2[0,\pi]$ рассмотрим оператор $\mathcal{L}$, задаваемый интегро-дифференциальным выражением

$$\mathcal{L}x = -\ddot{x} - \int\limits_0^\pi f(t)\dot{x}(t)\,dtq(t), \quad f, q \in L_2[0,\pi]$$

с областью определения

$$D(\mathcal{L}) = \{x : \ [0,\pi] \to \mathbf{R}, \ x, \dot{x} \text{ — абсолютно непрерывны},$$

$$\ddot{x} \in L_2[0,\pi], \ x(0) = x(\pi) = 0\}.$$

Представим его в виде $A - B$, где

$$B, A : D(\mathcal{L})\text{ß}L_2[0,\pi] \to L_2[0,\pi], \quad Ax = -\ddot{x},$$

$$Bx = \int\limits_0^\pi f(t)\dot{x}(t)\,dtq(t).$$

A будем считать невозмущенным оператором, B — возмущением.

Доказано, что любых функций $f, q \in L_2[0,\pi]$ имеет место равносходимость спектральных разложений для оператора $A - B$ и невозмущенного оператора A. Получены оценки.

[1] Работа поддержана грантом РФФИ N 99-01-00333.

ИНДИВИДУАЛИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Никифорова Н.А., Куксина Л.В.(г. Воронеж)

Современные достижения педагогики и психологии и значительная роль, отводимая методикой математики учебной деятельности самих школьников в процессе обучения, делают актуальной проблему возможно более полной индивидуализации обучения в условиях коллективной учебной деятельности, поскольку недостаточная индивидуализация работы школьников препятствует оптимальному развитию их способностей, влечет за собой снижение уровня знаний.

Понятно, что для осуществления эффективного обучения математике эта проблема имеет особое значение как в силу тех трудностей, которые обычно возникают у учащихся при её изучении, так и в силу возросшей математизации образования в системе общего среднего образования. Индивидуализация обучения в математике не означает отказа от коллективной деятельности учащихся в процессе обучения, а лишь их органическое единство. В связи с этим учителю математики необходимо хорошо изучить каждого учащегося с точки зрения уровня знаний, обучаемости, интересов и способностей. Для этого были разработаны специальные тесты, дающие учителю возможность изучить динамику развития каждого школьника и затем подобрать задания для его индивидуальной работы.

В нашей школе работают по трем основным направлениям для индивидуализации обучения математике: создание относительно однородных классов по уровню знаний (профильные классы); прохождение курса в замедленном темпе (классы компенсирующего обучения); индивидуализация учебных заданий в обычном разнородном классе посредством разработанных учебных заданий для самостоятельных работ, проверочных работ и домашних заданий.

Наиболее полно задаче индивидуализации обучения математики отвечает использование проблемной формы обучения. При этом необходим постоянный контроль и помощь каждому из учащихся со стороны учителя, оптимальное использование дидактических пособий и технических средств обучения.

Секция "Методика преподавания математики"

Булгакова Н.И.

Гуманитаризация образования.

Григорьева Т.В., Вихай Т.А.

Пропедевтический курс преподавания геометрии и черчения в условиях школы.

Гудкова Л.М.

Лекционно-семинарская система изучения школьного курса математики.

Данкова И.Н.

Дифференцированный и индивидуальный подход к обучению математике на основании 3-х уровневого внутриклассного обучения в 5-6 классах.

Егорова М.И.

Дифференцированный подход в изучении математики в профильных 10-11 классах.

Занина О.В.

Особенности работы учителя математики в малочисленной школе.

Риммар Г.Г.

Реализация личностно-ориентированного образования через интеграцию.

Серикова И.В.

Проблема развивающего обучения на уроках математики.

Соловьева Е.Е.

Ранее обучение геометрии.

Темчук А.Г.

Использование программированного обучения.

Именной указатель

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ РАН им. В.А.СТЕКЛОВА

275 лет
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Основана в 1724 году

"ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-Х"

на Воронежской весенней математической школе

"СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ"

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

(Дополнительный выпуск)

(3-9 мая 1999 г.)

Воронеж — 1999

УДК 517.94 (92; 054; 97)

"Понтрягинские чтения - X." Тезисы докладов. — Воронеж, ВГУ, 1999 — с.

В сборнике представлены тезисы докладов и лекций, сделанных на Воронежской весенней математической школе. В работе конференции приняли участие учение более чем из 50 городов России и ближнего зарубежья.

Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр, а также проблем преподавания математики.

Оргкомитет благодарит за поддержку Российский фонд фундаментальных исследований.

В этом году школа посвящена 60-летнему юбилею академика Виктора Антоновича Садовничего, ректора Московского государственного университета.

УДК 517.929

Азбелев Н.В., Симонов П.М. (Пермь)

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Теория устойчивости долгое время развивалась в направлениях, указанных еще сто лет тому назад Ляпуновым. Однако для уравнений с запаздывающим аргументом и их обобщений классические концепции и приемы Ляпунова иногда оказываются неестественными и часто не приводят к желаемым результатам. Это объясняется спецификой обыкновенных дифференциальных уравнений, на которой основаны некоторые идеи Ляпунова.

В работах Р.Беллмана, М.Г.Крейна, Х.Л.Массеры и Х.Х.Шеффера, а также в монографии Е.А.Барбашина, предлагаются новые направления исследования по устойчивости. Эти направления основаны на том, что свойства устойчивости можно связать с разрешимостью задачи Коши в специальных функциональных пространствах. В работах В.А.Тышкевича, В.Г.Курбатова и ряда других авторов упомянутые направления развивались применительно к специальным классам функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ). Эти исследования посвящены общим концепциям, явлению дихотомии и теоремам типа теоремы Боля-Перрона о том, что для линейного уравнения ограниченность всех решений при всех ограниченных правых частях эквивалентна при определенных условиях равномерной экспоненциальной устойчивости. В цитированных работах вопрос об эффективных (выраженных через параметры уравнения) признаках устойчивости не рассматривался.

Идеи функционального анализа и современное состояние наших представлений о ФДУ естественным образом приводят к новым концепциям в задачах об асимптотическом поведении решений и эффективному "$\mathcal{W}$−методу" исследования конкретных уравнений. Этот метод и некоторые другие приемы позволили получить ряд новых признаков устойчивости, упростить, а иногда и уточнить известные результаты.

Предлагаемый нами подход к изучению асимптотических свойств решений ФДУ основан на установлении "$\mathbf{D}_0$−свойства" этого уравнения - корректной разрешимости задачи Коши

$$\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + f, \quad x(0) = \alpha \tag{1}$$

в заданном функциональном банаховом пространстве $\mathbf{D}_0$ при правой части f из заданного функционального банахова пространства $\mathbf{B}$ и начальном условии α из конечномерного пространства $\mathbf{R}^n$. Иначе говоря, "$\mathbf{D}_0$−свойство" (или, что тоже, "$\mathbf{L}_0$−устойчивость") - это существование, единственность и непрерывная зависимость от параметров $f \in \mathbf{B}$ и $\alpha \in \mathbf{R}^n$ решения задачи (1) в пространстве $\mathbf{D}_0$ функций $x : [0, \infty) \to \mathbf{R}^n$ с заданными асимптотическими свойствами элементов. При соответствующем выборе пространств $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}_0$ наличие $\mathbf{D}_0$−свойства гарантирует ту или иную устойчивость в обычном смысле. При этом центральным вопросом исследования данного уравнения на устойчивость оказывается вопрос о построении такого пространства $\mathbf{D}_0$ с заданными свойствами, в котором удается установить корректную разрешимость задачи (1). Решение этого вопроса основано на выборе "модельного" линейного уравнения $\mathcal{L}_0 x = z$ и банахова пространства $\mathbf{B}$, состоящего из локально суммируемых функций $z : [0, \infty) \to \mathbf{R}^n$. А именно, пространство $\mathbf{D}_0$ - это линейное многообразие в с е х абсолютно непрерывных решений x модельного уравнения $\mathcal{L}_0 x = z$ при всех $z \in \mathbf{B}$. Норму в пространстве $\mathbf{D}_0$ естественно определять равенством

$$\|x\|_{\mathbf{D}_0} = \|\mathcal{L}_0 x\|_{\mathbf{B}} + |x(0)|.$$

ГУМАНИТАРИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

Зам. директора гимназии №9 Булгакова Н.И.

Это умение изучать окружающий мир, понимать его закономерности, обладать коммуникативными способностями и многое другое.

Поэтому гуманитаризация определяется не только изменением содержания и количеством часов в образовательных областях, а и отношением к ученику, мотивацией его учебной деятельности, потенциальными возможностями предмета, формированием культурологической основы личности.

Принцип гуманизации осуществляется и через применяемый тип обучения (деятельностный) и методы обучения, направленные не только на отработку ЗУН, но и на развитие (учет классификации Ю. Бабанского).

1. В каждом предмете есть своя философия, ее нужно донести ученикам. Например, в математике пятого класса, казалось бы продолжается изучение темы "Натуральные числа" из третьего класса, но на первых уроках вводится переменная, с ней появляются буквенные выражения и начинается формироваться обобщение подмеченных процессов (действий арифметических), моделирование ситуаций:

$a + b$, $a \times b$, $a : b$.

Появляются формулы: $S = v \times t$, $V = abs$ и т.д.

Осваивается индивидуальный способ мышления.

2. В каждом предмете понятийный аппарат, свои термины - свой иностранный язык. Ученик должен не только понимать услышанное, прочитанное, но и уметь выразить свои мысли - учитель обязан развивать речь ребенка. Как? Давать ориентировочные основы деятельности, использовать комментированное письмо, комментирование ответов и т.д. Т.е. опять формы и методы обучения.

3. Какой гуманитарий - находка для общества? Нужен человек, умеющий логически мыслить, набрав признаки, посылки делать выводы, анализировать ситуации, синтезировать признаки в понятия, устанавливать причинно-следственные связи, отвечать за сказанное и принятое решение. А это значит - его ум "приведен в порядок" математикой, умением мыслить, формальной логикой.

4. Геометрия учит мыслить, доказывать, находить пути от известного к неизвестному. Начинается освоение дедуктивного метода рассуждения. Нужен ли обществу недумающий, неумеющий планировать, непредвидящий результат политик, юрист, врач. Эти гуманитаризационные цепи реализуются средствами математики. Математика учит говорить об одном и том же разными словами.

"Прямая проходит через точку" — "Точка принадлежит прямой" и в геометрии эти умения формируются не формально, а наглядно-образно.

5. Под руководством учителя ребята пишут изумительные сказки. стихи на математические, химические и другие темы.

6. Развитию речи способствуют составленные учениками карточки к зачету, вопросы для тематического повторения. Доклады с биографическими данными ученых, на историческое развитие темы "Математика в живой природе" и др. помогают формированию культурологической основы личности, взаимосвязи предметов, значимости образования.

Литература: Ю.К. Бабанский "Оптимизация учебного процесса"

СИНТЕЗ МИНИМАКСНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Барабанов А.Е. (С.-Петербург)

Предлагается новый общий подход к решению задачи H^∞-оптимального управления для случая полной информации. Его основное достоинство состоит в упрощении спектральных операций и в явных вычислительных формулах для оптимальных операторов. Эти формулы допускают прямое обобщение на бесконечномерный случай. В частности, впервые полностью решена задача для систем с запаздыванием в управлении и в выходной переменной. Плучены явные формулы для расчета оптимального оператора через решение нескольких задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа поддержана грантами РФФИ N 98-01-01009 и Госкомвуза в области фундаментальных исследований.

Пропедевтический курс преподавания геометрии и черчения в условиях школы.

Воронеж   Григорьева Т.В., Вихай Т.А.

Математика (особенно её раздел “Геометрия”) и черчение являются одним из самых сложных дисциплин и вызывают субъективные трудности у многих школьников. Вместе с тем, в начальной школе имеется большое число учащихся с явно выраженными способностями к конструированию, моделированию, рассуждению и абстракции. Но уже к 7 классу ученики эти способности, как правило, теряют. Опрос показал, что почти 70% учащихся не любят и с трудом воспринимают и геометрию, и черчение.

Мысль сделать ставку на генетический метод изучения геометрических фигур и их свойств, повлекла за собой создание интегрированного курса, помогающего избежать ряд проблем в дальнейшем изучении геометрии и черчения, оберегающего многих учащихся от нелюбви и страха к этим предметам, а также развивающего образное мышление школьника, его геометрическую интуицию, конструкторскую смекалку и наблюдательность. Такой курс был нами разработан в 1992 г. и опробирован на базе средней школы №26 г. Воронежа.

На основе этого курса было создано учебное пособие для учащихся 5-6 классов “Геометрическое черчение”. Данное пособие является пропедевтическим курсом таких предметов, как геометрия и черчение и имеет своей целью улучшение графической культуры учащихся, повышение интереса к геометрии и черчению, способствование развитию интеллекта, а также возможность добиться продуктивных результатов в обучении, основанных не на восприятии готовых значений, а на организации процесса собственной деятельности ученика.

Всё содержание пособия разбито на две части и включает в себя 68 разработанных уроков и около 380 практических заданий. Первая часть пособия (5 класс) в основном содержит материал, посвящённый отработке навыков построения простейших геометрических фигур - прямой, отрезка, луча, ломаной, угла, плоскости с помощью чертёжных инструментов, а также отработке практических навыков работы с чертёжными инструментами- линейкой, угольником, транспортиром, циркулем. Даётся алгоритм построения равных углов, углов заданной величины без транспортира, деление угла на две и некоторых углов на три равные части, построение перпендикулярных и параллельных прямых, деление отрезка на 2, 3, 4, 5, 7, 8 и т. д. Равных частей.

Вторая часть (6 класс) пособия посвящена построению более сложных геометрических фигур. Это - треугольники, многоугольники. При построении этих фигур используются методы координат и метод триангуляции. Рассматриваются вопросы, связанные с построением окружностей и различными видами движений геометрических фигур. Опытным путем при помощи построений рассматриваются свойства линий в треугольнике и окружности. Все это делает возможность на “на генетической основе” сформировать геометрические понятия и помогает более безболезненно войти учащимся 7 классов в школьный курс “Геометрия” и учащимся 8 классов в курс "Черчение".

Пропедевтический курс "Геометрическое черчение" построен так, чтобы дать учащимся представление о системе взаимодействия двух предметов: геометрия и черчение. В пособии выделено три вида деятельности: мыслительная, графическая и познавательная. Постоянное личное участие школьников в этих трех видах деятельности позволяет систематически приобщать их к миру линий и различных геометрических фигур, построенных с помощью этих линий

Рассматриваемые в пособии темы логически связаны между собой, развивают и дополняют друг друга. Тематическая цельность программы помогает обеспечить более полные знания учащихся по геометрии и черчению, прививает любовь к мыслительному процессу и снимает отрицательные эмоции в процессе обучения. К концу второго года обучения этому курсу, как правило, все учащиеся свободно владеют чертежными инструментами, умеют строить различные геометрические фигуры, а также благодаря большому количеству занимательных задач, на развитие мыслительной деятельности, хорошо ориентируются при решении задач на уроках геометрии и черчения.

В настоящее время такой курс введен в нескольких школах города Воронежа и уже получены положительные отзывы учителей, работающих по этому пособию.

Лекционно - семинарская система изучения школьного курса математики.

Сш №18 г. Воронеж. Л. М. Гудкова

Изучение математики крупными блоками развивает познавательный интерес учащихся к предмету, поощряет творческое отношение к занятиям и самостоятельность мышления.

За 20 лет работы в старших классах сложился определённый подход, выработалась личная система общения с учащимися в оценке их знаний. Главная задача, которую ставит учитель каждому ученику - это "не пройти программу", а научиться понимать то, о чём говоришь сам, и что говорят другие, научиться мыслить.

В старших классах интересы уже в основном определились, произошла дифференциация учащихся и по степени усвоения ими того или иного учебного предмета, и по призванию. Здесь учителю важно помочь учащимся достичь больших результатов в соответствии с возможностями. При работе с сильными учениками нет надобности часто спрашивать их устно, важно постоянно руководить их работой, достаточно письменных работ и редких, но обстоятельных опросов по теме или каким-то важным разделам темы. Эти учащиеся окажут помощь учителю при опросе слабоуспевающих, так как при групповой работе один из пяти учащихся в группе проговорит то или иной теоретический материал, учитель же контролирует работу каждой группы.

В настоящее время учителя применяют различные формы учёта знаний, умений, навыков. Это и специальная тетрадь-журнал учёта, и лицевые счета учащихся, и карточки учёта. Суть их одна: в них, как правило, заносятся существенные ошибки, допущенные учеником при выполнении контрольных и самостоятельных работ, при устных ответах; туда же заносятся дополнительные задания, сроки и качество их выполнения. При такой работе учитель ставит оценку в журнале с согласия учащегося, давая тем самым время на доработку проверяемых вопросов. При ведении тематического учёта знаний учащихся следует начинать работу с тематической планировки, где чётко должно быть расписано всё рабочее время на изученную тему, т. е. должны быть выделены такие уроки как:

1) уроки-лекции, где оговорено всё количество теоретического материала и примеров, соблюдаемых учителем на уроке;

2) уроки-практикумы, где учащиеся совместно с учителем и непосредственно под его руководством, учатся принимать теоретический материал при решении задач, сюда же должны быть отнесены и обучающие самостоятельные работы как групповые, так и индивидуальные. Учитель должен чётко продумать проверку таких работ на уроке с последующими рекомендациями и анализом всех допущенных ошибок;

3) уроки-зачёты, на которых учащиеся самостоятельно выполняют работу на оценку. Эти работы могут носить групповой и индивидуальный характер. Конечным этапом этой работы должна стать оценка знаний, умений и навыков, выставляемая в журнал, причём время выставления оценки для каждого ученика может стать различным, т. к. учитель ставит оценку в журнал по согласию и усмотрению ученика;

4) уроки-семинары и уроки-конференции заключительный этап в изучении темы. Они должны показать учащимся степень их знаний того или иного раздела предмета. На этих уроках учащиеся расширяют и углубляют свои знания по предмету, делают для себя хотя бы маленькое, но открытие. Такие уроки должны стать уроками-диспутами, уроками-спорами;

5) контрольная работа по теме и место работы над ошибками после её выполнения. Правильно поставленная работа учителя при изучении темы сводит на нет работу над ошибками, так как ошибок бывает очень мало, учащиеся приходят на работу подготовленными.

Вторым не менее важным этапом начала изучения темы является составление перечня вопросов для тематического опроса учащихся при изучении всей темы, где чётко планируется на каком этапе темы, на каком уроке, что, как и в каком количестве учитель будет спрашивать, определяется количество оценок в журнале для каждого ученика. Какой теоретический материал, и в каком объёме должен знать каждый ученик. Какие теоремы относятся для обязательного доказательства каждым учеником, какие будут доказывать средние, а какие только сильные ученики. Строго должен быть выполнен обязательный минимум задач определенный программой. В этом разделе учитель планирует контролирующие самостоятельные работы, определяет количество домашних контрольных работ и их объём, планируются практические групповые и индивидуальные работы.

Изучение специальных разделов математики в системе колледж - вуз."

Г.А.Гончарова, Е.В.Паксютова, Е.В.Мозжилкина,
Паксютов В.И. (г. Саратов)

Проблема изучения специальных разделов математики в колледжах при высших учебных заведениях является актуальной в связи с тем, что уже на младших курсах студенты колледжа изучают специальные предметы: теоретическую механику, электротехнику, сопротивление материалов, прикладную физику и т.д. Поэтому необходимо строить программы изучения математики и информатики в тесной взаимосвязи. Методически изучение каждого раздела математики базируется на модульно-рейтинговой системе. Каждый модуль включает в себя теоретическую и практическую части, а так же самостоятельную работу. После изучения модуля проводится коллоквиум или пишется письменная контрольная работа. Изучение каждого модуля тесно увязывается с изучением школьного курса математики (особенно на младших курсах) и специальными дисциплинами. Так, например, изучение основ теории вероятностей и математической статистики становится возможным после того, как изучены вопросы интегрального и дифференциального исчисления. А после изучения этого специального раздела математики студенты могут грамотно обрабатывать экспериментальный материал и планировать свои дальнейшие исследования. Изучение вопросов линейного программирования целесообразно увязывать с изучением раздела " дифференциальное исчисление".

На примере колледжей при СГТУ и СГУ можно сделать вывод о том, что студенты 1 и 2 курсов (10 - 11 классы средней школы) достаточно быстро усваивают такие сложные разделы математики,как основы теории множеств, основы теории вероятностей и математической статистики, основы теории игр и массового обслуживания, линейное и нелинейное программирование. Практика показывает, что полученные знания студенты широко применяют при изучении специальных курсов и при этом более грамотно используют вычислительную технику.

Дифференцированный и индивидуальный подход к обучению математике на основании 3-х уровневого внутриклассного обучения в 5-6 классах

Данкова И.Н. (г. Воронеж)

Большие затруднения в изучении курса математики возникают у учащихся 5 класса. Это вызвано тем, что школьники сталкиваются с новой формой организации самостоятельной работы и всего учебного процесса.

Назрела необходимость устранить эти возникающие трудности и приучить учащихся к индивидуальной, самостоятельной, творческой работе.

Начиная с 5 класса вводятся такие формы обучения, как лекции, семинары, зачеты на основе 3-х уровневого внутриклассного обучения. Для сильных и одаренных учащихся организую занятия, способствующие учебно-исследовательской работе, стимулирующие потребности в самостоятельном творчестве. Для учащихся со средними математическими способностями стараюсь обеспечивать прочное и осознанное овладение системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни..

Дифференциация обучения математики в гимназии №3 на основе 3-х уровневого подхода означает:

1. Эффективное использование времени урока;

2. Использование вариативности методов обучения по активизации познавательной деятельности;

3. Соблюдение принципа последовательности в обучении;

4. Приоритетная роль самостоятельной работы учащихся на всех этапах урока;

5. Совершенствование навыков работы с учебником, справочной литературой;

6. Отбор 3-х уровневого домашнего задания, его целесообразность, объем;

7. Отбор зачетного материала на 3-х уровнях обучения:

а) обязательного - на основе Государственного стандарта;

б) промежуточного - знания средней сложности;

в) высокого - требующего увлеченности трудолюбия, творческого подхода.

Дифференцированный подход в учебно-воспитательном процессе позволяет осуществить обучение каждого ученика в посильном для него темпе, создавая тем самым оптимальные условия для развития логического мышления познавательных возможностей каждой личности.

На основании новых технологий осуществляю всестороннее развитие познавательных возможностей учащихся. Постоянно убеждаю их в том, что математика - это язык науки и техники и других естественных дисциплин. От качества знаний математики зависит научный потенциал многих предметов.

Создаю обстановку творческого труда, стимулируя успехи учащихся хорошими и отличными оценками.

Создаю опорные конспекты, плакаты, таблицы, необходимые для прочности усвоения нового лекционного и практического материала на основе 3-х уровневого дифференцированного подхода. Отрабатываю алгоритмы проверки знаний, умений и навыков.

На основании дифференцированного подхода и глубокой индивидуализации обучения на 3-х уровневой внеклассной основе добилась неплохих результатов. Более 70% учащихся способны освоить более высокую планку Государственного стандарта.

Дифференцированный подход в изучении
математики в профильных 10-11 классах

г. Воронеж М.И.Егорова
лицей№6

Сущность изменений, происходящих сейчас в школьном математическом образовании, можно определить как переход к дифференцированному обучению. Организация школьного математического образования в старших классах является глубокая и разносторонняя дифференциация обучения математике, которая осуществляется разными путями.

Дифференцированный подход целесообразно осуществлять на разных этапах урока. Так, на этапе введения нового понятия ,свойства,алгоритма учителю можно работать со всем классом ,без деления его на группы.Но после того,как несколько упражнений выполнено на доске , учащиеся могут приступить к дифференцированной самостоятельной работе.При изучении новой темы можно осуществить дифференцированный подход.

Учащиеся разбиваются на несколько групп,каждая из которых знакомится с определенным подходом к понятию логарифмической функции,затем идет обмен информацией. Первая группа изучает определение логарифм.функции как обратной к показательной,вторая-как решение дифференциального уравнения,третья- определение и свойства по учебнику,четвертая- используя понятия математического анализа.Другой пример. При изучении темы "Решение логарифмических уравнений и неравенств" в процессе обьяснения нового материала, рассматривая различные виды логарифмических уравнений /неравенств/, можно "развести" примеры по уровням сложности . В лекции дети записывают уравнения /неравенства/ обязательного уровня в 1 колонку,более сложные - в другую. Это помогает оценивать свои возможности при подготовки к зачету, к контрольной работе.

В старших классах целесообразно проводить домашнее контрольные работы,которые даются в трех вариантах /уровневая дифференциация/.

Для контроля за достежением результатов обучения в ходе учебного процесса в конце темы проводится зачет , состоящий из заданий обязательного уровня и более сложных заданий, что позволяет обьективнее и точнее дифференцировать учащихся по уровню их подготовки.

Итогом работы по данной теме является контрольная работа. Контрольная работа выявляет различные уровни усвоения материала, поэтому ее предлагают учащимся в трех уровнях.

Экзамены – это серьезная итоговая проверка знаний и умений школьников.Основные усилия в совершенствовании экзаменационного контроля должны быть направлены на повышение дифференцирующей силы экзамена и полноты проверки.

Система дифференцированных заданий облегчает организацию занятий в классе, создает условия для продвижения школьников в учебе в соответствии с их возможностями.

Успех, испытанный в результате преодоления трудностей,дает мощный импульс повышению познавательной активности учащихся.

Гильбертов локальный C^*– модул

Ю.Й.Жураев, Ф.Шарипов (Самарканд)

В докладе рассматриваются внутренные произведения над произвольной локальной C^*– алгеброй A. Для них получен аналог неравенства Коши-Буняковского и доказано, что модул над алгеброй A с внутренным произведением является локально выпуклым модулем. В случае полноты такой модул назовем гильбертовым локальным C^*– модулем над алгеброй A. Доказывается, что линейный оператор на гильбертовом локальном C^*– модуле, допускающий сопряженный, ограничен и множество таких операторов является локальной C^*– алгеброй.

О моментных функциях решения начальной задачи линейного дифференциального уравнения первого порядка со случайными коэффициентами

В.Г.Задорожний, Л.Н.Строева

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения 1$^{\text{го}}$ порядка со случайными коэффициентами.

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = \varepsilon_1(t)\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial x} + \varepsilon_2(t)\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial y} + f(t,x,y), \tag{1}$$

$$u(t_0,x,y) = u_0(x,y), \tag{2}$$

где $t \in [t_0,t] = T \subset R$, $(x,y) \in R^2$, ε_1, ε_2 - случайные процессы, $f : T \times R^2 \to R$ - случайный процесс, $u_0 : R^2 \to R$ - случайный процесс независимый с ε_1, ε_2, f.

Предполагается, что ε_1, ε_2 и f заданы характеристическим функционалом [1] $\varphi(v_1,v_2,w)$, где v_1, v_2 функции из пространства V - суммируемых на T функций, w - суммируемая на $T\times R\times R$ функция. Требуется найти математическое ожидание $Mu(t,x,y)$ и вторую моментную функцию $M(u(t,x,y)u(s,x',y'))$.

Теорема 1. *Пусть существуют вариационные производные*

$$\frac{\delta\varphi(v_1,v_2,w)}{\delta w(t,x,y)}, \frac{\delta^2\varphi(v_1,v_2,w)}{\delta v_1(t)\delta w(t,x,y)}, \frac{\delta^2\varphi(v_1,v_2,w)}{\delta v_2(t)\delta w(t,x,y)},$$

тогда обобщенное математическое ожидание решения задачи (1),(2) находится по формуле

$$Mu(t,x,y) = Mu_0(x,y) * F^{-1}_{\xi\eta}[G_{t_0t}(\xi,\eta)\varphi(0,0,0)] - i\int_{t_0}^{t} F^{-1}_{\xi\eta}[F_{xy}[G_{st}(\xi,\eta)\frac{\delta\varphi(0,0,0)}{\delta w(s,x,y)}](t,\xi,\eta,s)]ds,$$

где $G_{st}(\xi,\eta)\varphi(v_1,v_2) = \varphi(v_1-\xi\chi(s,t), v_2-\eta\chi(s,t))$.

Теорема 2. *Пусть существуют производные*

$$\frac{\delta\varphi(v_1,v_2,w)}{\delta v_1(t)}, \frac{\delta\varphi(v_1,v_2,w)}{\delta v_2(t)}, \frac{\delta^2\varphi(v_1,v_2,w)}{\delta w(t,x,y)\delta v_1(t)}, \frac{\delta^2\varphi(v_1,v_2,w)}{\delta w(t,x,y)\delta v_2(t)},$$

тогда вторая моментная функция в обобщенном смысле решения задачи (1),(2) имеет вид

$$M(u(t,x,y)u(s,x',y')) =$$
$$F^{-1}_{\xi\eta}[F_{xy}[M(u_0(x',y')u_0(x,y))] *' G_{t_0t}(\xi,\eta)F^{-1}_{\xi'\eta'}[G_{t_0s}(\xi',\eta')\varphi(0,0,0)]] -$$
$$iMu_0(x,y) * \int_{t_0}^{s} F^{-1}_{\xi\eta}[G_{t_0t}(\xi,\eta)F^{-1}_{\xi'\eta'}[F_{x'y'}[G_{\sigma s}(\xi',\eta')\frac{\delta\varphi(0,0,0)}{\delta w(\sigma,x',y')}]]]d\sigma -$$
$$iMu_0(x',y') *' \int_{t_0}^{t} F^{-1}_{\xi'\eta'}[G_{t_0s}(\xi',\eta')F^{-1}_{\xi\eta}[F_{xy}[G_{\tau t}(\xi,\eta)\frac{\delta\varphi(0,0,0)}{\delta w(\tau,x,y)}]]]d\tau -$$
$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} F^{-1}_{\xi\eta}[F_{xy}[F^{-1}_{\xi'\eta'}[F_{x'y'}[G_{\tau t}(\xi,\eta)G_{\sigma s}(\xi',\eta')\frac{\delta^2\varphi(0,0,0)}{\delta w(\sigma,x',y')\delta w(\tau,x,y)}]]]]d\sigma d\tau$$

В случае гауссовских процессов ε_1, ε_2 формулы для математического ожидания и второй моментной функции имеют достаточно простой вид и получены условия, при которых эти величины определяются в классическом смысле.

Литература

1. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М., Наука, 1980. - 336 с.

2. Задорожний В.Г. О линейном дифференциальном уравнении первого порядка с обычной и вариационной производными // Мат. заметки РАН, т.53.вып.4.1993.-с.36-44

ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В МАЛОЧИСЛЕННОЙ ШКОЛЕ

О.В.ЗАНИНА (г.Воронеж)

Специфика деятельности малочисленной школы определяется именно этой малочисленностью. Отсюда возникает ряд обстоятельств, обуславливающих трудности в создании оптимальных условий для обучения. Как организовать учебный процесс, если в классе 3 5 учеников? каким должен быть урок? В малочисленной школе учитель-многопредметник. Ученик на уроке перегружен эмоционально и физически. Как всего этого избежать?

Мы знаем, что в малочисленной школе не приемлема традиционная методика. Какой же она должна стать, чтобы достичь успеха? Мы считаем, что урок в такой школе должен быть в радость для каждого ребенка, а не в тягость ему.

Проблему малой наполняемости можно частично решить объединяя уроки по вертикали и по горизонтали (т.е. интегрируя).

Объединять классы по вертикали можно при проведении уроков повторительного обобщающего характера, а так же, когда младший класс изучает новую тему, а старший класс использовать на уроке как информаторов того, что им уже известно по изучаемой теме, новое может добавить сам учитель.

К такой работе подходят темы.

Функции и их графики (7-8; 8-9; 10-11 кл.).

Степень с натуральным, целым, рациональным показателем (7,8, 11 кл.)

Квадратные уровнения, тригонометрические, сводимые квадратным; показательные, логарифмические, сводимые к квадратным уравнениям (8, 10, 11 кл.) и т.д. Важно, чтобы уроки были нестандартными, необычными. Это и деловые и ролевые игры, это аукционы знании, путешествия. Чтобы преодолеть перегрузку учащихся все-таки на уроке самым важным для малочисленной школы являются различные виды самостоятельной работы. Это самостоятельная работа с предварительным разбором материала, решение задач с последующей проверкой. Самостоятельные работы с использованием перфокарт и карточек, по заданному алгоритму и т.д.

Небольшое число учащихся способствует осуществлению индивидуального, дифференцированного подхода в решении вопросов математического образования.

Разноуровневые задания составленные с учетом возможности учащихся, создают в классе благоприятный, психологический климат. У ребят возникает чувство удовлетворения после каждого верно решенного задания.

Вопрос о том, как сделать ученика активным помошником в его обучении заставляет искать ответ в новых педагогических технологиях.

Познакомившись с ТУР-технологией В.А.Бехтольда, многие учителя области взяли некоторые ее принципы для учебного процесса.

- обучение ведется по разноуровневым программам на основе общегосударственной программы;

- учащиеся обучаются в индивидуальном различном темпе;

- учитель работает с каждым учеником индивидуально ;

- учащиеся работают самостоятельно,.

Говоря о специфике малочисленной школы в выборе организационных форм процесса обучения,нельзя оставить без внимания процесс наполнения этих форм соответствующим содержанием образования.

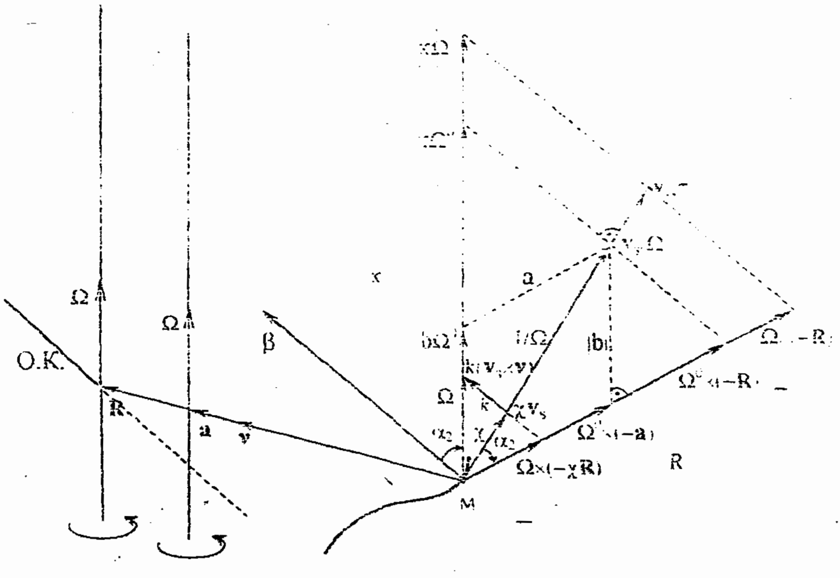
Школа без всяких скидок на свою малочисленность должна стремиться удовлетворить все образовательные запросы учащихся.

УДК 514.7+514.8+531.1

Крутов А.В. (Воронеж)

ИЛЛЮСТРАЦИЯ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КРИВОЙ

В [1] рассматривались аналитические соотношения и кинематическая интерпретация для основных величин, характеризующих свойства кривых. Здесь приводится графическая иллюстрация этих характеристик примерно в тех же обозначениях.



Литература:

1. Крутов А.В. Кинематическая интерпретация основных понятий теории кривых//Современные проблемы теории функций и смежные проблемы прикладной математики и механики: Тезисы докладов школы. — Воронеж, ВГУ, 1995. — 270 с. (С.136).

УДК 531.1+514.7

А.В. Крутов (Воронеж)

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ И ИХ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Дифференциальные уравнения движения точки с учетом циклической перестановки индексов, проецирования на естественные оси и на i-ю координатную плоскость, ортогональную i-й оси декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3) с базисом $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, можно записать в виде (1), (2) или (3)

$$d(\varphi_i m v_i^2)=(2\varphi_i F_{i\tau}+F_{i\nu})ds_i, \quad (1) \quad d(2\varphi_i m v_i^2/2)=(2\varphi_i F_{i\tau}+F_{i\nu})k_i^{-1}d\varphi_i, \qquad (2)$$

$$d(\varphi_i m v_i^2)=2\varphi_i[(\mathbf{F}d\mathbf{r})-(\mathbf{F}\mathbf{e}_i)dx_i]+(\mathbf{F}\mathbf{e}_j)dx_k-(\mathbf{F}\mathbf{e}_k)dx_j, \ (i\neq j\neq k,\ i,j,k=1,2,3). \qquad (3)$$

Правую часть здесь в соответствии с (2) можно рассматривать как элементарную работу i-й компоненты момента пары сил. Так как момент пары есть свободный вектор, то такое представление при теоретическом описании освобождает в определенной степени от привязки к выбранной системе отсчета и к телу кривой-траектории, что делает соотношения более инвариантными. В частности, если одну из сил пары считать приложенной в данной точке и направленной вдоль касательной к проекции траектории точки на i-ю плоскость, а другую – в центре кривизны этой проекции, на ее эволюте, то величина сил пары будет равна $2\varphi_i F_{i\tau}+F_{i\nu}$, в то время как плечом будет являться радиус k_i^{-1} кривизны i-й проекции траектории. Если выполняется условие интегрируемости

$$2\varphi_i(\mathbf{rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{e}_i=\mathrm{div}\mathbf{F}-\partial(\mathbf{F}\mathbf{e}_i)/\partial x_i+4(\omega_i/v_{i\tau})F_i\cos\alpha_i/\sin 2\varphi_i, \ \alpha_i=\varphi_i+\psi_i, \qquad (4)$$

то соответствующее уравнение в (1) – (3) имеет первый интеграл вида:

$$2\varphi_i m v_i^2/2+\Pi_i=c_i=\mathrm{const}, \qquad (5)$$

где Π_i удовлетворяет уравнениям

$$-\partial\Pi_i/\partial x_j=2\varphi_i(\mathbf{F}\mathbf{e}_j)+(\mathbf{F}\mathbf{e}_k), \quad -\partial\Pi_i/\partial x_k=2\varphi_i(\mathbf{F}\mathbf{e}_k)-(\mathbf{F}\mathbf{e}_j),$$

φ_i, ψ_i – ориентированные углы поворота составляющих $\mathbf{v}_i$ и $\mathbf{F}_i$ векторов скорости и силы на i-ю плоскость:

$$\varphi_i=2\mathrm{arctg}[(\mathbf{v}\mathbf{e}_k)/((\mathbf{v}\mathbf{e}_j)+v_i)]=2\mathrm{arctg}[(F_{i\tau}\mathbf{e}_k)/((F_{i\tau}\mathbf{e}_j)+F_{i\tau})],$$

$$\psi_i=2\mathrm{arctg}[(\mathbf{F}\mathbf{e}_k)/((\mathbf{F}\mathbf{e}_j)+F_i)], \ F_i^2=(\mathbf{F}\mathbf{e}_j)^2+(\mathbf{F}\mathbf{e}_k)^2, \ \omega_i=d\varphi_i/dt,$$

$$v_i^2=(v_{i\tau})^2=(ds_i/dt)^2=(dx_j/dt)^2+(dx_k/dt)^2=(\mathbf{v}\mathbf{e}_j)^2+(\mathbf{v}\mathbf{e}_k)^2.$$

Если силы таковы, что $(\mathbf{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_i)=0$, то для существования i-го интеграла типа (5) достаточно выполнения i-го условия вида

$$\mathrm{div}\mathbf{F}-\partial(\mathbf{F}\mathbf{e}_i)/\partial x_i=-4(\omega_i/v_{i\tau})F_i\cos\alpha_i/\sin 2\varphi_i, \ (i=1,2,3).$$

Если силы потенциальны в обычном понимании, так что $\mathbf{rot}\mathbf{F}=0$, и имеют место все три данных условия, то из них следует

$$\mathrm{div}\mathbf{F}=-2\sum(\omega_i/v_i)F_i\cos\alpha_i/\sin 2\varphi_i, \ (i=1,2,3).$$

Полученные первые интегралы имеют наглядную геометрическую трактовку, связанную с геометрическим и динамическим формообразованием кривых при определенной их параметризации [1,2].

Литература: 1. Эволюционный подход в интегрировании/Крутов А.В.// Вестник факультета прикладной математики и механики: Вып. 1. – Воронеж: ВГУ, 1998. – 177 с. 2. Параметрическое интегрирование/Крутов А.В.// Вестник ВВШ МВД РФ, 1998, № 2, с. 57–61.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН РАЗРЫХЛЕНИЯ В ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛАХ

Молоков С.А., Смотрова О.А. (Воронеж)

Одним из эффективных методов разрыхления пористых сыпучих материалов является метод их предварительного насыщения сжатым воздухом с последующей декомпрессией [1, 2].

В [1] рассмотрено разрушение прочных материалов при моделировании их пористым шарами и распространение сходящихся сферических волн с поверхности шара к центру. В [2] для пористых материалов процесс декомпрессии описывается уравнением диффузии газа через поры. Для случая достаточно легкого и малозвукопроводного сыпучего материала построена одномерная математическая модель движения двухфазной среды [3], которая описывается системой двух уравнений в частных производных гиперболического типа для скорости движения v и объемной деформации e

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial e}{\partial x} = -\Lambda v; \qquad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial e}{\partial t} = 0. \tag{1}$$

Здесь: $(c/a) = \sqrt{(1+e)/\left((1+e/\varepsilon_0)^{\kappa+1}\varepsilon_0\right)}$, a – скорость звука в газе; ε_0 – пористость среды; к – показатель изоэнтропы воздуха; $\Lambda = (1+e)\cdot\lambda$; λ – коэффициент линейного гидравлического сопротивления движению воздуха в каналах пористой среды.

Система уравнений (1) обладает характеристиками $dx/dt = \pm c$ и соотношениями вдоль характеристик

$$du \pm c de = -\Lambda u dt. \tag{2}$$

Волна понижения давления является волной слабого разрыва давления р, скорости течения v и деформации e.

Численные расчеты, с использованием метода характеристик, задачи распространения волны понижения давления показали наличие увеличивающегося со временем градиента давления на фронте волны разрыхления. Это дает возможность приближенного рассмотрения волны разрыхления как волны сильного разрыва давления р и скорости v и позволяет использовать лучевой метод для описания затухания волн разрыва при их распространении в невозмущенную область.

[1] Скверский Н. А. Исследование процесса разрушения комков почвы декомпрессией //Тракторы и сельхозмашины. №3, 1980, с. 57–60.

[2] Островский Г.М. Пневматический транспорт сыпучих материалов в химической промышленности. Лен.-д: Недра, 1964, 180с.

[3] Паркин Б.Р., Гилмор Ф.Р., Броуд Г.Л. Ударные волны в воде с пузырьками воздуха / Подводные и подземные взрывы. М.: Мир, 1974, с. 153–258.

В творческом поиске

Е.Я. Назаренко, С.А. Савинкова, И.В. Фёдорова (Воронеж)

Важнейшим условием успешного изучения любого школьного предмета и, особенно такого трудного, как математика, является устойчивый, глубокий интерес учащихся к предмету. И лишь тот учитель, которому удаётся увлечь, заинтересовать учеников, может рассчитывать на успех в своей работе.

Три года назад в лицее №4 г. Воронежа была создана экспериментальная лаборатория, в состав которой вошли опытные, творчески работающие учителя математики. Ими была разработана программа под общим названием "Математика. Красота. Философия." В качестве подведения итогов ежегодно, в конце учебного года, проводится ученическая конференция по математике. Работа каждой такой конференции проходит по четырём секциям: для учеников 5-6 кл., 7-8 кл., 9 кл. и 10-11 классов. Темы для секций выбираются в сентябре, и затем в течение почти всего учебного года ученики математических классов под общим руководством учителя, но с большой долей самостоятельности, изучают предложенную тему, пишут рефераты, готовят свои доклады для выступления на конференции. В результате ученики значительно углубляют и расширяют свои знания по математике, получают навыки самостоятельного изучения научной литературы. Почти все темы ежегодно меняются.

Ученикам помладше предлагались темы: "Знакомство с геометрией", "Мир чисел", "Принцип Дирихле". Темы для конференций учеников 9-х и 10-11-ых классов - "Математика и искусство", "Координаты на плоскости", "От геометрии Евклида до геометрии Римана" и другие. Например, на конференции учащихся 9-ых классов по теме "Координаты на плоскости" были рассмотрены следующие вопросы: "Полярные координаты", "Основные параметры и построение параболы, гиперболы, эллипса", "Алгебраические и механические кривые". Конференция учащихся 10-11-ых классов в этом учебном году была посвящена теме "Топология и её приложения". Перечислим темы некоторых докладов этой конференции: "История возникновения топологии", "Топологическая эквивалентность", "Топологические пространства", "Лист Мёбиуса, его свойства и применение", "Рогатая сфера Александера", "Теорема Эйлера и Эйлерова характеристика поверхности", "Проблема четырёх красок", "Некоторые топологические задачи", "Уравнение Кеплера" и т.д.

О несомненном успехе конференций свидетельствует прежде всего мнение самих учеников: им было интересно и готовиться, и выступать с докладом. Неслучайно в заключении своего выступления один десятиклассник сказал: "Оказывается, геометрия - это не только то, что мы изучаем на уроке. Геометрия - это огромный мир, увлекательный и многообразный."

Динамическая модель производственной системы

С.Д. Наумов, М.Е. Семенов (Воронеж)

В работе рассматривается математическая модель системы, состоящей из группы предприятий (фирм), которые производят и потребляют некоторые товары.

Начальные данные для системы есть: $\Omega=\{A, B(N)\}$ где A - множество фирм $A=\{f_1, \dots f_N\}$; B(N) - начальные условия для каждой фирмы.

Для упрощения ниже рассматривается случай, когда каждая фирма производит один вид товара. Тогда начальные условия для фирмы f_i составляют

$$f_i=\{Z_i, x_i(1), x_i(2)\}. \qquad (1)$$

где Z_i - начальный запас капитала в деньгах $x_i(1)$ - начальный запас 1-го продукта $x_i(2)$ - начальный запас второго продукта.

В системе установлены следующие блоки: (1) - производственный, (2) - установки цен на товар, (3) - установка объема товара и продажи.

Рассмотрим функционирование каждого из блоков. В блоке (2) цена единицы товара p(t) определяется операторным соотношением

$$p_2(t)=W[p_2(0), q_2(0)]q_2(t-\tau) \quad (\tau>0) \qquad (2)$$

где $\tau>0$ - фиксированный параметр, $q_2(t)$ - объем проданного товара. Соотношения (2) определяет соответствие вход-выход между объемами продаваемых товаров и ценой. Конкретный вид оператора W может быть задан различными способами. В работе изучается модель, в которой выход p(t) определяется как решение дифференциального уравнения

$$\frac{dpi}{dt}=\Phi(p_2(t), q_2(t-\tau), q_2(t-\tau)-qm(t-\tau)) \qquad (3)$$

$$\Phi(p, q, V)=\begin{cases}\varphi_1(p, q) \text{ при } V=0\\ \varphi_r(p, q)\,V \text{ при } V<0\end{cases} \qquad (4)$$

где $\varphi_1(p, q)$, $\varphi_r(p, q)$ заданные неотрицательные, непрерывные по совокупности переменных и дифференцируемые по первому аргументу функции, и $q_m(t)$ - максимальное количество производимого товара. Соотношения (3), (4) имеют ясный экономический смысл: цена единицы товара растет если она продала весь произведенный ею товар и падает в зависимости от количества не распроданного товара.

В блоке 3 каждая фирма решает, какое количества продукта ей следует предложить в моменты $t(0\le t\le T)$ (здесь мы предполагаем, что деятельность фирм происходит на конечном временном интервале). Этот выбор предлагается сделать на основе максимизации прибыли за весь период функционирования.

$$\max_{q_1,q_2} \int_0^T (p_2(s)q_2(s)-p_1(s)q_1(s))ds \qquad (5)$$

где $p_1(t)$, $q_1(t)$ - цена и объем покупаемого продукта. Система (1)-(5) должны быть дополнена естественными ограничениями неотрицательности входящих функций и положительного баланса фирмы в каждый момент времени. Решение задачи (1)-(5) позволяет определить $q_2(t)$ - план производства продаваемого продукта, который подается на блок (1).

УДК 621.3

О компьютерных технологиях в курсе «Финансовая математика» ВГТА

О.Ю.Покорная (Воронеж)

Количественный финансовый анализ, сформировавшийся на стыке финансовой науки и математики, направлен на решение широкого круга прикладных задач, возникающих в процессе оценки эффективности коммерческих операций и принятии решений в финансовой сфере. Множественность влияющих факторов и их непростой механизм взаимодействия, учет коммерческих рисков приводят к необходимости финансовых и коммерческих расчетов, в которых помимо алгебраических методов используются методы математического анализа, теории вероятностей, статистики, оптимизации и других разделов современной математики.

В курсе рассматриваются методы учета фактора времени, оценки потоков платежей, количественного анализа эффективности инвестиционных проектов и операций с ценными бумагами. При этом наряду с традиционными применяется также ряд новых подходов к решению задач финансового анализа, базирующихся на методах оптимизации и имитационного моделирования. В качестве инструментального средства автоматизации и моделирования используется наиболее современный и популярный табличный процессор EXCEL 5.0/7.0. На конкретных примерах из отечественной и зарубежной практики изучается технология компьютерного финансового анализа с использованием специальных инструментов и функций пакета.

По сравнению с традиционными принятый подход обладает рядом преимуществ. Компьютерное моделирование оценки реальных коммерческих ситуаций позволяет не только лучше усвоить теоретические аспекты современного финансового анализа, но и практически ощутить их действие в конкретных ситуациях. Кроме того, студенты экономических специальностей, не имеющие достаточной математической подготовки и опыта использования аналитических моделей для принятия решений, могут успешно применять их готовые компьютерные реализации, что способствует пониманию хотя бы на интуитивном уровне. Это прежде всего относится к прогнозированию, статистическим методам управления, анализу чувствительности (метод сценариев), регрессионному анализу, задачам оптимизации, в т.ч. целочисленных (оптимизация портфеля инвестиций).

Реализация личностно-ориентированного образования через интеграцию

Воронеж РИММАР Г.Г. (гимназия №6)

В любой деятельности, которую намечает человек, должен прогнозироваться результат. Тем более педагогическая деятельность просто обязана иметь соответствующий проект, а он – в свою очередь – модель, т. е. схему педагогического процесса, которая, отображая этот процесс, способна определить: -его функцию, парадигму и цель;

-указать последовательность этапов обучения, его технологию;

-спрогнозировать результат.

Модель, как правило, рассматривается в качестве результата реализаций той или иной концепции или философии образования. Нами, в нашей работе, такой философией, положенной в основу созданной нами МВШ, была гуманистическая философия формирования личности.

Процесс формирования личности очень сложный, длительный и постепенный. Для его реализации необходима определенная система, которая бы способствовала реализации гуманистической философии МВШ. Такой системой, по-нашему мнению, является личностно-ориентированный подход в образовании.

Личностно-ориентированный подход предполагает учет интересов и потребностей ребенка, его психологических особенностей, типа характера, влияющего на способы его деятельности и особенности познания.

Основная задача личностно - ориентированного обучения - развитие способностей ребенка, опора на его личный опыт, право выбора способов и методов учебной деятельности, создание условий для оптимального развития его креативной, когнитивной, мотивационной, операциональной, нравственно-эмоциональной сфер. Следовательно, личностно-ориентированный подход позволяет наиболее оптимально реализовать те качества, которые заложены в МВШ.

Любая система, если она целенаправлена, позволяет работать четко, последовательно логично, профессионально, а не методом проб и ошибок. Личностно-ориентированное образование, МВШ, содержащее в своей основе это личностно-ориентированное образование и является такой системой, позволяющей определить какие методы, формы, способы, приемы наиболее эффективно формируют те или иные качества личности, причем посредствам изучаемых в школе предметов

Изучая возможности личностно-ориентированного образования, вычленив основные его положения, мы пришли к выводу, что наиболее полно, оптимально, естественно такие качества, заложенные в МВШ как гибкое аналитическое мышление, его оригинальность, свобода от стереотипов, высокая интеллектуальная насыщенность, коммуникабельность, формируются при использовании в обучении интеграции.

Интеграция, в свою очередь, является способом формирования целостного восприятия мира и своеобразным мостом от локального образования к глобальному образованию, формирующему глобальное мышление.

Предпосылкой к этому являются изменения в мире, которые происходят на рубеже тысячелетий. Возникают глобальные мировые системы (экономические, экологические, геополитические, информационные, культурные, технологические и др.); противоречивой стороной сейчас же выступают и глобальные проблемы современного мира (продовольственная, энергетическая, демографическая, проблема урбанизации, межнациональных отношений, угрозы ядерной войны и др.).

Эти проблемы возникают в результате объективного развития общества и требуют для своего решения усилий всего мирового сообщества. Отсюда роль глобального образования для будущего поколения, так как решать эти проблемы придется именно сегодняшним ученикам.

Главная задача глобального образования- воспитать у учащихся чувство причастности к жизни всей планеты в целом, понимание того, что Земля- наш общий дом, дальнейшее существование которого зависит от решения тех или иных глобальных проблем.

Основными параметрами глобального образования являются: восприятие современного мира целостно во всех его взаимосвязях, ориентация на гуманистический принцип при выборе решения, умение отслеживать последствие этих решений с точки зрения их влияния на человека, чувство справедливости и нетерпимости к насилию, открытость личности по отношению к новому, реалистический подход к возникающим проблемам, выделение их во всей сложности, противоречивость, преодоление стереотипов, рефлексивное осмысление собственного опыта.

Такое мышление можно сформировать только реализуя личностно-ориентированное образование на основе принципа проблемной интеграции. Именно эти подходы позволяют найти адекватные формы и методы обучения, направленные на развитие умственной самостоятельности и творческого потенциала, формирование системы взаимоотношений, основанных на гуманистических ценностях.

Интеграция как раз тот механизм, который может обеспечить решение этих задач, так как она приводит в соответствие индивидуальный уровень мышления и уровень развития совокупного сознания человечества.

Интеграция позволяет реализовать такие положения личностно-ориентированного образования как самопознание, самоопределение, самовыражение; дает право выбора, использование проблемных творческих заданий, усиление всех видов мотиваций, артикуляции знаний, опора на субъективный опыт; обобщение и систематизация материала, создание заинтересованности каждого ребенка в работе всего класса и др.

У интеграции есть и свои специфические эффекты, создающие условия для личностно-ориентированного образования:

-изменение информационной емкости содержания,

-выход на более высокий уровень осмысления,

-совершенствование индивидуально-личностного аппарата познания,

-формирование креативности,

-возможность дать учащимся целостное представление о мире и т.д.

Объекты интеграции могут быть самыми разнообразными- это природные явления, научные теории, личности, государства, исторические события, литературные произведения и др.

Интеграция в сфере воспитания и образования может осуществляться на любом этапе педагогического процесса, являясь универсальным путем его преобразования. Она может и должна идти на уровне педагогических целей: необходимость ориентироваться в своей работе на такие интегральные свойства и характеристики личности как активность, креативность, не являющиеся простой суммой индивидуальных проявлений, но отражающие сущность, качественное своеобразие человека, его позицию во всех сферах жизни.

Возможны варианты интеграции на уровне содержания обучения, а также на уровне педагогических технологий.

В нашей гимназии практикуются интегрированные уроки и другие комплексные формы обучения и воспитания уч-ся (научно-практические конференции уч-ся, семинары, исследовательские экспедиции и экскурсии и др.).

Проводятся интегрированные блоки уроков по смежным предметам, обеспечивающие синтез знаний и умений, опережающие и обобщающее обучение. В некоторых уроках интеграция происходит внутренне, благодаря созданным учителем проблемным ситуациям, поставленным вопросам.

В качестве приложения к излагаемым тезисам выступления имеется журнал, отражающий работу гимназии №6 по интеграции и видеоматериал, содержащий фрагменты различных интегрированных уроков, с различными объектами интеграции.

К вопросу постановки и решения краевых задач нелинейной механики прямоугольных пластин с учетом высокотемпературной ползучести материала.

Семенов П. К. (г. Саратов)

Рассматривается модель пластинки прямоугольного очертания из нелинейно-упругого материала, свойства которого зависят от температуры и изменяются во времени. Пластинка нагружена поперечной механической нагрузкой и взаимодействует с температурным полем. Учет упомянутых свойств материала осуществляется на уровне компонентных (физических) соотношений, в которых используются аналитические полиномиальные зависимости $\sigma_i(\varepsilon_i)$, построенные по результатам численной обработки диаграмм деформирования и кривых ползучести при различных напряжениях и температурах. Полная система уравнений термоупругого равновесия вместе с граничными порождает нелинейный оператор, линеаризация которого может быть осуществлена построением дифференциала Фреше в соответствии с методом последовательных возмущений параметров. Результирующее линеаризованное дифференциальное уравнение в частных производных связывает приращение функции прогиба срединной плоскости пластинки с приращениями функций распределения поперечной нагрузки, температуры и времени. Наличие в правой части уравнения приращений нескольких ведущих параметров позволяет путем численного эксперимента исследовать различные программы нагружения-нагревания пластинки в пределах определенного интервала времени. Порядок решаемой задачи может быть понижен путем использования метода Власова-Канторовича в обобщенном варианте. В результате исходное уравнение в частных производных заменяется системой обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами, решение которой может быть сведено к последовательному решению серии линеаризованных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Численное решение таких задач осуществляется с использованием эффективной высокоточной методики, основанной на процедуре ортонормализации С. К. Годунова и модификации S. D. Conte. Построенный алгоритм легко автоматизируется в виде комплекса соответствующих стандартных программ и иллюстрируется примерами расчета пластинок с различными условиями опирания по контуру.

Проблема развивающего обучения
на уроках математики
Серикова И.В. (г. Воронеж)

В связи со структурой управления с 1994 года я работаю в 5-х - 7-х классах гимназии № 9, осуществляя преемственность системы развивающего обучения Л.В. Занкова между начальной школой и средним звеном.

В плане развивающего обучения большая роль отводится умению решать текстовые задачи.

Начиная работу в 5-х классах после выпуска 11-х, я столкнулась с тем, что многие учащиеся испытывают затруднения при решении задач. Это побудило меня обратиться к методике обучения решению задач в курсе 5-6 классов, их систематизации и классификации. Обобщение опыта появилось в брошюре «Задачи в курсе математики 5 класса» в разделе «Натуральные числа». Работа состоит из специально подобранной системы задач.

Классификация задач выполнена по типам:

1. Задачи на сумму и отношение 2.Задачи на разность и отношение
3.Задачи на сумму и разность 4.Задачи на движение в одном направлении
5.Задачи на движение навстречу друг другу 6.Составные задачи.

Идея состоит в том, чтобы отобрать определенный минимум задач, овладев методами решения которых, каждый ученик будет в состоянии решить любую задачу на уровне программных требований, а ученики с хорошими математическими способностями смогут решать задачи повышенной трудности. При решении задач разумно сочетать алгебраические способы решения с арифметическими, предпочтение отдавая последним, поскольку именно они важны в развивающем обучении.

Работа по каждому типу задач начинается с установления алгоритма решения и его усвоения. Это формирует алгоритмическую культуру учащихся, облегчает их обучение, а также имеет значение в плане личного опыта ученика, необходимого при поиске решения нестандартных задач. В работе стараюсь указать способы распознавания типов задач, что облегчает их решение выбором соответствующего алгоритма. И в этом важную роль играет анализ задачи, который начинается с записи условия в виде обычной схемы, таблицы, графической иллюстрации.

Решение однотипных задач необходимо. Но базисные знания не должны быть сформированы только на уровне алгоритмов. Поэтому в однотипную систему задач по новой теме с первого момента ее изучения включаю задачи из предыдущих разделов на «продвинутом» уровне.

Проработав в 5 классе по предлагаемой методике, я увидела, что подобные задачи не вызывают затруднения у большинства учащихся в темах «Обыкновенные и десятичные дроби».

В учебнике под редакцией Дорофеева появилась тема «Делимость чисел», которую мне захотелось расширить дополнительным материалом и классифицировать упражнения по уровням восприятия. Все материалы опубликованы в брошюре «Делимость чисел», изданной ВОИПКРО.

Нельзя не согласиться с высказыванием Д. Пойа: «Первое правило - нужно владеть материалом программы. Второе - нужно знать несколько больше, чем объем программы». Учитывая актуальность сказанного при подготовке учащихся для поступления в математический класс, а также анализируя программный материал по математике 8-11 классов, где решение систем уравнений проходит «красной нитью», я пришла к целесообразности рассмотреть в публикации «Решение систем линейных уравнений в 7 классе», где в отличие от традиционного плана изучения этой темы предлагается начать ее изучение в начале курса алгебры 7 класса в теме «Линейная функция», что несомненно дает ряд преимуществ: хорошо отработать навыки решения систем, больше времени уделить решению задач, углубить изучение темы в конце года, эффективнее организовать итоговое повторение.

Раннее обучение геометрии.

г. Борисоглебск. Соловьева Е.А., сш №10,

Если спросить семиклассников: “Какой самый нелюбимый предмет?”, то большинство из них ответят – геометрия. Да, и знания по этому предмету находятся на недопустимо низком уровне. Это показывают и результаты вступительных экзаменов. К 12-13 годам, когда ученик приступает к изучению геометрии, его непосредственный интерес к геометрии уже угасает. А школьный учебник возбудить интерес к геометрии не в состоянии. В таком же затруднении находятся и учащиеся 10 класса, начиная изучать планиметрию. Разъединённость планиметрии и стереометрии – вредная для дела особенность курса, т. к. у учащихся подавляется пространственное воображение. А дети уже от рождения обладают генетическими способностями ориентироваться именно в трёхмерном пространстве. Среди множества причин нелюбви к этому предмету выделено две наиболее существенные.

ПЕРВАЯ: непонимание геометрии учащимися из-за недостаточного количества времени, отводимого на её изучение; учащиеся ещё не успевают углубиться в одну тему, закрепить теоретический материал задачами, как надо изучать новую.

ВТОРАЯ: раздельное изучение планиметрии и стереометрии, это приводит к тому, что у учащихся к 10-му классу слабо развито пространственное воображение (особенно вызывают затруднения задачи на сечения и комбинацию геометрических тел).

Отсюда возникает вопрос: зачем учить геометрию? Какие цели преследует геометрическое образование? Обратимся к открытию, которое было сделано в физиологии. Согласно этому открытию – наш мозг не случайно разделён на две половины. Одна из них ответственна как бы за "гармонию", а другая за "алгебру", одна ведёт интуицией, воображением, восприятием формы и цвета, словом, всем поэтическим, а другая отвечает за логику, за трезвый анализ, порядок и сухой расчет.

Поэтому главная цель математического образования видится мне в развитии тех самых двух полушарий головного мозга. А также, как каждому разумному человеку должна быть понятна роль физкультуры для здоровья и для гармоничного развития тела, всеми нами должна быть осознана особая роль тренировки и гармоничного развития наших мыслительных способностей, нашего мозга. А ведь геометрия – это не только раздел математики, это, прежде всего феномен общечеловеческой культуры, являющийся носителем собственного метода познания мира. Геометрическое мышление в своей основе является разновидностью образного, чувствительного мышления, что функционально присуще правому полушарию головного мозга; по мере развития геометрического мышления происходит возрастание логической составляющей и соответственно роли левого полушария. Отсюда важность геометрии в непосредственно физиологическом смысле, и особенно для детей в возрасте 8-12 лет с доминирующим развитием правого полушария. Положение геометрии по сравнению с другими школьными предметами уникально: ни один предмет учащиеся начальной школы так не готовы воспринимать, как геометрию, и в то же время ни один предмет не начинают изучать с таким запозданием, как геометрию.

Хорошо известно, какой огромный путь в своем развитии проходит ребёнок в первые 7 лет своей жизни. Геометрический опыт ребёнка обширен. Ему доставляет огромное удовольствие заняться геометрическими играми, упражнениями. Но вот ребёнок поступает в школу и геометрическая активность, вместо того, чтобы быть воспринятой и направленной в учебное русло, фактически угасает.

В учебниках 1-3 классов по математике, если говорить о геометрии, не учитывается ни умственное развитие ребёнка, ни его возрастные особенности. На кого, например, рассчитана программа, требующая, чтобы ученики после 3 класса умели распознавать простейшие фигуры: квадрат и прямоугольник, круг и окружность, куб и шар. Ведь в школу приходят не Маугли, выросшие среди дикой природы ив жизни не видевшие прямоугольника, куба, шара.

И ещё хочется сказать об эстетическом значении геометрии. Любой человек достоин того, чтобы он с раннего детства научился ценить материальные и духовные достижения человечества, чтобы сердце его радостно трепетало "перед созданьями искусств и вдохновенья". Умение ценить интеллектуальные "созданья" также должно быть присуще любому человеку. Вряд ли какой-то из школьных предметов подходит для этого лучше, чем геометрия. Где ещё можно поставить перед человеком, лишь начинающим учиться мыслить, задачу, которая была бы доступна его пониманию, и решение которой требовало бы немалых интеллектуальных затрат? А сколько их в геометрии! Высоты в треугольнике пересекаются в одной точке (Евклид), точка пересечения высот, медиан и центр описанного круга лежат на одной прямой (Эйлер) и т. д. – вот примеры задач, в которых истина сокрыта под таинственным покровом, но каждый может приоткрыть его собственным разумом и тем самым как бы сравниться с людьми, столь много принесшими науке.

И ещё, человек, рождаясь, не знает ничего о своих возможностях. А эти возможности, как правило, исключительно велики. Особенно в области интеллекта. Раскрыть перед человеком его возможности в области интеллекта – одна из важнейших задач именно геометрии, что для активной работы в ней важны обе половины головного мозга, и это делает шанс получить творческое удовлетворение человеку любой интеллектуальной ориентации. Задача преподавания геометрии – развить у учащихся три качества: пространственное воображение, практическое понимание, логическое мышление. Я мыслю себе геометрическое образование в три этапа.

1 ЭТАП- (2-3кл.) - "Наглядная геометрия"- геометрия без доказательств: излагаются сведения обо всех фигурах, изучаемых в школьной геометрии, приводятся формулы без строгих доказательств. Это пропедевтика всего курса геометрии. Оно ориентировано на развитие той половины нашего мозга, которая заведует воображением, образами, картинками. Нужно вовлечь детей в конструирование и рисование знакомых геометрических фигур, в эмпирическое получение различных их свойств, научить определять рассмотренные фигуры. Занятиям нужно придать характер игры. Ученики могут овладеть программой "Наглядная геометрия" играючи, подражая учителю, по принципу "Ноу хау"(делай так), т. е. без "теоретизирования", без разучивания правил и определений, которые придут чуть позже. Попутно, и как бы играя, можно забраться очень высоко, почти на самые вершины. Например, если речь идет о равнобедренном треугольнике, почему бы не рассказать о Древней Греции, об анатолийском береге Средиземного моря, о храме Аполлона в Дельфах, в котором было высечено "Познай самого себя". А дальше стоит воспроизвести наглядное доказательство равенства углов равнобедренного треугольника. Но интерес состоит ещё и в том, что это рассуждение принадлежит Люису Кэроллу, автору знаменитой "Алисы", замечательному писателю, а по профессии – учителю математики. Мне кажется, что это останется надолго.

2 ЭТАП – (5-8кл.) - "Планиметрия". В эту пору начинается "систематический" курс геометрии. Здесь хочется привести слова профессора Московского университета В. М. Тихомирова: "Систематичность курса не очень легко оправдать ни практической целесообразностью, ни психологическими, ни социальными причинами. Зачем всем нужен именно систематический, а не описательный курс, насыщенный живыми картинками, многочисленными упражнениями и задачами?"

Теперь уже надо развивать не только "вообразительную", а и логическую долю его мозга. Но делать это надо не только на плоскости, но и в пространстве.

3 ЭТАП – (9-11кл.) – систематический курс "Стереометрия". Такая программа даёт время для рассмотрения дополнительных вопросов, а также решения задач олимпиадного характера и высвобождает время для подготовки учащихся в Вузы.

Признаки продуктивности нелинейной модели Леонтьева.

Стеценко В.Я., Денисенко Т.И.
Ставропольский государственный университет, г. Ставрополь

В случае нелинейной зависимости затрат $F(\bar{x})$ от выпуска $\bar{x}$ в модели межотраслевого баланса, возникает нелинейное уравнение межотраслевого баланса

$$x = F(x) + c \qquad (1)$$

Здесь x - неизвестный элемент из R^n, c- известный элемент R^n. Относительно оператора $F(x)$ в модели (1) естественными являются следующие свойства:

1^0, положительности: $F(x) \geq \Theta$ при $x \geq \Theta$,

2^0, монотонности: из $x \leq y$ вытекает $F(x) \leq F(y)$;

3^0, вогнутости: $F(x) \leq F(y) + F'(y)(x-y)$.

Здесь знак $\leq$ обозначает отношение полуупорядоченности, установление R^n с помощью конуса K неотрицательных векторов из R^n. Рассматриваются так же уравнения с выпуклыми операторами, а так же разрывными операторами.

Модель (1) является естественным развитием линейной модели Леонтьева межотраслевого баланса.

Для модели (1) естественны постановки следующих задач: 1) для каких векторов $c \geq \Theta$ модель (1) имеет положительные решения $x^* = x^*(c)$; 2) при наших условиях это решение единственное для данного c; 3) представляют большой интерес алгоритмы построения приближений к решению x^0 этого уравнения.

Заметим, что и задаче (1) при столь разных предположениях относительно свойств $F(x)$ сводятся модель Леонтьева (Л), Леонтьева-Форда (Л.Ф.), модель Л.Ф., учитывающая вредное воздействие производства на окружающую среду, модель Л.Ф. предусматривающая возможности утилизации (переработки) вредных отходов.

В докладе для всех этих моделей получены теоремы существования и единственности решения, указаны двусторонние оценки решения, а также рассматриваются приближенные решения уравнения (1).

Изучаются три типа алгоритмов:

1^0. $x_{m+1} = F(x_m) + c$;

2^0. $z_{m+1} = F(z_m) + c + F'(z_0(z_{m+1} - z_m))$ (модифицированный метод Ньютона);

3^0. $w_{m+1} = F(w_m) + c + F'(w_m)(w_{m+1} - w_m)$ (метод Ньютона-Канторовича).

Особое внимание уделяется при этом выбору начальных приближений, приводящих к монотонным приближениям к решению. Наличие монотонных приближений облегчает как доказательство их сходимости к решению, так и получение оценок решения.

Результаты доклада существенно опираются на результаты одного из авторов доклада по оценкам спектральных радиусов линейных операторов и теорию неразложимых операторов.

Приведем один из типичных результатов доклада.

Пусть оператор $F(x)$ положительный монотонный вогнутый и дважды дифференцируемый оператор. Пусть $F(x)$ является неразложимым оператором. Наконец, для некоторого вектора $u_0>0$ выполняется неравенство

$$F(u_0)+c \le u_0$$

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение, а алгоритм 3° реализуем на каждом шаге и приводит к монотонной последовательности w_n, для которой

$$\|w_{n+1} - w_n\| \le c \cdot \|w_n - w_{n-1}\|^2$$

где c - постоянное.

Тем самым метод Ньютона-Канторовича обладает квадратичной сходимостью.

Томчук А.Г. СШ № 95, Воронеж

Использование программированного обучения

Для повышения интереса у учащихся при изучении математики можно использовать особого вида самостоятельные работы, проведение которых в школе является реальным шагом в направлении использования программированного обучения. Назовем такие работы обучающими.

Каковы же особенности предлагаемых самостоятельных обучающих работ?

1. Обучающие самостоятельные работы проводятся по новому, не изученному учащимися материалу. Работа начинается с объяснительного текста, который ученик должен самостоятельно изучить. Это изучение предполагает активную работу мысли ученика. С этой целью Объяснительный текст составляется таким образом, чтобы учащийся в меру возможностей самостоятельно выводил формулы, доказывал теоремы, находил нужный прием решения задач определенного вида. Этот текст предполагает элементы самостоятельного исследования: понимание проблемной ситуации, постановку учебной задачи, правдоподобные выводы, обоснование или опровержение их. Именно эти компоненты учебной работы особенно ценны, так как они формируют самостоятельность учащегося и ускоряют его математическое развитие.
2. После объяснительного текста в задании дается «нулевое» упражнение, которое предназначено для самоконтроля. К этому упражнению в задании даются ответы, и поэтому учащийся после выполнения его имеет возможность проверить свои ответы. Совпадение ответов будет свидетельствовать об усвоении объяснительного текста и послужит разрешением приступить к выполнению последующих основных упражнений (с 1 по 5), остальные – дополнительные. Если же между ответами ученика по этому упражнению и данными в задании будет расхождение, то ученику придется повторно прочитать объяснительный текст и снова выполнить «нулевое» упражнение, устранить допущенные ошибки. В этом случае возможно также обращение к соответствующим страницам учебника или за консультацией к учителю.
3. Составной частью задания является система усложняющихся упражнений, предназначенных для осознания учащимися изучаемого материала, более глубокого усвоения его, формирования необходимых понятий и выработки нужных навыков. По ходу выполнения упражнений в задании даются дополнительные разъяснения и указания. К наиболее трудным упражнениям в конце задания даются ответы. Предполагается, что к этим ответам учащиеся будут обращаться для сопоставления с ними своих ответов лишь после того, как выполнят соответствующие упражнения.
4. Объем обучающих самостоятельных работ может быть различным. Большей частью Их следует давать на 25-30 минут. По одному и тому же материалу целесообразно составлять несколько вариантов. Объяснительный текст заданий и «нулевое» управление могут оставаться без изменений, основные же упражнения следует варьировать.

Рассмотрим основные вопросы методики проведения обучающих самостоятельных работ.

Каждой обучающей самостоятельной работе должна предшествовать
36 подготовка. Основное содержание ее – повторение ранее изученных понятий,
336 правил, теорем, которыми придется воспользоваться при выполнении работы.

Это может быть сделано в ходе беседы . и выполнения специально подобранных упражнений.

Заключительной частью подготовки учащихся к предстоящей обучающей самостоятельной работе является инструктаж по ее выполнению. Он должен содержать четкие указания о порядке выполнения задания, о необходимых записях по ходу выполнения, о правильном использовании данных в задании ответов.

После инструктажа учащиеся приступают к самостоятельному выполнению задания. Эта часть урока наиболее ответственна. Чтобы она прошла успешно, нужно хорошо продумать и правильно решить относящиеся к ней методические задачи.

Первая из этих задач – **задача индивидуализации** работы учащихся. Задание целесообразно подразделить на две части: обязательную и дополнительную. Обязательная часть – объяснительный текст, нулевое упражнение и несколько первых упражнений. Дополнительная часть – оставшаяся, более трудные вопросы и упражнения. Выполнение первой части задания обязательно для всех учащихся, вторая часть задания предназначена для учащихся, работающих более быстрыми темпами, чем основной состав класса. Индивидуализации работы учащихся способствует также то, что один из вариантов задания может быть более трудным, чем другие. Он дается учащимся, хорошо успевающим по математике.

Вторая задача – **повышение интенсивности** учебной работы учащихся и эффективное использование учебного времени. Каждый учащийся выполняет предложенное задание в своем темпе, но это совсем не означает, что темп работы ученика будет оставаться неизменным. По мере приобретения опыта выполнения подобных работ учащийся будет работать быстрее. Существенным является ведение учащимися записей по ходу выполнения задания. Общие рекомендации здесь могут быть такими:

Обучающие самостоятельные работы целесообразнее выполнять в особых тетрадях, не следует переписывать здания, достаточно ставить номера и буквенные индексы вариантов и упражнений. Все то, что учащийся может сделать устно, записывать не нужно, вспомогательные записи (преобразования и вычисления) должны быть краткими. Для многих упражнений ученик будет записывать только ответ в рекомендованной учителем краткой форме, без многословных словесных пояснений. Если выполнение упражнения связано с использованием чертежа (рисунка, графика), данного в задании, и нет надобности во вспомогательных построениях, то восстанавливать в тетрадях такой чертеж не следует.

Третья задача – **задача умелого оказания помощи** учащимся в ходе выполнения работы. Время выполнения задания учитель с большой эффективностью использует для индивидуальной работы с учащимися. Он ведет наблюдения за ходом работы с учащимися. Он ведет наблюдения за ходом работы и консультирует отдельных учащихся по выполнению упражнений. Более слабым учащимся он может задавать вопросы с целью проверки понимания смысла задания и степени осознанности выполнения упражнений. Если трудности, с которыми сталкиваются учащиеся, связаны с недостаточным усвоением ранее изученного материала, то учитель может помочь ученику вспомнить то, что требуется, или предложить ему обратиться к соответствующим страницам учебника. Как видим, этот этап урока открывает перед учителем большие возможности для индивидуальной работы с учащимися, что особенно ценно.

После истечения выделенного для выполнения работы времени тетради собираются. Проверяет эти тетради учитель дома. Неудовлетворительных оценок за подобные работы ставить не следует, но поощрительные оценки желательны.

Заключительная часть проведения обучающей самостоятельной работы – доработка по теме и подведение итогов. Проводится решение задач, аналогичных тем, которые были включены в самостоятельную работу (более сложных). В ходе решения учитель проверяет правильность понимания учащимися изученного вопроса, уточняются формулировки, разъясняются допущенные учащимися ошибки им выполняются необходимые обобщения.

Итоги работы подводятся на основе проведенных учителем наблюдений за выполнением работы учащимися. Если учащийся недостаточно усвоил материал проведенной самостоятельной работы, то ему на дом может быть дан другой вариант той же работы. Если ученик пропустил урок, на котором выполнялась самостоятельная работа, он на следующем уроке получит для домашнего выполнения один из ее вариантов.

Именной указатель