СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы

27 января — 4 февраля 2001 г.

2001

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ РАН им. В.А.СТЕКЛОВА

Воронежская зимняя математическая школа

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Тезисы докладов

27 января — 4 февраля 2001 г.

Воронеж — 2001

УДК 517.53, 517.97, 517.98

Современные методы теории функций и смежные прблемы. Тезисы докладов. — Воронеж, ВГУ, 2001, — 300 с.

В сборнике представлены тезисы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской зимней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Математическим институтом РАН им. В.А.Стеклова и Московским госуниверситетом.

Тематика охватывает широкий спектр проблем теории функций (действительный и комплексный анализ, тригонометрические и ортогональные полиномы и ряды, аппроксимация функций действительного и комплексного переменного полиномами, граничные свойства аналитических функций, приближение в функциональных пространствах), оптимального управления, теории игр, качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, преподавания математики в средних и высших учебных заведениях.

Оргкомитет:

Ульянов П.Л. (председатель), Сидоркин А.С. (сопредседатель), Костин В.А. (зам. председателя), Покорный Ю.В. (зам. председателя), Провоторов В.В. (ученый секретарь), Голубов Б.И., Звягин В.Г., Кашин Б.С., Коробейник Ю.Ф., Никольский С.М., Овчинников В.И., Сапронов Ю.И., Семенов Е.М., Седлецкий А.М., Субботин Ю.Н., Хромов А.П., Боровских А.В. (ученый секретарь).

Оргкомитет благодарит за поддержку Российский фонд фундаментальных иследований

ISBN (5-7458-0724-5)

О НЕКОТОРЫХ ГЛАДКОСТНЫХ СВОЙСТВАХ ДВУКРАТНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА

Абдуллаев Ф.А (Баку, Азербайджан)

E-mail: guliev@azdata.net

Через $C_{[-\pi,\pi]^2}$ обозначим пространство непрерывных на $[-\pi,\pi]^2 = [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ функций, 2π–периодических по каждой из переменных, с нормой $\|f\|_C = \max\limits_{(x,y)\in[-\pi,\pi]^2} |f(x,y)|$. Введем следующие обозначения: $\Delta_h^{r,0} f(x,y) = exp(\pi ri) \sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j^{-r-1} f(x+jh,y)$ – разность порядка $r > 0$ по первому аргументу; $\Delta_h^{0,\rho} f(x,y) = exp(\pi\rho i) \sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j^{-\rho-1} f(x,y+jh)$ – разность порядка $\rho > 0$ по второму аргументу; $\Delta_{h_1,h_2}^{r,\rho} f(x,y) = exp(\pi(r+\rho)i) \sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty} A_j^{-r-1} A_m^{-\rho-1} f(x+jh_1, y+mh_2)$–смешанная разность порядка $r > 0$ и $\rho > 0$ соответственно, $A_n^{\alpha} = (\alpha+1)\cdots(\alpha+n)/n!$.

Далее, пусть $\omega_{r,\rho}(f;\delta,r) = \sup\limits_{|h_1|\le\delta,|h_2|\le\eta} \left\|\Delta_{h_1,h_2}^{r,\rho} f(x,y)\right\|_C$, $\delta,\eta \in (0,\pi]$;

$$\omega_{r,0}(f;\delta) = \sup_{|h|\le\delta} \left\|\Delta_h^{r,0} f(x,y)\right\|_C,$$

$$\omega_{0,\rho}(f;\eta) = \sup_{|h|\le\eta} \left\|\Delta_h^{0,\rho} f(x,y)\right\|_C, \ \delta,\eta \in (0,\pi].$$

Теорема *Пусть $f \in C_{[-\pi,\pi]^2}$. Тогда для любых $r > 0$, $r_1 \ge 1$, $\rho > 0$, $0 < \delta \le \frac{\pi}{r}$ и $0 < \eta \le \pi$ справедливо неравенство*

$$\omega_{r_1,\rho}(f;\delta,\eta) \le C\cdot\delta^{r_1} \left(\int\limits_{\delta}^{\pi/2} \frac{\omega_{r+1,\rho}(f;t,\eta)}{t^{r_1+1}} dt + \omega_{0,\rho}(f;\eta) \right).$$

Через $\Phi[0,\pi]$ обозначим класс функций $\varphi(t)$, определенных на $[0,\pi]$ и обладающих свойствами: $\varphi \in C_{[0,\pi]}$, $\varphi(t) \ge 0$, $\varphi(t)\uparrow$ $(t\uparrow)$, $\varphi(0) = 0$; и $\Phi^s[0,\pi] = \{\varphi\in\Phi[0,\pi] \mid 0 < t_1 < t_2 \le \pi \Rightarrow t_1^s\varphi(t_2) \le C_\varphi t_2^s \varphi(t_1)\}, s > 0$.

Пусть $\Phi^{r,\rho}[0,\pi]^2$–множество функций $\varphi(\delta,\eta)$, принадлежащих $\Phi^r[0,\pi]$ по первому и $\Phi^\rho[0,\pi]$ по второму аргументу. Для $\varphi \in \Phi^{r,\rho}[0,\pi]^2$ введем пространство функций $f \in C_{[-\pi,\pi]^2}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{H_\varphi^{r,\rho}} = \max\left\{\|f\|_C, \sup_{\delta,\eta\in(0,\pi]} \frac{\omega_{r,\rho}(f;\delta,\eta)}{\varphi(\delta,\eta)},\right.$$

$$\left.\sup_{\delta\in(0,\pi]} \frac{\omega_{r,0}(f;\delta)}{\varphi(\delta,\pi)}, \sup_{\tau\in(0,\pi]} \frac{\omega_{0,\rho}(f;\eta)}{\varphi(\pi,\eta)}\right\}$$

Найдены достаточные условия на φ, при которых двукратный сингулярный интегральный оператор

$$(Sf)(x,y) \equiv \widetilde{f}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s,t) ctg\frac{s-x}{2} ctg\frac{t-y}{2} dsdt$$

действует из $H_\varphi^{r,\rho}$ в $H_\varphi^{r,\rho}$ и ограничен.

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Абдурагимов Г.Э., Рамазанова А.М. (Махачкала)

Рассматривается краевая задача

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) + f(t,(Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x(0) + \alpha_{12}x(1) + \beta_{11}x'(0) + \beta_{12}x'(1) = 0, \\ \alpha_{21}x(0) + \alpha_{22}x(1) + \beta_{21}x'(0) + \beta_{22}x'(1) = 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

где α_{ij}, β_{ij} $(i,j=1,2)$, a_1 и a_2 — действительные числа, $T : C \to L_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ $(t \in [0,1], -\infty < u < \infty)$ положительна в полосе $(0,1) \times (0,\infty)$ и удовлетворяет условию Каратеодори, причем $f(\cdot,0) \equiv 0$.

Обозначим через $\tilde{K}$ — конус неотрицательных функций $x(t)$ пространства C, удовлетворяющих условию

$$\min_{t\in[0,1]} x(t) \geq \frac{m}{M} \max_{t\in[0,1]} x(t) = \frac{m}{M}\|x\|, \tag{3}$$

где постоянные m и M представляют собой соответственно нижние и верхние оценки функции Грина оператора $-\frac{d^2}{dt^2} - a_1\frac{d}{dt} - a_2$ с краевыми условиями (2).

Получены достаточные условия существования и единственности положительного решения краевой задачи (1)–(2), доказанные в следующих теоремах:

Теорема 1. Предположим, что $T : C \to L_p$ положительный (монотонный) на конусе $\tilde{K}$ оператор и выполняется условие

$$a(t)u^{p/q} \leq f(t,u) \leq bu^{p/q}, \quad t \in [0,1], \ u \geq 0, \ p \neq q,$$

где $a(t)$ — неотрицательная ($a(t) \neq 0$) суммируемая на отрезке $[0,1]$ функция, b — некоторое положительное число.

Тогда краевая задача (1)–(2) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Теорема 2. Предположим, что для краевой задачи (1)–(2) выполнены условия теоремы 1. Кроме того, пусть:

0) $f(t,\tau u) \leq \tau^{p/q} f(t,u)$, $t \in [0,1]$, $u \geq 0$, $\tau \in (0,1)$;

1) $r(t)u^{p/q-1} \leq f'_u(t,u) \leq \gamma u^{p/q-1}$ $(0 \leq t \leq 1,\ u \geq 0)$, где $r(t)$ — положительная, измеримая и
ограниченная функция, $\gamma > 0$, $p/q > 1$;

2) $\sigma \leq (T1)(t) \leq \delta$, $t \in [0,1]$, где σ, δ — действительные положительные числа;

3) $\bar{a}_2 - \bar{a}_1 < \frac{1}{c}$, где $\bar{a}_2 = \delta^{p/q-1}\left(bc^{p/q}\right)^{-1}\gamma$,

$$\bar{a}_1 = \sigma^{p/q-1}\frac{M^{p/q}}{m^{p/q}\int\limits_0^1 a(s)(T1)^{p/q}(s)ds}\min_{t\in[0,1]} r(t),$$

$c = \|T\|_{L_p}$.

Тогда краевая задача (1)–(2) имеет единственное положительное решение.

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖММОСТИ В ЗАДАЧЕ ДИФФУЗИИ ИННОВАЦИЙ

Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н. (Москва) [1]

asn@cs.msu.su, kiselev@cs.msu.su

Рассматривается задача диффузии инноваций [1], имеющая форму задачи оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x} & = & u(x + g_1 e^{\nu_1 t}), \quad x(0) = x_0, \quad 0 \le u < L, \\ J(u) & = & \int_0^T e^{-\nu_2 t}(\ln x + g_2 \ln(L - u))\, dt \to \max_{u(\cdot)}. \end{cases}$$

Фазовая переменная x характеризует уровень развития технологий в отдельном субъекте исследования, а слагаемое $g_1 e^{\nu_1 t}$ описывает динамику роста мирового уровня(лидера), умноженную на коэффициент абсорбции, управление u имеет смысл уровня финансирования. Функционал L описывает “полезность” процесса. Задача с бесконечным горизонтом ($T = +\infty$) поставлена Хутченрайтером(G.Hutschenreiter, Austria). В связи с этой задачей изучается управляемая система с конечным горизонтом

$$\begin{cases} \dot{x} & = & (L - v)(x + g_1 e^{\nu_1 t}), & x(0) = x_0, & 0 < l \le v \le L, \\ \dot{y} & = & e^{-\nu_2 t}(\ln x + g_2 \ln v)\, dt, & y(0) = 0, & 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Построение множеств достижимости является сложной вычислительной задачей. На основе принципа максимума Понтрягина разработаны новые алгоритмы построения множеств достижимости. Изучена структура оптимального решения. Установлено, что множества достижимости могут быть невыпуклыми. Показано, что оптимальное управление непрерывно. Типичный вид оптимальной программы — промежуток планирования разбивается на три части: на начальном участке u принимает максимальное допустимое значение, после чего начинается участок постепенного уменьшения управления до нулевого значения на третьем заключительном этапе. Наихудшая программа — нулевое значение управления на начальном участке времени со скачком на максимальное допустимое значение в заключительной фазе.

---

[1]Работа поддержана грантами УР-ФИ, РФФИ 00-01-00222, 9901051 и Программой ПВНШ-961596116

Для набора параметров $x_0 = 1$, $L = 0.2$, $l = 0.1$, $g_1 = 1$, $g_2 = 1.5$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.05$ на Рис.1 показаны множества достижимости в различные моменты времени. Рис.2 содержит пример невыпуклого множества достижимости. Расчеты выполнены с привлечением программы **Maple**.

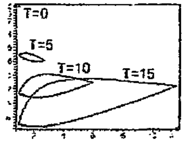


Рис.1. Динамика множества достижимости

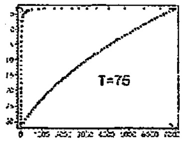


Рис.2. Невыпуклое множество достижимости

Литература

1. S.M.Aseev, S.N.Avvakumov. On class of dynamical models describing the diffusion type economic processes: attainability domains and their numerical simulations. IIASA — TIT Technical meeting Mathematical Models of Techno-economic Processes — Innovation Dynamics and Institutional Elasticity. Sept. 2000, IIASA, Laxenburg, Austria

ИНТЕГРАЛЬНО-ЛАГРАНЖЕВО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Агаханов С.А., Рагимханова Г.С., Агаханова Б.С.
(Махачкала)

$P_n(x) = \mu_n x^n + \cdots + \mu_0$, $\mu_n > 0$, ортонормированны на (a, b) по весу $p(x)$. $a < x_1 < \cdots < x_m < b$, x_i могут совпадать с конечными концами. Для $f(x) \in L_1((a, b), p(x))$ составим ряд Фурье

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) P_k(x), \quad c_k(f) = \int_a^b p(t) f(t) P_k(t) dt$$

$$S_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f) P_k(x), \Delta_n(x, f) = f(x) - S_n(x, f),$$

$$M^p_{\nu+1}(f) = \int_a^b p(t)f(t)t^\nu\,dt.$$

Поставим задачу: построить многочлен относительно x степени $n + m(r+1)$

$$\mathcal{P}_{n+m(r+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x) + \sum_{k=1}^{m(r+1)} a_k P_{n+k}(x),$$

удовлетворяющий условиям

$$M^p_{\nu+1}(\mathcal{P}_{n+m(r+1)}) = M^p_{\nu+1}(f), \quad 0 \le \nu \le n \qquad (1)$$

$$\mathcal{P}^{(i)}_{n+m(r+1)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad 1 \le j \le m, \quad 0 \le i \le r \qquad (2)$$

Пусть $a^j_i = (P^{(i)}_{n+1}(x_j), ..., P^{(i)}_{n+m(r+1)}(x_j))$, $a^j_i \in R^{m(r+1)}$. $\Delta_{m(r+1)}$ — определитель, у которого в строках с номерами $1, r+1, (m-1)(r+1)+1, m(r+1)$ стоят координаты векторов $a^1_0, a^1_r, a^m_0, a^m_r$. $\Delta_{m(r+1)+1}(x)$ - определитель, получаемый из $\Delta_{m(r+1)}$ добавлением первой строки $\Delta_n(x,f), P_{n+1}(x), ..., P_{n+m(r+1)}(x)$ и первого столбца $\Delta_n(x,f)$, $\Delta_n(x_1,f), ..., \Delta^{(r)}_n(x_1,f)$, ..., $\Delta_n(x_m,f), ..., \Delta^{(r)}_n(x_m,f)$. Справедливы

Теорема 1. *При $c_k = c_k(f)$ и любых $a_k \mathcal{P}_{n+m(r+1)}(x)$ удовлетворяет (1).*

Теорема 2. *При $\Delta_{m(r+1)} \ne 0$ будет $f(x) - \mathcal{P}_{n+m(r+1)}(x) = \Delta_{m(r+1)+1}(x)$.*

Пример. $P_n(x) = L_n(x,\alpha)$ *- многочлены Лагерра.* $m = 1$, $r = 0$, $x_1 = 0$, $\Delta_1 = L_{n+1}(0) \ne 0$.

$$f(x) - \mathcal{P}_{n+1}(x) = \Delta_n(x,f) - \Delta_n(0,f)L_{n+1}(x,\alpha)[L_{n+1}(0,\alpha)]^{-1}.$$

Литература

1. Канторович Л.В. и Крылов В.И. Матем. в СССР за 30 лет, ГИТТЛ, М.-Л., 1948 г..

2. Власов В.Г. Интегральное интерполирование и некоторые его приложения, М.-Л., Военмориздат, 1946 г..

3. Агаханова Б.С. Межд. симп., " Ряды Фурье ...", с. 47, Ростов-на-Дону, 1999 г..

СРЕДНИЕ ПРОГИБЫ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Алтунин П.С., Качалов Ж.В. (Воронеж)

Следуя идеям З. Мруза [1] исследуется средние прогибы круглых жестко - пластических пластин, подчиняющихся условию пластичности Треска и ассоциированному с ним закону течения. Пластина нагружена кольцевой равномерно распределённой нагрузкой безразмерной интенсивности P и не допускает радиального смещения. Геометрическая нелинейность вводится с помощью обычных допущений для пластин среднего прогиба. Процедура оптимизации структурного расчета включает формулировку целевой функции и систему ограничений.

В дальнейшем, для нахождения результирующих усилий и моментов, используется гиперповерхность текучести [2], уравнения равновесия, граничные условия и условия непрерывности для искомых величин. Определяем напряженные состояния в различных областях пластины.

В итоге вычислений переходим к уравнениям Абеля и если оно имеет решение, то это значит, что решение для пластин при малых прогибах и при средних прогибах совпадают. Это говорит о том, что случайное увеличение нагрузок вызывающих средние прогибы, не являются причиной неустойчивого поведения оптимально спроектированной структуры при малых прогибах.

Литература: 1.Z. Mroz, A. Gawecki Post-Yield Behavior of optimal plastic structures. UTAM SYMPOSIUM WARSAW/ Poland .1973г. 518-540.

2. Z. Mroz., Bing-ye, Xu: The Load Carring Capacities of Symmetrical Loaded Spherical Shell. Arch. Mech. Stos. 15, 245-266 (1963г.)

О РАЗЛОЖЕНИИ НЕИСЧЕРПЫВАЕМЫХ МЕР В СМЫСЛЕ ЛЕБЕГА

Алякин В. А. (Самара)
E-mail: aval@ssu.samara.ru

Пусть $(R, +, \cdot, \wedge, \vee, 0)$ — булево кольцо. Множество $A \subset R$ называется *нормальным*, если для любых $x \in A$, $y \in R$, $y \leq x$ имеем $y \in A$.

Топология Γ в R называется *монотонной*, если $(R, +, \Gamma)$ является топологической группой и существует база окрестностей 0, состоящая из нормальных множеств.

Топологическую полугруппу $(X, +, 0)$ с равномерностью W будем называть *полуравномерной*, если операция сложения равномерно непрерывна в нуле.

Мерой будем называть такую функцию $\mu : R \to X$, что $\mu(0) = 0$ и μ аддитивна, т.е.

$$\mu(x \vee y) = \mu(x) + \mu(y)$$

для любых дизъюнктных $(x \wedge y = 0)$ элементов $x, y \in R$.

Мера $\mu : R \to X$ называется Γ-*непрерывной*, если отображение $\mu : R \to X$ непрерывно. Мера μ называется Γ-*сингулярной*, если для любого окружения $V \in W$ и любой окрестности $\gamma \in \Gamma(0)$ существует элемент $a \in \gamma$ такой, что $(\mu(x), 0) \in V$ для любого элемента $x \in R$, $x \wedge a = 0$.

Будем говорить, что мера μ Γ- *исчерпывающая*, если $\mu(x_n) \to 0$ для любой дизъюнктной последовательности $(a_n) \subset R$ такой, что $a_n \to 0$ в топологии Γ.

Теорема. *Пусть Γ — монотонная топология на булевом кольце R, $(X, +, 0, W)$ — отделимая полная полуравномерная полугруппа. Если Γ полуметризуема, то всякая Γ-исчерпывающая мера $\mu : R \to X$ единственным образом представима в виде*

$$\mu = \mu_1 + \mu_2,$$

где $\mu_1, \mu_2 : R \to X$ — Γ-исчерпывающие меры, мера μ_1 Γ-непрерывна, а мера μ_2 Γ-сингулярна.

О ЗАДАЧАХ-ЛОВУШКАХ В КОНКУРСНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Алякин В.А. (Самара)
E-mail: aval@ssu.samara.ru

Под задачами-ловушками мы будем понимать задачи по конкурсной математике с сильным и более или менее явным ложным следом, т.е. цепью внешне естественных, но ошибочных рассуждений или преобразований. Поскольку при решении конкурсных задач немаловажное значение имеет фактор времени, то к ложным следам отнесем также крайне нерациональные решения.

Таким образом, анализ ловушек означает, в нашем понимании, одновременный анализ ложных следов.

В работе предпринята попытка систематического анализа задач-ловушек и ложных следов:

1) Выделены простейшие ловушки в алгебре и геометрии.

2) Определены "типы" ложных следов, в частности, т.н. "мотивированные логические ошибки" и "тавтология", подчеркнуты особенности этих типов.

3) Показаны характерные особенности ловушек в разных разделах школьной математики.

4) Явно сформулированы некоторые парадоксальные эффекты в задачах-ловушках. В частности, обсуждаются задачи, в которых такие (правильно выполненные!) обычные операции как приведение подобных слагаемых и сокращение на неизвестную являются ошибкой. Далее, обсуждаются задачи, в которых незначительное изменение условий приводит к метаморфозам и динамике методов решения, а также простые задачи, которые после переформулировки превращаются в задачи-ловушки.

5) Более традиционной является часть работы, в которой изучаются некоторые общие методы решения, чаще всего применяемые при решении задач-ловушек.

Класс конкурсных задач-ловушек, очевидно, шире таких известных классов как "задачи повышенной трудности", "проблемные задачи", "нестандартные задачи" и, тем более, "олимпиадные задачи", поскольку задачей-ловушкой может быть и задача со стандартной формулировкой, решаемая стандартными методами.

ГЛОБАЛЬНОЕ СУЩЕСТВОВАНИЕ ЭКСПОНЕНТЫ БЕСКОНЕЧНОЙ КРАТНОСТИ С ЧЕРЕДУЮЩИМИСЯ ПОКАЗАТЕЛЯМИ РАЗНЫХ ЗНАКОВ

Амбарцумян Г. А. (Обнинск)

haik@iate.obninsk.ru

Рассмотрим вещественную экспоненту бесконечной кратности

$$v_\infty(t) = \alpha e^{\beta t e^{\alpha t e^{\cdots}}} \tag{1}$$

с чередующимися показателями $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

В работе [1] было показано, что при $\alpha \neq \beta$ экспонента (1) существует и является регулярной функцией при $t \in (-\frac{1}{e\overline{a}}, \frac{1}{e\overline{a}})$, где $\overline{a} = \overline{a}(\alpha, \beta) > 0$. Используя доказательство Теоремы 1 из работы [2] можно показать, что для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$ найдется такое $T \geq \frac{1}{e\overline{a}}$, что экспонента (1) существует при $t \in (-T, \frac{1}{e\overline{a}})$ и не существует при $t \in (-\infty, -T)$. Заметим, что случай отрицательных α и β сводится к предыдущему изменением знака переменной t. Таким образом, область существования экспоненты бесконечной кратности (1) при $\alpha\beta > 0$ ограничена.

В данном докладе доказывается, что при $\alpha\beta < 0$ экспонента бесконечной кратности (1) существует на неограниченной области и является непрерывно дифференцируемой ограниченной функцией.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Буробину А. В. за постановку задачи и обсуждение результатов.

Литература

[1] Буланов А. П. О степени бесконечной кратности с коэффициентами, имеющими поочередно два значения. Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 9-й Саратовской зимней школы.– Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1998, с. 31.

[2] Амбарцумян Г. А., Буробин А. В. О продолжении функций, представляемых экспонентами бесконечной кратности. Современные методы теории функций и смежные проблемы. Те-

зисы докладов Воронежской зимней математической школы. - Воронеж: ВГУ, 1999, с. 16.

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Андриянов Г.И. (Калуга)

Пусть D – односвязная ограниченная область с односвязным дополнением CD до $\overline{\mathbf{C}}_z$. $A(D)$ -пространство функций $f(z)$, регулярных в D, с топологией равномерной сходимости на компактах из D. $A_0(CD)$ – пространство функций $g(z)$, $g(\infty) = 0$, регулярных на CD, с топологией индуцированной топологией сопряженного пространства, которое может быть реализовано в виде $A(D)$.

Пусть имеются p, $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$ функций $W_j(z)$, которые голоморфны и однолистны в D и задаются p функций $A_j(z)$, $j = 0, 1, \ldots, p-1$, не имеющих нулей в D. Рассматривается задача: существует ли функция $g(z) \in A_0(CD)$, для которой имеют место равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_z} [W_j(z)]^{np+l_j} A_j(z) g(z)\, dz = a_{nj},$$

$j = 0, 1, \ldots, p-1$; $0 \leq l_j \leq p-1$; $l_j \in \mathbf{N} \cup 0$; $n = 0, 1, \ldots$.

Кроме того, спрашивается, как по числовой совокупности $\bigcup_{j=0}^{p-1} \{a_{nj}\}_{n=0}^{\infty}$ восстановить функцию $g(z)$ в (1)? Задачу поиска функции $g(z) \in A_0(CD)$ в (1) и условий допустимости для числовой совокупности $\bigcup_{j=0}^{p-1} \{a_{nj}\}_{n=0}^{\infty}$ назовем модифицированной проблемой моментов (М – проблемой моментов). М – проблема моментов содержит общую проблему моментов Ю.А. Казьмина в качестве частного случая.

Теорема. *Пусть D – любая односвязная ограниченная область с односвязным дополнением CD до $\mathbf{C_z}$, а числовая совокупность $\bigcup_{j=0}^{p-1} \{a_{nj}\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию*

$$g_j(w) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{nj}}{w^{np+l_j+1}} \in A_0(CG_j),$$

$j = 0, 1, \ldots, p-1$; $G_j = W_j(D)$.

Решение M – проблемы моментов (1) в пространстве $A_0(CD)$ существует тогда и только тогда, когда существует совокупность из p функций $\{f_j(w)\}_{j=0}^{p-1}$, обладающих свойствами

1. $f_j(w) \in A_0(CG_j)$, $f_j(w) \not\equiv 0$, $j = 0, 1, \ldots, p-1$.
2. $f_j(w)$ *не имеют степеней* $\frac{1}{w^{np+l_j+1}}$.
3. *Система функций* $\{f_j(w)\}_{j=0}^{p-1}$ *удовлетворяет условию:*

$$\{g_0(W_0(z)) + f_0(W_0(z))\}W_0'(z)A_j(z) -$$

$$-\{g_j(W_j(z)) + f_j(W_j(z))\}W_j'(z)A_0(z) \in A(D),$$

$j = 1, 2, \ldots, p-1$.

ФОРМИРОВАНИЕ НАВЫКОВ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ У СТАРШЕКЛАССНИКОВ

Арутюнян Г.В., Ванько В.И., Григорьян И.С.
(Москва)

На примере творческого сотрудничества московской гимназии № 1516 и Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана обсуждаются вопросы подготовки учащихся старшеклассников к самостоятельной научно-исследовательской работе.

НИР в гимназии базируется на сотрудничестве учащихся и учителей с кафедрами МГТУ. В начале учебного года учащимся предлагается список исследовательских тем, в качестве которых выбираются, например, задачи из журналов "Квант", "Математика в школе", "Физика в школе" и др. Выбрав тему, учащийся подбирает литературу, изучает историю вопроса и готовит предварительный отчёт. Очень важно, чтобы школьник смог самостоятельно сформулировать задачу исследования (для нас это - залог дальнейшей успешной работы с ним). Совет по научно-исследовательской работе гимназии, куда наряду с учителями входят и сотрудники университета, оценивает готовность учащегося к проведению исследовательской работы.

Взаимодействие с университетом осуществляется на проводимых два раза в месяц семинарах для школьников. На этих семинарах ребята отчитываются о проделанной работе и вместе с руководителями обсуждают возникшие проблемы.

Хорошей мотивацией исследовательской деятельности, кроме естественного стремления незаурядных школьников к самоутверждению в коллективе, является возможность -представить свою работу на ежегодный конкурс проектов - "Юниор", проводимы в гимназии, и выступить на Московской (либо Всероссийской) конференции "Шаг в будущее".

"Шаг в будущее" - это конференция для молодых исследователей (старшеклассники и студенты I курса) России, которая ежегодно, весною, проводится под эгидой МГТУ им. Баумана и МГУ им. М.В. Ломоносова. Здесь выступают молодые люди, в работах которых заметны элементы самостоятельности. Успешно выступившие учащиеся выпускных классов приказом ректора зачисляются в университет без конкурсных испытаний.

С точки зрения отборочной комиссии (преподаватели математических кафедр МГТУ и механико-математического факультета МГУ), которая рекомендует работы к участию в конференции, предпочтение отдаётся исследованиям, выполненным на основе школьной программы (может быть, с возможными расширениями).

В докладе приводятся примеры успешного выполнения исследовательских работ.

Отличаются случаи, когда научные руководители (в роли которых в последние годы всё чаще выступают люди довольно далёкие от школы: доценты и профессора региональных университетов, либо сотрудники НИИ) предлагают школьникам разработать явно непосильные темы. Например, такие работы, как "Решение задачи Стефана для процесса сушки пористых материалов", "Развитие волнового процесса в мелководных каналах" и т.д. Очевидно, принимать творческое участие в подобных работах школьники не могут.

Не будем нагружать учащихся нашими проблемами!

УСТОЙЧИВОСТЬ ГТЛЬБЕРТОВОСТИ И БЕССЕЛЕВОСТИ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРОВ ПОРЯДКА 2m ПРИ МАЛОМ ИЗМЕНЕНИИ ИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Ассонова Н.В. (Смоленск)

assonova@mail.ru

Систему $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов пространства $\mathbf{L_2}(0,1)$ будем называть гильбертовой (бесселевой), если $(\exists\alpha > 0)(\forall f \in \mathbf{L_2}(0,1))$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(f,e_n)|^2 \geq \alpha\|f\|^2$, $\Big((\exists\beta > 0)(\forall f \in \mathbf{L_2}(0,1)) \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(f,e_n)|^2 \leq \leq \beta\|f\|^2\Big)$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение, а $\|\cdot\|$ – норма в $\mathbf{L_2}(0,1)$.

Устойчивость гильбертовости и бесселевости систем собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов (д. о.) второго порядка в пространстве $\mathbf{L_2}(0,1)$ при малом изменении их коэффициентов рассмотрена в работе [1].

Пусть на интервале $G = (0,1)$ заданы два формальных д. о., "возмущённый" $Lu = u^{(2m)} + p_2(x)u^{(2m-2)} + \ldots + p_{2m-1}(x)u' + p_{2m}(x)u$, $(m > 1,\ p_k \in W_1^{2m-k}(G),\ k = \overline{2,2m})$, и простейший $\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{u}^{(2m)}$. Пусть $\{\mu_n\}$ – произвольная последовательность комплексных спектральных параметров, $\{u_{n,p}(x)\}$, $\{\tilde{u}_{n,p}(x)\}$ $(n = 1,2,\ldots,p = \overline{0,l_n})$ – отвечающие им соответственно системы к. ф. выписанных д. о. (понимаемые безотносительно к виду краевых условий). Для однозначности построения одной системы по другой требуется ряд условий, связывающих значения в точках 0, 1 функций $u_{n,p}^{(i)}$, $\tilde{u}_{n,p}^{(i)}$, $i = \overline{0,2m-1}$.

Предполагается выполнение карлемановского условия, условия "сумма единиц", антиаприорной оценки (как для функций $u_{n,p}$, так и для $\tilde{u}_{n,p}$). При достаточно малом значении величины

$$\breve{\kappa} = \max\{\|\kappa_{s,k}\|_\infty,\ \|\tilde{\kappa}_j\|_\infty,\ \|\tilde{\kappa}_0\|_1,\ \|p_i\|_\infty\ ,\|p_{2m}\|_1\},$$
$$(s = \overline{0,2m-3},\ \ k = \overline{0,2m-3},\ \ j = \overline{1,2m-2},\ \ i = \overline{2,2m-1}),$$
$$\kappa_{s,k}(x) = \textstyle\sum_{i=k+1+s}^{2m-2}(-1)^{i-1-k}C_{i-1-k}^{s}p_{2m-i}^{(i-1-k-s)}(x),$$
$$\tilde{\kappa}_j(x) = \textstyle\sum_{k=j}^{2m-2}(-1)^{k}C_{k}^{j}p_{2m-k}^{(k-j)}(x),\ \ (j = \overline{0,2m-2}),$$

ограничение на которую выписывается в явном виде и зависит от констант из карлемановского условия, условия "сумма единиц", антиаприорной оценки, а также от постоянных из оценок на $\|u_{n,p}^{(i)}\|_\infty$, $\|(u_{n,p} - \tilde{u}_{n,p})^{(i)}\|_\infty$, из гильбертовости в пространстве $\mathbf{L_2}(0,1)$ системы $\{\tilde{u}_{n,p}/\|\tilde{u}_{n,p}\|\}$ с константой α следует гильбертовость системы $\{u_{n,p}/\|u_{n,p}\|\}$ с выписанной в явном виде константой.

Подобная теорема устанавливается и для свойства бесселевости с менее жёстким ограничением на $\breve{k}$. Аналогичные теоремы справедливы и для случая, когда функции $\tilde{u}_{n,p}$ и $u_{n,p}$ "поменялись местами".

Литература

1. Ассонова Н.В., Будаев В.Д. // Дифференц. уравнения. 2000. Т.36, N2. С.147-151.

РЯДЫ РАДЕМАХЕРА И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОПЕРАТОРОВ

Асташкин С.В. (Самара)

astashkn@ssu.samara.ru

Лекция посвящена обзору результатов последнего времени, связанных с поведением рядов Радемахера в перестановочно инвариантных пространствах. Важной чертой обсуждаемых результатов является применение в их формулировке и доказательстве понятий и методов теории интерполяции операторов. Приведем некоторые из них.

Далее $r_k(s)$ $(k = 1,2,..)$ — функции Радемахера, $\mathcal{K}(t,x;X_0,X_1)$ $(t > 0, x \in X_0 + X_1)$ — $\mathcal{K}$ -функционал Петре на банаховой паре (X_0, X_1), G — замыкание L_∞ в пространстве Орлича L_N, $N(u) = e^{u^2}$.

Первое из утверждений является принципиальным уточнением классического неравенства Хинчина.

Теорема 1 (P.Hitczenko). *С константами, не зависящими от* $p \in [1,\infty)$ *и* $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_2$,

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k\right\|_{L_p[0,1]} \asymp \mathcal{K}(\sqrt{p}, a; l_1, l_2).$$

Теорема 2 (S.J.Montgomery-Smith). *Существует* $C > 0$, *не зависящее от* $t > 0$ *и* $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$, *такое, что*

$$\operatorname{meas}\{s \in [0,1] : \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(s) > K(t, a; l_1, l_2)\} \le e^{-t^2/2},$$

$$\operatorname{meas}\{s \in [0,1] : \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(s) > C^{-1} K(t, a; l_1, l_2)\} \ge C^{-1} e^{-Ct^2}.$$

Последнее из утверждений, усиливающее известную теорему В.А.Родина и Е.М.Семенова, в определенном смысле неулучшаемое.

Теорема 3 (С.В.Асташкин). *Пусть* X_0 *и* X_1 *— два перестановочно инвариантных пространства на* $[0,1]$, *интерполяционных между пространствами* L_∞ *и* G. *Если*

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k\right\|_{X_0} \asymp \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k\right\|_{X_1},$$

то $X_0 = X_1$ *(с эквивалентностью норм).*

Кроме того, в лекции планируется обсудить недавно полученные автором обобщения теорем 1 и 2.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Асташкин С.В., Узбеков Р.Ф. (Самара)
astashkn@ssu.samara.ru; roman@ssu.samara.ru

Ранее авторами при достаточно общих условиях были получены оценки для К -функционала Петре, рассматриваемого на паре пересечений пространств банаховой пары с некоторым подпространством [1]. Они позволили в ряде конкретных случаев получить соотношения, связывающие пространства вещественного метода интерполяции для пары пересечений с аналогичными пространствами исходной пары. Здесь приведены полученные на основе предложенного в [1] метода, аналогичные оценки для пар "весовых" L_p-пространств.

Как обычно, $L_p(w)$ $(1 \le p < \infty,\ w = w(s) \ge 0)$ состоит из всех измеримых на $(0,\infty)$ функций $f(s)$, таких, что

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_0^\infty |f(s)|^p w(s) ds \right)^{1/p} < \infty$$

Если w_0 и w_1 — "весовые" функции и $1 \le p < \infty$, то

$$N = \left\{ f(s) \in L_p(w_0) + L_p(w_1) : \int_0^\infty f(s) ds = 0 \right\},\ 1/p + 1/q = 1,$$

$$r(t) = \left(\frac{w_0}{w_1} \right)^{-1} (t^p),$$

$$\rho(t) = \left(t^{-q} \int_0^{r(t)} w_1^{-\frac{1}{p-1}}(s) ds + \int_{r(t)}^\infty w_0^{-\frac{1}{p-1}}(s) ds \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда

$$K(t, f; L_p(w_0) \cap N, L_p(w_1) \cap N) \asymp$$

$$\asymp K(t, f; L_p(w_0), L_p(w_1)) + \frac{|\int_0^{r(t)} f(s) ds|}{\rho(t)}$$

(то есть имеет место двусторонняя оценка, константы в которой не зависят от $f \in L_p(w_0) + L_p(w_1)$ и $t > 0$). При определенных условиях на w_0 и w_1 $\rho(t) \asymp r^{1/q}(t) w_0^{-1/p}(r(t))$, и приведенное соотношение упрощается. В несколько более частном случае аналогичный результат другим способом был получен в [2].

Литература

[1] С.В.Асташкин, Р.Ф.Узбеков, Акт-ые пробл. мат. и мех. Ма-лы межд. конф. Казань, 2000. С.23-25.

[2] N.Krugljak, L.Maligranda and L.-E.Persson, Ark. Mat. 37 (1999). P.323-344.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

И. В. Асташова (Москва)
ast@mail.ecfor.rssi.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y''(x) + p(x)\,y'(x) = |y(x)|^{2\mu} y(x), \tag{1}$$

где $\mu > 0$, а $p(x)$ — непрерывная функция, заданная в окрестности $+\infty$.

Теорема 1. *Если $|p(x)| < Cx$ для некоторого $C > 0$, то все решения уравнения (1), определенные в окрестности $+\infty$, монотонно стремятся к нулю при $x \to +\infty$. Для любого решения, не продолжаемого вправо, найдется такое $x^* < +\infty$, что $|y(x)| \to +\infty$ при $x \to x^* - 0$. При этом все такие решения имеют асимптотический вид*

$$y(x) = \left(\frac{\sqrt{\mu+1}}{\mu(x^*-x)}\right)^{1/\mu} (1+o(1)), \qquad x \to x^* - 0.$$

Теорема 2. *Если $|p(x)| > Cx^{1+\varepsilon}$ для некоторых $C > 0$ и $\varepsilon > 0$, то для любого $a \in \mathbf{R}$ существует такое решение уравнения (1), определенное в окрестности $+\infty$, что $y(x) \to a$ при $x \to +\infty$.*

Теорема 3. *Если $|p(x)| < Cx$ для некоторого $C > 0$, то любое решение уравнения (1), стремящееся к нулю при $x \to +\infty$, удовлетворяет условию*

$$\limsup_{x\to+\infty} \left(y(x)\,\ln^{1/2\mu} x\right) \le \left(\frac{C}{2\mu}\right)^{1/2\mu}.$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ No 99-01-00225

Теорема 4. *Если* $|p(x)| < Cx^{\beta}$ *для некоторых* $C > 0$ *и* $\beta \in (-1;1)$, *то любое решение уравнения (1), стремящееся к нулю при* $x \to +\infty$, *удовлетворяет условию*

$$\limsup_{x\to+\infty}\left(y(x)\,x^{(1-\beta)/2\mu}\right) \le \left(\frac{C(1-\beta)}{2\mu}\right)^{1/2\mu}.$$

Литература

1. И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия, Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений, М.: Наука, (1990) 432 с.

2. И. В. Асташова, Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, Докл. расшир. заседания семинара ИПМ им. И. Н. Векуа, Т.1, No 3. с. 9–11. Тбилиси, 1985.

О ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА НА ОДНОРОДНЫХ ГРУППАХ

Ахмедова Ф.А. (Баку, Азербайджан)

E-mail: guliev@azdata.net

Однородной группой в смысле Фолланда-Стейна называется связная односвязная нильпотентная группа Ли G, на алгебре Ли g которой действует однопараметрическая группа растяжений $\delta_t = \exp(A\ln t)$, $t > 0$, где A - диагонализируемый линейный оператор на g , собственные числа которого положительны, а число $Q = trA$ - однородной размерностью группы G. Пусть $r(x)$, $x \in G$ - однородная норма на группе G, N-множество натуральных чисел, $k \in N$, $\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j f(x\delta_j h)$ - конечная разность k-го порядка, $\omega_k(f,t)_{p,G} = \sup\limits_{r(h)\le t}\left\|\Delta_h^k f(\cdot)\right\|_{L_p(G)}$-модуль гладкости k-го порядка.

Пространством Никольского-Бесова $B^l_{p,\theta}(G)$, $0 < l < k$, $1 \le p,\theta \le \infty$, называется линейное нормированное пространство функций f, определенное на G с конечной нормой (см.напр. [1])

$$\|f\|_{B^l_{p,\theta}(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \|f\|_{b^l_{p,\theta}(G)} =$$

$$= \|f\|_{L_p(G)} + \left(\int\limits_G \frac{\|\Delta_h^k f\|_{L_p(G)}^\theta}{r(h)^{l\theta+Q}} dh \right)^{1/\theta},$$

$$\|f\|_{B^l_{p,\infty}(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \|f\|_{b^l_{p,\infty}(G)} =$$

$$= \|f\|_{L_p(G)} + \operatorname*{ess\ sup}_{h\in G, h\neq e} \frac{\|\Delta_h^k f\|_{L_p(G)}}{r(h)^l}.$$

Теорема 1. *Нормы пространства $B^l_{p,\theta}(G)$ эквивалентны при различных k связанных условием: $k > l > 0$.*

Теорема 2. *Пусть $f \in L_p(G)$, $k \in N$, $k > l$, $1 \le p, \theta \le \infty$. Тогда полунорма $\|f\|_{b^l_{p,\theta}(G)}$ эквивалентна величине*

$$\left\{ \int\limits_0^\infty \frac{\omega_k^\theta(f,t)_{p,G}}{t^{l\theta}} \frac{dt}{t} \right\}^{1/\theta}, \quad \text{при } 1 \le \theta < \infty,$$

$$\operatorname*{ess\ sup}_{0<t} \frac{\omega_k(f,t)_{p,G}}{t^l}, \quad \text{при } \theta = \infty.$$

Литература

1. Гулиев В.С. *Интегральные операторы, функциональные пространства и двухвесовые оценки на однородных группах. Некоторые приложения.* Баку. 1999. 332 стр.

О ПРОМЕЖУТКЕ ПОСТОЯНСТВА МИНИМАЛЬНОЙ КОНСТАНТЫ ДЖЕКСОНА–СТЕЧКИНА В L^2

Бабенко А.Г. (Екатеринбург)[1]

Alexander.Babenko@imm.uran.ru

Пусть L^2 есть пространство вещественных 2π-периодических функций с обычной нормой, $E(f,\mathcal{N}) = \inf\{\|f-g\| : g \in \mathcal{N}\}$ – величина наилучшего приближения функции $f \in L^2$ подпространством $\mathcal{N}$ из L^2.

Минимальной константой Джексона–Стечкина называется величина

$$\mathcal{K}_\ell(\delta, m) = \inf\left\{\sup_{f\in L^2,\ f\neq\text{const}} \frac{E(f,\mathcal{N})}{\omega_m(f,\delta)} : \mathcal{N} \subset L^2, \dim\mathcal{N} \le \ell\right\}, \quad (1)$$

где $\omega_m(f,\delta) = \sup\{\|\sum_{\nu=0}^m (-1)^{m-\nu} C_m^\nu f(\cdot + \nu t)\| : |t| \le \delta\}$ есть m-ый модуль непрерывности функции f. Величину $\mathcal{K}_\ell(\delta, 1)$ называют минимальной константой Джексона, впервые ее значение: $\mathcal{K}_{2n-1}(\delta,1) = 1/\sqrt{2}$ при $\delta \ge \pi/n$, $n \ge 1$, стало известным в 1968 г. благодаря результатам Н.И.Черных (оценка сверху) и В.И.Бердышева (оценка снизу). Известно также, что $\mathcal{K}_{2n-1}(\delta, m) = 1/\sqrt{C_{2m}^m}$ при $2\pi/n \le \delta < 2\pi/m$, $n > m \ge 2$; оценку сверху установил Н.И.Черных (1967), а оценку снизу – автор (2000). Возникает вопрос о соответствующем промежутке постоянства минимальной константы Джексона–Стечкина, причем наибольший интерес вызывает значение его левого конца, т.е. величина: $\delta_\ell(m) = \inf\left\{\delta > 0 : \mathcal{K}_\ell(\delta, m) = 1/\sqrt{C_{2m}^m}\right\}$.

Теорема. *Справедливы следующие неравенства*

$$\frac{\pi}{2n} \le \delta_{2n}(1) \le \delta_{2n-1}(1) \le \frac{\pi}{n} \text{ при } n \ge 1, \quad (2)$$

$$\frac{2}{n}\arcsin\left(\frac{1}{2}\left(C_{2m}^m\right)^{1/(2m)}\right) \le \delta_{2n}(m) \le \delta_{2n-1}(m) \le \frac{2\pi}{n}, n > m \ge 2. \quad (3)$$

[1]Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00175) и программы "Ведущие научные школы" (проект 00-15-96035).

Замечание. Оценки сверху для $\delta_{2n-1}(m)$ в (2), (3) следуют из результатов Н.И.Черных 1967 г.

Более общий вариант задачи (1) (с первым модулем непрерывности) в случае разных метрик изучал Н.П.Корнейчук в 1979–1984 гг.

О РАЗРЕШИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРАЕВЫМИ НЕРАВЕНСТВАМИ

Бабич О.В. (Ижевск)

lgbbc@ulm.uni.udm.ru, lg2001@mail.ru, lg@izh.com

Пусть L_p^n — пространство вектор-функций $x : [a,b] \to R^n$ с компонентами, суммируемыми в степени p, если $1 < p < \infty$, и ограниченными в существенном, если $p = \infty$; D_p^n — пространство абсолютно непрерывных вектор-функций $x : [a,b] \to R^n$, для которых $\dot{x} \in L_p^n$; $l : D_p^n \to R^k$, $l_0 : D_p^n \to R^n$ — линейные ограниченные вектор-функционалы; B — $m \times n$-матрица с элементами из пространства L_∞^1 ($B \in L_\infty^{m\times n}$), имеющая полуобратную матрицу $B^- \in L_\infty^{n\times m}$; $A \in L_1^{m\times n}$; $\mathcal{K} : L_p^n \to L_p^m$ — линейный интегральный оператор с измеримым на $[a,b] \times [a,b]$ ядром $K(t,s)$, удовлетворяющим условию: если $p = 1$, то $\mathcal{K}$ — слабо вполне непрерывный, если $1 < p < \infty$, то для элементов k_{ij} матрицы K имеем $\|k_{ij}(\cdot,s)\|_{L_p^1} \in L_q^1, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,m}$, $1/p + 1/q = 1$, если $p = \infty$, то $\mathcal{K}$ — регулярный слабо вполне непрерывный, $f \in L_p^m$; $\mathbf{K} = B^-\mathcal{K}$; $\mathbf{A} = B^- A$; линейные операторы $\mathcal{L} : D_p^n \to L_p^m$, $\mathbf{L} : D_p^n \to L_p^n$ имеют вид $\mathcal{L}x = B\dot{x} - \mathcal{K}\dot{x} + Ax(a)$, $\mathbf{L}x = \dot{x} - \mathbf{K}\dot{x} + \mathbf{A}x(a)$; $\beta \in R^k$.

Теорема *Пусть краевая задача* $\mathbf{L}x = 0$, $l_0 x = 0$ *имеет только тривиальное решение, тогда задача* $\mathcal{L}x = f$, $lx \geq \beta$ *разрешима в том и только том случае, когда разрешима относительно* $\gamma \in R^n$ *и* $z \in L_p^n$ *задача* $\mathbf{\Gamma}\gamma \geq \chi(t,z)$ *для всех* $t \in [a,b]$, $Z(t,z) = Y(t)C(z)$ *почти всюду на* $[a,b]$. *При этом формула* $x(t) = X(t)(C(z) + P\gamma) + N(t,z)$ *дает все решения первой задачи, когда пара* (γ, z) *пробегает все решения второй задачи.*

Здесь
$Z(t,z) = D(t)(\int_a^b F(t,\tau)H(\tau)z(\tau)\,d\tau - \int_a^b F(t,s)B^-(s)f(s)\,ds - f(t))$,
$Y(t) = D(t)\int_a^b K(t,s)\dot{X}(s)\,ds + A(t)X(a)$, $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{X}P$, $\chi(t,z) = \beta - l(N(t,z)) - \mathbf{X}C(z)$, $P = E - \Gamma\Gamma^-$, $N(t,z) = \int_a^b G(t,s)(B^-(s)f(s) + H(s)z(s))\,ds$, $C(z) = \Gamma^- \int_a^b Y^\top Z\,ds$, $\Gamma = \int_a^b Y^\top Y\,ds$, $\mathbf{X} = l(X(t))$ (l применен к столбцам), $F(t,\tau) = \int_a^b K(t,s)\frac{\partial}{\partial s}G(s,\tau)\,ds + K(t,\tau) - A(t)G(a,\tau)$, X — фундаментальная матрица уравнения $\mathbf{L}x = 0$, удовлетворяющая условию $l_0x = E$; $G(t,s)$ — матрица Грина задачи $\mathbf{L}x = y, l_0x = 0$, $y \in L_p^n$; $D = E - BB^-$, $H = E - B^-B$, E — единичная матрица подходящей размерности. При доказательстве теоремы используется представление, найденное в работе [1].

Литература

[1] Дударев Е.П. О разрешимости, представлении решения и регуляризации общей линейной краевой задачи для системы функционально-дифференциальных уравнений, не разрешенной относительно производной // Автореферат диссертации ... к.ф.-м.н. – Свердловск, 1990, -С.10

ОЦЕНКИ ЯДЕР СЕГЁ И КОНСТАНТ ЛЕБЕГА СУММ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ

Бадков В.М. (Екатеринбург)[1]
Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Предлагается метод исследования порядков констант Лебега (из одного весового пространства суммируемых в степени функций в другое) сумм Фурье по ортогональным с весом

[1] Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00175) и программой "Ведущие научные школы" (проект 00-15-96035).

тригонометрическим полиномам. Метод основан на применении установленных автором двусторонних поточечных оценок (при $z = e^{i\theta}, \zeta = (1 - cn^{-1})e^{i\tau}$ $(c > 0)$) ядра Сегё

$$K_n(\varphi; z, \zeta) := \varphi_0(z)\overline{\varphi_0(\zeta)} + \ldots + \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\zeta)}$$

по системе $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ алгебраических многочленов, ортонормированной на окружности $|z| = 1$ с весом $\varphi(\tau)$. Эти оценки дает

Теорема. *Пусть вес φ имеет вид*

$$\varphi(\tau) = h(\tau) \prod_{\nu=1}^{m} w_\nu(|\sin\frac{\tau - \theta_\nu}{2}|)\ (\tau \in \mathbf{R},\ -\pi < \theta_1 < \ldots < \theta_m \le \pi), \tag{1}$$

где $w_\nu(u) := \prod_{\mu=1}^{l_\nu}[g_{\mu,\nu}(u)]^{\alpha(\mu,\nu)} \in L^1[0,1]$; $m, l_\nu \in \mathbf{N}$; $\alpha(\mu,\nu) \in \mathbf{R}$; $g_{\mu,\nu}(u)$ *- вогнутые модули непрерывности* $(\mu = 1\ldots, l_\nu;\ \nu = 1, \ldots, m)$;

$$\int_0^\theta w_\nu(\tau)d\tau = O(\theta w_\nu(\theta))\ (\theta \to 0+;\ \nu = 1, \ldots, m);$$

для h выполнены условия $h(\tau) \ge 0$; $h, 1/h \in L^\infty$ и одно из условий $\omega(h;\delta)_2 = O(\delta^{1/2})$ или $\omega(h;\tau)_\infty \tau^{-1} \in L^1[0,\pi]$ ($\omega(h;\delta)_r$ - модуль непрерывности в L^r функции h). Тогда при фиксированном $c > 0$ равномерно по $\theta, \tau \in \mathbf{R}$ и $n \ge n_1(c)$

$$|K_n(\varphi; e^{i\theta}, (1-cn^{-1})e^{i\tau})| \asymp (|\sin[(\tau-\theta)/2]|+n^{-1})^{-1}|\varphi_n(e^{i\theta})\varphi_n(e^{i\tau})|.$$

Замечание. Этот результат приведен в "Материалах Международной научной конференции (Казань, 1–3 октября 2000 г.)" с опечатками: вместо $h(\tau)$ в (1) и $\sin[(\tau - \theta)/2]$ в (2) по вине автора напечатано, соответственно, $h(t)$ и $\sin[(\tau - \theta_\nu)/2]$.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ НА МНОЖЕСТВАХ, СОДЕРЖАЩИХ ИХ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Байрамова Н.А., Воротников В.В. (Москва)

Для фиксированных чисел $\varepsilon \in (0,1)$ и $a > 0$ на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ зададим множества

$$Y(\varepsilon) = \{z : |\arg z| \le \pi\varepsilon/2\},\ U(\varepsilon) = -Y(\varepsilon) \cup Y(\varepsilon),$$

$$U_\varepsilon(a) = U(\varepsilon) \cap \{|z| \le a\},\ U^\varepsilon(a) = U(\varepsilon) \cap \{|z| \ge a\}$$

При фиксированных $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ функция f принадлежит классу $K_{\alpha,\beta}(\varepsilon)$, если существует область $G(f) \subset \{0 < r < |z| < R < +\infty\}$, имеющая с каждым из углов $Y(\varepsilon)$ и $-Y(\varepsilon)$ непустое пересечение, что f — голоморфна внутри множества $U(\varepsilon) \cup G(f)$ и там выполнено неравенство

$$|f(z)| \le M(f)\frac{|z|^\alpha}{|i+z|^{\alpha+\beta}}, \quad M(f) > 0.$$

Теорема 1. *Пусть фиксированы следующие величины: параметр $p \in (0, +\infty]$, действительные числа $0 < \phi < \psi < 1$, $\alpha \in (-2/p, +\infty) \setminus \mathbf{Z}$, $\beta \in (2/p, +\infty) \setminus \mathbf{Z}$ и функция $f \in K_{\alpha,\beta}(\psi)$, тогда при каждом натуральном n справедливо неравенство*

$$L_p R_n(f, U(\phi)) \ll n^{1/2p+1/2} \exp\left(-\pi\sqrt{\frac{(\psi-\phi)n/2}{(\alpha+2/p)^{-1} + (\beta-2/p)^{-1}}}\right)$$

Кривая Γ принадлежит классу $V(\phi, \rho)$, если $\Gamma \subset U(\phi, \rho) = U_\phi(1) \cup U^\rho(1)$ и при этом одновременно дуга $\Gamma \cap \{|z| \le 1\}$ и образ множества $\Gamma \cap \{|z| \ge 1\}$ при инверсии являются кусочно-гладкими кривыми.

Теорема 2. *Пусть фиксированы следующие величины: параметр $p \in (0, +\infty]$, действительные числа $0 < \phi < \psi < 1$, $\alpha \in (-1/p, +\infty) \setminus \mathbf{Z}$, $\beta \in (1/p, +\infty) \setminus \mathbf{Z}$, функция $f \in K_{\alpha,\beta}(\psi)$ и кривая $\Gamma \in V(\phi, \phi)$, тогда при каждом натуральном n справедливо неравенство*

$$L_p R_n(f, \Gamma) \ll n^{1/2p+1/2} \exp\left(-\pi\sqrt{\frac{(\psi-\phi)n/2}{(\alpha+1/p)^{-1} + (\beta-1/p)^{-1}}}\right).$$

В случае, когда параметр ψ, определяющий область голоморфности функций, равен $1/2$ приведенные теоремы можно усилить, одновременно распространяя их на случай более общих множеств приближения.

Теорема 3. *Пусть фиксированы следующие величины: параметр* $p \in (0, +\infty]$, *действительные числа* $0 < \phi < 1/2$, $0 < \rho < 1/2$, $\alpha \in (-2/p, +\infty) \setminus \mathbf{Z}$, $\beta \in (2/p, +\infty) \setminus \mathbf{Z}$ *и функция* $f \in K_{\alpha,\beta}(1/2)$, *тогда при каждом натуральном* n *справедливо неравенство*

$$L_p R_n(f, U(\phi, \rho)) \ll n^{1/2p} \times$$

$$\times \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{n/2}{((1/2-\phi)(\alpha+2/p))^{-1} + ((1/2-\rho)(\beta-2/p))^{-1}}}\right).$$

Теорема 4. *Пусть фиксированы следующие величины: параметр* $p \in (0, +\infty]$, *действительные числа* $0 < \phi < 1/2$, $0 < \rho < 1/2$, $\alpha \in (-1/p, +\infty) \setminus \mathbf{Z}$, $\beta \in (1/p, +\infty) \setminus \mathbf{Z}$, *функция* $f \in K_{\alpha,\beta}(1/2)$ *и кривая* $\Gamma \in V(\phi, \rho)$, *тогда при каждом натуральном* n *справедливо неравенство*

$$L_p R_n(f, \Gamma) \ll n^{1/2p} \times$$

$$\times \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{n/2}{((1/2-\phi)(\alpha+1/p))^{-1} + ((1/2-\rho)(\beta-1/p))^{-1}}}\right).$$

Приведенные теоремы являются продолжением исследования скорости рациональной аппроксимации голоморфных функций на множествах, содержащих их особые точки, они обобщают соответствующий результат из [1].

Литература

[1] Вячеславов Н.С. О рациональных приближениях функций, аналитических в угле // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. N 4. С. 53–60.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ГРАНИЦЫ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ

Балашов М.В. (Долгопрудный)[1]

E-mail: balashov@math.mipt.ru

Рассматриваются выпуклые компакты, названные Р-множествами, граница которых является непрерывной функцией. Более точно, дадим

Определение 1. *Пусть P_L — ортогональный проектор на подпространство L. Пусть $A \subset R^n$ — выпуклый компакт. Если для любого разложения R^n в ортогональную сумму подпространств $R^n = L \oplus l$, $\dim L = n-1$, $\dim l = 1$, функция*

$$f : R^{n-1} \supset P_L A \to l = R, \quad \forall x \in P_L A \ f(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in A\}$$

непрерывна на $P_L A$, то будем говорить, что множество A есть Р-множество.

Следующая теорема показывает, что основные операции не выводят из класса Р-множеств.

Теорема 1. (Описание Р-множеств) *Отрезок и любой выпуклый компакт на плоскости являются Р-множествами. Многогранники и строго выпуклые компакты являются Р-множествами. Пересечение двух Р-множеств есть Р-множество. Пересечение Р-множества аффинным множеством есть Р-множество в несущем подпространстве. Вложение в пространство большей размерности сохраняет Р-свойство. Сумма двух Р-множеств есть Р-множество. Геометрическая разность Р-множества и произвольного множества есть Р-множество. Линейный оператор сохраняет Р-свойство.*

Приведем некоторые утверждения, где применение Р-свойства дает новые результаты.

Теорема 2. *Пусть $A \subset R^n$ — Р-множество, $T : R^n \to R^m$ — линейный оператор, $B = TA$. Тогда $T : A \to B$ — открытое отображение в индуцированных в A и B топологиях.*

Построен пример, показывающий, что без предположения о Р-свойстве выпуклого компакта A теорема 2 не верна.

---

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 98-01-00645) и Конкурсного центра фундаментального естествознания (грант 97-0-1.9-26).

Напомним, что выпуклый компакт $M \subset R^n$ называется порождающим, если для любого непустого пересечения сдвигов M вида $A = \bigcap_{x \in X}(M + x)$ найдется выпуклый компакт B, такой, что $A + B = M$ (см. [1]).

Теорема 3. *Компактное порождающее множество в R^n обладает P-свойством.*

Получены также новые условия непрерывности геометрической разности многозначных отображений без предположения о непустоте внутренности у геометрической разности (см. [2]).

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{T}$ — метрическое пространство. Пусть $F \subset R^n$ — P-множество, $T(t)$ — непрерывная матрица $n \times n$ невырожденная для всех $t \in \mathcal{T}$, $G(t)$ — непрерывное многозначное отображение с компактными значениями. Тогда если*

$$(T(t)F)\overset{*}{-}G(t) = \{x \in R^n \mid x + G(t) \subset T(t)F\} \neq \varnothing \qquad \forall t \in \mathcal{T},$$

то это многозначное отображение непрерывно в метрике Хаусдорфа.

Построены примеры, показывающие, что без предположении о P-свойстве F или о невырожденности матрицы $T(t)$ теорема 4 не верна.

Литература:

1. М.В. Балашов, Е.С. Половинкин. M-сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества // Матем. сб. 2000. Т. 191. №1. С. 26–64.

2. М.В. Балашов. О геометрической разности многозначных отображений // Принято к опубликованию в ж. Матем. заметки. 2001. Т. 69.

О НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Балашова Г.С. (Москва)

balashov@cs.isa.ac.ru

Изучаются условия существования обобщенного решения для нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}A_{\alpha}(x,u,...,D_u^{\gamma})=h(x),\quad x\in G,\quad |\gamma|\leq|\alpha|.$$

Энергетическим пространством таких уравнений является пространство Соболева бесконечного порядка

$$W^{\infty}\{a_{\alpha},p\}_{(G)}=\{u(x)\in C^{\infty}(G):\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}a_{\alpha}\|D^{\alpha}u\|_p^p<\infty\}$$

Пространство правых частей

$$W^{-\infty}\{a_{\alpha},p'\}_{(G)}=\{h(x)=$$

$$=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}(-1)^{|\alpha|}a_{\alpha}D^{\alpha}h_{\alpha}(x):\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}a_{\alpha}\|h_{\alpha}u\|_{p'}^{p'}<\infty\},$$

$$p'=p(p-1)^{-1}$$

есть пространство обобщенных функций, возможно, бесконечного порядка сингулярности, сопряженного к пространству Соболева бесконечного порядка.

Кроме того, вводятся понятия главного и подчиненного операторов, каждый из которых есть дифференциальный оператор бесконечного порядка. Сравнение таких операторов основано на сравнении соответствующих им энергетических пространств. Такой подход позволяет получить условия разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка, содержащих подчиненные члены. А в случае линейного уравнения с подчиненными членами — установить Фредгольмову разрешимость. Разработанная теория позволила получить разрешимость ряда задач, для которых ранее известными методами этого сделать не представлялось возможным. Сказанное иллюстрируется примерами.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

Бандалиев Р.А. (Баку, Азербайджан)

E-mail: guliev@azdata.net

Пусть R^n n-мерное пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $R^n_{++} = \{x : x \in R^n, x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$, $N_0 = N \cup \{0\}$, N-множество натуральных чисел, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $l_i \in N_0$, $\rho(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^{l_i}$.

Будем говорить, что функция $f(x)$, $x \in R^n_{++}$ принадлежит весовому анизотропному пространству Соболева $W^{l_1,\ldots,l_n}_{p,\omega}(R^n_{++})$, если f имеет обобщенные производные $D_i^{l_i} f$ и конечна норма

$$\|f; W^{l_1,\ldots,l_n}_{p,\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n}(R^n_{++})\| = \|f\|_{L_{p,\omega_0}(R^n_{++})} + \sum_{i=1}^n \|D_i^{l_i} f\|_{L_{p,\omega_i}(R^n_{++})}.$$

Теорема. *Пусть* $\nu \in N_0^n$, $l \in N^n$, $\sigma = \frac{1}{l}$, $\left(\nu, \frac{1}{l}\right) \leq 1$, $\left(\nu + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \frac{1}{l}\right) = 1$, $1 < p \leq q < \infty$ *и весовые функции* $\omega, \omega_0, \ldots, \omega_n$ *зависят только от* $\rho(x)$. *Пусть также весовая пара* $(\omega(\rho), \omega_j(\rho))$, $j = 0, 1, \ldots, n$ *удовлетворяет следующим условиям :*

а) ω*-возрастающая функция на* $(0, \infty)$ *и*
$\exists C > 0$, $\forall \rho \in (0, \infty)$, $(\omega_j(\rho))^{p/q} \leq C\omega(\rho)$,
б) ω*-убывающая функция на* $(0, \infty)$ *и*

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t \omega_j(\rho) \rho^{|\sigma|-1} d\rho \right)^{p/q} \left(\int_t^\infty \omega(\rho)^{1-p'} \rho^{-1-|\sigma|\frac{p'}{q}} d\tau \right)^{p-1} < \infty.$$

Тогда

$$\|D^\nu f\|_{L_{q,\omega}(R^n_{++})} \leq C \|f, W^{l_1,\ldots,l_n}_{p,\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n}(R^n_{++}))\|,$$

где постоянная C *не зависит от* f.

Отметим, что соответствующий весовой эффект в случае, когда $\rho(x) = x_n$, получена В.С.Гулиевым [1].

Литература

[1]. Гулиев В. С.*Двухвесовые неравенства для интегральных операторов в* L_p*-пространствах и их проложения* . // Труды МИРАН, 1993, - т.204, -№4, с.113-136.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КЛАССОВ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ С КВАЗИКОНФОРМНЫМ ПРОДОЛЖЕНИЕМ

Баранова О. Е. (Тверь)

d001952@tversu.ru

1. С помощью одной работы В. В. Черникова выводится асимптотически точная при $k \to 1$ оценка сверху для кривизны K_ρ линии уровня $F(|\zeta| = \rho)$, $\rho > 1$, функции F из класса $\Sigma^{(p)}(k)$, обобщающая оценку Г. В. Корицкого для класса $\Sigma^{(p)}$. Класс $\Sigma^{(p)}(k)$ состоит из всех k-квазиконформных автоморфизмов F сферы Римана $\bar{\mathbb{C}}$, голоморфных в области $\Delta^* = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$, гидродинамически нормированных в точке $\zeta = \infty$ и обладающих свойством p-кратной симметрии: $F(e^{\frac{2\pi i}{p}}\zeta) = e^{\frac{2\pi i}{p}}F(\zeta)$ для всех $\zeta \in \bar{\mathbb{C}}$; p – заданное натуральное число. Анонсируемая оценка имеет вид

$$K_\rho \leq \left(\frac{4}{M_k(\rho^{-p})}\right)^{1-1/p} \cdot \frac{\rho^{2pk-1}(\rho^{2p} - p + 2\rho^p k(p-1) + (p+1)Q)}{(\rho^{2p}-1)^{k+1}},$$

где $Q = \frac{4}{\pi}\arcsin k(1 - \frac{1}{\pi}\arcsin k)$ – функция Р. Кюнау, $M_k(r)$ – функция В. Я. Гутлянского и В. А. Щепетева, фигурирующая в их оценке $|f(z)| \geq \frac{|z|}{4}M_k(|z|)$ модуля фунции $f \in S(k)$.

2. Во второй части доклада демонстрируются компьютерные геометрические образы, связанные с сечениями и слоениями сечений остова области коэффициентов функций класса S:

$$\Delta_\infty(S) = \Big\{\beta \in \mathbb{R}^\infty : \beta = (|a_2|, |a_3| \ldots); a_\nu = a_\nu(f) = \tfrac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} - \text{тейлоровские коэффициенты функции } f,\ \nu = 2..\infty,\ f \in S\Big\}.$$

Остов $\Delta_\infty(S)$ очевидно содержится в области Де Бранжа

$$B_\infty(S) = \{\beta \in \mathbb{R}^\infty : \beta = (|\beta_2|, |\beta_3| \ldots); 0 \leq \beta_\nu \leq \nu,\ \nu = 2..\infty\}.$$

Геометрические приближения сечений $\Delta_\infty(S)$ строятся с помощью предложенной В. Г. Шеретовым счетной системы точных коэффициентных неравенств, вполне определяющей область коэффициентов $D_\infty(S)$.

О Λ-ВАРИАЦИИ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО МАЛОМУ КВАДРАТУ

Бахвалов А.Н. (Москва)[1]

alex@abs.math.msu.su

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, где $0 < \lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ и $\lambda_n \to \infty$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$. Пусть I — промежуток с концами a и b, Δ — промежуток с концами α и β на прямой, а $D = I \times \Delta$. Через $\Omega(I)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $I_n = (a_n; b_n)$, таких что $[a_n; b_n] \subset I$. Рассмотрим два определения ограниченной Λ-вариации.

Определение 1. Скажем, что $f \in \Lambda BV(D)$, если конечна величина

$$V_\Lambda(f, D) = \sup_{\Omega(I)} \sum_n \frac{|f(I_n, \alpha)|}{\lambda_n} +$$

$$+ \sup_{\Omega(\Delta)} \sum_k \frac{|f(a, \Delta_k)|}{\lambda_k} + \sup_{\Omega(I), \Omega(\Delta)} \sum_{n,k} \frac{|f(I_n, \Delta_k)|}{\lambda_n \lambda_k}.$$

Определение 2. Скажем, что $f \in \Lambda BV(D)$, если конечна величина

$$\hat{V}_\Lambda(f, D) = \sup_{y \in \Delta} \sup_{\Omega(I)} \sum_n \frac{|f(I_n, y)|}{\lambda_n} +$$

$$+ \sup_{x \in I} \sup_{\Omega(\Delta)} \sum_k \frac{|f(x, \Delta_k)|}{\lambda_k} + \sup_{\Omega(I), \Omega(\Delta)} \sum_{n,k} \frac{|f(I_n, \Delta_k)|}{\lambda_n \lambda_k}.$$

При $\Lambda = \{n\}$ говорят о *гармонической* вариации и используют обозначение $HBV(D)$.

В случае, когда $a \in I$ и $\alpha \in \Delta$, классы $\Lambda BV(D)$ в смысле двух этих определений совпадают, и $V_\Lambda(f, D) \leq \hat{V}_\Lambda(f, D) \leq 3V_\Lambda(f, D)$. Однако в противном случае эти классы различны, и тем более нет оценки для одной вариации через другую.

А.А.Саакяном [1] было доказано следующее утверждение.

Лемма 1. Если $f \in HBV([0;1]^2)$, и существует предел $f(+0, +0)$, то $V_H(f, (0; \delta)^2) \to 0$ при $\delta \to +0$.

Однако при доказательстве основного результата о сходимости рядов Фурье ограниченной гармонической вариации им фактически было использовано другое утверждение:

---

[1]Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00042).

Лемма 2. Если $f \in HBV([0;1]^2)$, и существует предел $f(+0,+0)$, то $\hat{V}_H(f,(0;\delta)^2) \to 0$ при $\delta \to +0$.

Автором установлена справедливость леммы 2 для произвольного класса ΛBV и тем самым устранен указанный пробел в работе [1].

Литература

1. Саакян А.А. *О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации*// Изв. АН Арм. ССР. 1986. - **21**. - N 6. - С.517–529.

О КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ СТЕПЕННОЙ РОСТ ВБЛИЗИ ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

Беднаж В.А. (Брянск)

e-mail: tcopr@bgpi.bitmcnit.bryansk.su

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости и $A_\alpha = \{f \in H(D) : |f(z)| < \frac{C_f}{(1-|z|)^\alpha}, z \in D\}$, где $\alpha \in R_+$ и $H(D)$ – класс голоморфных в D функций.

В докладе рассматривается вопрос кратной интерполяциии в пространстве A_α Для формулировки основного результата введем следующие обозначения:

$\{\alpha_k\}_1^\infty(|\alpha_k| < 1)$ – произвольная последовательность комплексных чисел, подчиненная условию Бляшке $\sum_{k=1}^\infty(1 - |\alpha_k|)$;

$\{\gamma_k\}_1^\infty$ - последовательность комплексных чисел, т.ч. $|\gamma_k| \leq$ $\leq \frac{C}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+s_k-1}}$;

$s_k \geq 1, k \geq 1$ – кратность появления числа α_k на отрезке $\{\alpha_j\}_1^k$;

$p_k, k \geq 1$ – кратность появления числа α_k во всей последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$.

Необходимо выявить критерии для $\{\alpha_n\}_1^\infty$, обеспечивающие существование функции $f(z)$ из класса A_α, удовлетворяющей интерполяционным условиям

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k, \quad k = 1, 2, ... \tag{1}$$

В случае, когда α_k, $|\alpha_k| < 1$, попарно различны (т.е $s_k = 1, k \geq 1$), эта задача сводится к интерполяционной задаче

$$f(\alpha_k) = \gamma_k, \quad k = 1, 2, ... \tag{2}$$

Критерии существования задачи (2) были установлены в работах [1], [2].

В работе строится система рациональных функций $\tilde{Q}_k$, которая позволяет в явном виде построить решение задачи 1.

Теорема. Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_p$. Тогда ряд $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k \tilde{Q}_k(z)$, $|z| < 1$ сходится абсолютно и равномерно внутри единичного круга и определяет функцию $f(z) \in A_\alpha$, удовлетворяющую следующим интерполяционным данным:

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k, \quad k = 1, 2, ...$$

Литература

1. K. Seip. Beurling type densyty theorems in the unit disk. Jnvent. Math. 113 (1993) 21-39.

2. Bruna, J., Pascuas, D.: Interpolation in $A^{-\infty}$. J. Lond. Math. Soc. 40 252-466, (1989)

К ВОПРОСУ О СОПРЯЖЕННОСТИ КВАЗИСИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ГРУППЕ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ R

Бекларян Л.А. (Москва)

beklar@cemi.rssi.ru

В теории функций комплексной переменной исследование группы квазиконформных преобразований верхней полуплоскости сводится к изучению квазисимметрической группы гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, как группы граничных следов исходной группы [1].

Преобразование q прямой $\mathbf{R}$ называется *квазисимметрическим* [1], если существует константа $M_q \geq 1$ такая, что для всех $x \in \mathbf{R}$, $\quad t \in \mathbf{R}_+$ выполняется условие

$$M_q^{-1} \leq \frac{q(x+t) - q(x)}{q(x) - q(x-t)} \leq M_q. \qquad 1$$

Группа G преобразований прямой $\mathbf{R}$ называется квазисимметрической, если каждый элемент $g \in G$ является квазисимметрическим.

В работе [2] для квазисимметрической группы преобразований прямой получен следующий основной результат.

Теорема 1. *Пусть Q — группа гомеоморфизмов прямой. Для существования квазисимметрического гомеоморфизма η такого, чтобы $\eta \circ Q \circ \eta^{-1}$ являлась группой аффинных преобразований, необходимо и достаточно, чтобы группа Q была квазисимметрической, и для любого $q \in Q$ выполнялось равенство $M_q = M$, где M — некоторая фиксированная константа.* ■

В представленном докладе дается новый, более ослабленный, критерий квазисимметрической сопряженности произвольной группы квазисимметрических гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, некоторой группе аффинных преобразований. Основной результат сформулирован в виде следующей теоремы [3].

Основная теорема. *Пусть Q группа гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию. Для существования квазисимметрического гомеоморфизма η такого, чтобы $\eta \circ Q \circ \eta^{-1}$ являлась группой аффинных преобразований, необходимо и достаточно, чтобы группа Q была квазисимметрической и для любых $q \in Q$, $\quad n \in \mathbf{Z}$ выполнялось равенство $M_{q^n} = M_q$.* ■

Здесь же будет дан ответ на следующий вопрос: как устроено множество квазисимметрических гомеоморфизмов η из основной теоремы?

Теорема 2. *Пусть $Q \subseteq K^+$. Если существуют квазисимметрические гомеоморфизмы η_1, η_2 такие, что $\eta_1 \circ Q \circ \eta_1^{-1}$, $\eta_2 \circ Q \circ \eta_2^{-1}$ являются группами аффинных преобразований, то существует аффинное преобразование η такое, что $\eta_2 = \eta \circ \eta_1$.*

Литература

[1] Альфорс Л.В. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.

[2] Hinkkanen A. The structure of certain quasisymmetrik groups // Memoirs of the Amer. Math. Soc. 1990. V.83. N422. P.1 –87.

[3] Бекларян Л.А. О критерии топологической сопряженности квазисимметрической группы группе аффинных преобразований R. // Матем. сборник. 2000. Т. 191. N. 6. С. 31–42.

О СХОДИМОСТИ В СРЕДНЕМ И ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Белов А. С. (Иваново)[1]

В докладе предполагается обсудить вопросы, которые связаны со следующими тремя теоремами.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты тригонометрического ряда*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{1}$$

удовлетворяют условию

$$V = \sum_{N=1}^{\infty} N^{-3/2}\Big(\sum_{k=N}^{\infty}(|a_k - a_{k+N}|^2 + |b_k - b_{k+N}|^2)\Big)^{1/2} < \infty. \tag{2}$$

Тогда

1) *для того чтобы ряд* (1) *был рядом Фурье необходимо и достаточно выполнение условий*

$$|a_n| + |b_n| = o(1) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n} < \infty; \tag{3}$$

2) *частные суммы ряда* (1) *сходятся* (*ограничены*) *в метрике* $L_{2\pi}$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (3) *и условие*

$$\sum_{k=[n/2]}^{2n} \frac{|a_k| + |b_k|}{|k-n|+1} = o(1)(\text{ соответственно, } = O(1)\,); \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта INTAS (проект 99–01080)

3) если ряд (1) является рядом Фурье функции $f \in L_{2\pi}$, то при всех натуральных n верна оценка

$$\left| \int_{\pi/n \le |x| \le \pi} |f(x)|\, dx - \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{|b_k|}{k} \right| \le C_1 V,$$

где C_1 – некоторая положительная абсолютная постоянная, а в соотношениях (3) и (4) предполагаем, что n стремится к бесконечности.

Отметим, что теорема 1 всегда применима в случае $\sum(|a_k|^2 + |b_k|^2) < \infty$ и содержит в себе многие хорошо известные результаты такого вида.

Теорема 2. *Можно построить последовательность положительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ так, что*

$$a_n \ln n = \bar{o}(1), \quad \sum \frac{a_n}{n} < \infty, \quad \sum |a_n - a_{n+1}| < \infty,$$

ряд

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \tag{5}$$

является рядом Фурье, его частные суммы неограничены в метрике $L_{2\pi}$, и ряд

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \tag{6}$$

не является рядом Фурье. Более того, теорема останется верной, если ряды (5) и (6) поменять местами.

Теорема 3. *Есть такая абсолютная положительная постоянная C_2, что для любых $1 \le p \le q \le \infty$, $1/p + 1/q = 1$, и любой функции $f \in L^q_{2\pi}$, для которой $\hat{f}(0) = 0$, выполнена оценка*

$$\|\tilde{f}\|_2^2 \le C_2^{2/p-1} \|\tilde{f}\|_p \|f\|_q.$$

В частности, при $p = 1$ для всех функций $f \in L^\infty_{2\pi}$, $\hat{f}(0) = 0$, получаем оценку

$$\|\tilde{f}\|_2^2 \le C_3 \|\tilde{f}\|_1 \|f\|_\infty,$$

где наилучшая постоянная $C_3 \le C_2$ строго больше единицы.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МАЦАЕВА О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ

Беломытцева Е.Г. (Воронеж)
vio@func.vsu.ru

Обозначим через φ и ψ отображения из Z в Z, то есть $\varphi(j)$ и $\psi(i)$ будут являться целочисленными функциями целочисленного аргумента. Этим функциям поставим в соответствие следующее преобразование $\mathcal{T}_{\varphi\geq\psi}$ ограниченных матриц:

$$\mathcal{T}_{\varphi\geq\psi}(a)_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } \varphi(j) \geq \psi(i), \\ 0, & \text{если } \varphi(j) < \psi(i). \end{cases}$$

Нашей целью является исследование свойств ограниченности оператора $\mathcal{T}_{\varphi\geq\psi}$ в пространствах матриц, соответствующих классам Неймана–Шаттена.

Теорема 1. *Для любого $1 < p < \infty$ и любого оператора $A \in S_p(l_2)$ матрица $\mathcal{T}_{\varphi\geq\psi}(A)$ порождает оператор класса $S_p(l_2)$ и*

$$\|\mathcal{T}_{\varphi\geq\psi}.(A)\|_{S_p(l_2)} \leq \gamma_p \|A\|_{S_p(l_2)},$$

где константа γ_p не зависит от A, φ и ψ.

Эта теорема обобщает знаменитую теорему В.И.Мацаева для операторов треугольного усечения (см., например, [1]). Необходимость рассматривать усечения отличные от треугольных возникла в частности в [2].

Следствие 1. *Преобразование $M_E : \{a_{ij}\} \mapsto \{a_{ij}\chi_E(i,j)\}$, где $E = \{(i,j);\varphi_1(j) \geq \psi(i) > \varphi_0(j)\}$, а φ_0, ψ, φ_1 произвольные функции, является ограниченным оператором в пространстве $S_p(l_2)$ при $1 < p < \infty$.*

Ясно, что индексы i и j можно поменять местами.

Следствие 2. *Мультипликатор $M_u : \{a_{ij}\} \mapsto \{a_{ij}u_{ij}\}$ где $u_{ij} = \frac{1}{\psi(i)-\varphi(j)}$ ограниченно действует в пространтсве S_p при $1 < p < \infty$.*

Литература

[1] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Теория вольтеровых операторов в гильбертовом пространстве и ее преложения. М.: "Наука", 1967.

[2] Dodds P.G., Dodds T.K., de Pagter B., Sukochev F.A. Lipschitz continuty of the absolute value and Riesz projection in

symmetric operator spaces // Functional Analysis. 1997. V 148. P.28–69.

О ЛИНЕЙНО-ОДНОРОДНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ С ДИСКРЕТНЫМИ ИЗОТРОНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ C^3

Белых Ф.А., Лобода А.В. (Воронеж)

lob vgasa.voronezh.su

Рассмотрим вещественную гиперповерхность $M \in \mathbf{C}^3$, заданную уравнением

$$Im\ z_3 = (|z_1|^2 + |z_1|^2) +$$
$$+(\alpha_1(z_1^2 + \overline{z}_1^2) + \alpha_2(z_2^2 + \overline{z}_2^2)) + \sum_{k \geq 3} F_k(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2), \qquad (1)$$

свободным относительно вещественной переменной $Re\ z_3$.

В связи с однородностью таких поверхностей относительно линейных преобразований пространства $\mathbf{C}^3$ возникает вопрос о 5-мерных алгебрах линейных векторных полей, реализуемых матрицами вида

$$Z = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & 0 & p_1 \\ \varphi_3 & \varphi_4 & 0 & p_2 \\ C_1 & C_2 & \varphi_5 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $p_1, p_2 \in \mathbf{C}$, $\mathbf{q} \in \mathbf{R}$ - пять вещественных координат произвольного элемента обсуждаемой алгебры;

$$\varphi_k = \varphi_{k1}p_1 + \varphi_{k2}p_2 + \varphi_{k3}\overline{p}_1 + \varphi_{k4}\overline{p}_2 \quad (k = 1, ..\, 5)$$

- линейные относительно $p_1, p_2, \overline{p}_1, \overline{p}_2$ функции;

при этом $\varphi_5(p, \overline{p})$ - вещественнозначная функция, а

$$C_1 = 2i(\overline{p}_1 + 2\alpha_1 p_1), \quad C_2 = 2i(\overline{p}_2 + 2\alpha_2 p_2)$$

при некоторых вещественных неотрицательных параметрах α_1, α_2 (такие алгебры соответствуют однородным гиперповерхностям с дискретными изотропиями).

Будем называть алгебру матриц вида (2) диагональной, если $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$. Случаем общего положения в (1) назовем ситуацию, при которой $\alpha_k \notin \{0, 1/2\}$ $(k = 1, 2)$.

Теорема *Всякая однородная поверхность (1) общего положения, допускающая диагональную 5-мерную алгебру вида (2), является либо квадрикой ($F_k = 0$ при $k \geq 3$), либо поверхностью*

$$v = |z_2|^2 + (1 + z_1)^A \overline{(1 + z_1)^A}, \quad A \in \mathbf{C}.$$

ПОДПРОСТРАНСТВА ПРОСТРАНСТВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ, СОСТОЯЩИЕ ИЗ САМЫХ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Бережной Е.И. (Ярославль)

smirn@gw.yspu.yar.ru

В геометрической теории банаховых пространств гладких функций значительный интерес представляет следующая задача (на нее снова обращалось внимание в [1]).

Задача А. *Пусть задано некоторое банахово пространство гладких функций X. Существует ли бесконечномерное замкнутое подпространство $Y \subset X$ такое, что у каждой отличной от тождественного нуля функции $y \in Y$ гладкость не лучше, чем у самой негладкой функции из X.*

Пусть ω есть модуль непрерывности первого порядка, $H(\omega)$ - соответствующее пространство Гельдера на $[0, 1]$, $H^0(\omega)$ - подмножество $H(\omega)$, состоящее из функций x, для каждой из которых найдется своя точка $t_0 \in (0, 1)$ в которой справедливо хотя бы одно из соотношений

$$lim_{h \to +0} \frac{|x(t+h) - x(s)|}{\omega(h)} = 0, \qquad lim_{h \to -0} \frac{|x(t+h) - x(s)|}{\omega(|h|)} = 0.$$

Теорема 1. *Пусть модуль непрерывности удовлетворяет соотношению*

$$\underline{\lim}_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{h} = \infty.$$

Тогда существует замкнутое бесконечномерное подпространство $B \subset H(\omega)$ такое, что каждая отличная от тождественного нуля функция $x \in B$ не принадлежит $H^0(\omega)$.

Для пространства непрерывных функций справедлив следующий окончательный результат.

Теорема 2. *Существует замкнутое бесконечномерное подпространство $G \subset C([0,1])$ такое, что каждая отличная от тождественного нуля функция $x \in G$ не имеет ни в одной точке $(0,1)$ ни правой, ни левой конечной производной.*

Литература

[1] Fonf V.P., Gurariy V. I., Kadets M.I. An infinite dimensional subspace $C[0,1]$ consisting of nowhere differentiable functions. Comp. rend. Acad. Bulg. Sci., **52**, No. 11-12, 13 - 16, (1999).

КРИТЕРИЙ СОЛ ДЛЯ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ-УОЛША С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Блошанская С.К., Блошанский И.Л. (Москва)[1]

E-mail: igorbloshn.msk.ru

В работе ставится и изучается задача: как изменяются (если изменяются) множества сходимости и расходимости всюду или почти всюду (п.в.) кратного ряда Фурье-Уолша функции $f \in L_p$, $p \geq 1$, $f(x) = 0$ на некотором множестве положительной меры $\mathbf{A} \subset I^N = [0,1)^N$, $N \geq 2$, в зависимости от поворота системы координат (т.е. в зависимости от элемента $\tau \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ - группа вращений $\mathbf{R}^N$ относительно начала координат).

Для кратных тригонометрических рядов и интегралов Фурье аналогичная задача (для сходимости не только почти всюду, но и всюду) исследовалась одним из авторов ранее (см. [1]).

Так как нами (1993-1997 г., см., например, [2])) был изучен вопрос об изменении структуры и геометрии множеств сходимости и расходимости (п.в.) указанных разложений Фурье в зависимо-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00355)

сти от изменения структуры и геометрии множества A (см. критерий слабой обобщенной локализации п.в. - СОЛ для кратных рядов Фурье-Уолша), то сформулированная выше задача была сведена к изучению вопроса об изменении геометрии множеств $\tau(\mathbf{A}) \cap T^N$ и $T^N \setminus supp(f \circ \tau)$ в зависимости от "поворота", т.е. от $\tau \in \mathcal{F}$.

В работе рассматриваются две постановки данной задачи (в зависимости от того, как понимается ряд Фурье функции $f \circ \tau$) и приведены (для обоих случаев) возможные решения задачи для любых $\tau \in \mathcal{F}$ и $N \geq 2$.

Вопросы сходимости тригонометрических рядов Фурье функций $f \circ \psi$, когда $f \in \mathbf{C}$, а ψ - гомеоморфизм, $\psi : T^N \to T^N$ (где $T^N = [\pi, \pi)^N$ $- N$-мерный тор), исследовались в работах: H.Bohr (1935 г.), А.М. Олевского (1984 г.) для $N = 1$; А.А.Саакяна (1979 г.), С.Ш.Галстяна и Г.А.Карагуляна (1998 г.) для $N > 1$; О.С.Драгошанского ($N = 2$, $f \in L_\infty$, сходимость п.в., а $\psi = \tau$ - поворот на $\frac{\pi}{4}$, 1999 г. см. [3]).

Литература

[1] Блошанский И. Л. Критерий СОЛ для кратных разложений Фурье с точки зрения изометрических преобразований // Теория приближения функций и операторов. Тез. докл. Межд. конф., посв. 80-л. со дня рожд. С.Б.Стечкина. Екатеринбург. 2000. С.40-42.

[2] Блошанская С. К.,Блошанский И. Л. Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье-Уолша функций из $L_p, p \geq 1$ // Труды МИ РАН. 1997. Т. 214. С.83-106.

[3] Драгошанский О. С. О сходимости и расходимости двойных рядов Фурье функций при поворотах системы координат //Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тез. докладов. Воронеж. 1999. С.13.

ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ НАД ПОЛУКОЛЬЦАМИ

С.Л. Блюмин (Липецк)

slb@stu.lipetsk.su

Пусть $SR = < A, \cdot, 1, +, 0 >$ - некоторое *полукольцо*, где $0 \neq 1$

, $< A, \cdot, 1 >$, $< A, +, 0 >$ - моноиды, $\cdot$ дистрибутивно относительно $+$ с обеих сторон и $\forall c \in A : 0 \cdot c = c \cdot 0 = 0$. Пусть $Mat(SR)$ - множество всех матриц над SR , являющееся *частичным полукольцом* относительно операций $+$ поэлементного сложения и $\cdot$ обычного матричного умножения, выполнимых при условии согласования размеров матриц. В частности, множество $Mat_{n\times n}(SR)$ квадратных матриц порядка n является полукольцом.

Рассматривается *матричное уравнение* $A \cdot X \cdot B = C$, где $A \in Mat_{m\times n}(SR), X \in Mat_{n\times p}(SR), B \in Mat_{p\times q}(SR)$, $C \in Mat_{m\times q}(SR)$.

Исследование. Пусть $A \in Mat_{m\times n}(SR)$ *регулярна (обобщенно обратима)*, то есть существует $A^- \in Mat_{n\times m}(SR)$ (*обобщенная обратная* к A) такая, что $A \cdot A^- \cdot A = A$; то же для B. Известно для колец (см., например, [1]) и остается верным для полуколец , что

$\{A \cdot X \cdot B = C$ совместно$\} \Longleftrightarrow \{A \cdot A^- \cdot C \cdot B^- \cdot B = C, X = A^- \cdot C \cdot B^-$ - некоторое решение$\}$.

Общее решение. Пусть регулярные $A \in Mat_{m\times n}(SR), B \in Mat_{p\times q}(SR)$ *регулярно дополняемы справа, слева*, то есть существуют $\widetilde{A} \in Mat_{n\times n}(SR), \widehat{B} \in Mat_{p\times p}(SR)$ (*правое, левое регулярные дополнения* к A, B) такие, что $A \cdot \widetilde{A} = 0$, $A^- \cdot A + \widetilde{A} = I$, $\widehat{B} \cdot B = 0, B \cdot B^- + \widehat{B} = I$. Тогда общее решение записывается в виде

$X = A^- \cdot C \cdot B^- + A^- \cdot A \cdot Y \cdot \widehat{B} + \widetilde{A} \cdot Y, \forall Y \in Mat_{n\times p}(SR)$.

Обобщенное обращение. Для отыскания обобщенной обратной к A допускает распространение на случай полуколец (с некоторыми модификациями) рекуррентный алгоритм типа Гревиля для обобщенного обращения матриц над ассоциативными кольцами из [1]. В нем $A \in Mat_{m\times n}(SR)$ представляется набором своих столбцов $a_k \in Mat_{m\times 1}(SR), k = 1, ..., n$, $A_k = [A_{k-1}, a_k] = [a_1, ..., a_k]$, $k = 2, ..., n, A_1 = a_1, A_n = A$. Пусть $a_1 = c_1$.

Шаг 1. Пусть столбец A_1 регулярен; тогда $A_1^- = c_1^-$.

Пусть после шага $k-1$ найдена A_{k-1}^-. Для следующего шага k, пусть A_{k-1} регулярно дополняема слева.

Шаг k. Вычисляется столбец, *первая связка* A_{k-1} *с* a_k, $c_{k-1,k} = \widehat{A}_{k-1} \cdot a_k$; пусть он регулярен; определяется строка, *вторая связка* A_{k-1} *с* a_k, как $f_{k-1,k} = c_{k-1,k}^- \cdot \widehat{A}_{k-1}$, если

$c_{k-1,k} \neq 0$, и произвольно в противном случае ; пусть существует матрица $S_{k-1,k}$, *третья связка* A_{k-1} *с* a_k, такая, что $S_{k-1,k} + a_k \cdot f_{k-1,k} = I$; тогда

$$A_k^- = \begin{bmatrix} A_{k-1}^- \cdot S_{k-1,k} \\ f_{k-1,k} \end{bmatrix}.$$

В предположениях, сделанных на каждом шаге $k = 1, ..., n$ алгоритма, A регулярна и $A^- = A_n^-$.

Тем самым обобщенное обращение матриц над полукольцами сводится к обобщенному обращению столбцов $c_{k-1,k}, k = 1, ..., n, c_{0,1} = c_1$, которое, в свою очередь, с помощью "транспонированного" алгоритма сводится к обобщенному обращению (вплоть до) элементов полукольца.

Если $R =< A, \cdot, 1, \underset{\sim}{+}, 0 >$ - ассоциативное кольцо с единицей, то при использовании $\widetilde{A} = I - A^- \cdot A, \widehat{B} = I - B \cdot B^-$ все предположения о регулярной дополняемости автоматически выполняются и обобщенное обращение матриц сводится к обобщенному обращению (вплоть до) их элементов в предположении регулярности последних. В частности, этим дается конструктивное доказательство известной теоремы о регулярности любой матрицы над регулярным кольцом. В случае полуколец существенна и регулярная дополняемость. О различных типах дополнений в полукольцах см. [2].

Если $B =< A, +, 0, \cdot, 1,' >$ - булева алгебра, то все элементы идемпотентны, а значит и регулярны, и можно положить $a^- = a$, $\widetilde{a} = \widehat{a} = a'$ - обычное дополнение в B.

Литература

1. Блюмин С.Л., Миловидов С.П. Исследование и решение матричных уравнений над ассоциативными кольцами // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т.34, N 2. С.163-174.

2. Golan J.S. Semirings and their Applications. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1999.

МЕТОД ФУРЬЕ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

Богатов Е.М. (Старый Оскол)[1]

На стратифицированном множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ рассматривается дифференциальный оператор $\mathcal{L}u = (\Delta_p(r\Delta_p) - \Delta_q + k)u$ (подробности см., например, в [1]), а также задача

$$\mathcal{L}u - \lambda u = 0 \tag{1}$$

в обобщённой постановке.
Обозначим через $\lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \ldots \leq \lambda_k^2 \leq \ldots$ - последовательность собственных значений задачи (1), а через $\{v_k(x)\} \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ - соответствующую полную ортонормированную в $L_\mu^2(\Omega)$ последовательность собственных функций.
Основной интерес для нас представляет нахождение функции $u(x,t)$ в области $Q_T = \Omega \times (0,T)$, удовлетворяющей требованиям

$$\mathcal{L}u + u_{tt} = f(x,t) \in L_2(Q_T), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \phi(x) \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega), \tag{3}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \in L_\mu^2(\Omega), \tag{4}$$

$$u|_{S_T} = (\nabla u)_\nu|_{S_T} = 0, \tag{5}$$

где $S_T = \partial\Omega \times [0,T]$.

С физической точки зрения задача (2)-(5) моделирует, для $\Omega \in \mathbf{R}^2$, распространение волн в плоской пластинчато-стержневой системе при наличии обьёмно распределенной вынуждающий силы $f(x,t)$.

Обозначим через $\mathcal{W}$ - "энергетический" класс функций $u(x,t)$ задачи (2)-(5), определяемый так же, как и в [2]. Справедлива следующая

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минвуза: грант Минвуза (КЦ СпбГУ) 97-0-1.8-100, грант Минвуза (КЦ Новосибирского госун-та).

Теорема.

Решение задачи (2)-(5) представимо в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t + T_k(t))v_k(x),$$

сходящегося в $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ *равномерно по* $t \in [0,T]$; *его сумма принадлежит классу* $\dot{W}$.

Здесь $a_k =< \phi, v_k >_\mu$, $b_k = \dfrac{1}{\lambda_k} < \psi, v_k >_\mu$; $< , >_\mu$ - скалярное произведение в $L^2_\mu(\Omega)$ (см. [1]); $T_k = \dfrac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^t < f, v_k >_\mu \sin \lambda_k(t-\tau)d\tau$.

Литература

[1] Пенкин О.М., Богатов Е.М. О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах. // Матем. заметки, 2000, Т.68, вып. 5.

[2] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973, 407 с.

УСТОЙЧИВОСТЬ ГИБКОЙ НЕСОВЕРШЕННОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

Болдырева Н.А. (Саратов)

Рассматривается замкнутая круговая гибкая цилиндрическая оболочка конечной длины с начальными несовершенствами формы шарнирно закрепленная по торцам. Равномерное внешнее давление приложено к части поверхности оболочки: $\beta_1 l - \beta l \leq x \leq \beta_1 l + \beta l$; $\alpha_1 R - \alpha R \leq y \leq \alpha_1 R + \alpha R$. Здесь l, R - длина и радиус оболочки; x, y - координаты по направляющей и образующей оболочки; α, β задают величину площадки загружения; α_1, β_1 задают смещение площадки загружения по направляющей и образующей соответственно. Требуется оценить влияние начальных несовершенств формы оболочки на величину статической критической нагрузки при различных размерах, видах и расположении площадки загружения.

При решении данной задачи применяются дифференциальные уравнения геометрически нелинейной теории гибких пологих оболочек в смешанной форме кинематической модели Кирхгофа-Лява [1]. Уравнения приводятся к безразмерному виду и к системе применяется процедура И.Г.Бубнова. Решение ищется в виде: $(w, \Phi) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{M} (A_{ij}, B_{ij}) \sin i\pi\bar{x} \cos j\bar{y}$. Начальные несовершенства задаются в виде: $w_0 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{M} a_{ij} \sin i\pi\bar{x} \cos j\bar{y}$. Здесь w_0, w – начальный и полный прогибы соответственно, Φ – функция усилия, $\bar{x}$, $\bar{y}$ – безразмерные координаты. Полученная система нелинейных алгебраических уравнений решается методом Ньютона.

Численные расчеты проводились для случая начальных несовершенств формы $w_0 = \varepsilon_1 \sin \pi x$. Строились зависимости прогиб-нагрузка. По ним определялась статическая критическая нагрузка. Найдены зависимости критической нагрузки от длины площадки загружения (параметр β) и ширины площадки загружения (параметр α) для идеальной и несовершенной оболочек. Для площадки загружения, заданной в форме кольца, построены зависимости критической нагрузки идеальной и несовершенной оболочек от расположения площадки по длине оболочки (параметр β_1). Аналогичные зависимости построены для площадки прямоугольной формы.

Литература

1. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гостехиздат, 1956. – 419 с.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ОДНОМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Боровских А.В. (Воронеж)[1]

Теорема. Пусть $k(x) > 0$ и функция $\phi(x) = \frac{k'(x)}{2k(x)}$ непрерывно дифференцируема. Тогда общее решение уравнения

$$k(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}k(x)\frac{\partial u}{\partial x},$$

в классе функций $u(t,x)$, дважды непрерывно дифференцируемых и имеющих конечную энергию
$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] k(x)\,dx$ описывается формулой

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sqrt{\frac{k(x-t)}{k(x)}}V(x-t) + \sqrt{\frac{k(x+t)}{k(x)}}W(x+t)+ \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\sqrt{\frac{k(y)}{k(x)}}V(y)J\left(\frac{x+y-t}{2},\frac{x-y-t}{2},x\right)dy- \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\sqrt{\frac{k(y)}{k(x)}}W(y)J\left(\frac{x+y+t}{2},\frac{x-y+t}{2},x\right)dy+ \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\sqrt{\frac{k(y)}{k(x)}}W(y)\tilde{J}\left(\frac{x+y-t}{2},\frac{x-y-t}{2},x\right)dy- \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\sqrt{\frac{k(y)}{k(x)}}V(y)\tilde{J}\left(\frac{x+y+t}{2},\frac{x-y+t}{2},x\right)dy
\end{aligned}$$

где V и W – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, такие, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Big[\left(V'(x) + \phi(x)V(x) - \phi(x)W(x)\right)^2 + \\
+\left(W'(x) + \phi(x)W(x) - \phi(x)V(x)\right)^2\Big]\, k(x)\,dx < \infty,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке: Грант Минвуза (КЦ СПбГУ) № 97-0-1.8-100, Грант Минвуза (КЦ Новосибирского госун-та), грант ВГУ НИЧ-0017

и связанные с начальными условиями $u_0(x), u_1(x)$ соотношениями

$$V(x)+W(x)=u_0(x), \quad -[k(x)V(x)]'+[k(x)W(x)]'=k(x)u_1(x),$$

а ядра $J(a,b,x)$ и $\tilde{J}(a,b,x)$ являются решениями интегральных уравнений

$$J(a,b,x)=-\int\limits_a^x \phi(\sigma-b)\phi(\sigma)\,d\sigma-\int\limits_a^x\int\limits_b^0 \phi(\sigma-b)\phi(\sigma-\tau)J(\sigma,\tau,x)\,d\tau d\sigma,$$

$$\tilde{J}(a,b,x)=\phi(a)-\int\limits_b^0\int\limits_a^x \phi(a-\tau)\phi(\sigma-\tau)\tilde{J}(\sigma,\tau,x)\,d\sigma d\tau.$$

К ПРОБЛЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТА С ЗАДАННЫМИ НАИМЕНЬШИМИ УКЛОНЕНИЯМИ

Бородин П.А. (Москва)[1]

Пусть $(X,\|\cdot\|)$ – бесконечномерное банахово пространство, $Y_1\subset Y_2\subset\ldots$ – счетная система вложенных замкнутых линейных подпросранств пространства X, полная в X: $\overline{\cup_{n=1}^{\infty}Y_n}=X$. Положим $\rho_n(x):=\rho(x,Y_n)=\inf\{\|x-y\|:y\in Y_n\}$ – расстояние от элемента $x\in X$ до подпространства Y_n. Нетрудно видеть, что $\rho_1(x)\geq\rho_2(x)\geq\ldots\geq\rho_n(x)\geq\ldots$ и $\rho_n(x)\to 0$ (то есть $\rho_n(x)\searrow 0$) для любого элемента x. Естественно возникает следующий вопрос.

(1) *Для всякой ли последовательности $d_n\searrow 0$ найдется такой элемент $x\in X$, что $\rho_n(x)=d_n$, $n=1,2,\ldots$?*

В общем случае задача (1) до сих пор не решена. Теорема С.Н.Бернштейна (1938) утверждает, что для пространства $X=C[0,1]$ и подпространств $Y_n=P_n$ многочленов степени

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 99-01-00119).

не выше n задача (1) решается положительно. А.Ф.Тиман [1] перенес доказательство теоремы Бернштейна на случай произвольной системы вложенных конечномерных подпространств Y_n в любом пространстве X. В.Н.Никольский [2] показал, что для положительного решения задачи (1) при любой системе $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространство X необходимо должно быть рефлексивным. Если X – бесконечномерное гильбертово пространство, то задача (1) имеет решение при любых $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (И.С.Тюремских [3]). Кроме того, как показал И.С.Тюремских, в любом бесконечномерном пространстве X для любой системы вложенных подпространств $\{Y_n\}$ и любой последовательности $d_n \searrow 0$ найдется такой элемент x, что $\rho_n(x) \geq d_n$. В частных случаях задача (1) решалась в линейных метрических пространствах (см., напр., [4]).

Утверждение 1. *Пусть X – рефлексивное банахово пространство, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная система вложенных подпространств в X, а последовательность неотрицательных чисел $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям $d_n \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда найдется такой элемент $x \in X$, что $\rho_n(x) = d_n$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Рефлексивность пространства X в утверждении 1 существенна.

Утверждение 2. *Пусть X есть одно из пространств l_p, $1 < p < \infty$, или c_0. Тогда для любой системы вложенных подпространств $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию $\dim(Y_{n+1}/Y_n) = \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ и любой числовой последовательности $d_n \searrow 0$ найдется такой элемент $x \in X$, что $\rho_n(x) = d_n$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Литература

[1] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.

[2] Никольский В.Н. // Уч. зап. Калининск. пед. ин-та. 1963. Т. 29. С. 121-125

[3] Тюремских И.С. // Там же. 1964. Т. 39. С. 53-75.

[4] Васильев А.И. // Докл. РАН. 1999. Т. 365, N 5. С. 583-585.

О ДОПУСТИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПАР ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Бочаров А.В. (Краснодар)

du@math.kubsu.ru

Изучаются условия допустимости пар пространств (A_0, A_0), (C_0, C_0) для оператора Вольтерра

$$\tilde{Q}u = \int_0^t \int_a^b Q(t,x,s,y)u(s,y)dyds$$

с непрерывным ядром $Q(t,x,s,y)$ и уравнения $u = \tilde{Q}u + f$.

Пространство $A_0(C_0)$ состоит из непрерывных по совокупности переменных на множестве $[0,+\infty)\times[a,b]$ функций $u(t,x)$, имеющих при $t \to +\infty$ равномерно по x конечный (нулевой) предел. Сформулируем один из результатов.

Теорема. Пара (A_0, A_0) допустима для интегрального оператора $\tilde{Q}$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) $\sup\limits_{\substack{t\geq 0\\ a\leq x\leq b}} \int\limits_0^t \int\limits_a^b |Q(t,x,s,y)|dyds < \infty$;

2) для любых $T \geq 0$ и X из $[a,b]$ существует равномерный по x из $[a,b]$ конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \int_a^b Q(t,x,s,y)\varphi_{T,X}(s,y)dyds,$$

где

$$\varphi_{T,X}(t,x) = \begin{cases} (T-t)_+(X-x)_+, & T>0, \quad X\in(a,b]; \\ (X-x)_+, & T=0, \quad X\in(a,b];. \\ 1, & T=0, \quad X=a. \end{cases}$$

Литература

1. Цалюк З.Б. Интегральные уравнения Вольтерра // Матем.анализ, т.15(ВИНИТИ, Итоги науки и техники),1977.

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СПЕКТРА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Бравый Е.И., Плаксина В.П. (Пермь)
bravyi@perm.ru, plaksin@psu.ru

Доклад посвящен установлению у части спектра краевой задачи Дирихле для функционально-дифференциального уравнения второго порядка тех осцилляционных свойств, которыми обладает спектр задачи Дирихле для обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены условия, при которых первые две собственные функции задачи для функционально-дифференциального уравнения образуют систему Чебышева. Выделен широкий класс функционально-дифференциальных уравнений второго порядка, у которых первые три собственные функции не могут образовывать систему Чебышева. Этот класс включает в себя, например, уравнения с постоянным запаздыванием. Для уравнений из этого класса система первых трех собственных функций не является чебышевской при сколько угодно малом промежутке, на котором рассматривается уравнение, а также при сколько угодно малых коэффициентах и сколько угодно малой близости функционально-дифференциального уравнения к обыкновенному.

ОБ УСЛОВИЯХ ПАРАМЕТРИЗУЕМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Брагина Н.А. (Пермь)

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\mathcal{L}x = \mathcal{F}x \qquad (1)$$

где $\mathcal{L} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ — линейный ограниченный оператор, $\mathcal{F} : \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ — нелинейный оператор, $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ — $(\mathbf{B})$-пространства.

Говорят, что уравнение (1) допускает конечномерную параметризацию, если множество всех решений уравнения M гомеоморфно пространству $\mathbf{R}^m$. Вопрос об условиях параметризуемости уравнения (1) актуален в теории функционально-дифференциальных уравнений.

Работа посвящена достаточным условиям конечномерной параметризации уравнения (1).

Для линейного оператора $\mathcal{L} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ коэффициент сюръективности определим равенством:

$$q(\mathcal{L}) = \inf_{z \neq 0} \frac{\| \mathcal{L}^* z \|}{\| z \|},$$

где $\mathcal{L}^* : \mathbf{Y}^* \to \mathbf{X}^*$ сопряженный с $\mathcal{L}$ оператор.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1) оператор $\mathcal{F} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ удовлетворяет условию Липшица с константой k;

2) на ядро оператора $\mathcal{L}$ существует проектор единичной нормы;

3) выполняется неравенство $k < q(\mathcal{L})$.

Тогда уравнение (1) допускает конечномерную параметризацию.

Пусть $\mathbf{H}$ — действительное гильбертово пространство.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{G} : \mathbf{Y} \to \mathbf{H}$ — некоторый правый обратный оператор для $\mathbf{L}$ и $-\mathcal{G}\mathcal{F}$ — монотонный по Минти-Браудеру оператор. Тогда уравнение (1) допускает конечномерную параметризацию.

Пример. Рассмотрим сингулярное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}(t) - \frac{1}{t}\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \tag{2}$$

где $x \in \mathbf{W}_2[0,1]$ — пространство абсолютно непрерывных функций с $\ddot{x}(t) \in \mathbf{L}_2[0,1]$. Если $f(t,u)$ удовлетворяет по второму аргументу условию Липшица с $k < 1$, то уравнение (2) допускает конечномерную параметризацию.

БЕСКОНЕЧНОКРАТНЫЕ СТЕПЕНИ И ЭКСПОНЕНТЫ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ИМЕЮЩИМИ ДВА РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯ

Буланов А.П. (Обнинск)

bulanov@iate.obninsk.ru

В работе [1] Л. Эйлер доказал, что последовательность $\gamma = r, \delta = r^{\gamma}, \psi = r^{\delta}, \ldots$ сходится на отрезке $[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}]$. Отсюда следует сходимость другой последовательности $\gamma = r^{\beta}, \delta = (r^{\beta})^{\gamma}, \psi = (r^{\beta})^{\delta}, \ldots$ на отрезке $[e^{-\frac{e}{\beta}}, e^{\frac{1}{e\cdot\beta}}]$.

Пусть последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $a_k \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n| = \overline{a} < \infty$,. Тогда предельная функция

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} z^{a_1 \cdot z^{\cdot^{\cdot^{a_{n-1}\cdot z^{a_n}}}}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle z; a_1, a_2, \ldots \rangle \qquad (1)$$

регулярна в области U, причем $U \supset e^K$, где e^K- образ круга $K = \{w : |w| < \frac{1}{e\cdot\overline{a}}\}$ на римановой поверхности логарифма при отображении $z = e^w$ (см.[2]). При этом любая положительная последовательность $\{a_k\}$, имеющая предел $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, доставляет точку $z = x = exp(\frac{1}{e\cdot a})$ в качестве граничной точки области сходимости соответствующей предельной функции (1). Если же $\underline{a} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n| < \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n| = \overline{a}$, то правая граничная точка на оси x может быть внутренней точкой отрезка $[exp(\frac{1}{e\cdot\overline{a}}), exp(\frac{1}{e\cdot\underline{a}})]$

Теорема *Пусть* $a_{2k} = 1, \quad a_{2k+1} = \beta, \quad |\beta| > 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$ *и пусть*

$$q = \sqrt{|\beta|} \cdot \exp\left(\frac{2\tau^2}{1-\tau^2}\right),$$

где $\tau = \tau(\alpha) = \tau(\sqrt{|\beta|})$ *есть обратная функция по отношению к функции*

$$\alpha(\tau) = \sqrt{|\beta|} = \frac{1+\tau}{1-\tau} \cdot \exp\left(\frac{2\tau}{1-\tau^2}\right), \quad 0 \leq \tau < 1.$$

Тогда $U \supset e^K$, *где* U*-область регулярности* $f(z) = \langle z; \beta, 1, \beta, 1, \ldots \rangle$, e^K*— образ круга* $K = \{w : |w| < \frac{1}{e\cdot q}\}$ на римановой поверхности логарифма.

Гипотеза *Пусть $\beta > 1$. Для любого $p \in [exp(\frac{1}{e\cdot\beta}), exp(\frac{1}{e})]$ найдется такая последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, где a_k либо 1, либо β, что p будет граничной точкой области сходимости предельной функции $f(z) = \langle z; a_1, a_2, \ldots \rangle$.*

Если рассматривать бесконечнократные экспоненты $g(z) = \langle e^z; a_1, a_2, \ldots \rangle$, то в формулировке гипотезы вместо $[exp(\frac{1}{e\cdot\beta}), exp(\frac{1}{e})]$ следует взять отрезок $[\frac{1}{e\cdot\beta}, \frac{1}{e}]$.

Литература

1.Euler Leonard. De formulis exponentialibus replicatis// Acta Academiae Scientiarum
Petropolitanae.1778.V.1.P.38-60.

2.Буланов А.П. Ругулярность степеней бесконечной кратности//Известия АНРФ, серия математическая. Т.62.- 5.- 1998.- С.49-78.

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНОКРАТНЫХ СТЕПЕНЕЙ И О ТОЧНОСТИ ИХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Буланов А.П. (Обнинск)

Пусть последовательность такова, что $a_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$ и $\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| = \overline{a} < \infty$, и пусть

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} z^{a_1 \cdot z^{\cdots a_{n-1} \cdot z^{a_n}}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle z; a_1, a_2, \ldots \rangle. \qquad (1)$$

Поскольку функция $w = Ln\ z$ многозначна, то образы отображения $z = e^w$ следует рассматривать на римановой поверхности логарифма. На ней же будем рассматривать область U, в которой функция (1) регулярна.

Теорема 1. *Если e^K- образ круга $K = \{w : |w| < \frac{1}{e\cdot\overline{a}}\}$ на римановой поверхности логарифма при отображении $z = e^w$, а U-область регулярности $f(z) = \langle z; a_1, a_2, \ldots \rangle$, то $U \supset e^K$.*

Теорема 1а. *Пусть коэффициенты $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ и существует предел $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Тогда граничная точка $z = x = \exp(\frac{1}{e\cdot a})$ области e^K не является точкой регулярности функции $f(z) = \langle z; a_1, a_2, \ldots \rangle$.*

Теорема 2. *Пусть* $a_{2k} = 1$, $a_{2k+1} = \beta$, $|\beta| > 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *и пусть*

$$q = \sqrt{|\beta|} \cdot \exp\left(\frac{2\tau^2}{1-\tau^2}\right), \qquad (2)$$

где $\tau = \tau(\gamma) = \tau(\sqrt{|\beta|})$ *есть обратная функция по отношению к функции*

$$\gamma(\tau) = \sqrt{|\beta|} = \frac{1+\tau}{1-\tau} \cdot \exp\left(\frac{2\tau}{1-\tau^2}\right), \quad 0 \le \tau < 1. \qquad (3)$$

Тогда $U \supset e^K$, *где* U*-область регулярности* $f(z) = \langle z; \beta, 1, \beta, 1, \ldots\rangle$, e^K *– образ круга* $K = \{w : |w| < \frac{1}{e \cdot q}\}$.

Теорема 2а. *Пусть в условиях теоремы 2 число* $\beta > 1$, *число* q *определяется по формулам (2) и (3). Тогда граничная точка* $z = x = \exp(\frac{1}{e \cdot q})$ *области* e^K *не является точкой регулярности функции* $f(z) = \langle z; \beta, 1, \beta, 1, \ldots\rangle$.

Теорема 1 доказана в работе [1] с тем ограничением, когда от многозначного логарифма $Ln\ z$ берется лишь главная ветвь $\ln z$, соответствующая значению $\ln 1 = 0$.

Динамическая система

$$x_k = x_k \cdot \alpha_{k+1} \cdot x_{k+1} \cdot \left[1 + t \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} + t^2 \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} \cdot \alpha_{k+3} \cdot x_{k+3} + \cdots \right.$$
$$\cdots + t^{m-k-1} \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} \cdots \alpha_m \cdot x_m +$$
$$+ t^{m-k} \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} \cdots \alpha_m \cdot x_m \cdot \alpha_1 \cdot x_1 + \cdots$$
$$\left. \cdots t^{m-1} \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} \cdots \alpha_k \cdot x_k \right] \cdot \left[1 - t^m \cdot \alpha_1 \cdot x_1 \cdot \alpha_2 \cdot x_2 \cdots \alpha_m \cdot x_m\right]^{-1}; \quad (4)$$

с начальными условиями $x_k(0) = 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, имеет решение, представимое системой бесконечнократных экспонент

$$x_k(t) = \langle e^t; \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m, \alpha_1, \ldots\rangle, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \qquad (5)$$

По теореме 1 гарантировано, что все эти функции имеют смысл, если $t \in \left(-\frac{1}{e \cdot \overline{\alpha}}, \frac{1}{e \cdot \overline{\alpha}}\right)$, где $\overline{\alpha} = \max\limits_{1 \le k \le m} |\alpha_k|$.

В общем случае $\min\limits_{1 \le k \le m} \alpha_k < \max\limits_{1 \le k \le m} \alpha_k$, поэтому интервал сходимости для всех функций (5) может быть расширен (см.[2-3]).

При $m = 2$ решение может быть сведено к 2-м экспонентам бесконечной кратности

$$x(t) = \langle e^t; \beta, 1, \beta, 1, \ldots \rangle, \quad y(t) = \langle e^t; 1, \beta, 1, \beta, 1, \ldots \rangle,$$

$$t \in \left(-\frac{1}{e \cdot q}, \frac{1}{e \cdot q}\right).$$

Теорема 2 точно отвечает на вопрос: какую величину следует взять вместо $\overline{\alpha} = \max\limits_{1 \le k \le m} |\alpha_k|$, в случае, если $m = 2$.

Отметим, что в явном виде число q оценивается формулой:

$$q(|\beta|) \le \sqrt{|\beta|} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}(\ln|\beta|) \cdot \frac{\sqrt{|\beta|} - 1}{\sqrt{|\beta|} + 1}\right], \quad 1 \le |\beta| \le 2803.$$

Если $|\beta| > 2803$, в силу вступают другие оценки.

Литература

1. Буланов А.П. Ругулярность степеней бесконечной кратности // Известия АНРФ, серия математическая. Т.62.- №5.- 1998.- С.49-78.

2. Буланов А.П. О степени бесконечной кратности с коэффициентами, имеющими поочередно два значения // Современные проблемы теории функций и их приложения.-Тезисы докладов 9-й Саратовской зимней школы (26 января- 1 февраля 1998г.). – С.31.

3. Амбарцумян Г.А., Буробин А.В. О продолжении функций, представляемых экспонентами бесконечной кратности // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов Воронежской зимней матем. школы (27 января-4 февраля 1999г.). С.16.

МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ПРИНЦИП ПЛОТНОСТИ

Булгаков А.И.,Скоморохов В.В. (Тамбов)
aib@tsu.tmb.ru, uaa@hmd.nnn.tstu.ru

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное пространство с нормой $|\cdot|$, $\text{comp}[\mathbb{R}^n]$ - множество всех непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$, $\text{co}(\cdot)$ - выпуклая оболочка соответстиующего множества, $C^n[a,b]$ - пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с равномерной топологией сходимости.

Обозначим через $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ множество всех функций $\eta:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, обладающих следующими свойствами: при каждых $(x,\delta)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ функция $\eta(\cdot,x,\delta)$ измерима; при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $\delta\in[0,\infty)$ функция $\eta(t,\cdot,\delta)$ непрерывна; для каждых $U\in\text{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta\in[0,\infty)$ существует такая суммируемая функция $m_{U,\delta}:[a,b]\to[0,\infty)$. что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $x\in U$ и $\tau\in[0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,x,\tau)\le m_{U,\delta}(t)$; при почти всех $t\in[a,b]$ и каждого $x\in\mathbb{R}^n$ выполняются равенства $\lim\limits_{\substack{z\to x\\ \delta\to 0+0}}\eta(t,z,\delta)=0$, $\eta(t,x,0)=0$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t)\in F(t,x(t)),\quad t\in[a,b], \tag{1}$$

где отображение $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\text{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

Будем говорить, что многозначное отображение $\widetilde{F}:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\text{comp}[\mathbb{R}^n]$ аппроксимирует отображение $F:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\text{comp}[\mathbb{R}^n]$, если найдется такая функция $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $(x,\delta)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ выполняется оценка

$$h[F(t,x),\widetilde{F}(t,x,\delta)]\le\xi(t,x,\delta). \tag{2}$$

Отображение $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть аппроксимирующим отображение $F(\cdot,\cdot)$ или просто аппроксимирующим. Функция $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ в неравенстве (2) определяет степень близости значения $\widetilde{F}(t,x,\delta)$ в точке $(t,x)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n$ к значению $F(t,x)$ для каждого фиксированного $\delta\in[0,\infty)$.

Эту функцию $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть степенью аппроксимации отображения $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ отображением $\widetilde{F} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ или просто степенью аппроксимации. Будем считать, что $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ определяет способ или метод аппроксимации отображения $F(\cdot,\cdot)$.

Рассмотрим дифференциальное влючение

$$\dot{x}(t) \in \mathrm{co}\, F(t, x(t)), \quad t \in [a,b]. \tag{3}$$

Пусть V - ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$. Обозначим $H(V)$, $H_{\mathrm{co}}(V)$ множества решений включений (1),(3), принадлежащие множеству $V \in C^n[a,b]$, соответственно.

В докладе доказывается, что выполнение равенства $\overline{H(V)} = H_{\mathrm{co}}(V)$ (принцип плотности), где $\overline{H(V)}$ - замыкание множества $H(V)$ в пространстве $C^n[a.b]$, является необходимым и достаточным условием для сходимости множеств решений дифференциальных включений, порожденных отображением $\widetilde{F} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ аппроксимирующим отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, определяющее дифференциальное включение (1).

"БЭНГ-БЭНГ" ПРИНЦИП ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Булгаков А.И.,Григоренко А.А., Жуковский Е.С.
(Тамбов)
aib@tsu.tmb.ru

Пусть IR^n – пространство n-мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$; $\mathrm{comp}[IR^n]$ – множество всех непустых компактов пространства IR^n; $h[\cdot,\cdot]$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами в пространстве IR^n; $||A|| = \max\{|a| : a \in A\}$ ($A \in$ $\in \mathrm{comp}[IR^n]$), $\mathrm{co}(A)$ - выпуклая оболочка, а $\overline{\mathrm{ext}}(A)$ - замыкание множества крайних точек множества A. Обозначим $C^n[a,b]$ ($L^n[a,b]$, $D^n[a,b]$) пространство непрерывных (суммируемых, абсолютно непрерывных) вектор-функций $x : [a,b] \to IR^n$ с нормой $||x||_C = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$ ($||x||_L = \int_a^b |x(s)|ds$, $||x||_D =$

$|x(a)| + ||\dot{x}||_L)$. Измеримость многозначных отображений понимаем в смысле [1].

Будем предполагать, что отображение $F : [a,b] \times C^n[a,b] \to \text{comp}[IR^n]$ обладает следующими свойствами: для любого $x \in C^n[a,b]$ $F(\cdot,t)$ измеримо; существует такая функция $\beta \in L^1[a,b]$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x,y \in C^n[a,b]$ выполняется неравенсво $h[F(t,x); F(t,y)] \leq \beta(t)||x-y||_C$; функция $t \to ||F(t,0)||$ суммируема. Многозначный вектор-функционал $\varphi : C^n[a,b] \to \text{comp}[IR^n]$ обладает свойством: существует такое число $\alpha \geq 0$, что для всех $x,y \in C^n[a,b]$ выполняется неравенство $h[\varphi(x); \varphi(y)] \leq \alpha||x-y||_C$.

Рассмотрим в пространстве $D^n[a,b]$ линейную задачу

$$\mathcal{R}x = 0, \quad lx = 0, \tag{1}$$

где линейный непрерывный оператор $\mathcal{R} : D^n[a,b] \to L^n[a,b]$ фредгольмов,
$l : D^n[a,b] \to IR^n$ - линейный непрерывный вектор-функционал. Будем предполагать, что задача (1) имеет только тривиальное решение. В этом случае существует непрерывный оператор Грина $G : L^n[a,b] \to D^n[a,b]$, определенный равенством $(Gz)(t) = \int_a^b G(t,s)z(s)ds,\ t \in [a,b]$.

Рассмотрим задачи

$$(\mathcal{R}x)(t) \in F(t,x),\ t \in [a,b];\ lx \in \varphi(x); \tag{2}$$

$$(\mathcal{R}x)(t) \in \text{co}F(t,x),\ t \in [a,b];\ lx \in \varphi(x); \tag{3}$$

$$(\mathcal{R}x)(t) \in \overline{\text{ext}}(\text{co}F(t,x)),\ t \in [a,b];\ lx \in \varphi(x); \tag{4}$$

Пусть $H, H_{\text{co}}, H_{\text{ext}}$ множества решений задач (2) - (4), соответственно. В докладе рассматривается вопрос об условиях выполнения равенств $\overline{H} = \overline{H}_{\text{ext}} = H_{\text{co}}$, где $\overline{H}, \overline{H}_{\text{ext}}$ - замыкания соответствующих множеств в пространстве $C^n[a,b]$.

Лиетартура

1. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 497 с.

2. Булгаков А.И., Ткач Л.И. Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Матем. сб. 1998. Т.189. №6. С.3-32.

SEMIGROUPS OF GENERALIZED BOGOLIUBOV TRANSFORMATIONS

Bulinski A.V. (Moscow)
bulinski@math.mipt.ru

The notion of Bogoliubov transformation can be extended in various directions. Recall that, following H.Araki, in the context of algebras of canonical commutation or anticommutation relations one usually refers it to the elements of groups of (anti)automorphisms representing, say, dynamical or symmetry transformations which preserve the underlying algebraic structure. Having in view the theory of open quantum systems it is natural to consider irreversible evolutions related of the CCR or CAR-C^*-algebra. Moreover, suitably perturbed completely positive semigroups of this kind are of interest. The problem of their generation and dilations to semigroups of *-endomorphisms, including the identification of the index-theoretic and entropy invariants, can be studied both on abstract and representation level. Similar considerations can be applied in a wider context of generalized commutation relations, in particular, to spin systems with mixed commutation and anticommutation relations.

We are primarily concerned with the structural properties of continuous semigroupa having faithful invariant factor states on the corresponding C^*- or W^*-algebra. Analysis of the associated Markov contraction semigroups in noncommutative L^p spaces over von Neumann factors plays here a key role. We discuss the large-time asymptotics of dynamical semigroups, some related scattering theory structures and also the manifestation of symmetry and effects of its spontaneous breakdown.

References

[1] Ph.Bianne. Free hypercontractivity. Commun.Math.Phys. 184, 457–474 (1997).

[2] C.Binnenhai. On implementability of quasifree endomorphisms. Rev.Math.Phys. 7, 833–869 (1995).

[3] A.V.Bulinskii. On dynamical semigroups compatible with states of von Neumann algebras. In: International Congress of Mathematicians ICM'98. Berlin 1998. Abstracts of short communications, p. 229–230.

[4] D.Evans, Y.Kawahigashi. Quantum Symmetries on Operator Algebras. Oxford Univ. Press. 1998.

[5] J.T.Ottesen. Infinite-dimensional groups and algebras in quantum physics. Lecture Notes in Physics. N.S.m:27, 1995.

АНАЛОГИ СИСТЕМ ЧЕБЫШЕВА НА ГРАФАХ

Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж)[1]

Для дифференциальных уравнений на множествах типа геометрического графа было обнаружено (Ю.В.Покорный, О.М.Пенкин), что решения таких уравнений обладают свойствами, близкими к свойствам систем Чебышева. Невозможность переноса понятия чебышевости на системы функций, определенных на графе, на первый взгляд следует из известного результата Мэрхьюбера ввиду неодномерности графа. Однако преодоление "запрета Мэрхьюбера" оказалось возможным за счет введения более широкого понятия чебышевости на графе.

Определение 1. *Пусть Γ – геометрический граф. Назовем набор точек $T = \{t_i\}_{i=1}^n$ из Γ регулярным набором I рода, если эти точки вдоль ребер графа можно перевести в полный набор <u>всех</u> вершин графа по непересекающимся траекториям, и регулярным набором II рода, если эти точки вдоль ребер графа можно перевести в полный набор <u>граничных</u> вершин графа по непересекающимся траекториям.*

Определение 2. *Будем говорить, что система функций $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=1}^n$, непрерывных на графе, является системой Чебышева I рода (II рода), если определитель*

$$\Delta \begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} \|\varphi_1(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)\|_{j=1}^n$$

отличен от нуля тогда и только тогда, когда $\{t_1, \dots, t_n\}$ – регулярный набор I рода (II рода).

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке: Грант Минвуза (КЦ СПбГУ) № 97-0-1.8-100, Грант Минвуза (КЦ Новосибирского госун-та), грант ВГУ НИЧ-0017

Теорема. *Пусть Γ – геометрический граф, являющийся деревом, и имеющий n вершин. Пусть $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$ — система непрерывных на Γ функций, обладающая свойствами*

1) на каждом подграфе $\Gamma_0 \subset \Gamma$ размерность линейного пространства, натянутого на систему $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, равна общему числу вершин Γ_0,

2) любая линейная комбинация функций $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ на каждом ребре может иметь не более одного нуля.

Тогда эта система является системой Чебышева I рода.

Аналогичный результат имеет место для систем Чебышева II рода.

АППРОКСИМАТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Буробин А. В. (Обнинск)
abur@obninsk.com

Рассматривается кинетическое уравнение общего вида

$$Lf = St(f, f), \tag{1}$$

где L — линейный дифференциальный оператор, $St(f, f)$ — нелинейный интегральный оператор. Предполагается, что это уравнение наследует основные свойства уравнения Больцмана [1] и уравнения коагуляции [2], в частности сингулярность оператора $St(f, f)$.

Для уравнения (1) вводится понятие аппроксимативного решения, получающегося при регуляризации интегрального оператора $St(f, f)$ в качестве предельной функции аппроксимирующей последовательности решений. Изучаются свойства аппроксимативных решений в зависимости от выбора функциональных пространств.

Литература

[1] Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана.- М: Мир, 1978.

[2] Волощук В. М., Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975.

ДВУМЕРНЫЕ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА И МАРЦИНКЕВИЧА

Быков Ю.Н. (Курск)

vio@func.vsu.ru

Пусть $0 < \theta < 1$ и $\{X_0, X_1\}$ – банахова пара, тогда пространство

$$M_\theta(X_0, X_1) = \{x \in X_0 + X_1 : \|x\|_{M_\theta} = \sup_{t>0} t^{-\theta} K(t, x; X_0, X_1) < \infty\}$$

называется обобщённым пространством Марцинкевича, а

$$\Lambda_\theta(X_0, X_1) =$$

$$= \left\{ x \in X_0 + X_1 : \|x\|_{\Lambda_\theta} = \inf_{x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_0}^{1-\theta} \|x_n\|_{X_1}^{\theta} < \infty \right\}$$

называется обобщённым пространством Лоренца. Рассмотрим последовательность $0 < \theta_n < 1$ при $n \geq 0$. Обозначим через B_Λ^0, B_M^0, B_Λ^n, B_M^n и $B_X(a)$ единичные шары соответствующих двумерных пространств $\Lambda_0 = \Lambda_{\theta_0}(l_1^2, l_\infty^2)$, $M_0 = M_{\theta_0}(l_1^2, l_\infty^2)$, $\Lambda_n = \Lambda_{\theta_n}(\Lambda_{n-1}, M_{n-1})$, $M_n = M_{\theta_n}(\Lambda_{n-1}, M_{n-1})$ и $a^{-1}X$ $(a > 0)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $t_n = \inf\{t > 0 : B_M^{n-1}(t^{-1}) \subset B_\Lambda^{n-1}\}$. Тогда:

1) шар B_M^n равен пересечению шаров $B_\Lambda^{n-1}(t_n^{\theta_n})$ и B_M^{n-1};

2) шар B_Λ^n равен выпуклой оболочке шаров B_Λ^{n-1} и $B_M^{n-1}(t_n^{\theta_n - 1})$;

3) $t_0 = 2$, и имеет место рекуррентная формула

$$t_n = \frac{2t_{n-1} - t_{n-1}^{\theta_{n-1}} - t_{n-1}^{1-\theta_{n-1}}}{t_{n-1} - 1}.$$

Доказательство теоремы 1 можно найти в [1].

Следствие 1. Пределы последовательностей $\{\|x\|_{M_n}\}$ и $\{\|x\|_{\Lambda_n}\}$ при $n \to \infty$ совпадают и определяют норму в пространстве Лионса–Петре с бесконечным числом параметров для пары $\{l_1^2, l_\infty^2\}$.

Следствие 2. Существует такая последовательность $\{\theta_n\}$, что нормы $\|x\|_{M_n}$ совпадают на некотором невыпуклом конусе, относительная угловая мера которого как угодно близка к единице.

Литература

1. Быков Ю.Н. Описание единичных шаров в двумерных многопараметрических пространствах Лоренца и Марцинкевича // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. Воронеж, 2000. С.4–8.

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Ванько В.И. (Москва)

При изучении поведения стержня, нагружаемого возрастающей продольной силой (процесс продольного изгиба) со времен Эйлера употребляются термины "устойчивость, неустойчивость", хотя задача о движении (колебаниях) упруго-пластического стержня ввиду нелинейного характера зависимости σ-ε (напряжения-деформации) обычно не решается. Некоторые характерные трудности исследования отмечены в работе [1].

Поэтому общепринят квазистатический подход: и нагружение и сам процесс деформирования конструкции происходят столь медленно, что силами инерции пренебрегают и исследуют решения уравнений равновесия при условии возрастания внешних нагрузок или времени, если изучается процесс ползучести при постоянных нагрузках.

Уравнения квазистатического продольного изгиба упруго-пластического стержня решаются методом последовательных нагружений: на каждом шаге нагружения записываются дифференциальные уравнения относительно приращений напряжений, деформаций и прогиба. Коэффициенты уравнений системы зависят от истории нагружения в каждой точке стержня и вычисляются на каждом шаге нагружения. При этом вычисляются жесткости на изгиб каждого поперечного сечения.

Показано, что несущая способность стержня исчерпывается, как только жесткость среднего (по длине) сечения становится меньше текущего значения приложенной нагрузки (в безразмерных величинах) [2].

Упруго-пластический изгиб в условиях ползучести исследуется на основе модели Шэнли [3]. Выявлена неустойчивость по Ляпунову процесса изгиба в условиях ползучести при значении продольной силы, равном касательно-модульной нагрузке.

Литература

1. Клюшников В.Д. Устойчивость упруго-пластических систем. М.: Наука, 1980. - 240 с.

2. Ванько В.И. Продольный изгиб упруго-пластического стержня // Инж. журнал. Механика твердого тела. - 1968. - 4. - С.171-174.

3. Шэнли Ф. Теория колонны за пределом упругости. - Механика. Сб. переводов. - 1951. - 2. - С.88-98.

К ВОПРОСУ ПРОДОЛЖАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ВОЛЬТЕРРОВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Васильев В.В., Ефремов А.А. (Тамбов)

aib@tsu.tmb.ru

Обозначим $\Omega(C^n[a,b])$ множество всех непустых выпуклых компактов пространства $C^n[a,b]$; $\Pi[L^n[a,b]]$ – множество всех непустых, ограниченных, замкнутых, выпуклых по переключению множеств из $L^n[a,b]$. Пусть Z – банахово пространство функций $x : [a,b] \to \mathbf{R}^n$. Пусть $\nu \in (a,b]$ элемент $x \in Z$ и $M \subset Z$. Обозначим x^ν – сужение функции x на отрезок $[a,\nu]$ и $M^\nu \equiv \{x^\nu : x \in M\}$. Под суммой множеств понимаем алгебраическую сумму множеств.

Рассмотрим семейство включений, зависящих от параметра $\varepsilon \in (a,c)$ $c \in (a,\infty]$

$$x \in T_\varepsilon(x) + V_\varepsilon\Phi_\varepsilon(x). \qquad (1_\varepsilon)$$

Здесь семейство операторов $\{T_\varepsilon\}$ обладает свойствами: 1) для любого $\varepsilon \in (a,c)$ оператор $T_\varepsilon : C^n[a,\varepsilon] \to \Omega(C^n[a,\varepsilon])$ компактен;

2) для любого $\varepsilon \in (a, c)$ множество $\{(T_\varepsilon(x))(a) : x \in C^n[a, \varepsilon]\}$ ограничено; 3) при каждом $\varepsilon \in (a, c)$ для любого $x \in C^n[a, \varepsilon]$ и любого $\nu \in (a, \varepsilon)$ выполняется равенство $(T_\varepsilon(x))^\nu = T_\nu(x^\nu)$: 4) для любого $\varepsilon \in (a, c)$ оператор $T_\varepsilon : C^n[a, \varepsilon] \to \Omega(C^n[a, \varepsilon])$ либо замкнут, либо полунепрерывен снизу. Семейство операторов $\{V_\varepsilon \Phi_\varepsilon\}$ обладает свойствами: 5) для каждого $\varepsilon \in (a, c)$ линейный непрерывный оператор $V_\varepsilon : L^n[a, \varepsilon] \to C^n[a, \varepsilon]$, определенный равенством $(V_\varepsilon z)(t) = \int\limits_a^t V(t, s) z(s)\, ds, \quad t \in [a, \varepsilon]$, переводит каждое слабо компактное в $L^n[a, \varepsilon]$ множество в компактное множество пространства $C^n[a, \varepsilon]$; 6) для каждого $\varepsilon \in (a, c)$ оператор $\Phi_\varepsilon : C^n[a, \varepsilon] \to \Pi[L^n[a, \varepsilon]]$ полунепрерывен снизу и переводит каждое ограниченное в $C^n[a, \varepsilon]$ множество в слабо компактное множество пространства $L^n[a, \varepsilon]$; 7) при каждом $\varepsilon \in (a, c)$ для любого $x \in C^n[a, \varepsilon]$ и любого $\nu \in (a, \varepsilon)$ выполняется равенство $(\Phi_\varepsilon(x))^\nu = \Phi_\nu(x^\nu)$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1) – 7). Тогда существует такое $\varepsilon \in (a, c)$, что множество решений включения (1_ε) непусто.*

Будем говорить, что непрерывная функция $x : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ является решением семейства включений $\{(1_\varepsilon)\}$ на $[a, b)$, если для произвольного $\varepsilon \in [a, b]$ сужение функции x на отрезок $[a, \varepsilon]$ является решением включения (1_ε). Решение x семейства включений $\{(1_\varepsilon)\}$ на $[a, b)$ назовем непродолжаемым, если не существует такого решения y включения (1_ε), где $\varepsilon \in (b, c)$, что для любого $t \in [a, b)$ справедливо равенство $x(t) = y(t)$. Если x является решением семейства включений $\{(1_\varepsilon)\}$ на $[a, c)$, то будем считать решение x непродолжаемым.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1) – 7). Для того чтобы решение семейства включений $\{(1_\varepsilon)\}$ на $[a, b)$ было продолжаемо необходимо и достаточно, чтобы x было ограничено на $[a, b)$.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1) – 7). Если y – решение включения (1_τ), то существует такое непродолжаемое решение x семейства включений $\{(1_\varepsilon)\}$ на $[a, b)$, $b \in (\tau, c]$, что x – продолжение y.*

Пусть H - множество всех непродолжаемых решений семейства включений $\{(1_\varepsilon)\}$. Обозначим $\gamma(H) = \sup\{|x(a)| : x \in H\}$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия 1) – 7). Тогда для* *любого $m > \gamma(H)$ найдется такое число $d > 0$, что для всех $x \in H$ и каждого $t \in [a, a+d]$ выполнено неравенство $|x(t)| \leq m$.*

УСИЛЕНИЕ ОДНОГО РЕЗУЛЬТАТА Н.И. ЧЕРНЫХ

Васильев С.Н. (Екатеринбург)[1]
Stanislav.Vasilyev@imm.uran.ru

Пусть L_2 есть пространство комплексных 2π-периодических функций с обычной нормой, $E_n(f) = \inf\{\|f - g\| : g(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, c_k \in \mathbf{C}\}$ — величина наилучшего приближения функции $f \in L_2$ подпространством тригонометрических полиномов степени не выше n с комплексными коэффициентами. Пусть $\omega_m(f, \delta) = \sup\{\|\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{m-\nu} C_m^\nu f(\cdot + \nu t)\| : |t| \leq \delta\}$ есть m-ый модуль непрерывности функции f.

Теоремами типа Джексона–Стечкина называют оценки $E_n(f)$ через значение $\omega_m(f, \delta)$ в некоторой точке δ. В 1967 г. Н.И. Черных [1] установил неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \omega_m\left(f, \frac{2\pi}{n}\right), \quad f \in L_2, \quad n, m \in \mathbf{N};$$

причем это неравенство является точным при $n > m$. В случае нецелого $m > 0$ аналогичный результат был получен М.Ж. Шакеновой (1993).

Автор анонсирует следующий результат:

Теорема. *Для произвольных натурального числа n, вещественного $m > 0$ и функции $f \in L_2$ верны неравенства*

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \omega_m\left(f, \frac{7}{5}\frac{\pi}{n}\right),$$

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{2}{\sqrt{3C_{2m}^m}} \omega_m\left(f, \frac{\pi}{n}\right).$$

---

[1]Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00460) и программы "Ведущие научные школы" (проект 00-15-96035).

В случае нецелого $m > 0$ (модуль непрерывности дробного порядка), вместо C_{2m}^{m} следует брать отношение $\Gamma(2m+1)/\Gamma^2(m+1)$, в котором $\Gamma(x)$ означает гамма-функцию.

Литература

[1] Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки, 1967. Т. 2. Вып. 5. С. 513–522.

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ ВЕСОВОГО РЕШЕТА

Е.В. Вахитова (Стерлитамак)

Современный метод решета внес весомый вклад в теорию чисел. Сила метода может резко возрасти, если его использовать для получения сильных верхних нижних границ вместо асимптотических результатов. Обычно используют комбинацию метода решета А. Сельберга (1949) для верхней границы и метода решета В. Бруна (1918) для нижней границы. Задача становится более трудной, если применять весовое решето, которое впервые ввел П. Кун (1941). А.А. Бухштаб (1967) построил весовое (комбинаторное) решето. Метод Бруна в сочетании с итерациоонным решетом Бухштаба дает результаты такие же, как и решето Сельберга. Х.-Э. Рихерт (1969) дал весовое решето в другой форме. Позже М. Лаборде (1979) упростил изложение весового решета Бухштаба и показал, что веса Рихерта являются частным случаем весов Бухштаба в непрерывной форме и всегда дают более слабые результаты. В 1985 году А.А. Бухштаб анонсировал другой тип весового решета. Изучению методов решета с весами Бухштаба нового типа и их приложениям посвящены работы автора [1]-[4]. В настоящей работе исследуется задача получения преимуществ в выборе параметров решета с весами Бухштаба нового типа.

Литература

1. *Вахитова Е.В.* О почти простых числах в последовательности значений неприводимого полинома от аргумента $p \cdot q$. // Тезисы докл. 111 Сибирского Конгресса по прикладной и ин-

дустриальной математике (ИНПРИМ-98). Ч.5.– Новосибирск, 1998.– С.10.

2. *Вахитова Е.В.* Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа // Матем. заметки.– 1999.– Т. 66, вып. 1. – С.38-49.

3. *Вахитова Е.В.* О приложении метода решета // Дифференциальные уравнения и их приложения в физике. Сб. научн. трудов. Стерлитамак. – 1999. – С.16-20.

4. *Вахитова Е.В.* О числах с ограниченным количеством простых делителей // Тезисы междун. научн. конф. "Нелинейный анализ и функциально - дифференциальные уравнения". Россия, Воронеж.–2000.– С.71-72.

ОБ ОДНОМ УЧЕБНОМ ПОСОБИИ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Е.В. Вахитова (Стерлитамак)

Учебное пособие автора "Теория сравнений и её приложения" [2] составляет несколько расширенный материал по теории сравнений из курса теории чисел, которая введена отдельной дисциплиной по специальности 032100.00 "Математика с дополнительной специальностью" Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования Российской Федерации с 2000 года. Книга возникла из части лекций по курсу: "Алгебра и теория чисел" и спецкурса: "Избранные вопросы теории чисел", которые автор читал в течение ряда лет студентам физико-математического факультета Стерлитамакского государственного педагогического института. Существующая литература по этим вопросам среднему студенту представляется трудной, поэтому основная цель этой книги – дать по возможности простое изложение теории сравнений и её приложений.

Учебное пособие состоит из шести глав и "Приложения". В конце каждой главы приведены вопросы для изучения, рекомендуемая литература и упражнения. Определения, теоремы и их доказательства часто иллюстрируются численными примерами, цель которых – пояснить общую теорию. При этом необходимый материал из курса алгебры и теории чисел приведен в "Приложении".

На рукопись учебного пособия получен гриф: "Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших педагогических учебных заведений, изучающих теорию чисел".

Ранее автором было подготовлено пособие [1].

Литература

1. *Вахитова Е.В.* Теория делимости в кольце целых чисел. Справочное пособие. – Стерлитамак: Стерлитамак. гос. пед. ин-т, 1994.– 59 с.

2. *Вахитова Е.В.* Теория сравнений и ее приложения. Учебное пособие. – Стерлитамак: Стерлитамак. гос. пед. ин-т, 2000.– 352 с. (в печати)

РАЗДЕЛЕНИЕ СВЯЗНОЙ ЗАДАЧИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МИКРОПОЛЯРНОЙ СВЯЗНОЙ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ НА ЗАДАЧУ В НАПРЯЖЕНИЯХ И СКОРОСТЯХ ПЕРМЕЩЕНИЙ

Вервейко Н.Д., Фролов А.Л. (Воронеж)

E-mail:pmmtamc@main.vsu.ru

Задача осесимметричного напряженно-деформированного состояния микрополярной связной сыпучей среды для: пяти компонент несимметричного тензора напряжений - σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz}, $\sigma_{(rz)}$, $\sigma_{[rz]}$; четырех компонент симметричной части тензора скоростей деформаций - ε_{rr}, $\varepsilon_{\theta\theta}$, ε_{zz}, $\varepsilon_{(rz)}$; двух компонент вектора скорости перемещений - $U = U_r$, $V = U_z$ и неопределенного множителя Лагранжа ψ описываемая замкнутой системой 12 уравнений. Это:

уравнения равновесия - $\sigma_{ij,j} = 0$ $(i = 1, 2)$;

условия пластичности - $\Phi_1(\sigma) = 0$; $\Phi_2(\sigma) = 0$;

ассоциированный закон течения - $\varepsilon_{ij} = \psi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma_{ij}} + \psi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma_{ij}}$;
формулы Коши - $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i})$.

Второе условие пластичности, обеспечивающее микроповорот частиц позволяет исключить из уравнения равновесия несимметричную компоненту тензора напряжений $\sigma_{[rz]}$, так что система уравнений равновесия и условия пластичности образует незамкнутую систему 4-х уравнений для пяти компонент тензора напряжений.

Уравнение Коши и ассоциированый закон течения позволяют получить переопределенную систему трех уравнений в частных производных для двух компонент вектора скорости. Одно из этих уравнений, содержащее напряжение и скорости, соответствует уравнению дилатансии - зависимости скорости сдвига от скорости объемной деформации и напряжений. Исключение скоростей течения из уравнения дилатансии приводит это уравнение к дифференциальному виду только для напряжений. Таким образом можно выделить осесимметричную задачу в напряжениях для пластическисжимаемого материала, а затем по напряженному состоянию определить кинематику деформирования.

Литература

1. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998, 528с.

2. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Наука, 1990, 272с.

3. Валюхов С.Г., Вервейко Н.Д., Смотрова О.А. Микрополярная модель связных сыпучих материалов. Воронеж, 1999, 87с.

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.В. Власов, В.Ж. Сакбаев (Москва)

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, A – положительный самосопряженный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}$. Область определения $Dom(A^\beta)$ оператора A^β ($\beta > 0$) превратим в гильбертово пространство $\mathcal{H}_\beta$, снабдив его нормой $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$. Обозначим через $W^l_{2,\gamma}((a,b),\mathcal{H})$, $(-\infty < a < b \leq +\infty)$, $l = 0,1,2,...$, пространства вектор-функций со значениями в $\mathcal{H}$, снабженные нормами

$$\|u\|_{W^l_{2,\gamma}(a,b)} \equiv \left(\int_a^b e^{-2\gamma t}[\|u^{(l)}\|^2 + \|A^l u\|^2]dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma > -\alpha_0.$$

На полуоси $R_+ = (0, +\infty)$ рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{du}{dt}(t)+Au(t)+\sum_{j=1}^{n}[B_j Au(t-h_j)+D_j\frac{du}{dt}(t-h_j)] = f(t), \quad t > 0; \quad (1)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in (-h, 0). \quad (2)$$

Здесь B_j, D_j – ограниченные линейные операторы в пространстве $\mathcal{H}$, вещественные числа $h_1 < ... < h_n$ удовлетворяют условию $h_j \neq 0$, вектор-функция $\varphi \in W^l_2((-h,0), A^l)$ при некотором $l \geq 1$. Существует такое $\gamma_0 > -\alpha_0$, что $f(t) \in W^{l-1}_{2,\gamma_0}(R_+, A^{l-1})$.

Теорема 1 *Пусть $h_1 > 0$ и пусть функции $\varphi(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют условиям*

$$\varphi^{(k+1)}(-0)+A\varphi^{(k)}(-0)+\sum_{j=1}^{n}(B_j\varphi^{(k)}(-h_j+0)+D_j\varphi^{(k+1)}(-h_j+0)) = f^{(k)}(+0), \quad k = 0,1,...,l-2.$$

Пусть операторы $B_{1,j}$, $D_{1,j}$, определенные равенствами $B_{1j} = A^{(l-1)}B_jA^{1-l}$, $D_{1j} = A^{l-1}D_jA^{1-l}$, $j = 1,...,n$, являются ограниченными операторами.

Тогда существует такое γ^*, что для любого $\gamma \geq \gamma^*$ задача (1), (2) имеет единственное решение $u(t) \in W^l_{2,\gamma}((-h, +\infty), A^l)$, допускающеее оценку

$$\|u(t)\|_{W^l_{2,\gamma}((-h,+\infty),A^l)} \leq$$

$$\leq d\{\|\varphi(t)\|^2_{W^l_2((-h,0),A^l)} + \|f(t)\|^2_{W^{l-1}_{2,\gamma}(R_+,A^{l-1})}\}^{\frac{1}{2}}$$

с постоянной d, не зависящей от функций φ_0 и f постоянной d.

В докладе также изучается разрешимость уравнения вида (1) с опережением ($h_m < 0$, $m = 1, 2, ..., k$, $k \leq n$) и анализируется существенность условий сформулированных утверждений. (подробнее см. [1]-[3]).

Литература

1. Власов В.В., Сакбаев В.Ж.// Мат. заметки, 2000, Т.68 N 6.

2. Власов В.В.// Труды МИАН, 1999, Т. 227, N 18, С. 30-42.

3. Власов В.В., Сакбаев В.Ж.// Сборник МФТИ "Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики", 1997, С. 47-55.

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ НАГРЕВА В ДВУХФАЗНОЙ ЗОНЕ

Воронова Н.П., Климович Г.А. (Минск)

Рассмотрим тепловой процесс, описываемый краевой задачей [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(u,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right], \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0, \tag{2}$$

$$k(u,t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \alpha\left[u^0(t) - u(0,t)\right], \tag{3}$$

где u — температура, x — координата, t — время, $k(u,t)$ — коэффициент, характеризующий процесс теплопроводности, u_0 —

начальная температура, $u^0(t)$ — потенциал атмосферы. α — коэффициент массопереноса.

Зададим $u^*(x)$ — требуемое в технологическом процессе распределение температуры. Тогда. минимизируя функционал

$$I = \int_0^{x_0} \left[u^*(x) - u(x,t)\right]^2 dx, \tag{4}$$

где x_0 — глубина рассматриваемого слоя, можно получить оптимальное время процесса.

Для учета двухфазной зоны нагрева введем двухступенчатую функцию

$$u_{\text{пов}}(t) = \left[\begin{array}{ll} u_1, & 0 \le t \le t_1, \\ u_2, & t_1 \le t \le t_0 \end{array} \right. .$$

В результате задача оптимизации сведется к выбору трех параметров u_1, t_1, t_0, при которых выполняются условия (4) и $u(t_0, x_0) = u^*(x)$. В безразмерных переменных

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \dfrac{u(x,t) - u_0}{u_{\text{пов}} - u_0}, \eta = \dfrac{x}{x_0}, \\ \theta = \dfrac{1}{x_0^2} \displaystyle\int_0^t k(\tau) d\tau, \end{array} \right.$$

задача (1) - (3) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \xi}{\partial \theta} = \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial \eta^2}, \quad \xi(\theta, 0) = \left[\begin{array}{ll} \xi_1, & 0\theta \le \theta_1 \\ 1, & \theta_1 \le \theta \le \theta_0 \end{array} \right. \\ \xi(0, \eta) = 0 \end{array} \right.$$

Целью поставленной задачи в безразмерных координатах является поиск параметров θ_0, θ_1. ξ_1 таких, чтобы в момент окончания процесса $\theta = \theta_0$ функционал

$$I_0 = \int_0^1 \left[\xi^*(\eta - \xi(\eta, \theta_0)\right]^2 d\eta$$

достигал бы своего минимума. Причем

$$\xi^*(\eta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \eta \leq \sigma, \\ \dfrac{1-\eta}{1-\sigma} + \dfrac{\eta-\sigma}{1-\sigma}\xi, & \sigma \leq \eta 1. \end{cases}$$

Решение задачи можно осуществить численными методами [2] и позволяет найти оптимальное время пребывания в каждой из зон.

Литература

1. Воронова Н.П., Березовский Н.И. "Математическое моделирование процессов сушки с применением ультразвука", Литье и металлургия, 1998. - № 3.

2. Бутковский А.Г. "Методы управления системами с распределенными параметрами" - М., Наука, 1975.

ОБ ОСРЕДНЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ВОДОИСПАРИТЕЛЬНЫХ ВОЗДУХООХЛАДИТЕЛЯХ

Высоцкая Ж. В., Свистов В. В., Шалиткина А. Н. (Воронеж)

Физические процессы, протекающие в каналах теплообменной насадки рекуперативного воздухоохладителя, описываются системами квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, которые допускают только численную реализацию. Расчет по этой модели позволяет проследить динамику изменения температуры и влажности потока воздуха, как по длине, так и по сечению канала.

Для практического использования, как правило, достаточно информации об изменении параметров воздуха только по длине в виде осредненных параметров. Такими осредненными (по энтальпии) параметрами являются температура и плотность пара. На основе этих осредненных параметров из полной модели была получена осредненная модель, представляющая собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате осреднения в уравнениях возникли коэффициенты тепло- и массопереноса. определение которых является достаточно сложной задачей, т. к. температура пластины не является постоянной. а убывает по длине насалки. Эти коэффициенты удалось получить в результате расчета по полной модели. Важным результатом явился, так же, факт независимости самих коэффициентов от длины насадки.

Результаты счета по полной и осредненной модели очень близки между собой, но время расчета на ЭВМ по осредненой модели в несколько раз меньше, что в случаи решения инженерных задач оптимизации параметров испарительной насадки играет весьма существенную роль. т. к. приходится многократно проводить счёт при разных геометрических параметрах.

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

Гаджиев Т.С. (Баку, Азербайджан)
E-mail: guliev@azdata.net

В работе исследуется поведение решений в окрестности конической точки границы области $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$ задачи

$$\frac{d}{dx_i} a_i(x, u, u_x) - a(x, u, u_x) = 0, \quad x \in \Omega$$

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \qquad a_i(x, u, u_x)\cos(n, x_i)|_{\Gamma_2} = 0 \tag{1}$$

где $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\overline{\Gamma}_1 \cap \Gamma_2 = x_0$-коническая точка области Ω, $\Omega^\rho_{x_0} = \Omega \cap B_{x_0}(\rho)$. Относительно области Ω требуется выполнение изопериметрических условий [1]. Задача Дирихле для такого типа уравнений исследована в работах Р.Толксдорфа. В.Кондратьева. М.Борсука и др. Смешанная краевая задача для линейных уравнений изучена А.Филипповым, Н.Виглейем и др.

Для обобщенного решения из $W^1_{m,0}(\Omega)$ задачи (1) при некоторых естественных предположениях относительно коэффициентов нами получены точные оценки поведения решений и их производных вблизи конической точки

$$|u(x)| \le C_0|x|^{\lambda-\varepsilon},\ \forall\varepsilon > 0,\ x \in \Omega^{\rho}_{x_0}$$

$$|\nabla u(x)| \le C_1|x|^{\lambda-1-\varepsilon},\ \forall\varepsilon \in (0,\lambda-1),\ x \in \Omega^{\rho}_{x_0} \tag{2}$$

где λ- наименьшее по модулю собственное значение нелинейной задачи на собственные значения.

При $n = 2$, $m = 2$ в плоской области с величиной угла $0 < \omega < \pi$ получены следующие точные оценки

$$|u(x)| \le C_0|x|^{\frac{\pi}{2\omega}},\ x \in \Omega^{\rho}_{x_0}$$

$$|\nabla u(x)| \le C_1|x|^{\frac{\pi}{2\omega}-1},\ x \in \Omega^{\rho}_{x_0} \tag{3}$$

Литература

1. *В.Г.Мазья.-Пространство С.Л.Соболева.* –1987 г.

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СИГНУМАМ

Галатенко В.В. (Москва)[1]

E-mail: galat@niisi.msk.ru

В совместной работе С.Б. Стечкина и Б.С. Стечкина "Среднее квадратическое и среднее арифметическое" (см. [1], [2]) получен следующий результат. Пусть действительнозначная функция f принадлежит пространству $L^2[0,1]$. Положим $r_0 = f$, а далее – по индукции: $c_{n+1} = \int_0^1 |r_n(x)|dx$, $r_{n+1} = |r_n| - c_{n+1}$. Тогда справедлива формула: $\int_0^1 f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$.

Целью настоящей работы является изложить более современный подход к данному вопросу и усилить приведенный результат.

Пусть f – элемент гильбертова пространства H, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система ненулевых элементов H. Положим $r_0 = f$, далее – по индукции: $c_{n+1} = \frac{(r_n, e_{n+1})}{(e_{n+1}, e_{n+1})}$, $r_{n+1} = r_n - c_{n+1}e_{n+1}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №99-01-00354).

Определение 1. *Формальный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ будем называть результатом орторекурсивного разложения f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.* (Примеры ортерекурсивных разложений см. в [3], [4].)

Утверждение 1. *Для орторекурсивного разложения выполняются аналоги тождества Бесселя: $||f - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n||^2 = ||f||^2 - \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 ||e_n||^2$ (для всех натуральных N) и неравенства Бесселя: $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 ||e_n||^2 \leq ||f||^2$. Орторекурсивное разложение $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ сходится к f тогда и только тогда, когда выполнено равенство Парсеваля: $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 ||e_n||^2 = ||f||^2$.*

Возьмем в качестве H пространство комплекснозначных функций $L^2(X,\mu)$, $\mu X < \infty$. Систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ будем брать зависящей от разлагаемой функции f и определять по индукции: $e_{n+1}(x) = sign(r_n(x))$ ($sign(z) = \frac{z}{|z|}$, $sign(0)$ определим произвольным числом, по модулю равным 1). Через $S_N(x)$ будем обозначать N-ую частичную сумму орторекурсивного разложения по этой системе: $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n(x)$. Результат [1], [2] является простым следствием равенства Парсеваля для орторекурсивных систем разложения и следующего утверждения.

Утверждение 2. *$\forall f \in L^2(X,\mu)$ $S_N(x)$ сходятся к f в $L^2(X,\mu)$.*

На самом деле верны более сильные утверждения.

Теорема 1. *Пусть $f \in L^2(X,\mu)$, $\operatorname{ess\,sup}_X |f| = \infty$. Тогда $\forall x \in X$ $S_N(x) \longrightarrow f(x)$. Кроме того, $\exists C$: $\forall x \in X$ $|S_N(x)| \leq \max\{|f(x)|, C\}$.*

Теорема 2. *Пусть $f \in L^2(X,\mu)$, $\operatorname{ess\,sup}_X |f| < \infty$. Тогда $\exists X' \subset X$: $\mu X' = \mu X$ и S_N равномерно сходятся к f на X'.*

Теорема 3. *Пусть $f \in L^2(X,\mu)$, $\operatorname{ess\,sup}_X |f| < \infty$, $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0$ $\exists E \subset X$: $\mu E > 0$ и $\forall y \in E$ $||f(x)| - |f(y)|| < \varepsilon$. Тогда S_N равномерно сходятся к f на X.*

Литература

[1]. С.Б. Стечкин, Б.С. Стечкин *Среднее квадратическое и среднее арифметическое* // Докл. АН СССР. – 1961. Т.137, №2. С. 287-290.

[2]. С.Б. Стечкин *Избранные труды математика.* – М.: Наука, 1998. С. 221-224.

[3]. Т.П. Лукашенко *Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера-Шаудера* // Современные проблемы теории функций и их приложения. – Саратов, 2000. С. 83.

[4]. А.Ю. Кудрявцев *Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов одной функции*//Тезисы докладов Международной школы-семинара по геометрии и анализу, посвященной 90-летию Н.В. Ефимова. - Ростов-на-Дону, 2000. С.127-129.

ОБ АНАЛОГЕ УСЛОВИЯ ВЕЙЕРШТРАССА

Галеев Э.М. (Москва)
elfat@galeev.mccme.ru

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления

$$I(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt \to \min; \; x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1. \quad (P)$$

Вейерштрасс показал, что необходимым условием сильного минимума в задаче (P) для экстремали $\hat{x} \in C^1([t_0, t_1])$ является условие

$$L(t, \hat{x}(t), u) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - \hat{L}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{\hat{x}}(t)) \geq 0$$

$$\forall \; u \in \mathbf{R}^n, \forall \; t \in [t_0, t_1].$$

Геометрический смысл условия Вейерштрасса: для любого фиксированного $t \in [t_0, t_1]$ график функции $L(\dot{x}) = L(t, \hat{x}(t), \dot{x})$ лежит выше касательной к кривой L в точке $\dot{\hat{x}}(t)$.

В докладе будет приведено другое условие сильного минимума.

Теорема. *Пусть* $\hat{x} \in \operatorname{strlocmin} P \bigcap PC^1([t_0, t_1])$, $L \in C(O(\{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}))$, $T \subset [t_0, t_1]$ *— множество точек непрерывности функции* $\dot{\hat{x}}$. *Тогда на* $\hat{x}$ *выполняется условие*

$$\eta L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t) + \xi) + \xi L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t) - \eta) - (\xi + \eta) L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \geq 0$$
$$\forall \; \xi, \eta > 0, \; \forall \; t \in T. \quad (\gamma)$$

Геометрический смысл условия (γ): для любого фиксированного $t \in T$ точка $\left(\dot{\hat{x}}(t), L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\right)$ лежит ниже любой хорды с концами по разные стороны от $\dot{x}$ графика функции $L(\dot{x}) = L(t, \dot{x}(t), \dot{x})$.

Действительно, условие (γ) равносильно неравенству

$$L\left(\frac{\eta}{\xi+\eta}(\dot{x}+\xi) + \frac{\xi}{\xi+\eta}(\dot{x}-\eta)\right) \equiv L(\dot{x}) \leq$$

$$\leq \frac{\eta}{\xi+\eta}L(\dot{x}+\xi) + \frac{\xi}{\xi+\eta}L(\dot{x}-\eta).$$

Для доказательства условия (γ) берутся следующие вариации. Пусть точка $\tau \in [t_0, t_1]$ и произвольные числа $\xi, \eta > 0$ фиксированы. Положим $x_\lambda(t) = \dot{x}(t) + h_\lambda(t)$, где $h_\lambda(t) = \begin{cases} \xi\lambda + (t-\tau)\xi, & t \in [\tau-\lambda, \tau], \\ \xi\lambda - (t-\tau)\eta, & t \in \left[\tau, \tau + \frac{\lambda\xi}{\eta}\right], \end{cases}$ $\lambda \geq 0$. Вейерштрасс использовал такие вариации с $\eta = \xi\sqrt{\lambda}$. Если L — дифференцируемая по $\dot{x}$ в точке $(t, \dot{x}(t), \dot{x}(t))$ функция, то из условия (γ) вытекает условие Вейерштрасса.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСТРОПНОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Галич В.А., Галич И.А., Манаков В.П. (Алчевск)

Рассмотрено осесимметричное напряженно-деформированное состояние цилиндра конечной толщины, выполненного из трансверсально-изотропного материала. Торцы цилиндра защемлены, а к боковой поверхности приложены усилия симметричные относительно серединной плоскости цилиндра.

Для решения поставленной задачи использован метод однородных решений [1]. Задача сводится к нахождению решений метагармонических уравнений. Данный подход позволяет построить решения, которые точно удовлетворяют уравнениям равновесия цилиндра и условиям жесткого защемления его торцов. Граничные условия на боковой поверхности цилиндра удовлетворяются с использованием метода наименьших квадратов. Для построения эффективного алгоритма численного решения получаемой в результате исследований бесконечной системы линейных алгебраических уравнений проведен асимптотический анализ напряжений и перемещений вблизи угловых точек цилиндра [2,3]. Это позволило выяснить поведение неизвестных системы с большими порядковыми номерами и найти их за конечное число шагов.

Литература

1. А.С. Космодамианский, В.А. Галич, К.И. Горохов. Смешанная задача теории упругости для изотропного цилиндра // Докл. АН УССР. Сер.А. - 1985. - № 7. - с.36-38.

2. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // Прикл. математика и механика. - 1967. - 31. - Вып.1. - с.178-186.

3. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. - Киев: Наук. думка, 1978. - 264с.

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ-ХААРА ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Галкина С. Ю. (Нижний Новгород)

E-mail: galkin@mm.unn.ac.ru или galkin@tesis.nnov.ru

Пусть функция f имеет ограниченную вариацию $V_0^1 f$ на отрезке $[0,1]$ и $\{a_m(f)\}_{m=1}^{\infty}$ — коэффициенты Фурье функции f по системе Хаара. П.Л. Ульянов в работе [1, с. 372] установил следующую оценку:

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f)| \leq \frac{3}{2-\sqrt{2}} \cdot V_0^1 f.$$

Позднее, в спецкурсе, прочитанном в Московском университете, П.Л. Ульянов улучшил константу $\frac{3}{2-\sqrt{2}}$, заменив ее на $2+\sqrt{2}$.

В работе [2, с. 50] была доказана оценка

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f)| \leq \frac{2+\sqrt{2}}{3} \cdot V_0^1 f$$

и установлено, что она достигается на некоторой функции f_0, имеющей ненулевую вариацию.

В настоящей работе получен аналогичный результат для случая n переменных.

Пусть функция f интегрируема по Лебегу на n-мерном кубе $D_n = [0,1]^n$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда определены ее коэффициенты Фурье-Хаара

$$a_{m_1,\ldots,m_n}(f) = \int_0^1 dx_1 \ldots \int_0^1 f(x_1,\ldots,x_n)\cdot\chi_{m_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot\chi_{m_n}(x_n)\,dx_n,$$

где $\{\chi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — система Хаара.

Обозначим через $\tau(D_n)$ — семейство всех подмножеств T из D_n вида

$$T = \left\{\left(x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \ldots, x_n^{(k_n)}\right) \mid k_i = 0,1,\ldots,K_i; \quad i = 1,\ldots,n\right\},$$

таких что $0 = x_i^{(0)} < x_i^{(1)} < \ldots < x_i^{(K_i)} = 1$, $i = 1,\ldots,n$.

Введем для каждого $i = 1,\ldots,n$ разностный оператор:

$$\Delta_{h_i}^{(i)} f(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h_i,x_{i+1}\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n).$$

Вариацией Витали (см. [3]) функции $f\colon D_n \to \mathbf{R}$ по n-мерному кубу D_n называется величина

$$V_{D_n} f = \sup_{T\in\tau(D_n)} \sum_{k_1=0}^{K_1-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{K_n-1} \left|\Delta^{(1)}_{h_1^{(k_1)}} \ldots \Delta^{(n)}_{h_n^{(k_n)}} f\left(x_1^{(k_1)},\ldots,x_n^{(k_n)}\right)\right|.$$

где $h_i^{(k_i)} = x_i^{(k_i+1)} - x_i^{(k_i)}$, $k_i = 0,\ldots,K_i-1$, $i = 1,\ldots,n$.

Обозначим символом $V_L(D_n)$ класс функций, имеющих ограниченную вариацию Витали на D_n и интегрируемых по Лебегу на D_n. Справедлива

Теорема а) Для коэффициентов Фурье–Хаара $a_{m_1,\ldots,m_n}(f)$ произвольной функции f из класса $V_L(D_n)$, $n \in \mathbf{N}$, верна оценка

$$\sum_{m_1=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} |a_{m_1,\ldots,m_n}(f)| \le \left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)^n \cdot V_{D_n} f.$$

б) Найдется функция $g_0 \in V_L(D_n)$ с отличной от нуля вариацией Витали, для которой в оценке пункта а) достигается равенство.

Литература

1. Ульянов П. Л. О рядах по системе Хаара. // Мат. сборник. – 1964. – Т. 63 (105), выпуск 1. – С. 356-391.

2. Галкина С. Ю. О коэффициентах Фурье-Хаара от функций с ограниченной вариацией. // Мат. заметки. – 1992. – Т. 51, выпуск 1. – С. 42-54.

3. Vitali G. Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reale // Atti. Accad. sci. Torino. – 1908. – V. 43. – P. 75-92.

НАХОЖДЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ МЕТОДОМ КОМПЕНСИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Галусарьян Р.Т. (Обнинск)

galusarian@iate.obninsk.ru

В докладе предлагается новая методика нахождения первообразных. Дело в том, что в школьном учебнике приведена таблица производных только для простых функций и поэтому возможности применения ее весьма ограничены. Трудно себе представить, что существует таблица производных простых функций, а формула производной сложной функции отсутствует. В этом случае ценность таблицы производных была бы близка к нулю. Именно такая ситуация имеется с таблицей первообразных. Правда в учебнике "Алгебра и начала анализа" имеется правило нахождения первообразной для функции $f(kx+b)$, но это всего лишь частный случай. Ясно, что желательно иметь более общее правило нахождения первообразной сложной функции. Предлагаемый метод компенсирущего множителя дает такое правило,что подтверждено многолетним опытом преподавания автора и экспериментом, проведенным в некоторых школах г.Обнинска. Для применения метода компенсирующего множителя составлена таблица первообразных сложных функций. Таблица составлена для всех основных функций и основана на формуле производной сложной функции. Пусть требуется найти первообразную функции $f(u)\cdot v$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$. Правило применения метода компенсирующего множителя очень простое.

По виду функции $f(u)$ подбираем формулу из таблицы первообразных, находим производную u' и сравниваем с функцией v:

1) если $v = u'$, то можно применить формулу первообразной функции $f(u)$;

2) если $v = cu'$, то формулу первообразной применить можно, но первообразную надо умножить на компенсирующий множитель $к = \frac{1}{c}$;

3) если v отличается от u' более чем на постоянный множитель, то выбранную формулу применить нельзя. Следует либо подобрать другую формулу из таблицы первообразных, либо применить другой метод.

Например, формула первообразной сложной степенной функции записывается так:

$$F(u^a u') = \frac{u^{a+1}}{a+1}.$$

Применим эту формулу для нахождения первообразной функции

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[5]{2-3x^3}}.$$

Решение. Приводим к виду, удобному для применения выбранной формулы

$$f(x) = (2-3x^3)^{-\frac{1}{5}}x^2.$$

Выбираем функцию $u = 2 - 3x^3$, находим прозводную $u' = -9x^2$ и сравниваем с функцией $v = x^2$. Находим компенсирующий множитель $k = -\frac{1}{9}$ и применяем формулу первообразной степени

$$F = -\frac{1}{9}\frac{(2-3x^3)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} = -\frac{5}{36}\sqrt[5]{(2-3x^3)^4}.$$

Мы рассмотрели подробное решение данного примера. На самом деле учащиеся, изучившие метод компенсирующего множителя, могут находить первообразные таких функций даже в уме. Главное преимущество метода компенсирующего множителя состоит в том, что нахождение первообразных сведено к нахождению производной. Согласитесь, что находить производные значительно легче.

О НЕКОТОРЫХ СЛЕДСТВИЯХ ИЗ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТЕОРИИ ИНВАРИАНТНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Гараев К.Г. (Казань)

В 1887 роду выдающийся норвежский математик Софус Ли ввел понятие интегрального инварианта однопараметрической группы.

В 1918 году немецкий математик Эмми Нетер, опираясь на это понятие, доказала свою знаменитую теорему об инвариантных вариационных задачах.

В 1922 году ученик Э.Нетер Бессель-Хаген вводит понятие дивергентной (калибровочной) инвариантности.

В 1962 году немецкий математик Г.Шоудел ввел понятие конформной инвариантности функционала и получил необходимые и достаточные условия такого рода инвариантности на языке инфинитезимальных оператов Ли.

В 1989 году автором настоящего доклада было введено понятие L^*-инвариантности кратных интегралов, из которого следуют все существующие в математической физике понятия инвариантности функционалов: классической, дивергентной и конформной.

В качестве следствия доказана L^*-теорема и получены аналогии классических формул математического анализа (формула Ньютона-Лейбница, Грина-Остроградского, Остроградского-Гаусса) для вариационных интегралов, позволяющие существенно упростить вычисление экстремальных значений функционалов, а также в некоторых специальных случаях сводить краевые задачи для уравнений Эйлера и Остроградского к соответствующим задачам Коши.

Кроме того, даются приложения модифицированной теории Нетер к математической теории оптимального управления: указан регулярный способ построения первых интегралов соотношений принципа максимума Понтрягина для динамических систем с управлением, разработан алгоритм редукции уравнения Беллмана в задаче синтеза оптимального управления динамическими системами второго порядка к обыкновенному дифференциальному уравнению.

К ПРОБЛЕМЕ ВЫПОЛНЕНИЯ ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ И СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Гараев К.Г., Насырова Е.В., Стрежнев В.А.
(Казань) *E-mail: snasyrov@ksu.ru*

Современные требования, предъявляемые к объему учебного материала по математике и времени, отводимого для усвоения этого материала, противоречивы. Объем изучаемого материала непрерывно растет. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования (ГОС ВО) по математике для направлений подготовки и технических специальностей наряду с классическими разделами содержит и новые специальные разделы, такие как функциональный анализ, топология, вариационное исчисление и оптимальное управление, дискретная математика и др. Количество же часов, отводимое на его изучение, не только не увеличивается, но даже неоправданно уменьшается. В связи с этим самостоятельная работа студентов (СРС) приобретает исключительно важное значение, становится основным средством выполнения ГОС ВО.

СРС по математике направлена, прежде всего, на расширение и на закрепление знаний, навыков и умений, приобретенных на лекциях и практических занятиях.

В докладе обсуждаются результаты опыта по организации, контролю и методическому обеспечению СРС, накопленного на кафедре специальной математики Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева:

– рассматриваются разработанные нормативные документы – учебные программы по математике для групп направлений подготовки и специальностей университета, составленные на основе ГОС ВО, и графики СРС, в которых раскрыто содержание и определены формы и способы организации и контроля СРС;

– анализируется методическое обеспечение СРС – главный фактор повышения ее эффективности.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА $B_{k,n}$-ПОТЕНЦИАЛОВ РИССА

Гараханова Н.Н. (Баку, Азербайджан)

E-mail: guliev@azdata.net

Пусть $x = (x_1, \dots x_n)$, $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $1 \le k \le n-1$, $x' = x_{1,k} = (x_1, \dots, x_k) \in R^k$, $x'' = x_{k,n} = (x_{k+1}, \dots, x_n) \in R^{n-k}$, $x = (x', x'') = (x_{1,k}, x_{k,n}) \in R^n$, $R^n_{k,+} = \{x = (x_{1,k}, x_{k,n}) \in R^n;\ x_{k+1} > 0, \dots, x_n > 0\}$, $B_{k,+}(0,r) = \{x \in R^n_{k,+}; |x| < r\}$, $\gamma_{k,n} = (\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n)$, $|\gamma_{k,n}| = \sum_{i=k+1}^n \gamma_i$, $\gamma_{k+1} > 0, \dots, \gamma_n > 0$, $x_{k,n}^{\gamma_{k,n}} = x_{k+1}^{\gamma_{k+1}} \cdot \dots \cdot x_n^{\gamma_n}$, $B_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\gamma_j}{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = k+1, \dots, n$, $B_{k,n} = (B_{k+1}, \dots, B_n)$. В случае $k = 0$ $x = x'' = x_{0,n} \in R^n$.

Через $L_p^{\gamma_{k,n}}(R^n_{k,+})$, будем обозначать пространства измеримых функций $f(x)$,$x \in R^n_{k,+}$ с конечной нормой $\|f\|^p_{p,\gamma_{k,n}} = \int_{R^n_{k,+}} |f(x)|^p x_{k,n}^{\gamma_{k,n}} dx$. Следуя В.С.Гулиеву, будем говорить, что функция $f \in L_{1,loc}^{\gamma_{k,n}}(R^n_{k,+})$ принадлежит пространству $BMO_{\gamma_{k,n}}(R^n_{k,+})$, если

$$\|f\|_{BMO_{\gamma_{k,n}}(R^n_{k,+})} =$$

$$= \sup_{x,r} |B_{k,+}(0,r)|^{-1}_{\gamma_{k,n}} \int\limits_{B_{k,+}(0,r)} |T^y f(x) - f_{B_{k,+}(x,r)}| y_{k,n}^{\gamma_{k,n}} dy < \infty,$$

где $f_{B_{k,+}(x,r)} = |B_{k,+}(0,r)|^{-1}_{\gamma_{k,n}} \int\limits_{B_{k,+}(0,r)} T^y f(x) y_{k,n}^{\gamma_{k,n}} dy$,

$$T^y f(x) = C_\gamma \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_{k+1}^2 - 2x_{k+1}y_{k+1}\cos\alpha_{k+1} + y_{k+1}^2}, \dots,\right.$$

$$\left.\sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha_n + y_n^2}\right) \prod_{i=k+1}^n \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i \, d\alpha_{k+1} \dots d\alpha_n.$$

Рассмотрим $B_{k,n}$–потенциал Рисса

$$I^\alpha_{B_{k,n}} f(x) = \int_{R^n_{k,+}} T^y |x|^{\alpha - n - |\gamma_{k,n}|} f(y) y_{k,n}^{\gamma_{k,n}} dy.$$

Теорема. Пусть $0 < \alpha < n + |\gamma_{k,n}|$, $p = \frac{n+|\gamma_{k,n}|}{\alpha}$, $f \in L_p^{\gamma_{k,n}}(R_{k,+}^n)$. Если интеграл $I_{B_{k,n}}^\alpha f$ почти всюду существует, то $I_{B_{k,n}}^\alpha f \in BMO_{\gamma_{k,n}}(R_{k,+}^n)$ и

$$\left\| I_{B_{k,n}}^\alpha f \right\|_{BMO_{\gamma_{k,n}}(R_{k,+}^n)} \leq C_p \|f\|_{L_p^{\gamma_{k,n}}(R_{k,+}^n)}.$$

Отметим, что в случае $k = 0$ теорема доказана В.С.Гулиевым [1], а в случае $k = n$ Д.Д.Гасановым [2].

Литература

1. Гулиев В.С. Докл. РАН. 1998, т.358. N 4, с.450-451.

2. Гасанов Д.Д. Аниз. B_n-потенциал Рисса и его прил. //Канд. дисс., Баку, 1999.

ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Гевлич А.Л., Темнов А.Н. (Москва)

a_temnov@hotmail.com

Рассматривается задача о малых движениях идеальной несжимаемой гравитирующей жидкости, полностью заполняющей область Q между концентрично расположенными сферами ($R_i = a$, $R_e = b$, $b > a$). Исходная система уравнений гидродинамики и гравитации приводится к одному интегродифференциальному уравнению для радиальной компоненты скорости $V_r(x,t)$

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2}{\partial^2 t}(LV_r) + N^2(r)\Delta_2 V_r + \\ + \frac{1}{\rho_0(r)}\frac{d\rho_0(r)}{dr}\Delta_2\left(f\int_Q \frac{d\rho_0(r)}{dr}\frac{V_r(x',t)}{|x-x'|}dQ'\right) = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

с граничными и начальными условиями
$V_r(x,t) = 0$, $r = a, b$; $V_r(x,0) = V^0(x)$, $\frac{\partial V_r}{\partial t}(x,0) = V^1(x)$.
Здесь L - дифференциальный оператор второго порядка по сферическим координатам r, θ, φ; Δ_2 - двумерный оператор Лапласа по координатам θ, φ ; f - гравитационная постоянная; $N^2(r)$ - квадрат частоты плавучести.

Для произвольного закона плотности $\rho_0(r)$ исследована эволюционная и спектральная задачи. Приведены аналитическое решение задачи на собственные значения для модельного закона изменения плотности и численное решение задачи для внешнего жидкого ядра Земли.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТРЕХМЕРНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С ОБОБЩЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Гейдаров А.Г. (Баку, Азербайджан)
E-mail: guliev@azdata.net

Рассмотрим в пространстве $L_2(R^3)$ оператор $A = \Delta^2 + \alpha\delta(x)$ с областью определения

$$D(A) = \{u \in L_2(R^3) \cap C(R^3) | \Delta^2 u + \alpha\delta(x)u \in L_2(R^3)\}.$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — трехмерный оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\alpha \in R$ — вещественный параметр. Производная $\Delta^2 u$ понимается в обобщенным смысле. Известно, что A–полуограниченный снизу самосопряженный оператор в $L_2(R^3)$.

В данном сообщении приводится теорема о структуре спектра оператора A. Как обычно, через $\sigma_{ess}(A)$, $\sigma_{ac}(A)$, $\sigma_{sc}(A)$ и $\sigma_p(A)$ обозначаются существенный, абсолютно непрерывный, сингулярный и точечный спектры оператора A соответственно.

Теорема. *Пусть $\alpha \in R$. Тогда*

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ac}(A) = [0, \infty), \quad \sigma_{sc}(A) = \emptyset.$$

Если $\alpha < 0$, то оператор A имеет в точности одно отрицательное простое собственное значение

$$\lambda = -\left(\frac{\alpha}{4\sqrt{2}\pi}\right)^4, \text{ т.е. } \sigma_p(A) = \left\{-\left(\frac{\alpha}{4\sqrt{2}\pi}\right)^4\right\}, \ -\infty < \alpha < 0.$$

Соответствующая нормированная собственная функция $u(x)$ имеет вид

$$u(x) = \frac{\sqrt{|\alpha|}}{2\pi|x|} e^{\frac{\alpha|x|}{8\pi}} sin\left(\frac{\alpha|x|}{8\pi}\right).$$

В случае $\alpha \geq 0$ оператор A собственных значений не имеет, т.е.

$$\sigma_p(A) = \emptyset, \quad 0 \leq \alpha < +\infty.$$

КРИТЕРИЙ ЗАМКНУТОСТИ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПУЧКА

Глазкова М.Ю. (Воронеж)[1]

Рассмотрим операторный пучок $Ln(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j A_j$, где $domA_0 = domA_j$ $(j = \overline{1,n})$, $\lambda \in \{1\} \times R^n_+$.

Обозначим

$$\alpha_{ij} = \cos(A_i, A_j) =$$

$$= \inf \left\{ \frac{Re(A_i x, A_j x)}{||A_i x|| \cdot ||A_j x||} \middle| x \in domA_0, A_i x \neq 0, A_j x \neq 0 \right\}.$$

Назовем $\mathcal{A}(\alpha_{ij})$ матрицей, ассоциируемой с пучком $Ln(\lambda)$. Заметим, что $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ и $\alpha_{ii} = 1$, $i, j = \overline{0,n}$.

Пусть $E = C$ или $E = R$, E^m — m-мерное гильбертово пространство с евклидовым произведением. E^m_+ — конус неотрицательных векторов $u = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\} \in E^m$, $\xi \geq 0$, $i = \overline{1,m}$.

Матрица $\mathcal{A}$ называется конусно равномерно положительной матрицей в E^m, если

$$\exists K_{\mathcal{A}} > 0 : \ (\mathcal{A}u, u) \geq K_{\mathcal{A}}(u, u), \ u \in E^m_+.$$

Основной результат:

Теорема. *Пусть операторные коэффициенты пучка $L_n(\lambda)$ таковы:*

A_0 — максимальный (равномерно) аккретивный оператор, A_j $(j = \overline{1,n})$ — акктеривные операторы. Если матрица $\mathcal{A}$ — конусно равномерно положительная, то $L_n(\lambda)$ — максимальный (равномерно) аккретивный для всех $\lambda \in \{1\} \times R^n_+$.

Из этой теоремы следует:

[1]Работа поддержана грантами РФФИ 99-01-00391 и NWO-REBR 047-008-008

1. Если A_0 — самосопряженный, A_j $(\overline{1,n})$ — симметрические, то $L_n(\lambda)$ — самоспряженный для всех $\lambda \in \{1\} \times R^n_+$ тогда и только тогда, когда он замкнут для всех $\lambda \in \{1\} \times R^n_+$.

2. Если операторные коэффициенты A_j пучка $L_n(\lambda)$ b-аккретивные, A_0 — максимальный b-аккретивный, матрица $\mathcal{A}$ — конусно равномерно положительная, то для всех $\lambda \in \{1\} \times R^n_+$ $L_n(\lambda)$ — максимальный b-аккретивный оператор.

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ХАРДИ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ–УОЛША

Голубов Б.И. (Долгопрудный)[1]

E-mail golubov@math.mipt.ru

Известна следующая теорема Харди (1926г.):

Теорема А. *Если функция* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *принадлежит пространству Харди* $H(|z| < 1)$, *а* $f(e^{it})$ *— ее предельная функция на окружности* $|z| = 1$, *то*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n+1} \le \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|\, dt.$$

Хилле и Тамаркин (1935г.) доказали интегральную версию этой теоремы.

Теорема А. *Если функция* $f(z)$ *принадлежит пространству Харди* $H(\mathbf{R}^2_+)$ *в верхней полуплоскости, а* $\hat{f}$ *— преобразование Фурье ее граничной функции* f *на действительной оси, то*

$$\int_{\mathbf{R}_+} \frac{|\hat{f}(x)|}{x}\, dx \le \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx.$$

Ладхавала (1976г.) доказал аналог теоремы А для системы Уолша.

---

[1]Исследования выполнены при поддержке РФФИ, проект N 99-01-00355.

Нашей целью является установление аналога теоремы А для преобразования Фурье–Уолша. Для этого введем двоичное пространство Харди $H(\mathbf{R}_+)$. Отрезок вида $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ при $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}_+$ назовем двоичным отрезком, а множество всех таких отрезков обозначим через D. Длину отрезка $I \in D$ обозначим через $|I|$. Для функции $f \in L_{loc}(\mathbf{R}_+)$ определим двоичную максимальную функцию

$$M(f)(x) = \sup_{x \in I, I \in D} \left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t)\, dt \right|.$$

Двоичным пространством Харди $H(\mathbf{R}_+)$ назовем множество всех таких функций $f \in L_{loc}(\mathbf{R}_+)$, для которых $M(f) \in L(\mathbf{R}_+)$, с нормой $\|f\|_H \equiv \|M(f)\|_{L(\mathbf{R}_+)}$.

Для функции $f \in L(\mathbf{R}_+)$ через $\tilde{f}$ обозначим ее преобразование Фурье–Уолша.

Следующая теорема является аналогом теоремы А.

Теорема. *Если* $f \in H(\mathbf{R}_+)$, *то*

$$\int_{\mathbf{R}_+} \frac{|\tilde{f}(x)|}{x}\, dx \leq 50\sqrt{2}\|f\|_H.$$

О НЕПРЕРЫВНОСТИ СЛАБО КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ В НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

Гончаров Г.М. (Воронеж)

В банаховом пространстве E для отображения A типа сжатия, слабо коммутирующего с непрерывным оператором S, показано, что последовательность итераций Ишикавы может сходиться только к неподвижной точке операторов S и A и A непрерывен в этой точке.

1.Определение. *Операторы S и A называют слабо коммутирующими, если*

$$\|ASx - SAx\| \leq \|Sx - Ax\|, \quad \forall x \in E.$$

Пусть K - непустое ограниченное замкнутое выпуклое множество банахова пространства E и $\forall x_0 \in K$

$$S x_{n+1} = (1-\alpha_n) S x_n + \alpha_n A y_n.$$
$$S y_n = (1-\beta_n) S x_n + \beta_n A x_n.$$
$$0 \le \alpha_n \le \beta_n \le 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim \alpha_n = \alpha > 0.$$

Теорема. *Пусть*

1) Слабо коммутирующий с непрерывным оператором S оператор $A : K \longrightarrow SK \subset K$;

2) $||Ax - Ay|| \le a||Sx - Sy|| + b||Sx - Ax|| + c||Sy - Ay||, a + b + c = q < 1, a, b, c \ge 0, \forall x, y \in K$.

Тогда (Sx_n) сходится к единственной общей неподвижной точке y операторов A и S и A непрерывен в точке y.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮШЕЙ ИЗМЕНЕНИЕ УДАРНОЙ ВЯЗКОСТИ И ПЛАСТИЧНО-СТИ МАТЕРИАЛА ОБОЛОЧКИ

Гончарова Г.А., Гарбуз Е.В. (Саратов)

Цилиндрическая тонкостенная оболочка может считаться элементом конструкции реального трубопровода низкого давления на линейном участке. Для изучения долго-вечности работы элемента конструкции необходимо учитывать:

– сближение величин предела текучести и временного сопротивления при одноосном растяжении, отражающее снижение пластичности;

– уменьшение ударной вязкости, отражающее снижение трещиностойкости металла труб.

Кроме этого на работоспособность оболочки оказывает влияние уровень окружных и осевых напряжений, особенно при наличии коррозионных повреждений, наличие температурных полей.

В качестве условия разрушения принимается достижение любого из критериев сво-его критического значения или суммарно по анализу объективной прочности.

Снижение пластичности металла труб в результате старения, т.е. зависимость основных механических характеристик от времени эксплуатации оболочки предлага-ется представить в виде дробно- рационального выражения:, зависящего от нагрузки, времени и температуры, содержащем параметры, отражающие процесс старения. Для определения этих параметров создана программа для ПЭВМ, основанная на аппрокси-мации экспериментальных данных.

Определение времени безопасной эксплуатации производится путем построения при помощи ПЭВМ графика функции предлагаемого вида в координатах "пластич-ность - время" и прямой , отражающей критическое значение величины пластичности). Разность фактического времени по кривой и абсциссы точки пересечения графиков оп-ределяет остаточный ресурс.

Снижение трещиностойкости металла труб в результате старения, т.е. зависи-мость ударной вязкости от времени, температуры и других условий работы оболочки предлагается представить в виде ступенчатой нелинейной функции, содержащей пара-метры, отражающие процесс старения. Для определения этих параметров создана про-грамма для ПЭВМ, основанная на аппроксимации экспериментальных данных. При этом исходное значение ударной вязкости, выбирается по сертификату на материал оболочки.

Показано, что для определения работоспособности оболочки по критерию удар-ной вязкости, работающей более 15 лет при низком давлении, в диапазоне температур -20+20 0С, при слабо выраженной коррозии возможно использовать экспотенциальный вид предложенной функции.

Определение времени безопасной эксплуатации производится путем построения при помощи ПЭВМ графика выбранной функции в координатах "ударная вязкость - время" и прямой 30 Дж/см2 (параллельно оси абсцисс). Разность времени по кривой и абсцисса точки пересечения линий искомую величину.

Проведенные исследования показали, что предложенная модель достаточно хо-рошо описывает процессы, проходящие в материале оболочки, и позволяет определять , опасное время, с точки зрения указанных критериев, то есть момент возможного про-рыва трубопровода.

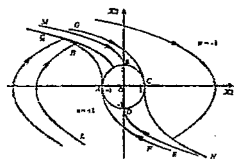
РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НА КРУГ

Гончарова М.Н. (Гродно, Беларусь)
gonch@mail.grsu.grodno.by

Пусть поведение объекта описывается дифференциальным включением

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \in F(t, x) = \{f \in E^2, f_1 = x_2, f_2 = u, |u| \leq 1\},$$

где (x_1, x_2) есть вектор двумерного евклидова пространства E^2. Необходимо осуществить переход объекта из произвольной начальной точки $x_0 \in E^2$ на круг $S_1(0) = \{x \in E^2 | ||x|| \leq 1\}$ единичного радиуса за наименьшее время.



Построена синтезирующая функция $v(x_1, x_2)$, заданная на фазовом пространстве и принимающая значения из $[-1; 1]$, равная для каждого t оптимальному управлению в точке $x_1(t), x_2(t)$:

$$v(x_1, x_2) = \begin{cases} -1, & \text{если точка с координатами } (x_1, x_2) \text{ находится выше кривой } QABCN \text{ или на кривой } QA, \\ +1, & \text{если точка с координатами } (x_1, x_2) \text{ находится ниже кривой } QADCN \text{ или на кривой } CN. \end{cases}$$

Найдены параметрические уравнения кривых CN, AQ, определяющих линию переключения управления:

$$CN : \begin{cases} x_1(l) = \dfrac{1 + 2l - l^2}{2l^2}, \\ x_2(l) = -\sqrt{1 - l^2} \cdot (1 + \dfrac{1}{l}), \\ l \in (0, 1]; \end{cases}$$

$$AQ: \begin{cases} x_1(q) = \dfrac{q^2 - 2q - 1}{2q^2}, \\ x_2(q) = \sqrt{1-q^2} \cdot (1 + \dfrac{1}{q}), \\ q \in (0;1]. \end{cases}$$

ВОЛЬТЕРРОВОСТЬ СОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

Григоренко А.А., Жуковский Е.С. (Тамбов)
eszh@tsu.tmb.ru

Пусть B – банахово пространство действительных функций, определенных на $[a,b]$. Поставим в соответствие каждому $\gamma \in [0, b-a]$ измеримое по Лебегу множество e_γ с мерой $\mu(e_\gamma) = \gamma$ таким образом, что

$$\forall \gamma, \eta \in [0, b-a] \quad \gamma < \eta \Longrightarrow e_\gamma \subset e_\eta.$$

Обозначим $\mathbf{v} = \{e_\gamma\}$. Линейное отображение $Q : B \to B$ будем называть вольтерровым на системе $\mathbf{v}$ [1], если для каждого $e_\gamma \in \mathbf{v}$ и любого $y \in B$ из $y(s) = 0$ на e_γ следует $(Qy)(s) = 0$ на e_γ. Непосредственно из определения следует, что сумма и произведение линейных вольтерровых на системе $\mathbf{v}$ операторов является линейным вольтерровым на системе $\mathbf{v}$ оператором.

Следующее утверждение несколько расширяет границы применимости утверждения [2] о пределе последовательности вольтерровых операторов.

Теорема 1. Пусть для каждого $\gamma \in [0, b-a]$ и каждой сходящейся последовательности $\{y_i\} \subset B$, $y_i \to y$, если $y_i(s) = 0$ $\forall s \in e_\gamma$, то и $y(s) = 0$ $\forall s \in e_\gamma$. Если последовательность линейных вольтерровых на системе $\mathbf{v}$ операторов $Q_i : B \to B$ сходится на каждом элементе $y \in B$ к линейному оператору $Q : B - B$, то оператор Q также является вольтерровым на системе $\mathbf{v}$.

Пусть сопряженное пространство B^* является пространством функций $[a,b] \to R^m$ и выполнены следующие условия:

I) При любых $y \in B$, $g \in B^*$, если $y(s) = 0$ на e_γ и $g(s) = 0$ на $[a,b] \setminus e_\gamma$, то $gy = 0$.

II) При любом $\gamma \in [0, b-a]$, если элемент $g \in B^*$ принадлежит ортогональному дополнению к подпространству $M_\gamma = \{y \in B | y(s) = 0$ при всех $s \in e_\gamma\}$, то $g(s) = 0$ на $[a,b] \setminus e_\gamma$.

Теорема 2. *Для любого вольтеррового на* $\mathbf{v} = \{e_\gamma\}$ *линейного ограниченного оператора* $Q : B \to B$ *сопряженный оператор* $Q^* : B^* \to B^*$ *является вольтерровым на системе* $\mathbf{v} = [a,b] \setminus \{e_\gamma\}$.

Литература

1. Жуковский Е.С. К теории уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1989. Т.25. 9. С.1599-1605.

2. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. Абстрактные функционально-дифференциальные уравнения // Функционально-дифференциальные уравнения.-Пермь, 1987.- С. 3-11.

ОЦЕНКИ НОРМ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛИНОМОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

Григорьев П.Г. (Москва)

pgrigori@nes.ru

Доклад посвящен оценкам математического ожидания норм случайных полиномов

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) f_i(x), \tag{1}$$

где $\{\xi_i\}_1^n$—набор независимых случайных величин на (Ω, P), а $\{f_i\}_1^n$—система функций на другом пространстве с мерой (X, μ), норма здесь берется в пространстве функций, зависящих от x, при фиксированном ω.

К настоящему моменту разработаны различные методы оценки равномерных норм случайных полиномов (см. [1]–[5]). Оценка снизу равномерной нормы случайных полиномов (1) по ортогональной системе функций общего вида впервые была получена Б.С. Кашиным и Л. Цафрири в работах [1], [2]. В [2] была введена следующая норма

$$||f||_{m,\infty} := \int_X \dots \int_X \max\{|f(x_1)|, \dots, |f(x_m)|\} d\mu(x_1) \dots d\mu(x_m). \tag{2}$$

где $f \in L_1(X, \mu)$, $\mu X = 1$. Мы будем называть ее *интегрально-равномерной нормой.* В [1] была фактически получена нижняя оценка для нормы (2) случайного полинома (1) с параметром $m \asymp n$. Автором были получены обобщения результата из [1] как на случай произвольного параметра m, так и для более широкого класса функций $\{f_i\}_1^n$. Установлена следующая

Теорема 1. *Пусть наборы функций $\{f_i\}_1^n$ и $\{\xi_i\}_1^n$ определены на вероятностных пространствах (X, μ) и (Ω, P) соответственно, и справедливы следующие условия:*

(a) $\|f_i\|_2 = 1$ *и* $\|f_i\|_3 \le M$ *для всех* i;

(b) $\|\sum_{i=1}^n c_i f_i\|_2 \le M n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^n |c_i|^2\right)^{1/2}$ *для всех наборов коэффициентов* $\{c_i\}_1^n$;

(c) $\{\xi_i\}_1^n$ *независимые случайные величины,* $\mathsf{E}\xi_i = 0$, $\mathsf{E}|\xi_i|^2 = 1$, $\mathsf{E}|\xi_i|^3 \le M^3$.

Тогда существуют абсолютные константы $q = q(\varepsilon, M) > 0$, $C_j = C_j(\varepsilon, M) > 0$, $j = 1, 2, 3$ такие, что

$$\mathsf{P}\Big\{\omega \in \Omega : \|\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega) f_i\|_{m,\infty} \le C_1\big(n \log P\big)^{1/2}\Big\} \le C_2 P^{-q}.$$

$$\mathsf{E}\|\sum_{i=1}^n \xi_i f_i\|_{m,\infty} \ge C_3\big(n \log P\big)^{1/2}, \tag{3}$$

где $P := \min(m, n) + 1$. Если к тому же $\|f_i\|_\infty \le M$, и для $\{\xi_i\}_1^n$ выполнена экспоненциальная оценка, то оценка (3) точна по порядку.

С помощью теоремы 1 была разрешена задача, связанная с проблемой критерия строгой сингулярности вложения подпространсва $L_1(0,1)$ (см. [6]).

Теорема 2. *Для любого набора функций $\{f_i\}_{i=1}^n$ на (X, μ), $\mu X = 1$ такого, что $\|f_i\|_1 = 1$ и $\|f_i\|_3 \le M$, существует набор знаков $\{\theta_i\}_{i=1}^n$, $\theta_i = \pm 1$, такой, что при любом $k = 1, \dots, \log n$ выполнено неравенство*

$$\sup_{\substack{e \subset X \\ \mu e = 2^{-k}}} 2^k \int_e |\sum_{i=1}^n \theta_i f_i(x)| d\mu(x) \ge c_0 \sqrt{nk}.$$

Литература

[1] B.Kashin, L.Tzafriri, East J. on Approx. **v.1, N 1** 1995.

[2] B.Kashin, L.Tzafriri, East J. on Approx. **v.1, N 3** 1995.

[3] M.Ledoux, M.Talagrand, *Probability in Banach Spaces.* Springer, 1991.

[4] M.Marcus, G.Pisier, *Random Fourier Series with Applications to Harmonic Analysis*, Princeton Univ.Press, 1981.

[5] Ж.-П.Кахан *Случайные функциональные ряды.* М.:Мир 1973.

[6] S.J.Montgomery-Smith, E.M.Semenov, *Embeddings of rearrangement invariant spaces that are not strictly singular,* Positivity, в печати.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, НЕРАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Гуленко М.Н., Курбатов В.Г. (Липецк)

kurbatov@stu.lipetsk.su

Рассмотрим две системы линейных уравнений

$$Li'(t) + Ri(t) = u(t) \tag{4}$$

и

$$Ri(t) + D\int_{-\infty}^{t} i\,dt = u(t) \tag{5}$$

в предположении, что L, R и D — положительно определенные матрицы, вообще говоря, большой размерности. Известно, что к такому виду можно привести уравнения Кирхгофа, описывающие работу RL- и RC-цепей, соответственно (в этом случае D — матрица величин, обратных емкостям). *Импульсной характеристикой* уравнения (1) называют матричное решение Y уравнения

$$LY'(t) + RY(t) = \delta(t)\mathbf{1},$$

равное нулю на $(-\infty, 0)$. Очевидно, $Y(t) = e^{-L^{-1}Rt}L^{-1}$ при $t > 0$. *Интегральной импульсной характеристикой* уравнения (2) называют матричное решение X уравнения

$$RX(t) + D\int_{-\infty}^{t} X\,dt = H(t)\mathbf{1},$$

равное нулю на $(-\infty, 0)$. Здесь H — функция Хевисайда. Очевидно, $X(t) = e^{-R^{-1}Dt}R^{-1}$ при $t > 0$.

Теорема. *Пусть для некоторого $t > 0$ известна аналитическая функция $\lambda \mapsto p(\lambda, t)$, удовлетворяющая оценке*

$$|e^{-\lambda t} - p(\lambda, t)| \leq \varepsilon(t)$$

при всех $\lambda \in \sigma(L^{-1}R)$ (соответственно при всех $\lambda \in \sigma(R^{-1}D)$); величина $\varepsilon(t)$ предполагается известной. Тогда для приближения $t \mapsto p(L^{-1}R, t)L^{-1}$ импульсной характеристики Y уравнения (1) справедлива оценка

$$\|Y(t) - p(L^{-1}R, t)L^{-1}\| \leq \varepsilon(t)\|L^{-1}\|,$$

и, соответственно, для интегральной импульсной характеристики уравнения (2)

$$\|X(t) - p(R^{-1}D, t)R^{-1}\| \leq \varepsilon(t)\|R^{-1}\|.$$

Под нормой матриц здесь понимается норма, порожденная евклидовой нормой векторов.

Обсуждаются способы построения приближения $p(\lambda, t)$.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ИНТЕГРАЛА ТИПА ПОТЕНЦИАЛА НА ОДНОРОДНЫХ ГРУППАХ В ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ

Гулиев В.С. (Баку, Азербайджан)

E-mail: guliev@azdata.net

Однородной группой в смысле Фолланда-Стейна называется связная односвязная нильпотентная группа Ли G, на алгебре

Ли g которой действует однопараметрическая группа растяжений $\delta_t = \exp(A \ln t)$, $t > 0$, где A - диагонализируемый линейный оператор на g , собственные числа которого положительны. а число $Q = trA$ - однородной размерностью группы G. Пусть $r(x)$. $x \in G$ - однородная норма на группе G, $[t]_1 = \min\{1, t\}$.

Через $\widetilde{L}_{p,\lambda}(G)$ и $L_{p,\lambda}(G)$, $1 \le p < \infty$, $0 \le \lambda < Q$, обозначим (модифицированной) пространство Морри с конечной нормой

$$\|f\|^p_{\widetilde{L}_{p,\lambda}(G)} = \sup_{x,t} \left([t]_1^{-\lambda} \int\limits_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right), \ \|f\|^p_{L_{p;\lambda}(G)} =$$

$$= \sup_{x,t} \left(t^{-\lambda} \int\limits_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right).$$

Для интеграла типа потенциала

$$R^\alpha f(x) = \int\limits_G r(xy^{-1})^{\alpha-Q} f(y) dy, \qquad 0 < \alpha < Q$$

справедлива :

Теорема 1 [1] *Пусть* $0 < \alpha < Q$, $1 < p < \frac{Q}{\alpha}$, $0 \le \lambda < Q$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{Q}$.

Тогда, если $f \in \widetilde{L}_{p,\lambda}(G)$, *то* $R^\alpha f \in \widetilde{L}_{q,\lambda}(G)$ *и имеет место оценка*

$$\|R^\alpha f\|_{\widetilde{L}_{q,\lambda}(G)} \le C_{p,\lambda} \|f\|_{\widetilde{L}_{p,\lambda}(G)}.$$

Теорема 2 [1] *Пусть* $0 < \alpha < G$, $1 < p < \frac{Q}{\alpha}$, $0 \le \lambda < Q - \alpha p$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{Q-\lambda}$.

Тогда, если $f \in L_{p,\lambda}(G)$, *то* $R^\alpha f \in L_{q,\lambda}(G)$ *и имеет место оценка*

$$\|R^\alpha f\|_{L_{q,\lambda}(G)} \le C_{p,\lambda} \|f\|_{L_{p,\lambda}(G)}.$$

Литература

1. Гулиев В.С. *Интегральные операторы, функциональные пространства и двухвесовые оценки на однородных группах. Некоторые приложения.* Баку. 1999. 332 стр.

БИФУРКАЦИИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ПРИ НАЛОЖЕНИИ КРАЕВЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Данилова О.Ю. (Воронеж)

E-mail doy@math.main.vsu.ru

Рассматриваются бифуркации экстремалей гладких функций в окрестности краевой критической точки.

Краевые особенности возникают при исследовании задачи $V(x) \to extr$ с ограничением $g(x) \geq 0$, где V – некоторый функционал. Наличие ограничения приводит к необходимости исследования функционала в окрестности краевой особенности [1],[2] (то есть особенности, лежащей на крас области $g(x) \geq 0$).

Решение такой задачи часто можно осуществить переходом (редукцией) [3] к аналогичной задаче $W(\xi) \to extr$, где $\xi \in R^n_{1+}, R^n_{1+} = \{\xi = (\xi_1, ..., \xi_n), \xi_1 \geq 0\}$, а W – гладкая функци, называемая ключевой. Таким образом, исследование экстремалей функционала V сводится к исследованию критических точек ключевой гладкой функции W. Точка $a \in R^n_{1+}$ и $a \notin \partial R^n_{1+}$ называется критической для функции W, если она критическая в обычном смысле, то есть $gradW(a) = 0$. Для таких точек применяются обычные определения. Точка $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \partial R^n_{1+}$ (то есть $a_1 = 0$) называется критической для функции W, если $gradW(a)$ ортогонален границе в точке a. Для краевых критических точек вводится определение кратности, индекса Морса и др.

Литература

1. Арнольд В. И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют. УМН. 1978. Т. 33, вып. 5(203). С. 91 – 105.

2. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн – Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотика интегралов. М.: Наука. 1984. 336 с.

3. Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах. // Успехи матем. наук, 1996. - Т. 51. вып. 1. - С. 101 – 132.

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

Денисов В.Н. (Москва)

В полупространстве E_{+}^{N+1} рассматривается задача Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(a_{i,j(x)}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x,t)u \tag{1}$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x) \tag{2}$$

Мы считаем, что коэффициенты удовлетворяют условию равномерной эллиптичности и что u_0 ограничена. Решение (1)–(2) понимается в классическом смысле, $c(x,t) \leq 0$.

Введем условие $A : c(x,t) \leq -1$ при $|x| \leq 1$. Тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Если $N = 1$ или $N = 2$, то при выполнении Условия A решение (1)–(2) стабилизируется к нулю (т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0$) равномерно на любом компакте при всякой ограниченной начальной функции u_0. При $N \geq 3$ это утверждение неверно.*

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ И РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Дубинин В.Н. (Владивосток)[1]

e-mail: dubinin@iam-mail.febras.ru

Рассматриваются неравенства для производных от полиномов и рациональных функций. Неравенства такого типа были получены и существенно использовались в теории аппроксимации. Заметим, что родственные результаты в виде многочисленных теорем искажения и мажорации для аналитических функций составляют существенную часть классического содержания геометрической теории функций комплексного переменного. Вместе с

[1]Работа поддержана фондом РФФИ (грант 99-01-00443).

тем, в современных работах по неравенствам для полиномов и рациональных функций внимание к этой теории уделяется в меньшей степени, чем это можно было бы ожидать [1]. Цель данного сообщения — восполнить частично указанный пробел. Мы применяем обобщения и уточнения классической леммы Шварца, а также приведенные модули и симметризацию [2] для получения новых неравенств. В частности, для алгебраических полиномов доказаны новые теоремы искажения на окружности, усиливающие хорошо известные неравенства Бернштейна и Турана. Мы даем уточнения и усиления некоторых неравенств В.Н. Русака и В.С. Виденского для рациональных функций, а также недавних результатов Борвейна, Эрдели, Ли, Мохапатры, Родригеса, Азиза и др. Приведем типичный результат.

Теорема. *Для любой рациональной функции вида* $R(z) = (c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m)/\prod(z - a_k)$, $c_m \neq 0$, $|a_k| > 1$, $k = 1, \ldots, n$, $1 \leq n \leq m$, *на единичной окружности* $|z| = 1$ *справедливо неравенство*

$$|Im(zR'(z))| \leq |(z^{m-n}B(z))'|\sqrt{(ReR(z) - A)(B - ReR(z))},$$

где $B(z) = \prod\limits_{k=1}^{n}[(1 - \overline{a}_k z)/(z - a_k)]$ *— произведение Бляшке,* $A = \min\{ReR(z) : |z| = 1\}$ *и* $B = \max\{ReR(z) : |z| = 1\}$. *Равенство достигается для функций* $R(z) = \alpha + \beta z^{m-n}B(z)$, *где* α *и* β *— произвольные комплексные числа* $\beta \neq 0$.

Литература

1. Borwein P., Erdelyi T. Polynomials and polynomial inequalities. New York: Springer-Verlag, 1995.

2. Дубинин В.Н. Приведенные модули открытых множеств в теории аналитических функций // Докл. РАН, 1998. Т. 363. № 6. С. 731-734.

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО МНОЖЕСТВ УРОВНЯ

Еременко И.О. (Москва, МГУ)[1]

E-mail: ivan@yeremenko.mccme.ru

Рассмотрим (X,ν)— σ-конечное пространство с мерой, фиксируем комплекснозначную функцию $f \in L^p(X)$, $f \neq 0$, $1 \leq p < \infty$. Для заданного числа $\beta \in \mathbf{C}$, $\beta \neq 0$ определим класс $H_\beta(f)$ измеримых множеств $B \subset X$ конечной меры таких, что $\nu(\{x : |f(x)-\beta| < |f(x)|\} \backslash B) = 0$, $\nu(\{x : |f(x)-\beta| > |f(x)|\} \cap B) = 0$.

Поставим задачу о нахождении множества $E \subset X$ и числа $\alpha \in \mathbf{C}$ таких, что

$$||f - \alpha \cdot \chi_E||_{L^p} = \inf_{Y \subset X, \gamma \in \mathbf{C}} ||f - \gamma \cdot \chi_Y||_{L^p}. \qquad (1)$$

Верными оказываются следующие утверждения:

1) Если задача (1) имеет решение (α, E), то $\alpha \neq 0$, $E \in H_\alpha(f)$.

2) Для фиксированного $\alpha \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$, для любых $E, E' \in H_\alpha(f)$ выполняется равенство $||f - \alpha \cdot \chi_E||_p = ||f - \alpha \cdot \chi_{E'}||_p$.

3) Задача (1) всегда имеет решение.

4) Пусть $p = 2$, (α, E)— решение задачи (1), тогда $\nu(E) > 0$, $\alpha = \frac{1}{\nu(E)} \int_E f(x)\, d\nu(x)$.

5) Для любого ортрезка $(X,\nu) = ([a,b], mes)$ имеется положительная действительнозначная функция $g \in L^2$, три попарно различных числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и три попарно различных(в смысле положительности меры разности) множества E_1, E_2, E_3 таких, что все три пары $(E_i, \alpha_i)(i = 1,2,3)$ являются решением задачи (1) при $p = 2$.

Доказательство утверждений 1 и 2 весьма несложно. Для доказательства утверждения 3 необходимо ввести функцию $h_f(\alpha) := ||f - \alpha \cdot \chi_{E(\alpha)}||_p = \inf_{Y \subset X} ||f - \alpha \cdot \chi_Y||_p$, где $\alpha \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$, $E(\alpha) \in H_\alpha(f)$. Если доопределить $h_f(0) = \lim_{\alpha \to 0} h_f(\alpha)$, то можно утверждать, что полученная функция $h_f(\cdot)$ будет непрерывной. Заметим также, что $||f||_p = \lim\limits_{|\alpha| \to \infty} h_f(\alpha) = \sup\limits_{\alpha \in \mathbf{C}} h_f(\alpha)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект N 99-01-00354.

Отсюда следует, что имеется точка $\alpha' \in \mathbf{C}$ такая, что $||f - \alpha' \cdot \chi_{E(\alpha')}||_p = h_f(\alpha') = \inf_{\beta \in \mathbf{C}} h_f(\beta)$— это и означает, что утверждение 3 верно. Свойство 4 следует из общих свойств гильбертовых пространств, а в качестве примера для утверждения 5 можно взять соответствующее сжатие с домножением на число функции $g_4(x)$ на отрезке $[0,4]$, равной $2+\sqrt{2}$ на множестве $[0,1)$, $\sqrt{2}$ на множестве $[1,2)$ и 1 на отрезке $[2,4]$.

ОПЕРАТОРЫ КЛАССА S_2 НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО ЯДРА ДЖЕКСОНА

Ершова Е.М. (Тверь)

E-mail: a000171@tversu.ru

Рассматриваются операторы класса S_2, имеющие вид

$$L_n(f,x) = \frac{1}{\Delta_{l,n}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t)(\cos(t) - \cos(\alpha))\, dt,$$

где $K_n(t) = \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2l}$, $l = 1, 2, \ldots$ - обобщенное ядро Джексона и $\Delta_{l,n} = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt$.

Й.Сабадош [1] показал, что порядок приближения дифференцируемых функций будет $O(\frac{1}{n^4})$, если $l = 2s$, $s = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим случай, когда $l = 2s+1$, в частности, $l = 3$ и $l = 5$.

Параметр α подбирается так, чтобы порядок приближения был лучше, чем $O(\frac{1}{n^2})$.

Используется запись $L_n(f,x)$ в виде

$$L(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[1/2 + \sum_{k=1}^{l(n-1)+1} \varrho_{k,2l} \cos(kt) \right] dt,$$

где $\varrho_{k,2l} = \frac{1}{\Delta_{l,n}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) K_n(t)(\cos(t) - \cos(\alpha))\, dt$, $k = \overline{1, ln - l + 1}$.

Нами получены следующие результаты:

Теорема 1. *Если выполнено хотя бы одно из двух условий:*

$$\cos(\alpha) = \frac{n^2-2}{n^2+1}; \alpha = \pm\frac{\sqrt{6}}{n},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} n^3(1-\varrho_{k,6}) = \frac{50}{69}k(k^2-1).$$

Теорема 2. *Если* $\cos(\alpha) = \frac{35n^6-19n^4-40n^2-48}{35n^6+38n^4+35n^2+36}$, то

$$\lim_{n\to\infty} n^4(1-\varrho_{k,10}) = \frac{28014}{193861}k^2(k^2-1).$$

Если $\alpha = \pm\frac{\sqrt{3990}}{35n}$, то

$$\lim_{n\to\infty} n^4(1-\varrho_{k,10}) = \frac{28014}{193861}k^2(k^2-4).$$

Литература

1. Szabados J. *On convolution operators with kernels of finite oscillation.* //Acta Math. Acad. Sci. Hung. V.27. 1976, P.179-192.

БАЗИСНОСТЬ РИССА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНДЕФИНИТНЫХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ефремов И.И. (Саратов)[1]

Пусть на отрезке $[0,1]$ задан линейный квазидифференциальный (к.д.) оператор K, порожденный к.д. выражением вида:

$$D_n y = y^{[n]},$$

где $y^{[k]} = ip_{kk}\frac{d}{dx}y^{[k-1]} + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}y^{[j]}$ для $k = n, n-1, \ldots, 1$, $y^{[0]} = p_{00}y$, $p_{ij} \in L^1[0,1]$ для $i = 0,1,\ldots,n$, $j = 0,1,\ldots,i$, а $p_{kk-1} \in L^2[0,1]$ для $k = n, n-1, \ldots, 1$, и линейно-независимыми краевыми условиями:

$$U_\nu(y) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №00-01-00075) и программы "Ведущие научные школы" (проект №00-15-96123)

определяемыми линейными формами от $y^{[0]}, y^{[1]}, \ldots, y^{[n-1]}$ в 0 и 1. При этом будем считать, что либо $p_{00}(x) = \frac{1}{r(x)}$ и $p_{kk}(x) \equiv 1$ для $k = 1, 2, \ldots, n$, либо $p_{nn}(x) = \frac{1}{r(x)}$ и $p_{kk}(x) \equiv 1$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$, где $r(x)$ – некоторая отличная от 0 комплексно-значная ступенчатая функция.

Накладывая некоторые ограничения на коэффициенты краевых условий в (1) и ступеньки функции $r(x)$ можно выделить регулярные краевые условия (см. определение в [1]). В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть оператор K и сопряженный оператор K^* порождены регулярными краевыми условиями и*

1) при $n = 2\mu$ $arg\, r_i - arg\, r_j$ для $i \neq j$, $0 \leq arg\, r_i, arg\, r_j < 2\pi$, $i, j = 0, \ldots, m$;

2) при $n = 2\mu - 1$ $arg\, r_0 = \ldots = arg\, r_m$,

где числа $r_0, r_1, \ldots, r_m$ представляют собой различные ступеньки функции $r(x)$, тогда система собственных и присоединенных функций оператора K образует базис Рисса в пространстве $L^2[0,1]$.

Лтьература

1. Ефремов И.И. // Сб. научн. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. – С. 32-35.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕСУРСОВ В УСЛОВИЯХ ИНДУСТРИАЛИЗАЦИИ

Ждид М. (Тверь)

Индустриальные проекты должны поддерживать экологическое равновесие, т.е. прибыль, получаемая от индустриализации, должна учитывать и сохранение окружающей среды.

Введем следующие обозначения $N^i > 0$ – плотность диких животных на i-ом шаге, $B^i > 0$ – ресурс биомассы на i-ом шаге, $I^i > 0$ – уровень индустриализации на i-ом шаге.

Управляемая модель использования природных ресурсов включает в себя как использование биомассы (вырубка леса) $u_2^i B^i$ так и охоту на диких животных на i – ом шаге $u_1^i N^i$.

здесь управление $u^i = (u_1^i, u_2^i)$ характеризует часть ресурсов, используемую для поднятия уровня индустриализации $[u] = (u^0, \ldots, u^{q-1})$. С учетом использования природных ресурсов модель перепишется в следующем виде:

$$N^{i+1} = r(B^i)N^i - \frac{r_0(N^i)^2}{K_1(B^i, I^i)} - u_1^i N^i, \; i = \overline{0, q-1},$$

$$B^{i+1} = g(B^i, K^i)B^i - \alpha I^i p(B^i) - \beta N^i q(B^i) - u_2^i B^i, \; i = \overline{0, q-1},$$

$$I^{i+1} = I^i f(I^i, L^i) + \alpha_1 I^i p(B^i), \; i = \overline{0, q-1},$$

$$I^i \geq 0, \quad B^i \geq 0, \quad N^i \geq 0, \; i = \overline{0, q-1},$$

$$0 \leq u_1^i \leq 1, \; 0 \leq u_2^i \leq 1, \; i = \overline{0, q-1}.$$

Целью управления является получение максимальной прибыли, сохранение природных ресурсов на заданном уровне $N^q = A$, $B^q = C$ и достижения заданного уровня индустриализации $I^q = D$. Граничные условия учтены с помощью функции штрафа. Итак,

$$I([u]) = -\sum_{i=0}^{q-1} (\rho_1^i u_1^i N^i - c_1(N^i)u_1^i) - \sum_{i=0}^{q-1} (\rho_2^i u_2^i B^i - C_2(B^i)u_2^i) +$$
$$+ M_1(N^q - A)^2 + M_2(B^q - C)^2 + M_3(I^q - D)^2.$$

Литература

1. Андреева Е.А., Ждид М.А. *Модели оптимального использования природных ресурсов* // Методы и алгоритмы исследования задач оптимального управления. Тверь, 2000. С. 47–56.

2. Ждид М. *Моделирование динамики популяции рыб* // Ученые записки ТвГУ. Т 6. Тверь: ТвГУ, 2000. С. 65–75.

О СИСТЕМЕ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Жуковская З.Д., Глушко Е.Г., Провоторова Е.Н.
(Воронеж)

Одной из новых проблем, возникших в последние годы в технических вузах, является обучение студентов-первокурсников, принятых на коммерческой основе. Недостаточный уровень их математической подготовки не позволяет им усваивать большинство естественно-научных дисциплин. Такие курсы, как правило, читаются в общих потоках, при этом изложение ведется на высоком уровне, рассчитанном на подготовленных студентов. В связи с предстоящей реформой вступительных экзаменов студенческая аудитория станет еще более неоднородной.

Опыт и анализ работы на кафедре математики Воронежского технического университета показывает, что причина неудовлетворительного усвоения учебной программы студентами, принятыми на договорной основе, не только в недостатке знаний, но и в большей степени в отсутствии навыков самостоятельной работы, навыков оценки объективной сложности и уровня усвоения учебного материала, незнании приемов самоконтроля и самооценки. Самостоятельная работа является важнейшей составляющей в учебном процессе образовательной системы любого уровня и самообразования личности. Поэтому ее эффективная организация на первых этапах обучения является залогом успешности всего образовательного процесса.

Нами при обучении высшей математике разработана система обеспечения качества самостоятельной доработки необходимых разделов элементарной математики, включающая: разработку тестовых заданий; организацию консультационных занятий; подготовку методических пособий: использование компьютерных технологий и управление процессом как поточных так и индивидуальных форм самостоятельной работы. Наиболее эффективным оказывается использование компьютерных контрольно-обучающих программ, позволяющих каждому студенту самостоятельно выяснить какие именно разделы ему необходимо доработать, получить помощь и проверить в достаточной ли степени усвоен материал. Навыки, получаемые обучающимися при такой рационально организованной самостоятельной работе помогают им формировать культуру умственного труда и более успешно справляться с различной интеллектуальной работой.

ЗАДАЧА КОШИ АБСТРАКТНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. ФУНКЦИЯ КОШИ

Жуковская Т.В. (Тамбов)
eszh@tsu.tmb.ru

Результаты исследований абстрактных функционально-дифференциальных уравнений [1] и обобщенно вольтерровых операторов, действующих в различных пространствах [2], позволяют для таких уравнений рассмотреть задачу Коши и получить для нее содержательную теорию. Обозначим $\mathbf{v}$ - совокупность таких множеств $e_\gamma \subset [a,b]$ с мерой $\mu(e_\gamma) = \gamma$, что $\forall \gamma, \eta \in [0, b-a]$ $\gamma < \eta \Longrightarrow e_\gamma \subset e_\eta$. Пусть D, B - банаховы пространства функций $y : [a,b] \to R^m$, D изоморфно и изометрично прямому произведению $B \times R^n$, $\mathcal{L} : D \to B$ - линейный ограниченный вольтерровый на $\mathbf{v}$ оператор, $r : D \to R^n$ - линейный ограниченный функционал, удовлетворяющий условию $\forall \varepsilon > 0$ $\forall x \in D$ $(x(t) = 0,$ $t \in e_\varepsilon \Rightarrow rx = 0)$. Систему уравнений

$$\mathcal{L}x = f, \tag{1}$$

$$rx = \alpha, \tag{2}$$

где $f \in B$, $\alpha \in R^n$ назовем задачей Коши для функционально-дифференциального уравнения (1). Если изоморфизм $D \simeq B \times R^n$ задан отображениями $\mathrm{col}(\delta, r) : D \to B \times R^n$, $(\Lambda, Y) = (\mathrm{col}(\delta, r))^{-1} : B \times R^n \to D$, где δ, Λ - вольтерровые на $\mathbf{v}$ операторы, то задача (1, 2) эквивалентна уравнению

$$Qy + A\alpha = f \tag{3}$$

Здесь $Q = \mathcal{L}\Lambda : B \to B$ - вольтерровый на $\mathbf{v}$ оператор, $A = \mathcal{L}Y : R^n \to B$. Уравнение (3) оказывается удобным инструментом исследования задачи Коши. В случае однозначной разрешимости задачи (1, 2) ее решение представимо [1] в виде $x = X\alpha + Cf$. Конечномерный оператор $X : R^n \to D$ определяется фундаментальной системой $X \in D^n$ решений однородного уравнения. Линейный ограниченный оператор $C : B \to D$ назовем оператором Коши. В [3] получены условия вольтерровости на системе v оператора Коши.

Предположим, что для любой последовательности $\{y_i\} \subset D$ из $||y_i||_D \to 0$ при $i \to \infty$, следует $|y_i(t)| \to 0$, для всех $t \in [a, b]$. В этом случае оператор Коши можно записать в виде $(Cf)(t) = \langle c(t), f \rangle$, где компоненты m-мерного вектора $c(t)$ являются элементами сопряженного пространства B^*.

Теорема. При каждом $t \in [a, b]$ функция Коши является решением уравнения $Q^*c(t) = \lambda(t)$, где Q^* - оператор, сопряженный к оператору Q. Фундаментальная матрица решений однородного уравнения определяется равенством $X(t) = Y(t) - c(t)A$.

Литература

1. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. Абстрактные функционально- дифференциальные уравнения // Функционально-дифференциальные уравнения.-Пермь, 1987.- С. 3-11.

2. Жуковский Е.С. К теории уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1989. Т.25. № 9. С.1599-1605.

3. Жуковский Е.С., Жуковская Т.В. Начальная задача для линейного абстрактного функционально-дифференциального уравнения // Вестник Тамбовского университета. 2000. Т.5, вып.4,. С.448-449.

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОЖИДАНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Задорожний В.Г. (Воронеж)

Рассматривается задача нахождения статистических характеристик решения задачи Коши

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = \varepsilon(t)\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x), \qquad (1)$$

$$y(t_0, x) = g(x).$$

где $t \in [t_0, t_1] = T \subset R, x \in R, \varepsilon : R \to R$ – случайный процесс, $f : R \times R \to R$ – случайный процесс, $g : R \to R$ – независимый с ε и f случайный процесс.

Используя разработанную в [1] методику, получены статистические характеристики решения этой задачи. В частности, получен следующий результат.

Теорема. *Если процессы ε и f независимы, $\varepsilon(t)$ имеет равномерное распределение с характеристическим функционалом*

$$\psi_{\varepsilon(v)} = \frac{\sin \int\limits_T a(s)v(s)ds}{\int\limits_T a(s)v(s)ds} e^{i \int\limits_T M\varepsilon(s)d(s)}, \quad M\varepsilon(t) > 0,$$

тогда математическое ожидание $My(t,x)$ решения задачи (1) дается формулой

$$My(t,x) =$$

$$Mg(x) * -i(2|x| \int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot(\int\limits_{t_0}^{t} M\varepsilon(s)ds)^{-1} * \exp(-i(\frac{x^2}{4\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds} - \frac{\pi}{4}))+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} (2|x| \int\limits_{\tau}^{t} a(s)ds)^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot(\int\limits_{\tau}^{t} M\varepsilon(s)ds)^{-1} * \exp(-i(\frac{x^2}{\int\limits_{\tau}^{t} a(s)ds} - \frac{\pi}{4})) * Mf(\tau, x)d\tau.$$

Литература

1. Задорожний В.Г. Дифференциальные уравнения с вариационными производными. Воронеж, ВорГУ, 2000. – 368 с.

О ПЕРЕСТАНОВКАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Зиза О.А. (Москва)

E-mail: msa.funcan@mtu-net.ru

Пусть $\{f_n\}$ — ОНС в $L^2[0,1]$. Рассмотрим *ортогональный ряд из* L^2 (ОР)

$$\sum c_n f_n(x), \quad x \in [0,1], \quad \{c_n\} \in l^2. \tag{1}$$

Система $\{f_n\}$ называется *системой сходимости*, если ряд (1) сходится п.в. на $[0,1]$ при любых c_n.

Классической является следующая задача А.Н. Колмогорова–Д.Е. Меньшова: существует ли для каждой ОНС $\{f_n\}$ перестановка $\{f_{\tau_n}\}$, являющаяся системой сходимости? Эта задача опубликована в [1, с. 142] и в [2, с. 139]. Ответ на этот вопрос не найден. Исследуя указанную задачу, Д.Е. Меньшов видоизменил вопрос, заменив требование сходимости п.в. ОР по переставленной системе требованием его суммируемости п.в. каким-либо методом, и получил положительный ответ для некоторых методов Теплица, в частности, для методов Чезаро [3, с. 143, 341]. Краткий обзор других результатов в этом направлении приведен в [4, с. 433].

Мы рассмотрим последний вопрос Д.Е. Меньшова по отношению к методам суммирования (φ, λ) известного класса ФЛ (см., напр., [5, с. 8]). Метод (φ, λ) задается функцией $\varphi = \varphi(t)$ $(t > 0)$, $\varphi(+0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$, и последовательностью $\lambda = \{\lambda_n\}$, $0 \le \lambda_n \uparrow \infty$. Числовой ряд $\sum a_n$ суммируется к значению S *методом* (φ, λ), если $\lim_{t\to+0}\sigma(t) = S$, где $\sigma(t) = \sum a_n \varphi(\lambda_n t)$.

Рассмотрим методы (φ, λ), удовлетворяющие следующим условиям.

1°. Пусть найдутся такие числа $h > 0$ и $p > 1$, что функция $\varphi = \varphi(t)$ $(t > 0)$ выпукла на полупрямой $[h, \infty)$ и $\varphi' \in L^p[0, h+1]$. Скажем тогда, что $\varphi \in \mathcal{HP}$.

2°. По данной последовательности λ построим возрастающую функцию $u = \lambda(\omega)$ $(\omega \ge 0)$, такую, что $\lambda(n) = \lambda_n$, и возьмем обратную функцию $\omega = \Lambda(u)$ $(u \ge \lambda_0)$. Обозначим через n_m числа $[\Lambda(2^k)]$, занумерованные в порядке возрастания. Будем писать $\lambda \in \mathcal{N}$, если $\lim_{m\to\infty}(n_{m+1} - n_m) = \infty$.

Теорема I. *Пусть $\varphi \in \mathcal{HP}$ и $\lambda \in \mathcal{N}$. Тогда для каждой ОНС $\{f_n\}$ существует такая перестановка $\{f_{\tau_n}\}$, что любой ОР $\sum c_n f_{\tau_n}(x)$, $x \in [0,1]$, $\{c_n\} \in l^2$, будет (φ, λ)-суммируемым п.в. на $[0,1]$.*

Заметим, что указанная перестановка данной ОНС не зависит от φ. Поэтому при фиксированной последовательности $\widetilde{\lambda} \in \mathcal{N}$ для всех методов $(\varphi, \widetilde{\lambda})$ с $\varphi \in \mathcal{HP}$ эта перестановка будет общей.

В качестве приложений получаем, что утверждение теоремы I верно, в частности, для следующих методов класса ФА (если только $\lambda \in \mathcal{N}$): Рисса (R, λ, α), Абеля–Дирихле (A, λ), Стилтьеса (S, λ, s), Бернштейна–Рогозинского $(\text{БР}, h)$, Валле-Пуссена (VP, α), Ламберта (L, λ, α), Лапласа $(\mathcal{L}, \lambda, \alpha)$. Отметим, что для методов, эквивалентных в L^2 методам $T[n_m]$, например, для (R, λ, α), возможность переставить ОНС в систему (φ, λ)-суммируемости вытекает из названной выше теоремы Д.Е. Меньшова. Однако, как следует из теоремы I, возможность такой перестановки имеет место и для методов, не эквивалентных в L^2 никакому методу вида $T[k_m]$, например, для $(A, \{\ln\ln(n+e)\})$ и $(S, \{\ln^\delta(n+1)\}, s)$ с $\delta s < 1$ (см. [5, с. 70]).

Литература

[1] *G. Alexits*, Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen, Budapest, 1960.

[2] *П.Л. Ульянов*, Расходящиеся ряды Фурье, УМН **16** (1961), N 3, 61–142.

[3] *Д.Е. Меньшов*, Избранные труды. Математика, М., 1997.

[4] *П.Л. Ульянов*, Развитие результатов Д.Е. Меньшова по теории ортогональных рядов. Комментарии в [3], 425–451.

[5] *О.А. Зиза*, Суммирование ортогональных рядов, М., 1999.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ТИХОНОВА

Зубова С.П., Белоглазова Т.В. (Воронеж)

Рассматривается решение задачи Коши для линейной системы Тихонова с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = c_{11}x + c_{12}y \\ \varepsilon\dfrac{dy}{dt} = c_{21}x + c_{22}y \end{cases},$$

$$x(t,0) = x^0 \text{ и } y(t,0) = y^0,$$

где $x = x(t,\varepsilon) \in R^k$, $y = y(t,\varepsilon) \in R^m$ - вектор - функции, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ - малый параметр, $c_{11} : R^k \to R^k$, $c_{12} : R^k \to R^m$, $c_{21} : R^m \to R^k$, $c_{22} : R^m \to R^m$ - операторы, задаваемые матрицами, $t \in [0,+\infty)$.

Для предельной системы ($\varepsilon = 0$) выявляются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы решение задачи Коши существовало и было единственным или неединственным.

Изучается возможность явления погранслоя. Устанавливается, что при произвольных $x^0 \in R^k$, $y^0 \in R^m$ явление погранслоя возможно только тогда, когда c_{22} - обратим. В этом случае строится асимптотическое разложение решения по степеням ε методом Вишика - Люстерника. В противном случае явление погранслоя наблюдается лишь если x^0 и y^0 принадлежат некоторому подпространству, и асимптотическое разложение представляет собой сумму разложений по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{n}}$, $n = \overline{1,p}$. В случае $dimkerc_{22} = 1$ показатели степеней ε находятся с помощью диаграммы Ньютона.

Литература

1. Зубова С. П., Белоглазова Т. В. О качественных свойствах решений одного сингулярно возмущённого дифференциального уравнения.// Сборник статей "Поиск. Опыт. Мастерство. Актуальные вопросы обучения иностранных студентов". Выпуск 3. - Воронеж: Воронежский университет, 1999. С. 183-184.

2. Зубова С. П., Белоглазова Т. В. О разрешимости задачи Коши для предельной системы Тихонова.// Сборник трудов аспирантов. - Воронеж: Воронежский университет, 2000. (В печати).

ОБ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНОМЕРНОГО СЖАТИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА

Иохвидов Е.И. (Воронеж)

Рассматриваются линейные операторы в пространстве Крейна $H + H_+ \oplus H_-$, $H_\pm = P_\pm H$, $P_\pm^2 = P_\pm^* = P_\pm$, $P_+ + P_- = I$ с индефинитной метрикой $[x, y] = (Jx, y)$, $J = P_+ - P_-$, $x, y \in H$.
Определение *Через K_α $(\alpha \geq 0)$ будем обозначать следующее множество векторов в пространстве Крейна:*

$$K_\alpha = \{x \in H \mid \quad \alpha ||P_+ x||^2 \geq ||P_-||^2\}.$$

Для произвольного линейного оператора T с $D_T \supset L$, где L — линеал в пространстве Крейна, введем следующие числа:

$$\omega_-(T|L) = \inf_{x \in L, x \neq 0} \frac{[Tx, Tx]}{||x||^2} \quad \text{и} \quad \omega_+(T|L) = \sup_{x \in L, x \neq 0} \frac{[Tx, Tx]}{||x||^2}.$$

Теорема *Пусть $L \neq \{0\}$ — линеал в пространстве Крейна, $L \in D_V$, $(V|L)$ — равномерно J-нерастягивающий оператор с константой $\delta > 0$, и при этом выполнено условие*

$$\omega_-(V|L) + \delta > -1.$$

Тогда

$$L \in K_\alpha, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{1 - \omega_-(V|L) - \delta}{1 + \omega_+(V|L) + \delta}.$$

Теорема *Пусть $L \neq \{0\}$ — линеал в прстранстве Крейна. $L \in D_V$, $(V|L)$ — равномерно J — нерастягивающий оператор с константой $\delta > 0$, и при этом выполнено условие*

$$\omega_-(V|L) + \delta > 0.$$

Тогда L — равномерно положительный линеал с константой

$$\delta = \omega_-(V|L) + \delta (> 0).$$

ДИАДИЧЕСКИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ИХ СВОЙСТВА

Иродова И.П. (Ярославль)[1]

Irodov@adm.yar.ru

Пусть F диадическое семейство параллелепипедов, то есть $F = \bigcup F_n$, где F_n - разбиение куба $Q_0 = [0, 1]^d$ на параллелепипеды с длинами ребер $\approx 2^{-n}$ и F_{n+1} является измельчением разбиения F_n. Для функции $f \in L_p(Q_0)$, $0 < p \leq \infty$, через $P_Q f$ обозначим многочлен наилучшего приближения координатной степени α на кубе $Q \in F$ в пространстве L_p.

Определение 1. Диадическим пространством Бесова $B_p^{\lambda\theta}(F)$ называется множество функций из $L_p(Q_0)$, для которых конечна величина

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n\lambda}e_n(f, L_p))^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}},$$

здесь $e_n(f, L_p) := \left(\sum_{Q\in F_n} ||f - P_Q f||^p_{p(Q)}\right)^{\frac{1}{p}}$, $\alpha_i > \lambda$.

Определение 2. Будем говорить, что функция f обладает диадической производной порядка β, если ряд

$$D^\beta_F f := \sum_{Q\in F}(D^\beta(P_Q(f) - P_{Q'}(f)))$$

сходится в L_p и не зависит от степени многочлена $P_Q f(\lambda_i)$ Здесь через Q' обозначем отец Q; $Q'_0 = \emptyset$.

Теорема 1. Если $f \in B_p^{\lambda\theta}(F)$, то f обладает диадической производной порядка $\beta, |\beta| < \lambda$, причем

$$||D^\beta_F||_{B_p^{\lambda-|\beta|,\theta}(F)} \leq c \cdot ||f||_{B_p^{\lambda\theta}(F)}.$$

Теорема 2. Если $f \in B_p^{\lambda\theta}$, то обычная и диадическая производные порядка β, $|\beta| < \lambda$, совпадают.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, программы "Университеты России - фундаментальные исследования"

ПОВЕДЕНИЕ ПРИ $t \to +\infty$ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕИЯ С.Л.СОБОЛЕВА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Искендеров Б.А. (Баку, Азербайджан)

E-mail: guliev@azdata.net

Обозначим через $Ц = R_n(x) \times \Omega$- цилиндрическую область в $R_n(x) \times R_m(y)$, где $R_n(x)$ n-мерное евклидово пространство с точкой $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а $R_m(y)$ такое же пространство с точкой $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $\Omega \subset R_m(y)$-ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $Q = Ц \times (0, \infty)$. Рассмотрим в Q следующую смешанную задачу :

$$\frac{\partial^2 \Delta_{n+m}}{\partial t^2} u(x, y, t) + \Delta_n u(x, y, t) = 0. \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x, y, 0) = \psi_0(x, y), \ u_t'(x, y, 0) = \psi_1(x, y), \tag{2}$$

и с краевым условием

$$u(x, y, t)|_{\partial Ц} = 0, \qquad t > 0, \tag{3}$$

здесь Δ_{n+m}- оператор Лапласа по переменным (x, y), Δ_n-по переменным x, а $\psi_j(x, y) \in C_0^\infty(Ц)$, $j = 0, 1$. Задача (1)- (3) при $n = 2, m = 1$ описывает движение экспоненциально стратифицированной жидкости.

В работе доказано существование, единственность регулярного решения задачи (1)-(3) и исследовано его поведение при $t \to +\infty$.

ОБ ОЦЕНКАХ ТЕПЛОВОЙ α–ЕМКОСТИ

Ишанов Б.Ж. (Обнинск)[1]

E-mail: ishchanov@iate.obninsk.ru

Пусть $R^n = \{x = (x_1, ..., x_n)\}$ — n-мерное вещественное пространство ($n \geq 2$), D — открытое множество в R^n, $L = \partial_n - \sum_{k=1}^{n-1}(\partial_k)^2$ — оператор теплопроводности, $L^* = -\partial_n - \sum_{k=1}^{n-1}(\partial_k)^2$ — оператор сопряжённый к L в R^n. Функцию f, дважды непрерывно дифференцируемую по переменным x_k (k=1,...,n-1) и непрерывно дифференцируемую по переменной x_n, являющуюся решением уравнения Lu=0 в D, будем называть *температурой в D*. При $r > 0$, $m = (m_1, ..., m_n) = (2, ..., 2, 1)$ и $x \in R^n$ назовем m-параллелепипедом размера r с центром x параллелепипед

$$\Pi = \Pi(x,r) = \Pi(x,r,m) = \mathop{\times}_{k=1}^{n} (x_k - \frac{r^{\frac{1}{m_k}}}{2}, x_k + \frac{r^{\frac{1}{m_k}}}{2}).$$

Анизотропным (m, α)-охватом множества $E \subset R^n$ называется величина

$$mes_{m,\alpha}(E) = inf[\sum_k r_k^\alpha],$$

где r_k — размеры m-параллелепипедов Π_k, образующих конечное или счетное покрытие множества E, а инфимум берется по всем таким покрытиям. При $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ для определенных в D функций f положим

$$||f||_{\alpha,m}(D) := max\{\sup_{x\in D}|f(x)|, \sup_{x,y\in R^n, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^{m_k\alpha}}\},$$

при $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ для функций f, непрерывных в D по совокупности переменных $x_1, ..., x_n$ и непрерывно дифференцируемых в D по переменным $x_1, ..., x_{n-1}$, положим

$$||f||_{\alpha,m}(D) := \max\{\sup_{x\in D}|f(x)|, \sup_{x\in D}|\partial_k f(x)|,$$

[1]Эта работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 99-01-00119.

$$\sup_{x,y\in R^n, x\neq y} \frac{|\partial_k f(x) - \partial_k f(y)|}{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^{(\alpha-1/2)m_k}} \; k = 1, ..., n-1,$$

$$\sup_{x,y\in R^n, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^{n-1} \partial_k f(y)(x_k - y_k)|}{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^{m_k\alpha}}, \}.$$

Заметим, что $0 \le ||f||_{\alpha,m}(D) \le \infty$.

Тепловой ёмкостью порядка $\alpha \in (0,1]$ компакта $K \subset R^n$ называется величина

$$\gamma_\theta^\alpha(K) = sup\{\int_{R^n} f(x)L^* g(x)dx\},$$

где супремум берется по всем функциям f, которые являются температурами в $R^n \setminus K$ и таким, что $||f||_{\alpha,m}(R^n) \le 1$, $f(\infty) = \partial_1 f(\infty) = ... = \partial_{n-1} f(\infty) = 0$, а g — некоторая фиксированная функция из класса $C_0^\infty(R^n)$, равная единице на K.

Т е о р е м а. *При $\alpha \in (0, \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, 1]$ и $r > 0$ существуют такие положительныеe величины $c_1 = c_1(r,n)$ и $c_2 = c_2(n)$, что для любого компакта $K \subset \Pi(0,r) \subset R^n$ $(n \ge 2)$ выполняются неравенства*

$$c_1 mes_{m,\frac{n-1}{2}+\alpha}(K) \le \gamma_\theta^\alpha(K) \le c_2 mes_{m,\frac{n-1}{2}+\alpha}(K).$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ сyществует такой компакт K, что

$$mes_{m,\frac{n}{2}}(K) > 0, \quad \gamma_\theta^{\frac{1}{2}}(K) = 0.$$

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ m-го ОБОБЩЕННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ ТИПА ЧЕБЫШЕВА-ЯКОБИ И К-ФУНКЦИОНАЛА

Казимиров Г. Н.(Гомель, Беларусь)
Svoitov@gsu.unibel.by

Будем говорить, что $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, если функция f измерима на отрезке $[-1,1]$ и $||f||_p = \left(\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$, а для $p = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_\infty = \max_{-1\le x\le 1} |f(x)|$. Через $L_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций f, что $f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \in L_p$ и $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\|_p$.

Для $\lambda > -1$ определим оператор Чебышева-Якоби следующим образом:

$$T_h(f, x, \lambda) = \frac{1}{\pi \cos^\lambda \frac{h}{2}} \int\limits_0^\pi f(\cos\theta) \left(\frac{1+\cos\theta}{1+x}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \cos\lambda r d\varphi \ ,$$

где $|h| < \pi$, $0 \le r \le \pi$, $\cos\theta = x \cosh + \cos\varphi\sqrt{1-x^2}\sin h$,

$$\cos r = \frac{\sqrt{1+x}\cos\frac{h}{2} + \cos\varphi\sqrt{1-x^2}\sin\frac{h}{2}}{\sqrt{1+x\cos h + \cos\varphi\sqrt{1-x^2}\sin h}}.$$

Введем обозначения $(m = 2, 3, \ldots)$:

$$\Delta_h^1(f, \delta, \lambda) = T_h(f, x, \lambda) - f(x),$$

$$\Delta_{h_1,\ldots,h_m}^m(f, x, \lambda) = \Delta_{h_m}^1(\Delta_{h_1,\ldots,h_{m-1}}^{m-1}(f, x, \lambda), x, \lambda),$$

$$\tilde{\omega}_m(f, \delta, \lambda)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|h_i|\le\delta; i=1,\ldots,m} \|\Delta_{h_1,\ldots,h_m}^m(f, x, \lambda)\|_{p,\alpha,\beta},$$

$$D_{x,\lambda}^1 = (1+x)^{-\lambda}\frac{d}{dx}(1+x)^\lambda(1-x^2)\frac{d}{dx}, \quad D_{x,\lambda}^m = D_{x,\lambda}^1(D_{x,\lambda}^{m-1}).$$

$$K_m(f, \delta, \lambda)_{p,\alpha,\frac{\lambda}{2}+\alpha} =$$

$$= \inf_{g\in AD^m(p,\alpha,\lambda)} \left\{\|f(x) - g(x)\|_{p,\alpha,\frac{\lambda}{2}+\alpha} + \delta^{2m}\|D_{x,\lambda}^m g(x)\|_{p,\alpha,\frac{\lambda}{2}+\alpha}\right\},$$

где через $AD^m(p, \alpha, \lambda)$ обозначим класс функций g таких, что g имеет абсолютно непрерывную $2m - 1$ производную на каждом отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$ и $D_{x,\lambda}^l g \in L_{p,\alpha,\frac{\lambda}{2}+\alpha}$ для $l = 1, 2, \ldots, m$.

Теорема. Пусть даны числа λ, m и p такие, что $\lambda > -1$, $m \in \mathbf{N}$, $\mathbf{1 \le p < \infty}$. Пусть число α выбрано по правилу: $-\frac{1}{2p} < \alpha < \min\{\frac{\lambda}{2} + 1 - \frac{1}{p}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}\}$ при $1 < p < \infty$; $-\frac{1}{2} < \alpha \le \min\{0, \frac{\lambda}{2}\}$ при $p = 1$; $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$ при $p = \infty$. Тогда для $\delta \in [0, \pi]$ и $f \in L_{p,\alpha,\frac{\lambda}{2}+\alpha}$ справедливы неравенства:

$$C_1 K_m(f, \delta, \lambda)_{p,\alpha,\frac{\lambda}{2}+\alpha} \le \tilde{\omega}_m(f, \delta, \lambda)_{p,\alpha,\frac{\lambda}{2}+\alpha} \le$$

$$\leq C_2 \max\left(1, \frac{1}{\cos^{\lambda r}\frac{\delta}{2}}\right) K_r(f,\delta,\lambda)_{p,\alpha,\frac{\lambda}{2}+\alpha},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и δ.

НЕКОТОРЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Калитвин А.С. (Липецк)
E-mail: kas@pedinst.lipetsk.su

Пусть T_i —множество конечной непрерывной лебеговой меры, $X_i = L^{p_i}(T_i)$, $Y_i = L^{q_i}(T_i)$ $(1 \leq q_i \leq p_i \leq \infty, q_i < \infty)$, $Z_i = L^{r_i}(T_i)$ $(r_i = p_i q_i (p_i - q_i)^{-1})$, X_i^*—пространство, сопряжённое к $X_i (i = 1,2)$, а $X = X_2[X_1]$ и $Y = Y_2[Y_1]$—пространства со смешанной нормой $\|x\|_X = \|\|x(\cdot,t_2)\|_{X_1}\|_{X_2}$, $\|y\|_Y = \|\|y(\cdot,t_2)\|_{Y_1}\|_{Y_2}$. Через $K_j (j = 0,1,2,...)$ обозначим оператор с частными интегралами

$$(K_j x)(t_1,t_2) = c_j(t_1,t_2)x(t_1,t_2) + \int_{T_1} l_j(t_1,t_2,\tau)x(\tau,t_2)d\tau$$
$$+ \int_{T_2} m_j(t_1,t_2,\sigma)x(t_1,\sigma)d\sigma + \int\int_{T_1\times T_2} n_j(t_1,t_2,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,$$

где c_j, l_j, m_j, n_j—заданные измеримые функции. Действие оператора K_j из X в Y равносильно его непрерывности, а регулярность — действию из X в Y оператора $|K_j|$, т.е. оператора K_j с $|c_j|, |l_j|, |m_j|, |n_j|$ вместо c_j, l_j, m_j, n_j.

По определению, $K_j \to K_0$ регулярно, если $\||K_j - K_0|\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0$. Из регулярной сходимости следует сходимость в $\mathcal{L}(X,Y)$. Обратное неверно. Регулярная сходимость K_j к K_0 равносильна регулярной сходимости операторов C_j, L_j, M_j, N_j, определяемых правой частью последнего равенства, к операторам C_0, L_0, M_0, N_0 соответственно. Пусть $e_j = c_j - c_0$, $f_j = l_j - l_0$, $g_j = m_j - m_0$, $h_j = n_j - n_0$.

Теорема 1. Если при $j \to \infty$ стремятся к 0 последовательности $\|\|e_j(\cdot,t_2)\|_{L^{r_1}}\|_{L^{r_2}}$, $\|\|\|f_j(t_1,t_2,\cdot)\|_{X_1^*}\|_{Y_{1,t_1}}\|_{L^{r_2}}$, $\|\|\|g_j(\cdot,t_2,\sigma)\|_{L^{r_1}}\|_{X_{2,\sigma}^*}\|_{Y_2}$, $\|\|\|h_j(t_1,t_2,\cdot,\cdot)\|_{X_2^*[X_1^*]}\|_Y$, то последовательность действующих из X в Y операторов K_j регулярно сходится к оператору K_0.

Из теоремы 1 вытекает.

Теорема 2. Если $\|\||c(\cdot,t_2)\||_{L^{r_1}}\|_{L^{r_2}} < \infty$, $\|\|\||l_0(t_1,t_2,\cdot)\||_{X_1^*}\|_{Y_{1,t_1}}\|_{L^{r_2}} < \infty$, $\|\|\||m_0(\cdot,t_2,\sigma)\||_{L^{r_1}}\|_{X_{2,\sigma}^*}\|_{Y_2} < \infty$, $\|\|\||n_0(t_1,t_2,\cdot,\cdot)\||_{X_2^*[X_1^*]}\|_Y < \infty$, то найдётся последовательность операторов K_j с вырожденными ядрами, которая сходится регулярно к оператору K_0.

Заметим, что оператор K_0 аппроксимируется операторами K_j со "срезанными" функциями лишь в смысле сильной сходимости.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $C(C^{(p)}(t))$

Калитвин А.С., Барышева И.В. (Липецк)

E-mail: kas@pedinst.lipetsk.su

Пусть линейный оператор K с частными интегралами определён равенством $(Kx)(t,s) = c(t,s)x(t,s) + \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \iint_D n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$, где $t,\tau \in [a,b]$, $s,\sigma \in [c,d]$, c,l,m,n — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Через $\tilde{K}$ обозначим оператор К с ядрами $\tilde{l},\tilde{m},\tilde{n}$ вместо ядер l,m,n, а через $U = C(C^{(p)}(t))$ — пространство функций $x(t,s)$, определённых на прямоугольнике $D = [a,b]\times[c,d]$ и имеющих на D p непрерывных по совокупности переменных частных производных по t. U — банахово пространство относительно нормы $\|x\|_U = \|\sum_{i=0}^{p} |x_t^{(i)}|\|_{C(D)}$.

Построение алгоритмов численного решения уравнения $x = Kx+f$ приводит к изучению условий непрерывности оператора K и вопросов его аппроксимации.

Пусть $\Omega \in \{[a,b],[c,d],D\}$ и $\omega \in \{\tau,\sigma,(\tau,\sigma)\}$. Измеримая на $D\times\Omega$ функция $g(t,s,\omega)$ называется непрерывной в целом, если $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что $\|g(t_1,s_1,\cdot) - g(t_2,s_2,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} < \epsilon$ при $|t_1-t_2| < \delta$, $|s_1-s_2| < \delta$; интегрально ограниченной, если $\|g(t,s,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \le G < \infty$; равномерно суммируемой, если $|g(t,s,\omega)| \le \varphi(\omega)$ и $\|\varphi\|_{L^1(\Omega)} < \infty$.

Теорема 1. *Если функция $c(t,s)$ и p её частных производных по t непрерывны по совокупности переменных на D, ядра $l(t,s,\tau)$, $m(t.s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ и p их частных производных по t измеримы по совокупности переменных, непрерывны в целом и интегрально ограничены, причём частные производные по t от ядер равномерно суммируемы на Ω, то оператор K непрерывен в U.*

Теорема 2. *Если функции $c, l, m, n, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, причём $\sum\limits_{i=0}^{p}\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d}\left|\frac{\partial^i}{\partial t^i}(n-\tilde{n})(t,s,\tau,\sigma)\right|d\sigma d\tau<\epsilon_0;$ $\sum\limits_{i=0}^{p}\int\limits_{a}^{b}\left|\frac{\partial^i}{\partial t^i}(l-\tilde{l})(t,s,\tau)\right|d\tau<\epsilon_1$, $\sum\limits_{i=0}^{p}\sum\limits_{k=0}^{i}\int\limits_{c}^{d}C_i^k\left|\frac{\partial^{i-k}}{\partial t^{i-k}}(m-\tilde{m})(t,s,\sigma)\right|d\sigma<\epsilon_2$, где C_i^k — число сочетаний, то $\|K-\tilde{K}\|_U<\epsilon$, где $\epsilon=\epsilon_0+\epsilon_1+\epsilon_2$.*

Приведённые теоремы позволяют аппроксимировать действующий в U оператор K действующими в U операторами $\tilde{K}$, ядра которых обладают достаточно хорошими свойствами.

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Калитвин А. С. (Липецк), Рудомёткина И.П. (Мичуринск)

kaspedinst.lipetsk.ru

Через X, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ обозначим пространства функций $x(t.s)$, $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau\sigma)$, непрерывных вместе со всеми своими частными производными по t и s до n-го порядка включительно на $D=[a.b]\times[c,d]$, $D\times[a,b]$, $D\times[c.d]$, $D\times D$ соответственно. Пространство X рассматривается с нормой

$$\|x\|_X=\sum_{k=0}^{n}\sum_{(i,j)}\sup_{(t,s)\in D}\left|\frac{\partial^k x(t,s)}{\partial t^i\partial s^j}\right|(i,j=0,1,\ldots,n;i+j=k).$$

Нормы в $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ определяются аналогично, например,

$$\|l\|_{\mathcal{L}} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{(i,j)} \sup_{(t,s,\tau)\in D\times[a,b]} \left| \frac{\partial^k l(t,s,\tau)}{\partial t^i \partial s^j} \right| (i,j = 0,1,\ldots,n; i+j=k).$$

Пусть $K = L + M + N$ — оператор с частными интегралами, где $(Lx)(t,s) = \int\limits_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, (Mx)(t,s) = \int\limits_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma, (Nx)(t,s) = \iint\limits_D n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$.

Если $l \in \mathcal{L}$, $m \in \mathcal{M}$, $n \in \mathcal{N}$, то оператор $I - K$ действует в X и непрерывен, однако он не является фредгольмовым даже в общем случае ядер, тождественно равных некоторым постоянным.

Теорема 1. *Если $l \in \mathcal{L}$, $m \in \mathcal{M}$, $n \in \mathcal{N}$, то фредгольмовость оператора $I - K$ в X равносильна фредгольмовости в X операторов $I - L$ и $I - M$.*

Пусть $L = \overline{L} + \widetilde{L}$ и $M = \overline{M} + \widetilde{M}$, где $\widetilde{L}$, $\widetilde{M}$, $\overline{L}$, $\overline{M}$ — операторы L и M с ядрами $\widetilde{l}(t,s,\tau) = \sum\limits_{i=1}^{p} l_i(t,s)a_i(\tau)$, $\widetilde{m}(t,s,\sigma) = \sum\limits_{j=1}^{q} m_j(t,s)b_j(\sigma)$, $\overline{l} = l - \widetilde{l}$, $\overline{m} = m - \widetilde{m}$ соответственно, и $\|\overline{L}\|$, $\|\overline{M}\| < \varepsilon < 1$; $p_i, m_j \in X$, a_i и b_j $(i = 1,\ldots,p; j = 1,\ldots,q$ — непрерывные функции на отрезках $[a,b]$ и $[c,d]$ соответственно, а системы функций $\{a_i : i = 1,\ldots,p\}$, $\{b_j : j = 1,\ldots,q\}$ ортонормированы.

Теорема 2. *При сделанных предположениях фредгольмовость в X оператора $I - K$ с ядрами $l \in \mathcal{L}$, $m \in \mathcal{M}$ и $n \in \mathcal{N}$ равносильна условию $D_1(s)D_2(t) \neq 0$, где $D_1(s) = dte(\delta_{if} - \mu_{if}(s))$, $D_2(t) = det(\delta_{ig} - \nu_{ig}(t))$,*

$$\mu_{if}(s) = \int\limits_a^b a_i(\tau) \left(l_f(\tau,s) + \int\limits_a^b r_1(\tau,s,u) l_f(u,s)du \right) d\tau$$

$(i, f = 1,\ldots,p)$,

$$\nu_{jg}(t) = \int\limits_c^d b_j(\sigma) \left(m_g(t,\sigma) + \int\limits_c^d r_2(t,\sigma,v) m_g(t,v)dv \right) d\sigma$$

$(j, g = 1, \ldots, q)$, а r_1 и r_2 — резольвентные ядра операторов $\overline{L}$ и $\overline{M}$ соответственно.

О СИНГУЛЯРНОСТИ И СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИЕ РЯДОВ ЯКОБИ

С.Г. Кальней (Москва)

Рассматривается сходимость последовательности интегралов

$$I_n(f, x) = \int_{-1}^{1} f(t) K_n^{(\alpha,\beta)}(t, x; \Lambda)(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta} dt, \qquad (1)$$

где $K_n^{(\alpha,\beta)}(t, x; \Lambda)$ — ядро линейного метода суммирования по ортонормированной системе многочленов Якоби, в точке $x = 1$, если она является точкой Лебега функции f.

Известно (см.[1]), что для сходимости средних Чезаро рядов Якоби в точке Лебега $x = 1$ необходимо, вообще говоря, наложить антиполярное условие на разлагаемую функцию в окрестности точки $x = -1$. В работах [2], [3] указаны антиполярные условия для линейных методов суммирования.

Однако можно доказать, что в случае $-1/2 < \alpha < 1/2$, $-1 < \beta \le -1/2$ для широкого класса линейных методов суммирования интегралы (1) будут сходиться без дополнительного антиполярного условия.

Лемма. *Если $-1/2 < \alpha < 1/2$, $\beta > -1$, а матрица $\Lambda = \{\lambda_m^{(n)}\}$ удовлетворяет условиям*

(а) $\lambda_m^{(n)} \to 1$, $n \to \infty$ для любого фиксированного m,

(б) $\sum\limits_{m=0}^{n-1} (m+1) \left(\frac{n-m}{n+1}\right)^{1/2-\alpha} |\Delta^2 \lambda_m^{(n)}| \le C$, то интеграл (1) является сингулярным (с особенностью в точке $x = 1$).

Теорема. *Пусть $-1/2 < \alpha < 1/2$, $-1 < \beta \le -1/2$, а ограниченная матрица Λ удовлетворяет условиям (а) и (б) леммы. Тогда для любой функции f, $f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \in L[-1, 1]$, последовательность интегралов (1) сходится в ее точке Лебега $x = 1$.*

Таким образом, для $-1/2 < \alpha < 1/2$, $-1 < \beta \leq -1/2$ условия сходимости линейных средних в точке Лебега $x = 1$ совпадают с условиями их сходимости для непрерывных функций. В частности, для матриц с выпуклыми коэффициентами для сходимости в точке Лебега $x = 1$ останутся верными доказанные ранее необходимые и достаточные условия сходимости линейных средних рядов Якоби непрерывных функций (см. [4]).

Отметим, что лемма представляет самостоятельный интерес, так как сингулярность ядра линейных средних рядов Якоби не является очевидным фактом.

Литература

1. Г. Сегё, Ортогональные многочлены, Физматгиз (Москва, 1962).

2. С.Г. Кальней, Суммируемость рядов Якоби треугольными матрицами. Матем. заметки, 34(1983), № 1.

3. Tang Ping, On linear summation methods of Fourier-Laplace series (2), Analysis Mathematica, 25 (1998).

4. С.Г. Кальней, Об аналоге теоремы С.М. Никольского для рядов Якоби, Укр. матем. журн.43 (1991).

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Карташева Л.В., Радченко Т.Н. (Ростов-на-Дону)

mscurf@don.sitek.net

Основным пространством $S_{m,n}$ является линеал функций $\varphi(t)$, имеющих неинтегрируемые степенно-логарифмические особенности на концах контура [а, в]. Интегралы будем понимать в смысле конечной части по Адамару (обозначая, $F.P.$).
Топология в $S_{m,n}$ вводится с помощью системы норм:

$$\|\varphi(t)\|_r = max\{\|\varphi(t)\|_{L_p(\rho_1)}, \|\varphi'(t)\|_{L_p(\rho_2)}, \dots, \|\varphi^{(p-1)}(t)\|_{L_p(\rho_r)}\}$$

$$\rho_i(t) = (t-a)^{p(m+1)}(b-t)^{p(n+i)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

$$\|\varphi(t)\|_{L_p(\rho_1)} = (\int\limits_L \rho(t)\ |\varphi(t)|^p\ dt)^{\frac{1}{p}}, \qquad p > 1$$

Аналитическое представление Коши обобщенной функции $f \in S'_{m,n}$

$$\hat{f}(z) = \hat{f}(x \pm ih) = \frac{1}{2\pi i}(f(t), \frac{1}{t-(x \pm ih)})$$

Является аналитической в плоскости Z всюду за исключением отрезка [а, в].

Справедливо утверждение:

если $f(t) \in S'_{m,n}$, $\varphi(t) \in S_{m,n}$; то существует $\lim\limits_{h \to +0} \hat{f}(x \pm ih) = \hat{f}^{\pm}(x)$ и выполняются соотношения:

$$\hat{f}^{+}(x) + \hat{f}^{-}(x) = Sf, \qquad \hat{f}^{+}(x) + \hat{f}^{-}(x) = f(x) \qquad \hat{f}^{\pm}(x) \in S'_{m,n}$$

где $(Sf, \varphi) = (f, -S\varphi)$, $\quad Sf = \frac{1}{\pi i} F.P. \int\limits_a^b \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$ Полученные формулы Сохоцкого используются при решении следующей задачи линейного сопряжения с вырожденным символом.

Найти функцию $\hat{f}(z)$, обобщенные предельные значения которой удовлетворяют краевому условию:

$$((t-\alpha)^N \hat{f}^{+}(t) - (t-\alpha)^N G(t)\hat{f}^{-}(t),\ \varphi(t)) = ((t-\alpha)^N g(t),\ \varphi(t))$$

на отрезке [а, в] действительной оси; N - целое неотрицательное. $\alpha \in (a, b)$, $g(t) \in S'_{m,n}$, $\varphi(t) \in S_{m,n}$.

Предполагается, что коэффициент задачи $G(t) \in C^{\infty}[a, b]$, принимает действительные положительные значения и $\Delta arg G(t)|_{[a,b]} = 0$.

Доказано, что решение сформулированной задачи имеет вид:

$$\hat{f}(z) = \frac{x(z)}{2\pi i}(\frac{g(t)}{x^{+}(t)}, \frac{1}{t-z}) + x(z)\sum_{N-1}^{k=0} \frac{a_k}{(\alpha - z)^{k+1}}$$

где $G(t) = \frac{x^{+}(t)}{x^{-}(t)}$, a_k - произвольные постоянные.

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА БЕСОВА $S^{\alpha}_{p,\theta}B(R^n, E)$ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Касумова С.Г. (Баку, Азербайджан)

E-mail: guliev@azdata.net

Систематическое изучение S–пространств было начато С.М.Никольским [1], который создал замкнутую теорию этих пространств, построенных на базе W- и H–пространств. Т.И.Амановым [2] и А.Д.Джаб-раиловым [3] независимо введены и изучены свойства S–пространств для числовых функций, построенных на базе B–пространств О.В.Бесова, которые являются банаховыми пространствами. М.С.Джабраилов [4] рассмотрел некоторые модификации пространств Бесова с доминирующей смешанной производной.

В [5] дано декомпозиционное описание для банаховозначное (E–значное) пространства Бесова $S^r_{p,\theta}B(R^n, E)$ с доминирующей смешанной производной. В работе [5] также доказаны прямые и обратные теоремы представления функций из пространства $S^r_{p,\theta}B(R^n, E)$ в виде ряда по целым E–значным функциям экспоненциального типа, нормы которых удовлетворяют определенным условиям. Они являются основным аппаратом, с помощью которого доказываются теоремы вложения.

В данной работе получена теоремы вложения для банаховозначное пространства Бесова $S^r_{p,\theta}B(R^n, E)$, с доминирующей смешанной производной. В частности будет доказано, что определение класса $S^r_{p,\theta}B(E_n)$ корректно в том смысле, что класс, характеризуемый более высокими дифференциальными индексами, вкладывается в класс, характеризуемый более низкими дифференциальными индексами. Для числовых функций близкие вопросы исследованы в [2].

Литература

1. Никольский С.М. // СМЖ, 1963, т.4, №6.

2. Аманов Т.И. // Труды МИАН СССР, 1965, т.77.

3. Джабраилов А.Д. // ДАН СССР, 1964, т.159, №2.

4. Джабраилов М.С. // ДАН Азерб. ССР, 1976, т.32, №7, с.3-7.

5. Jabrailov M.S., Kasumova S.G. // Proc. Ins. Math. Mech. of Azerb. AS. 1999. v.10, p.67-73.

ЧАСТИЧНАЯ ДИССИПАТИВНОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИН КИРХГОФА-ЛЯВА

Кириченко В.Ф. (Саратов)

Объектом исследования является следующая краевая задача, определяемая уравнениями различного типа и размерности:

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}+\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2}\Delta^2 w+\\+\frac{E\alpha}{1-\nu}\int\limits_{-h/2}^{h/2}z\theta dz-L(w,F)=g_1(x,y,z),\\ \frac{1}{Eh}\Delta^2 F+\frac{\alpha_0}{h}\Delta\int\limits_{-h/2}^{h/2}\theta dz=-\frac{1}{2}L(w,w),\\ \frac{c_0}{T_0}\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{2E\alpha^2}{h(1-\nu)}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\frac{\partial\theta}{\partial t}dz-\frac{\lambda}{T_0}\Delta_1\theta=\\=-\frac{E\alpha}{1-\mu}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1-\nu}{Eh}\Delta F-z\delta w\right]+\frac{1}{T_0}g_2(x,y,z,t);\end{gathered}\tag{1}$$

$$\begin{gathered}w\left|_\Gamma=\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma=F_\gamma\left|_\gamma=\frac{\partial F}{\partial n}\right|_\Gamma=0,\\ \theta|_S=0,\Gamma=\partial\Omega_1\times[t_0,t_1],\\ S=\partial\Omega_2\times[t_0,t_1];\theta_i=\Omega_i\times(t_0,t_1);\\ w(x,y,t_0)=\varphi_1(x,y),\frac{\partial w(x,y,t_0)}{\partial t}=\psi(x_1,x_2),\\ \theta(x,y,z,t_0)=\varphi_2(x,y,z);\end{gathered}\tag{2}$$

$\Omega_1\subset R^2$ — ограниченная контуром $\partial\Omega_1$ измеримая односвязная область; $\Omega_2\subset R^3$, $\Omega_2=\Omega_1\times(-h/2,h/2)$; $\partial\Omega_2$ — граничная поверхность Ω_2; $w(x,y,t)$ — функция прогиба; $F(x,y,t)$ — функция усилий; $\theta(x,y,z,t)$ — изменение температурного поля в пластине; ε, ρ, h, E, α, λ, c_0, T_0 — положительные постоянные, $0<\nu<1/2$; $\mu(\Omega_1)$ - мера области Ω_1; $[t_0,t_1]$ — отрезок времени наблюдения.

Теорема. *Пусть $\partial\Omega_1$ имеет гладкость достаточную для используемых теорем вложения.* $g_i\in L(Q_i)$, $i=1,2$, $\varphi_1\in$

$H_0^2(\Omega_1)$, $\psi \in L^2(\Omega_1)$, $\varphi_2 \in L^2(\Omega_2)$. *Тогда найдется постоянная* $\alpha > 0$, *что при* $\mu(\Omega_1) < \alpha$:

1) задача (1)-(2) разрешима на произвольном отрезке $[t_0, t_1]$, *при этом*

$$F, w \in L^\infty(t_0, t_1; H_0^2(\Omega_1)), \partial w/\partial t \in L^\infty(t_0, t_1; L^2(\Omega_1)),$$

$$\theta \in L^2(t_0, t_1; H_0^1(\Omega_2));$$

2) приближенное решение может быть найдено методом Бубнова;

3) при выполнении дополнительных условий

$$g_1 = ess\sup \|g_1\|_{L^2(\Omega_1)} < \infty, g_2 = ess\sup \|g_2\|_{L^2(\Omega_2)} < \infty,$$

система эволюционных уравнений (1) частично диссипативна при всех допустимых в теореме начальных условиях (2), т.е. найдется такое $t_2 > t_0$ *и число* $\gamma > 0$, *что для почти всех* $t > t_2$ *выполняется условие*

$$\left|\frac{\partial w}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega_1)} + |\Delta w|_{L^2(\Omega_1)} \leq \gamma^2.$$

РЕГУЛЯРНОСТЬ СУБМЕРЫ НА σ-ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Клепнёв Д. Э. (Самара)

dekl@ssu.samara.ru

Пусть X — непустое множество. Пусть классы его подмножеств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{U}$ удовлетворяют следующим условиям: класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно конечного объединения и счетного пересечения; класс $\mathcal{U}$ замкнут относительно конечного пересечения и счетного объединения; разность множества из класса $\mathcal{C}$ и множества из класса $\mathcal{U}$ принадлежит классу $\mathcal{C}$; разность множества из класса $\mathcal{U}$ и множества из класса $\mathcal{C}$ принадлежит классу $\mathcal{U}$; каждое множество из класса $\mathcal{C}$ содержится в некотором множестве из класса $\mathcal{U}$; каждое множество из класса $\mathcal{U}$ содержится в некотором множестве из класса $\mathcal{C}$. Пусть класс $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{C} \cup \mathcal{U})$ — σ-кольцо, порожденное классом $\mathcal{C} \cup \mathcal{U}$.

Пусть $\varphi : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ — субмера Добракова, то есть монотонная, абсолютно полуаддитивная, непрерывная сверху на пустом множестве функция множества.

Определение. *Назовем множество* $E \in \mathcal{S}$ *внутренне (внешне) регулярным относительно субмеры* φ, *если* $\inf\{\varphi(E \setminus C) : C \in \mathcal{C}, C \subset E\} = 0 \quad (\inf\{\varphi(U \setminus E) : U \in \mathcal{U}, E \subset U\} = 0)$.

Множество, регулярное и внешне, и внутренне, будем называть регулярным (относительно субмеры φ). Субмеру φ назовем регулярной, если все множества из класса $\mathcal{S}$ регулярны относительно φ.

Теорема 1. *Следующие условия равносильны:*

1. Все множества из класса $\mathcal{C}$ *внешне регулярны;*

2. все множества из класса $\mathcal{U}$ *внутренне регулярны;*

3. все множества из класса $\mathcal{S}$ *регулярны.*

Теорема 2. *Пусть* (X, τ) — *локально компактное хаусдорфово топологическое пространство,* $\mathcal{C}$ — *класс его компактных подмножеств,* $\mathcal{U}$ — *класс его открытых относительно компактных подмножеств и* $\mathcal{S}$ — σ-*кольцо, порожденное классом* $\mathcal{C} \cup \mathcal{U}$. *Следующие условия равносильны:*

1. Все множества из класса $\mathcal{C}$ *внешне регулярны;*

2. все множества из класса $\mathcal{U}$ *внутренне регулярны;*

3. все множества из класса $\mathcal{S}$ *регулярны.*

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ

Клочков М. А. (Ижевск)

m_k@udm.ru, mike@stunix.uni.udm.ru

В докладе предлагается формировать функцию плотности внешней силы $f(x,t)$ в уравнении колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \; 0 \le x \le l, \; t \ge 0$$

по методу обратной связи: $f(x,t) = Ku = a(x) \int\limits_0^l u(s,t) b(s) ds$.

Характер изменения спектра колебаний струны исследуется при обычных граничных условиях относительно функции $X(x)$, входящей в представление собственного колебания $u(x,t) = e^{\lambda t}X(x)$.

$$\alpha_1 X' - \beta_1 X|_{x=0} = 0, \quad \alpha_2 X' + \beta_2 X|_{x=l} = 0,$$

$$|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0, \quad |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$$

Пусть выбрано некоторое подмножество $\Omega = \{\lambda_{l_1}, \dots \lambda_{l_m}\}$ собственных частот свободных колебаний струны $f(x,t) \equiv 0$, а $X_k(x)$—соответствующие собственные функции.

Теорема. *Пусть* σ_p*—точечный спектр невозмущённой задачи,* σ_p'*—точечный спектр возмущённой задачи,* $\Omega = \left\{\lambda_{l_1}, \dots, \lambda_{l_m}\right\}$, *где* $l_1 < l_2 < \dots < l_m$ *и* $Ku = a(x)\int\limits_0^l u(s,t)b(s)ds$, *причём для* K *выполнено условие* $\sigma_p' = \{0\} \cup \sigma_p \setminus \Omega$. *Тогда найдутся две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел* $\{\nu_i\}$ *и* $\{\beta_i\}$ *такие, что:*

а) $a(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu_j X_j(x), \quad b(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_j X_j(x)$;

б) $\nu_j \beta_j = 0$ *для индексов* j, *не принадлежащих множеству* $\Lambda = \{l_1, \dots, l_m\}$;

в) $\nu_{l_i}\beta_{l_i} = \dfrac{P(\lambda_{l_i})}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m} (\lambda_{l_i} - \lambda_{l_j})}$, $i = \overline{1,m}$, *где* $P(\lambda)$ *- многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого образуют подмножество* $\sigma_p \setminus \Omega$, *дополненное нулём.*

Верна и обратная теорема.

1. Бутковский А. Г. Структурная теория распределённых систем. М.: Наука, 1977.

ИСТОЧНИКИ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТЯГОТЕЮЩЕЙ СИЛОЙ

Ключанцев М.И. (Воронеж)

E-mail: isugar@zomzh.ru

Уравнение, описывающее равновесие пластинки, лежащей на упругом основании с учётом влияния радиальных сил, имеет вид $D\Delta^2 u + p(x)\Delta u + ku = q$. Полагая $D = 1$, $q = 0$, и $p(x) = p/r^2$, $r^2 = \Sigma x_i^2$, где p— постоянная, равная величине радиального усилия на единичном расстоянии от центра, получаем задачу: найти решение уравнения $B_r = -ku$, обращающееся в нуль на бесконечности и удовлетворяющее естественному условию ограниченности в нуле $u(0) = u_0$.

Случай $k > 0$. Решение $u(r)$ ищется в виде линейной комбинации гиперцилиндрических функций третьего рода $H^{(l)}_{(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}(\xi)$, где $\xi = \sqrt[4]{k}r$, $l = 1, 2, 3, 4$. Используя результаты работы [1] находим координаты мультииндекса ν и решение $u = v_1(\rho) + v_2(\rho)$, где функции $v_1 = \rho H^{(2)}_\nu(\rho)$, $v_2 = \rho H^{(3)}_\nu(\rho)$ имеют логарифмическую особенность в точке $\rho = 0$ и экспоненциально убывают при $\rho \to \infty$. Таким образом, *в центре $r = 0$ расположены два источника G_1 и G_2 разных знаков.*

Случай $k < 0$. Линейно независимыми решениями в этом случае будут модифицированные гиперцилиндрические функции $K^{(l)}_\nu(\rho)$, , $l = 1, 2, 3, 4$. Первая из этих функций растет при $\rho \to \infty$, остальные ограничены и при $\rho = 0$ они имеют логарифмическую особенность. Из условия ограниченности в нуле находим осциллирующее и на бесконечности убывающее решение

$$u(\rho) = c_0\sqrt[4]{k}\rho(K^{(2)}_\nu(\sqrt[4]{k}\rho) + K^{(4)}_\nu(\sqrt[4]{k}\rho)).$$

Таким образом, *в случае $k < 0$ в центре $r = 0$ расположены мнимые источники G_1 и G_2 разных знаков.*

Литература

1. Ключанцев М.И. Сингулярные дифференциальные операторы с r-1 параметром и функции Бесселя векторного индекса // Сиб. матем. ж.,1983. Т.24, N 3, С.47-52.

О ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Кокурин М.Ю., Солодянкин Д.Л., Жданов Д.А.
(Йошкар–Ола)
E–mail: kokurin@marsu.ru

В гильбертовом пространстве H рассматривается линейное операторное уравнение $Au = f$, где $A^* = A \in L(H,H), A \geq 0, \mathrm{cl}R(A) \neq R(A), f \in R(A); R(A) = \{y \in H : y = Ax, x \in H\}$. Исследуется класс методов нахождения ближайшего к начальному приближению $u_0 \in H$ решения исходного уравнения:

$$u_\alpha = (I - \Theta(A,\alpha)A)u_0 + \Theta(A,\alpha)f, \qquad (1)$$

где $\Theta(\lambda,\alpha), \alpha \in (0,\alpha_0]$ —семейство измеримых по Борелю функций (см. [1]). Известно, что $\lim\limits_{\alpha\to 0} u_\alpha = u^*$, но без наложения дополнительных условий на решение u^* сходимость u_α к u^* может быть сколь угодно медленной. В [1], [2] показано, что условие истокопредставимости $u^* - u_0 = A^p v, v \in H$ весьма точно описывает множество решений u^*, для которых выполняется степенная оценка $\|u_\alpha - u^*\| \leq C_0\alpha^p \quad (p > 0) \quad \forall\alpha \in (0,\alpha_0]$. В настоящей заметке для функций

$$\Theta(\lambda,\alpha) = (\lambda+\alpha)^{-1}, \quad \Theta(\lambda,\alpha) = \lambda^{-1}(1 - \exp(-\lambda/\alpha)). \qquad (2)$$

порождающих соответственно метод М.М.Лаврентьева и метод установления, выделен класс решений u^*, на котором имеет место логарифмическая оценка скорости сходимости

$$\|u_\alpha - u^*\| \leq C_1(\ln\ldots\ln(-\ln\alpha))^{-p} \quad (p > 0) \quad \forall\alpha \in (0,\alpha_0] \qquad (3)$$

($n \geq 1$ символов $\ln$). Определим последовательность $\{M_n\}$: $M_1 = 1$, $M_{n+1} = \exp(-1/M_n), n = 1,2,\ldots$.

Теорема. *Пусть* $\|A\| < M_n$ *и имеет место истокообразное представление:* $u^* - u_0 = (\ln\ldots\ln(-\ln A))^{-p}w, w \in H$ *(*$n \geq 1$ *символов* $\ln$*). Тогда для вырабатываемых согласно (1), (2) приближений* $u_\alpha, \alpha \in (0,\alpha_0]$ *при любом* $\alpha_0 \in (0, M_n)$ *имеет место* *оценка (3), в которой константа $C_1 = C_1(n, p, \|A\|, \alpha_0)$ не зависит от α.*

В случае $n = 1$ утверждение теоремы для первой из функций (2) имеется в [3].

Литература

1.Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах.–М.: 1986.–184 с.

2.Кокурин М.Ю. Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотоных задач.–Йошкар–Ола: МарГУ, 1998.–292 с.

3.Kindermann S. Convergence rates of the Hilbert uniqueness method via Tikhonov regularization // J. Optim. Theory Appl.–1999.–V.103, N3.–P.657–673.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ГРАДИЕНТНОГО ТИПА И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Кокурин М.Ю., Федяков П.Г. (Йошкар–Ола)

E-mail: kokurin@marsu.ru, fedyakov@newmail.ru

Рассматривается нелинейное операторное уравнение $F(x) = 0$, где $F : H_1 \to H_2$; H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Предполагается, что F дважды непрерывно дифференцируем по Фреше и $\|F'(x)\| \le N_1$, $\|F''(x)\| \le N_2$ $\forall x \in \Omega_R$, где $\Omega_R = \{x \in H_1 : \|x - x^*\| \le R\}$ и x^* — решение исходного уравнения. Считаем, что вместо точного оператора F доступно лишь его приближение $\tilde{F} : H_1 \to H_2$, удовлетворяющее указанным выше неравенствам и условию $\|\tilde{F}(x^*) - F(x^*)\| \le \delta$. Пусть P_M — проектор на выбранное конечномерное подпространство $M \subset H_1$. Исследуется итерационный метод отыскания решения x^*:

$$x_0 \in H_1, \qquad x_{n+1} = P_M(x_n - \xi - \gamma \tilde{F}'^*(x_n)\tilde{F}(x_n)) + \xi. \qquad (1)$$

Здесь $\xi \in H_1$, $0 < \gamma < \frac{2}{N_1^2}$ — параметры процедуры.

Теорема. *Пусть $\|(P_M(x_0) - E)(x^* - \xi)\| \le \Delta$. Тогда существуют такие константы $l > 0$, $C_0, C_1 > 0$, $q \in (0,1)$, что если $\delta + \Delta \le C_0$, $\|x_0 - x^*\| \le l + C(\delta + \Delta)$ и $M \cap \mathrm{Ker}(F'(x^*)) = \{0\}$,* *то имеет место оценка* $\|x_n - x^*\| \le lq^n + C(\delta + \Delta)$, *так что* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|x_n - x^*\| \le C(\delta + \Delta)$.

Метод (1) применялся при решении трехмерной обратной задачи теории потенциала, связанной с восстановлением поверхности раздела двух сред с известной плотностью по данным измерений возмущения нормальной производной гравитационного потенциала на плоскости вне границы раздела. Задача сводится к нелинейному уравнению $A(z) = g$, оператор $A : L_2([a,b]\times[c,d]) \to L_2([a,b] \times [c,d])$ имеет вид

$$A(z) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \int\limits_{z(x',y')}^{z_0(x',y')} \frac{z}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2\right)^{3/2}} dx'\,dy'\,dz,$$

где функция $z = z(x,y)$ описывает искомую границу, $z = z_0(x.y)$ задана, $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$. В качестве M выбирались подпространства тригонометрических полиномов и полиномов Лежандра от x, y размерности 10–12. Тестовые расчеты подтвердили эффективность рассматриваемого метода.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Колбинева Т.О.(Краснодар)
tkolbineva@mail.ru

Изучается асимптотика решения следующей начальной задачи

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m_k} a_{ik}(t)x^{(k)}(t - h_{ik}) + \int\limits_0^t K(t-s)\beta(s)x(s)\,ds \quad (1)$$

$$x(t) = 0,\ t < 0,\ x(0) = x_0,$$

$$\dots$$

$$x^{(n-1)}(t) = 0,\ t < 0,\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}, \quad (2)$$

где $a_{ik}(t), \beta(t)$ непрерывны на $[0,\infty)$, решение $x(t)$ непрерывно и n раз кусочно непрерывно дифференцируемо на $[0,\infty)$.

Предположим, что характеристическое уравнение

$$\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m_k} a_0^{ik}\lambda^k e^{-\lambda h_{ik}} - \beta_0 \int_0^\infty e^{-\lambda t}K(t) = 0$$

имеет в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$ l корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$, $\mathrm{Re}\lambda_1 = \ldots = \mathrm{Re}\lambda_r > \mathrm{Re}\lambda_{r+1} \geq \ldots \geq \mathrm{Re}\lambda_l$, целой кратности $u_1, \ldots, u_l$ соответственно.

Обозначим через $\bar{p} = \max\limits_{\mathrm{Re}\lambda_j=0} u_j$ и $p = \max\limits_{1\leq j\leq r} u_j$.

ТЕОРЕМА. Пусть все $a_{ik}(t) \in \mathrm{C}^k[0,\infty)$, $t^{\bar{p}}K(t) \in L_1(0,\infty)$, и пусть $\beta(t)$, $a_{ik}(t)$ и их k-ые производные допускают разложение вида

$$a(t) \sim a_0 + \frac{a_{2p}}{(t+1)^{2p}} + \frac{a_{2p+1}}{(t+1)^{2p+1}} + \ldots.$$

Тогда функция $x(t)$, решение задачи (1), (2), допускает разложение

$$x(t) \sim e^{\lambda_1 t}(t+1)^{u_1-1}(d_0^1 + \frac{d_1^1}{t+1} + \ldots) +$$

$$+ \ldots + e^{\lambda_r t}(t+1)^{u_r-1}(d_0^r + \frac{d_1^r}{t+1} + \ldots).$$

Литература

1. Дербенёв В.А., Цалюк З.Б. Асимптотика резольвенты неустойчивого ядра уравнения Вольтерра с разностным ядром // Матем. заметки. 1997. Т. 62. Вып. 1.

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ СТРОГО НОРМИРОВАННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Колесников В.С.

Пусть E — компакт в банаховом пространстве X, $\omega_E(f;\delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in E,\ \rho(x_1,x_2) \leq \delta\}$ – модуль непрерывности функции f на компакте E.

Компакт E условимся называть С-выпуклым, если любую непрерывную функцию f с него можно продолжить на все пространство X, чтобы выполнялось равенство

$$\omega_X(f;\delta) = \omega_E(f;\delta), \quad \forall\delta \geq 0,$$

где $\omega_X(f;\delta)$ – модуль непрерывности продолженной функции.

Хорошо известно, что любое выпуклое множество является С-выпук- лым (см.[1]). Автор (см.[2]) доказал, что в гильбертовом пространстве любое С-выпуклое множество является выпуклым.

Отметим, (см.[2]) что в R^2_∞ существуют С-выпуклые множества, которые не являются выпуклыми, например, множество $\{(x,y) : y = x \in [0;1]\} \cup \{(x,y) : x + y = 2,\ x \in [1;2]\}$.

В связи с этим А.С. Беловым была поставлена задача: описать банаховы пространства, в которых любое С-выпуклое множество является выпуклым. В настоящей заметке автор дает решение этой задачи. Справедлива такая

Теорема. *а) Если банахово пространство строго нормировано, то в нем любое С-выпуклое множество является выпуклым.*

б) В любом банаховом пространстве X, которое не является сторого нормированным всегда существует С-выпуклое множество, которое не является выпуклым.

Литература

[1] Мильман В.А. Продолжение функций сохраняющее модуль непрерывности // Матем. заметки. 1997. Т.61. №2. С. 236 – 245.

[2] Колесников В.С. О продолжении непрерывной функции в Гильбертовом пространстве // 22 Конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ 17 – 22 апреля 2000 года.

К ВОПРОСУ О НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ИЗ КЛАССА H^∞

Колесников С.В. (Иваново)[1]

kolesn@ivanovo.ac.ru

Пусть D — единичный круг $|z| < 1$, Γ — единичная окружность $|z| = 1$, H^∞ — пространство ограниченных аналитических функций в D. Пространство граничных функций $g(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, для функций $g \in H^\infty$ с нормой $||f||_\infty = supvrai_{\zeta\in\Gamma}|g(\zeta)|$ будем обозначать через $H^\infty(\Gamma)$.

Пусть $f(z)$ непрерывна на Γ и $g_f(z)$ — функция наилучшего приближения для $f(z)$ из $H^\infty(\Gamma)$.т.е. такая функция, что $||f - g_f||_\infty = \rho$, $\rho = \inf_{q\in H^\infty(\Gamma)} ||f - q||_\infty$.

Функция $g_f(z)$ принадлежит классу VMO. Почти всюду на Γ имеет место равенство

$$|f(z) - g_f(z)| = \rho. \tag{1}$$

При этом $g_f(z)$ может быть существенно разрывной на Γ.

В работах [1 – 3] рассматривались условия непрерывности функции g_f.

Следующее утверждение показывает, что свойство непрерывности функции наилучшего приближения не является локальным.

ТЕОРЕМА 1. Существуют функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ непрерывные на окружности Γ, значения которых совпадают на некоторой дуге $\gamma \subset \Gamma$ ($f_1(z) = f_2(z)$, $z \in \gamma$), такие, что функция наилучшего приближения из $H^\infty(\Gamma)$ для f_1 непрерывна на окружности Γ, а функция наилучшего приближения для f_2 имеет точки разрыва на γ.

Можно утверждать, что в локальных условиях непрерывности функции $g_f(z)$ существенно лишь то, что $g_f(z)$ принадлежит классу VMO и удовлетворяет (1).

Именно, пусть для непрерывной на Γ функции $f(z)$ существует функция $p(z) \in H^\infty$, принадлежащая классу VMO на некоторой дуге $\gamma \subset \Gamma$ и имеющяя на этой дуге разрыва, такая, что

[1]Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00119).

$|f(z)-p(z)| = const$ почти всюду на γ. Тогда найдется непрерывная на Γ функция $f_1(z)$, равная на γ функкции $f(z)$, для которой функция наилучшего приближения из класса H^∞ разрывна на γ.

Литература

1. Karleson L., Jacobs S. Best approximation on analytic functions // Arkiv. Math. - 1972. - V. 10. - P. 219 - 229.

2. Papadimitrakis M. Best uniform approximation by bounded analytic functions// Proc. Amer. Math. Soc. - 1988. - V. 102. - N. 3. - P. 882 - 880.

3. Kolesnikov S.V. On a problem of L. Carleson and S. Jacobs concerning the continuity of the function of best approximation from the class H^∞// East J. on Approximation. - 1996. - V. 2. - N. 1. - P. 71 - 87.

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНОЙ НАГРУЗКИ

Коломоец А.А. (Саратов)

Рассматривается замкнутая цилиндрическая оболочка конечной длины шарнирно опертая по торцам. Оболочка подвержена действию случайного пространственно-временного поля внешней нагрузки $q(x, y, t)$. Нагрузка имеет гауссово распределение с математическим ожиданием равным нулю и является дельта-коррелированной во времени.

Жесткость оболочки в направлении нормали к срединной поверхности значительно меньше жесткости в двух других направлениях, поэтому пренебрегаем кинетической энергией тангенциальных форм колебаний и рассматриваем деформации удлинений и сдвигов пологой оболочки с учетом нелинейных членов, происходящих только от прогибов w.

Форму смещений точек срединной поверхности представляем в виде разложения в ряд по собственным функциям линейной задачи:

$$u = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} a_{ij}(t)\cos\frac{i\pi x}{L}\cos jy,$$

$$v = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} b_{ij}(t)\sin\frac{i\pi x}{L}\sin jy,$$

$$w = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} c_{ij}(t)\sin\frac{i\pi x}{L}\cos jy.$$

Коэффициенты разложений выбираем в качестве обобщенных координат и составляем уравнение движения оболочки в форме Лагранжа. По уравнению движения составляем уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК), описывающее эволюцию плотности распределения вероятности обобщенных координат и скоростей.

Получено точное стационарное решение уравнения ФПК. Найдено математическое ожидание прогиба. Задача сводится в вычислению интегралов большой кратности. Кратные интегралы вычисляются методом Монте–Карло.

Влияние нелинейности приводит к уменьшению среднего квадрата прогиба. То есть более гибкая в поперечном направлении оболочка менее податлива на воздействие вибраций.

СГЛАЖИВАЮЩИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ СПЛАЙН

Колпаков В.И. (Саратов)

Пусть $f(x) \in W^3L_\infty(M,a,b) = \Big\{f(x) \in C[a,b] : \|f^{(3)}\|_{L_\infty[a,b]} \le M\Big\}$ задана своим δ-приближением $f_\delta(x) \in C[a,b]$: $\|f_\delta - f\|_{C[a,b]} \le \delta$, $0 < \delta \le \delta_0$, и заданы два множества узлов $\Delta_1 = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, $x_i = x_0 + ih$, $i = 0,1,\ldots,n$, $\Delta_2 = \{\bar{x}_i = (x_i + x_{i+1})/2, i = 1,2,\ldots,n\}$, $\bar{x}_0 = a$, $\bar{x}_{n+1} = b$, $n \ge 2$. $n \in N = \{1,2,\ldots\}$.

Задача. Требуется построить сглаживающий сплайн $S_2(f_\delta,x)$: 1) $S_2(f_\delta,x) \in P_2$, $x \in (\bar{x}_i,\bar{x}_{i+1})$, $i = 0,1,\ldots,n$; 2)

$S_2(f_\delta, x) \in C^{(1)}[a, b]$; 3) $S_2(f_\delta, x_i) = f_\delta(x_i)$; $i = 0, 1, \ldots, n$. Числа $\bar{x}_i$ называются узлами сплайна, а числа x_i – узлами интерполяции.

Задача построения сглаживающего сплайна является некорректно поставленной.

Сплайн $S_2(f_\delta, x)$, $x \in (\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеет вид:

$S_2(f_\delta, x) = S_2(f_\delta, \bar{x}_i + 0) + m_i(x - \bar{x}_i) + \Delta m_i(x - \bar{x}_i)^2/(2h)$.

$S_2(f_\delta, \bar{x}_i + 0) = f_\delta(x_i) - m_i h/2 - \Delta m_i h/8$,

$\Delta m_i = m_{i+1} - m_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $m_i = S_2^{(1)}(f_\delta, \bar{x}_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$.

На отрезках $[\bar{x}_0, \bar{x}_1]$, $[\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}]$ нужно вместо h взять $h/2$.

Моменты $m_2^*, m_3^*, \ldots, m_{n-1}^*$ определяются из уравнений

$6m_2 + m_3 = 8\Big(R_\alpha^{10} f_\delta\Big)(\bar{x}_2) - \Big(R_\alpha^{10} f_\delta\Big)(\bar{x}_1)$, $\quad i = 2$;

$m_{i-1} + 6m_i + m_{i+1} = 8\Big(R_\alpha^{10} f_\delta\Big)(\bar{x}_{i+1})$, $\quad i = 3, 4, \ldots, n-2$;

$m_{n-2} + 6m_{n-1} = 8\Big(R_\alpha^{10} f_\delta\Big)(\bar{x}_{n-1}) - \Big(R_\alpha^{10} f_\delta\Big)(\bar{x}_n)$, $\quad i = n-1$;

$m_1^* = \Big(R_\alpha^{10} f_\delta\Big)(\bar{x}_1)$; $m_n^* = \Big(R_\alpha^{10} f_\delta\Big)(\bar{x}_n)\Big)$; $m_0^* = \Big(3\Big(R_\alpha^{10} f_\delta\Big)(\bar{x}_1) - m_2^*\Big)/2$;

$m_{n+1}^* = \Big(3\Big(R_\alpha^{10} f_\delta\Big)(\bar{x}_n) - m_{n-1}^*\Big)/2$; $\Big(R_\alpha^{10} \varphi\Big)(x) = (\varphi(x+\alpha) - \varphi(x-\alpha))/(2\alpha)$ – семейство линейных функционалов, зависящих от параметра $\alpha > 0$, содержащее при $\alpha = \alpha^*$ оптимальный функционал восстановления первой производной во внутренней точке отрезка (см. [1, гл.9]), $\alpha = h/2$.

Свойства построенного сплайна описываются теоремой.

Теорема. Пусть $0 < \delta \leq \delta_0 = \left(\frac{|b-a|}{2}\right)^3 M/3$ и $\alpha = \alpha^* = \left(\frac{3\delta}{M}\right)^{\frac{1}{3}}$ (см. [1, гл.9]), $h^* = 2\alpha^*$, тогда для сплайна $S_2(f_\delta, x)$ имеют место оценки:

$$\|S_2^{(k)}(f_\delta, x) - f^{(k)}(x)\|_I \leq c_k M^{\frac{k}{3}} \delta^{1-\frac{k}{3}}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где для $k = 0, 1$ $I = C[a, b]$, для $k = 2$ $I = L_\infty[a, b]$.

Константы c_k не зависят от M и δ вычислены.

Литература

1. Колпакова Э.В., Колпаков В.И. Восстановление математических объектов по неполно заданной информации. СГТУ, Саратов, 1995 г., 136 с.

О СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Корнев В.В., Хромов А.П. (Саратов)[1]

E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Пусть A – интегральный оператор:

$$Af = \alpha_1 \int\limits_0^x A(x,t)f(t)\,dt + \alpha_2 \int\limits_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt. \qquad (1)$$

где $\alpha_1^2 \neq \alpha_2^2$, $\alpha_2 \neq 0$, $\dfrac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial t^k} A(x,t)$ $(j = 0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1)$ непрерывны при $0 \le t \le x \le 1$ и

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x,t)\Big|_{t=x} = \delta_{n-1,j} \qquad (j = 0, \ldots, n)$$

($\delta_{i,j}$ – символ Кронекера).

В работе [1] для операторов вида (1) при $n = 2$ была установлена равносходимость спектральных разложений по собственным и присоединенным функциям этих операторов и тригонометрических рядов Фурье. В настоящее время этот результат доказан для произвольного натурального n, а именно, справедлива следующая

Теорема. *Существует такая последовательность номеров $\{k_\ell\}$, что для всякой $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\delta \in (0, 1/2)$*

$$\lim_{\ell \to \infty} \max_{\delta \le x \le 1-\delta} |S_{k_\ell}(f,x) - \sigma_\ell(f,x)| = 0,$$

где $S_k(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора (1), $\sigma_k(f,x)$ – тригонометрический ряд Фурье (k – число членов).

Литература

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №00-01-00075) и программы "Ведущие научные школы" (проект №00-15-96123)

1. Корнев В.В., Хромов А.П. О равносходимости спектральных разложений одного класса интегральных операторов // Воронежская весенняя матем. школа "Современные методы в теории краевых задач", 2000, с. 89.

L_p ПРОСТРАНСТВА С РАЗНОСТНЫМ ВЕСОМ И ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Костин А.В. (Воронеж)

e-mail: kostin@kostin.vsu.ru

Для $t \in R^1 = (-\infty; \infty)$, следуя [1], обозначим

$$I_+^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{t} (t-x)^{\alpha-1} f(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} f(t-\tau)d\tau \tag{1}$$

$$I_-^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t}^{\infty} (x-t)^{\alpha-1} f(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} f(t+\tau)d\tau \tag{2}$$

правый и левый дробные интегралы Лиувилля.

Как известно ([1], гл. 2 и 3), пространства L_p и $L_{p,\rho}$ со степенным весом $\rho(t)$ неинвариантны относительно дробного интегрирования (1) и (2). В связи с этим возникает вопрос об инвариантных пространствах для указанных операторов. Примерами таких пространств могут служить пространства $L_{p,\omega}$ с экспотенциальным весом ([1], 5.7) и обобщенные пространства Степанова, рассмотренные в [3]. Пространства $L_{p,\gamma,\omega}$ с разностным весом, определяемые нормами (которые эквивалентны)

$$||f||^+_{p,\gamma,\omega} = \sup_{t\in R^1} [\int_{-\infty}^{t} e^{-\omega x}(t-x)^{\gamma-1}|f(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}} \tag{3}$$

$$||f||^-_{p,\gamma,\omega} = \sup_{t\in R^1} [\int_{t}^{\infty} e^{-\omega x}(x-t)^{\gamma-1}|f(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}} \tag{4}$$

также обладают свойствами инвариантности. Более того, справедлива следующая

Теорема *Операторы дробного интегрирования (1) и (2) образуют в пространствах $L_{p,\gamma,\omega}$ сильно непрерывную полугруппу.*

Литература

1. С.Г.Самко, А.А.Килбас, О.И. Маричев. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск, 1987.- "Наука и техника". - 688 с.

2. Б.М. Левитан. Почти-периодические функции. - Москва, 1953. - Гостехиздат.- 396 с.

3. А.В.Костин О пространствах инвариантных относительно дробного интегрирования // Сборник трудов молодых ученых математического факультета ВГУ.- Воронеж, 2000.- N1.- С.12-16.

ОБ ОПЕРАТОРАХ ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Костин В.А., Климентова В.Б. (Воронеж)

Как известно дробные интегралы по Риману–Лиувиллю определяются следующими формулами для $t \in (0,1)$ [1]

$$I_{+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} f(t-\tau)d\tau \quad (1)$$

$$I_{-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (x-t)^{\alpha-1} f(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 \tau^{\alpha-1} f(t+\tau)d\tau \quad (2)$$

Одним из основных свойств этих интегралов является то, что они образуют сильно– непрерывную полугруппу в пространстве суммируемых функций $L_{p(0,1)}$,то есть для любой функции $f(t) \in L_p, t \in (0,1)$

$$I^{\alpha+\beta} f(t) = I^{\alpha} f(t) I^{\beta} f(t);$$

$$\| I^{\alpha} f \| \leq C \| f \|, \alpha > 0;$$

$$\| I^{\alpha} f - f \| \to_{\alpha \to 0} 0.$$

Оказывается, что этот факт справедлив также и для некоторых семейств пространств, частным случаем которых являются L_p-пространства.

А именно, рассмотрим множество функций $f(t)$, для которых введена норма

$$\| f \|_{p,\gamma}^{+} = sup_{t\in(0,1)} [\int_0^t (t-x)^{\gamma-1} |f(x)|^p dx]^{1/p},$$

$$\| f \|_{p,\gamma}^{-} = sup_{t\in(0,1)} [\int_t^1 (x-t)^{\gamma-1} |f(x)|^p dx]^{1/p}.$$

Заметим, что для функций из L_p эти нормы не эквивалентны, и справедливо вложение, если $\gamma_1 > \gamma_2$, то $L_{p,\gamma_2} \subset L_{p,\gamma_1}$.

А так же справедлива теорема.

Теорема.I_α^+, I_α^- образуют в $L_{p,\gamma}$ сильно-непрерывную полугруппу.

Литература

1. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев "Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения". Минск, "Наука и техника". 87, 687стр.

К ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВСЮДУ СХОДЯЩЕГОСЯ РЯДА ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ СИСТЕМЕ С ПОМОЩЬЮ A-ИНТЕГРАЛА

Костин В.В. (Москва)[1]

Пусть дан всюду сходящийся к функции $f(x)$ ряд $\sum a_n \chi_n(x)$ по мультипликативной системе, заданной последовательностью $\mathbf{P} = \{p_i\}_1^\infty$. Поскольку сумма такого ряда может оказаться не интегрируемой по Лебегу, то для задачи восстановления коэффициентов ряда с помощью обобщенных формул Фурье требуются более общие интегралы. Одним из наиболее часто применяемых неабсолютных обобщений интеграла Лебега является A-интеграл. В [1, с.112] доказано, что если коэффициенты ряда стремятся к нулю монотонно, то $f(x)$ A-интегрируема и $\sum a_n \chi_n(x)$ является ее рядом Фурье в смысле A-интеграла.

Встает вопрос, можно ли восстановить произвольный всюду сходящийся к A-интегрируемой функции ряд с помощью этого интеграла? Как показано в [2], для системы Уолша ответ отрицательный. Опираясь на построенный в [2] пример, этот факт можно обобщить на произвольную мультипликативную систему:

---

[1]Работа поддержана РФФИ (грант 99-01-00354) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант 00-15-96143).

Теорема. *Существует ряд $f(x) = \sum a_n \chi_n(x)$, всюду сходящийся к A-интегрируемой функции, но при этом не являющийся ее A-Фурье рядом.*

Задачу восстановления произвольного всюду сходящегося ряда решает $\mathbf{P}$-ичный интеграл Хенстока ($H_{\mathbf{P}}$-интеграл) или эквивалентный ему $\mathbf{P}$-ичный интеграл Перрона [3]. Поэтому из теоремы сразу же вытекает

Следствие. *Для любой мультипликативной системы A-интеграл противоречит $H_{\mathbf{P}}$-интегралу на классе всюду сходящихся рядов по этой системе.*

Литература

[1] Г.Н. Агаев, Н.Я. Виленкин, Г.М. Джафарли, А.И. Рубинштейн. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах.//"Элм", Баку, 1981.

[2] В.А. Скворцов. A-интегрируемые мартингальные последовательности и ряды Уолша. // Известия РАН, в печати.

[3] V.A. Skvortsov. A Perron type integral in an abstract space. // Real Analysis Exchange, **13**, N1. 1987/88, 76-79.

О НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЯХ ПАДЕ

Косухин О.Н. (Москва)[1]

kosuhin_oleg@mail.ru

Рассматриваются функции вида $R_n(z) = \sum_{j=1}^{n} 1/(z - a_j)$, где a_j (полюсы функции $R_n(z)$) – некоторые точки комплексной плоскости $\mathbf{C}$ – не обязательно различные. Очевидно, $R_n(z)$ – логарифмическая производная некоторого многочлена степени n.

Для точки $b \in \mathbf{C}$ и функции f, аналитической в некоторой односвязной окрестости U точки b, следуя [1], положим $\alpha(z) = \alpha(f; z) := \int_b^z f(\zeta)\, d\zeta$, где интегрирование ведется по любому спрямляемому пути $l(b, z)$ из этой окрестнсти, ведущему из b в z.

При $n \geq 1$ наипростейшим рациональным дифференциалом порядка $n - 1$ функции $f(z)$ в точке b, в некоторой односвязной

[1] Работа поддержана фондом РФФИ (проект № 99–01–00119).

окрестности U которой $f(z)$ однозначна и аналитична, или наипростейшей дробью Паде n-ого порядка функции $f(z)$ в точке b, назовем наипростейшую дробь $R_n(f,b;z)$ порядка $\leq n$ со свойством: $f(z) - R_n(f,b;z) = O((z-b)^n)$ при $z \to b$.

Теорема 1. *$R_n(f,b;z)$ совпадает с логарифмической производной частичной суммы $\Sigma_{k=0}^{n} c_k(z-b)^k$ ряда Тейлора функции e^{α}.*

Теорема 2. *Пусть функция f аналитична в некоторой окрестности точки $b \in \mathbf{C}$, положительное число R таково, что ряд Тейлора функции $e^{\alpha(z)}$ с центром в точке b сходится на круге $\{z : |z-b| < R\}$, $r = \mathrm{const} \in (0, R)$. Тогда для произвольного компакта $E \subset \{z : |z-b| \leq r\}$, не содержащего полюсов функции f, выполнено неравенство $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|R_n(f,b;\cdot) - f(\cdot)\|_{C(E)}} \leq r/R$. Теорема является неулучшаемой.*

Теорема 3. *Пусть $f \in H_1$, $b = 0$, $\alpha(z) = \alpha(f;z)$, $0 < r < 1$, $D_r = \{z : |z| \leq r\}$. Тогда найдется такое $N > 0$, что при всех целых $n \geq N$ имеет место неравенство $\|R_n(f,b;\cdot) - f(\cdot)\|_{C(D_r)} \leq C(\|f\|_{H_1}, r\|f\|_{C(D_r)})(r^n)/(1-r)$, где $C(x,y) = (1/\pi)xe^{2x/3}(1+y)e^y$.*

Литература

1. Данченко В. И., Данченко Д. Я. *О равномерном приближении логарифмическими производными многочленов* // "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". Материалы школы-конф., посвящ. 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова (Казань, 13–18 сентября 1999 г.). Казанское матем. общ. 1999. С. 74-77.

ОБ ОЦЕНКЕ $Lp[-1,1]$-НОРМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА ПО ЕГО ЗНАЧЕНИЯМ В НУЛЯХ МНОГОЧЛЕНА ЛЕЖАНДРА

Коркмасов Ф.М. (Махачкала)

Пусть H^n – пространство алгебраических многочленов $pn = pn(x)$ степени n. При $1 \leq p \leq \infty$ для $pn(x)$ определим $Lp[-1,1]$-

норму:

$$||pn||p = \left(\int -1^1 |pn(x)|^p dx \right)^{1/p}, ||pn||\infty = \max -1 \le x \le 1|pn(x)|.$$

На $[-1, 1]$ рассмотрим сетку $\Omega N = \{xj\}j = 1^N$, состоящую из нулей многочлена Лежандра $PN(x)$. Для $pn \in H^n$ введем дискретную норму, определенную по системе точек ΩN:

$$||pn||p, \Omega N = \left(\sum j = 1^N \mu j |pn(xj)|^p \right)^{1/p},$$

$$||pn||\infty, \Omega N = \max 1 \le j \le N|pn(xj)|,$$

где μj – числа Кристоффеля квадратурной формулы Гаусса.

Основной целью является оценить сверху величины:

$$\gamma p, q(n, \Omega N) = \sup pn \in H0^n \frac{||pn||q}{||pn||p, \Omega N},$$

$$\Gamma p, q(n, \Omega N) = \sup pn \in H0^n \frac{||pn||q, \Omega N}{||pn||p},$$

где $1 \le p, q \le \infty$, $H0^n$ – подмножество алгебраических многочленов из H^n, не равных нулю тождественно.

Для равномерной сетки $\Omega = \{-1 + \frac{2j}{N-1}\}j = 0^{N-1}$ величины $\gamma p, q(n, \Omega)$, $\Gamma p, q(n, \Omega)$ были оценены в работе [1].

Автором доказана следующая

Теорема. Если $1 \le p \le q \le \infty$ и $n \le aN$ $(0 < a < 1)$, то существуют такие положительные постоянные $c1 = c1(a, p, q)$ и $c2 = c2(a, p. q)$, что

$$\gamma p, q(n, \Omega N) \le c1 n^{2(1/p - 1/q)},$$

$$\Gamma p, q(n, \Omega N) \le c2 n^{2(1/p - 1/q)}.$$

В заключении выражаю благодарность Шарапудинову И.И. за постановку задачи.

Литература

1. Шарапудинов И.И. Об оценивании $Lp[-1, 1]$-нормы алгебраического полинома по его значениям в узлах равномерной сетки // Мат. сб. 1997. Т.188. N12. С.135-156.

ФРЕДГОЛЬМОВЫ GLG-ОТОБРАЖЕНИЯ В МОДУЛЯХ НАД НЕКОММУТАТИВНЫМИ АЛГЕБРАМИ

Крейн М.Н. (Липецк)

travkin@lipetsk.ru

В [1] автором были введены отображения 1-й степени, или GLG-отображения, вида $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x \cdot b_i$ в некоммутативной C^*-алгебре A, а также отображения в гильбертовом A-модуле M, имеющие "покоординатно" такой вид. Множество таких отображений обозначалось $GLG(A)$ и $GLG(M)$ соответственно.

В $GLG(A)$ определяется норма $\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. Пополнение $G(A)$ множества $GLG(A)$ по этой норме оказывается также C^*-алгеброй с инволюцией $f \to f^*$, где $f^*(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \cdot x \cdot b_i^*$. При этом $\|f\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|a_i\| \cdot \|b_i\| < \infty$. Естественным образом определяется норма и в $GLG(M)$ (суммирование квадратов норм по строкам бесконечной матрицы, где в строке лишь конечное число ненулевых элементов, затем суммирование ряда из полученных значений). Тогда в $GLG(M)$ определяется понятие компактного отображения так же, как для линейного отображения (например, в [2]), а именно, отображение называется компактным, если $\lim_{n\to\infty} \|f|_{L_{n,A}^{\perp}}\| = 0$, где $L_{n,A}^{\perp}$ - подмодуль модуля $l_2(A)$, порожденный базисными элементами $e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots$.

$GLG(M)$-отображение названо фредгольмовым, если оно отличается на компактный от взаимно однозначного $GLG(M)$-отображения. Такие отображения имеют много свойств, похожих на свойства классических фредгольмовых отображений.

Литература

1. М.Н.Крейн Дифференцирование в некоммутативных алгебрах. // Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения (МНК АДМ - 2000). Тезисы докладов. - Воронеж, 2000. - С.135.

2. А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко. Индекс эллиптических операторов над C^*-алгебрами. // Изв.Акад.Наук, 1979. - Т. 43 - С.831-859.

РЕГУЛЯРНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ НЕКОММУТАТИВНЫХ АССОЦИАТИВНЫХ СУПЕРАЛГЕБР

Кривовяз Е.В. (Липецк)

Обратимость в супералгебрах исследовалась в [1], в n-кратных супералгебрах - в [2], а обобщенная обратимость (регулярность) в абелевых супералгебрах - в [3]. Ниже исследуется регулярность в некоммутативных супералгебрах.

Пусть A - некоммутативная ассоциативная Z_2- градуированная алгебра (супералгебра) с единицей I, то есть $\mathrm{A} = \mathrm{A}^0 \oplus \mathrm{A}^1$ (прямая сумма подмодулей) и $\mathrm{A}^i \cdot A^j \subset A^{i \oplus j}$; $i, j \in Z_2$; A^0 является подалгеброй в A, $\mathrm{I} \in A^0$. Элемент $a = a^0 + a^1 \in A; a^0 \in A^0, a^1 \in A^1$. по определению регулярен, если существует элемент $x = x^0 + x^1 \in A$ (обобщенный обратный к a) такой, что $axa{=}a$. Исследование регулярности сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \mathrm{a}^0\left(\mathrm{x}^0\mathrm{a}^0 + \mathrm{x}^1\mathrm{a}^1\right) + \mathrm{a}^1\left(\mathrm{x}^0\mathrm{a}^1 + \mathrm{x}^1\mathrm{a}^0\right) = \mathrm{a}^0, \\ \mathrm{a}^0\left(\mathrm{x}^0\mathrm{a}^1 + \mathrm{x}^1\mathrm{a}^0\right) + \mathrm{a}^1\left(\mathrm{x}^0\mathrm{a}^0 + \mathrm{x}^1\mathrm{a}^1\right) = \mathrm{a}^1. \end{cases} \tag{1}$$

Введение подстановки

$$\begin{aligned} \mathrm{к}^0 &= \mathrm{x}^0\mathrm{a}^0 + \mathrm{x}^1\mathrm{a}^1 \in \mathrm{A}^0, \\ \mathrm{к}^1 &= \mathrm{x}^0\mathrm{a}^1 + \mathrm{x}^1\mathrm{a}^0 \in \mathrm{A}^1 \end{aligned} \tag{2}$$

позволяет упростить решение системы (1) в связи с переходом к системе:

$$\begin{cases} a^0\mathrm{к}^0 + \mathrm{a}^1\mathrm{к}^1 = \mathrm{a}^0, \\ a^0\mathrm{к}^1 + \mathrm{a}^1\mathrm{к}^0 = \mathrm{a}^1. \end{cases}$$

Простейшим исходным является предположение об обратимости элемента a^0. Тогда уравнения последней системы дают:

$$\left[1 - \left(\left(\mathrm{a}^0\right)^{-1} \cdot \mathrm{a}^1\right)^2\right] \cdot \mathrm{к}^0 = 1 - \left(\left(\mathrm{a}^0\right)^{-1} \cdot \mathrm{a}^1\right)^2, \tag{3}$$

$$\mathrm{к}^1 = \left(\mathrm{a}^0\right)^{-1} \cdot \mathrm{a}^1 - \left(\mathrm{a}^0\right)^{-1} \cdot \mathrm{a}^1 \cdot \mathrm{к}^0. \tag{4}$$

Случай, когда элемент $1 - \left(\left(\mathrm{a}^0\right)^{-1}\right)^2 \neq 0 \in \mathrm{A}^0$ и обратим, приводит к обратимости элемента a. В случае $1 - \left(\left(\mathrm{a}^0\right)^{-1}\right)^2 = 0 \in$

A^0, что влечет за собой выполнение равенства $\overline{a^0}\cdot a^1 = a^1\cdot a^0$ (где элемент $\overline{a^0}\in A^0$ сопряженный к a^0), уравнения (3) и (4) могут быть исследованы и решены в контексте обобщенного обращения. В результате получим

$k^0 = c \in A^0$ произволен, $k^1 = \left(a^0\right)^{-1}\cdot a^1 - \left(a^0\right)^{-1}\cdot a^1\cdot c \in A^1$.

Тогда возвращаясь к подстановке (2), находим

$$\begin{gathered} x^0 = c\cdot\left(a^0\right)^{-1} - x^1\cdot a^1\cdot\left(a^0\right)^{-1}, \\ x^1 = \left(a^0\right)^{-1}\cdot a^1\cdot(1-c)\cdot\left(a^0\right)^{-1} - x^0\cdot a^1\cdot\left(a^0\right)^{-1} \end{gathered} \qquad (5)$$

Пусть для простоты элементы $c\in A^0$ и $\left(a^0\right)^{-1}\cdot a^1\in A^1$ коммутируют, тогда при решении (5) получим:

$c=\frac{1}{2}$: $x^0 = d, d\in A^0$ произволен; $x^1 = \frac{1}{2}\left(a^0\right)^{-1}\cdot a^1\cdot\left(a^0\right)^{-1} - d\cdot a^1\cdot\left(a^0\right)^{-1}$.

Тогда $x = d + \frac{1}{2}\left(a^0\right)^{-1}\cdot a^1\cdot\left(a^0\right)^{-1} - d\cdot a^1\cdot\left(a^0\right)^{-1}$, где элемент $d\in A^0$ произволен.

(Простейший пример дает некоммутативная супералгебра $U\hat{\otimes}U$(косое тензорное произведение двойных чисел)).

Литература

1. Блюмин С.Л., Кривовяз Е.В., Миловидов С.П., Мишачев Н.М. Обратимость элементов Z_2-градуированных алгебр //Тез. докл. Воронеж. вес. матем. школы "Современные методы в теории краевых задач (Понтрягинские чтения - VIII)". Воронеж: ВГУ, 1997. С.23.

2. Блюмин С.Л., Кривовяз Е.В., Немец С.Ю. К обратимости элементов n-кратных супералгебр //Тез. докл. Воронеж. вес. матем. школы "Современные методы в теории краевых задач (Понтрягинские чтения - IX)". Воронеж: ВГУ, 1998. С.21.

3. Блюмин С.Л., Кривовяз Е.В. Регулярность элементов абелевых супералгебр //Тез. докл. Воронеж. вес. матем. школы "Современные методы в теории краевых задач (Понтрягинские чтения - X)". Воронеж: ВГУ, 1999. С.34.

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБРАЗУЮЩЕЙ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Кризский В.Н., Герасимов И.А. (Стерлитамак)
Sgpi@str.bashnet.ru

Пусть локальное включение Ω_0 - тело вращения - лежит в одной из областей Ω_i, $i = \overline{1..N}$ - плоских горизонтальных слоев постоянных проводимостей σ_i. В многосвязной области Ω, лежащей на "дневной" поверхности при $z = 0$ и являющейся подобластью Ω_1 известна функция $u_э(A, P, \vec{\sigma}, S(p_1, p_2, ..., p_L))$, где $S(p_1, p_2, ..., p_L)$ -геометрия включения, A - источник тока, P - приемник тока.

В работе находятся: $p_1, p_2, ..., p_L$ - параметры включения (если Ω_0 -шар, то параметры - координаты центра, радиус; эллипсоид - координаты центра, полуоси,углы наклона: тело вращения - координаты точек образующей, по которым осуществляется сплайн-аппроксимация поверхности включения), как решение задачи о минимизации на Ω функционала: $F_1 = \sum\limits_{i=1}^{r} c_i \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{r} \left[u_{ij} - u^э_{ij}\right]^2$ При известных ограничениях на параметры $m_i \leq p_i \leq M_i, i = \overline{1, L}$, в качестве стабилизирующего функционала может быть использован функционал: $F_2 = d\sum\limits_{i=1}^{L} \alpha_i(p_i - m_i)^2 + \epsilon \sum\limits_{i=1}^{L} \beta_i(p_i - M_i)^2$, где $\alpha_i, \beta_i, i = \overline{1, L}$, $c_i, i = \overline{1, r}$, d, e - весовые множители, $u^э_{ij} = u^э(P_i, A_j)$ - экспериментальные значения потенциала в точках $P_i \in \Omega, i = \overline{1..r}$, $A_j \in \Omega, j = \overline{1..r}$, $i \neq j$, $u_{ij} = u(P_i, A_j)$ - решение прямой задачи в соответствующих точках области Ω:

$$\Delta u_1 = -\frac{I}{\sigma_1}\delta(P - A); \ \Delta u_i = 0, i = 2, ...N;$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_{z=0} = 0; \ u_i|_{z=z_i} = u_{i+1}|_{z=z_i}, i = \overline{1, N-1};$$

$$\sigma_i \left.\frac{\partial u_i}{\partial n}\right|_{z=z_i} = \sigma_{i+1} \left.\frac{\partial u_{i+1}}{\partial n}\right|_{z=z_i}, i = \overline{1, N-1};$$

$$u_0|_S = u_k|_S\,;\ \sigma_0 \left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_S = \sigma_k \left.\frac{\partial u_k}{\partial n}\right|_S;$$

$$u_i \to 0, \text{ при } P \to \infty, i = \overline{1, N}.$$

где S - граница тела вращения $\Omega_0 \in \Omega_k$, плоскость $z = z_i$ - нижняя граница слоя Ω_i $(i = \overline{1, N-1})$, n - вектор внешней нормали, δ - функция Дирака. Для случаев однородного пространства и полупространства дается сравнение различных алгоритмов многомерной оптимизации: метода локальных вариаций, метода конфигураций (Хука - Дживса), метода покоординатной минимизации, метода скорейшего спуска. Исследуются вопросы выбора начального приближения, зависимости сходимости от исходных данных.

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПЕРДЕЛЕНИЯ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Кризский В.Н., Ермолаев А.В. (Стерлитамак)
Sgpi@str.bashnet.ru

Пусть в горизонтально-слоистой среде $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega_i$, с удельными электрическими проводимостями σ_i, в слое k находится цилиндрическое тело Ω_0, с удельной электрической проводимостью σ_0 и образующей параллельной оси X.

В многосвязной области W, являющейся подобластью Ω_1, известны результаты геофизических измерений - дискретная функция $u^{\text{эксп}}(A, P, \vec{\sigma}, S(\vec{p}))$, где $S(\vec{p})$ - направляющая цилиндрического включения, описываемая вектором параметров $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$, A - источник тока, P - приемник тока.

Направляющая цилиндра ищется как решение задачи о минимизации на W функционала $\phi = \Phi[\vec{p}] + aF[\vec{p}]$, здесь

$$\Phi[\vec{p}] = \sum_{i=1}^{r} b_i \sum_{j=1, j\neq i}^{r} \left[u_{ij} - u_{ij}^{\text{эксп}}\right]^2,$$

а при ограничениях на параметры $m_i \leq p_i \leq M_i, i = \overline{1, m}$, в качестве стабилизирующего функционала $F[\vec{p}]$, может быть использован функционал

$$F[\vec{p}] = d\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(p_i - m_i)^2 + e\sum_{i=1}^{m} \beta_i(p_i - M_i)^2,$$

где $\alpha_i, \beta_i, i = \overline{1, m}$, $c_i, i = \overline{1, r}$, d, e - весовые множители, $u_{ij}^{\text{эксп}} = u^{\text{эксп}}(P_j, A_i)$ - экспериментальные значения потенциала в точках $P_j \in W, j = \overline{1, r}$, $A_i \in W, i = \overline{1, r}, j \neq i$. $u_{ij} = u(P_j, A_i)$ - решение прямой задачи в соответствующих точках области W:

$$\Delta u_1 = -\frac{I}{\sigma_{i_0}}\delta(P - A), \; i = i_0;$$

$$\Delta u_i = 0, \; i \neq i_0, \; i = 0, \dots n;$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \; 0 \leq x < \infty, \; -\infty < y < +\infty;$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0, \; -\infty < y < +\infty, \; 0 \leq z < \infty;$$

$$[u]|_{\gamma_i} = \left.\left[\sigma\frac{\partial u}{\partial n_i}\right]\right|_{\gamma_i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n;$$

$$u \to 0 \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty,$$

где i_0 номер области Ω_{i_0},в котором расположен источник тока; γ_i - плоскости $y = y_i$ при $i = 1, \dots, n$ и цилиндрическая поверхность при $i = 0$; $\vec{n_i}$ - внешняя нормаль к поверхности γ_i, δ - функция Дирака. Решение прямой задачи находится комбинированным методом интегральных преобразований и интегральных уравнений.

ОРТОРЕКУРСИВНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СИСТЕМАМ СЖАТИЙ И СДВИГОВ ФИКСИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ

Кудрявцев А.Ю. (Москва)[1]

E-mail: alex.yuri.koud@mtu-net.ru

В тезисах [1] Т. П. Лукашенко ввел следующий линейный рекурсивный алгоритм приближения.

Определение 1. Пусть H — гильбертово пространство, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система ненулевых элементов H. Для любого элемента $f \in H$ определим коэффициенты $\{\hat{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ по индукции: 1) положим $\hat{f}_1 = (f, e_1)\|e_1\|^{-2}$; 2) если уже определены $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n$, то положим $\hat{f}_{n+1} = (R_n(f), e_{n+1})\|e_{n+1}\|^{-2}$, где $R_n(f) = f - \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_k e_k$. Коэффициенты $\{\hat{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ назовем *орторекурсивными коэффициентами Фурье* f по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k$ — *орторекурсивным рядом Фурье* f по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Утверждение. *Для любой системы* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H \setminus \{0\}$ *и любого элемента* $f \in H$ *выполняются тождество Бесселя:* $\|f - \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_k|^2 \|e_k\|^2$, $n = 1, 2, \dots$, *и неравенство Бесселя:* $\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \|e_k\|^2 \le \|f\|^2$. *Орторекурсивный ряд Фурье* $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k$ *сходится к* f *тогда и только тогда, когда выполняется равенство Парсеваля* $\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \|e_k\|^2 = \|f\|^2$.

Определение 2. Систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H \setminus \{0\}$ назовем *орторекурсивной системой разложения в* H, если для любого элемента $f \in H$ орторекурсивный ряд Фурье f по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f в H.

Наша цель — изучить орторекурсивные разложения по так называемым системам сжатий и сдвигов фиксированной функции с компактным носителем, которые мы определим следующим образом. Пусть задана последовательность $\mathbf{P} = \{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ натуральных чисел с условием $p_k \ge 2$, $k = 1, 2, \dots$. Положим $m_k = p_0 \cdots p_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Пусть функция $\varphi \in L^2[0, 1]$ и продолжена нулем вне $[0, 1]$. Системой $\mathbf{P}$-ичных сжатий и сдвигов функции φ назовем систему функций $\Phi_b f P = \{\varphi(m_k x - l)\}$, $k =$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №99-01-00355).

$0, 1, \ldots,\ l = 0, \ldots, m_k - 1,\ x \in [0,1]$, занумерованную так: $\varphi_{m_0,0}, \ldots, \varphi_{m_0,m_0-1}; \varphi_{m_1,0}, \ldots, \varphi_{m_1,m_1-1}, \ldots$

Через $\omega_2(\varphi, \delta)$, $0 < \delta \leq 1$, мы будем обозначать интегральный модуль непрерывности функции φ в пространстве $L^2[0,1]$. Введем следующие величины:
$\lambda_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_2^2(\varphi, m_k/m_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема. *Пусть функция $\varphi \in L^2[0,1]$ удовлетворяет условиям: $\int_0^1 \varphi(x)dx \neq 0$ и $\liminf \lambda_n(\varphi) < \infty$, $n \to \infty$. Тогда система $\Phi_b fP$ является орторекурсивной системой разложения в $L^2[0,1]$.*

Особенно простой вид условие теоремы принимает в частном случае, когда $m_k = p^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, где натуральное $p > 1$, охватывающем также случай двоичных сжатий и сдвигов ($p = 2$; см. [2]). Легко видеть, что в этой ситуации $\lambda_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \omega_2^2(\varphi, p^{-k})$, а, следовательно, условие $\liminf \lambda_n(\varphi) < \infty$, $n \to \infty$, эквивалентно условию $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_2^2(\varphi, p^{-k}) < \infty$, которому удовлетворяют, в частности, все функции $\varphi \in L^2[0,1]$ с $\omega_2(\varphi, \delta) = O(|\log \delta|^{-1/2-\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$.

Литература

1. Лукашенко Т. П. Рекурсивные разложения, подобные ортогональным // VII Международн. конф. "Математика. Экономика, Экология, Образование". Международн. симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Ростов-на-Дону, 26 мая – 1 июня 1999 г. Тезисы докл. С. 331.

2. Oswald P., Filippov V. I. Representation in L_p by series of translates and dilates of one function // Journal of Approximation Theory. 1995. V. 82. №1. P. 15-29.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Кузенков О.А. (Нижний Новгород)
kuz@vmk.unn.ac.ru

Пусть X – топологическое пространство, Σ – борелевская σ-алгебра в нем, $frm_+(X)$ – семейство положительных мер

Радона на X. Рассматривается уравнение

$$\mu'_t = F[\mu] - \mu f[\mu] \tag{1}$$

с начальным условием

$$\mu[0] = \nu, \tag{2}$$

где $\mu[t]$ – дифференцируемая по t функция со значениями в $frm_+(X)$, $F[\mu]$ – однородный оператор, $f[\mu]$ – однородный непрерывный функционал. Показано, что, если $\xi[t]$ – решение задачи Коши

$$\xi'_t = F[\xi],\ \xi[0] = \nu;$$

$\xi[t] \in frm_+(X)$, $\xi[t] \neq 0$ для любого $t \geq 0$, то $\mu[t] = \xi[t]/(\int\limits_0^t f[\xi]\,dt + 1)$ - решение задачи (1), (2).

Полученный результат используется для решения дифференциального уравнения

$$\mu'_t = \Delta\mu + A\mu - \mu f[\mu]$$

в оснащенном гильбертовом пространстве $H_+ \subset H_0 \subset H_- = X$. Здесь Δ – оператор Лапласа, A – произвольная постоянная. В частности показано, что решение уравнения

$$\mu'_t = \Delta\mu - \mu\mu(X)$$

с начальным условием (2) есть свертка

$$\mu[t] = \frac{\nu \times \sigma_t}{\nu(X)t + 1},$$

где σ_t – центрированная гауссова мера с корелляционным оператором tI.

ПОЛУЛИНЕЙНАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ СИСТЕМА НА КОНЕЧНОМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ: СИСТЕМА БЛИЗКАЯ К СИСТЕМЕ ОТБОРА

Кузенков О.А., Рябова Е.А. (Нижний Новгород)

kuz@vmk.unn.ac.ru, helen@sandy.ru

Данная работа посвящена исследованию систем вида

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} + \sum_{s=1}^{k} a_s(x,t)\frac{\partial z_i}{\partial x_s} = F_i(z) - z_i \sum_{j=1}^{n} F_j(z), \; i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

относительно непрерывно дифференцируемой вектор-функции $z(x,t)$ с начальным условием $z^0(x)$. Здесь $x \in \Omega$, где Ω – ограниченное множество в R^k; $t \geq 0$; функции a_s непрерывно дифференцируемы по x_s и t; функции F_i обладают ограниченными частными производными первого порядка по z_i; функции $z_i^0(x)$ имеют ограниченные непрерывные производные первого порядка по всем x_s. Предположим также, что

$$F_i(z_1, \ldots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \ldots, z_n) \geq 0, \; i = \overline{1,n}$$

и $z_i^0(x) \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^0(x) = 1$ в каждой точке $x \in \Omega$, тогда решение системы (1) в каждый момент времени в каждой точке $x \in \Omega$ принадлежит стандартному симплексу $S_{n-1} = \{z : z_i \geq 0, i = \overline{1,n}, \sum\limits_{i=1}^{n} z_i = 1\}$ в пространстве R^n.

Пусть существует единственное неограниченно продолжаемое решение задачи Коши для системы (1). Будем говорить что система (1) близка к системе отбора, если найдется такое $0 < \varepsilon << 1$ и T, что для некоторого индекса i во все моменты времени $t > T$ функция $z_i(x,t) > 1 - \varepsilon$ для всех $x \in \Omega$ независимо от начального условия $z^0(x)$, $z_i^0 \neq 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть для системы (1) выполнено условие

$$\frac{F_1}{z_1} > \frac{F_j}{z_j} \text{ при } z_1 \leq 1 - \varepsilon, \; j = \overline{2,n},$$

тогда система (1) является системой, близкой к системе отбора.

К ВОПРОСУ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ

Кузнецов В.Н., Чумакова С.В. (Саратов)

Рассмотрим систему нелинейных уравнений – уравнений Кармана, описывающую поведение оболочки под действием нагрузки q:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\gamma}{q}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -\frac{D}{h}\Delta^2 W + L(W,F) + \Delta_k F + q, \quad t\in[0,T] \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L(W,W) - \Delta_k W \end{array}\right. \tag{1}$$

с граничными условиями

$$W_{|\Gamma} = \frac{\partial W}{\partial \eta}_{|\Gamma} = 0, \qquad F_{|\Gamma} = \frac{\partial F}{\partial \eta}_{|\Gamma} = 0 \tag{2}$$

и начальными условиями

$$W(\bar{x},0) = W_0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t}(\bar{x},0) = W_1. \tag{3}$$

где $W_0 \in H_0^2(\Omega)$, $W_1 \in L^2(\Omega)$, q принадлежат пространству ограниченных функций.

Относительно решений краевой задачи (1),(2),(3) доказана

Теорема 1. *Пусть* (W_0, F_0) *– некоторое решение задачи* $(1),(2),(3)$, *отвечающее нагрузке* q_0, *такое, при любом* $t \in [0,T]$ *оператор вида*

$$AW = \frac{D}{h}\Delta^2 W + L(W, F_0)$$

является положительно определенным в пространстве $L^2(\Omega)$. *Тогда* (W_0, F_0) *– единственное решение этой задачи. Более того, существует такое* $\varepsilon > 0$, *что для любой нагрузки* $q :\, \|q - q_0\| < \varepsilon$ *(в норме пространства измеримых, ограниченных функций) соответствующая краевая задача* $(1),(2),(3)$ *имеет единственное решение.*

Отметим, что подобный результат имеет место для нелинейной модели типа Тимошенко. При этом дополнительно предполагается, что оболочка изготовлена из однородного материала (в смысле И.И.Воровича), и условие положительной определенности заменяется более жестким условием: для любого $t \in [0,T]$

$(A_0W, W) > C||W||_{H'(\Omega)}$, где $H'(\Omega)$ - пространство Соболева и где константа C не зависит от t. Здесь оператор A_0 – оператор вида

$$A_0W = -\alpha\Delta W + L(W, F_0).$$

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Кузнецова Т.А. (Саратов)

Рассматривается класс операторных уравнений вида

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -A(t)w + f(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$\begin{cases} W(0, \cdot) = W_0, \\ \frac{\partial W}{\partial t}(0, \cdot) = W_1, \end{cases} \tag{2}$$

где при любом $t \in [0, T]$ $A(t)$ – положительно определенный, симметрический оператор, действующий в гильбертовом пространстве H и $A(t)$ – непрерывная функция по параметру t. Пусть для всех t операторы $A(t)$ эквивалентны положительно определенному, симметрическому оператору A_0 в том смысле, что все операторы $A(t)$ имеют одну и ту же область определения, совпадающую с областью определения оператора A_0 и для любого $U \in D(A_0)$

$$C_1||A(t)U|| \leq ||A_0U|| \leq C_2||A(t)U||,$$

где положительные константы C_1 и C_2 не зависят от t.

Пусть, далее, оператор A_0 имеет полную систему собственных функций. Обозначим $E_n(W)$ – величину наилучшего приближения по собственным подпространствам оператора A_0 в просранстве $L^\infty((0,T), H)$, и пусть функции W_0, W_1 и $f(t)$ при каждом t принадлежат области определения оператора A_0^k. Тогда при данных обозначениях и предположениях имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. *Задача* (1), (2) *имеет единственное решение* W.

Теорема 2. *Решение задачи* (1), (2) W *при каждом* t *принадлежит области определения оператора* A_0^k.

Теорема 3. *Пусть* W *- решение задачи* (1), (2). *Тогда имеют место следующие оценки:*

$$E_n(W) = O\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Замечание. Результаты теорем 1-3 могут быть исползованы при качественном исследовании решений нелинейных краевых задач, в частности, нелинейных уравнений механики.

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ, ВХОДЯЩИХ В УСЛОВИЕ СОГЛАСОВАНИЯ

Кулаев Р.Ч. (Карачаевск)

На связном геометрическом графе $\Gamma \subset R^n$ рассматривается задача на собственные значения (см. [1])

$$(pu')' + qu = \lambda u, \qquad u|_{\partial\Gamma} = 0 \tag{1}$$

Предполагается, что граф Γ является пучком, т.е. содержит одну внутреннюю вершину a. В вершине a заданы условия непрерывности и условие согласования

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i'(a) = 0, \tag{2}$$

где $\{\alpha_i\}$ - набор положительных чисел.

Изучается зависимость спектра σ задачи (1), (2) от параметров α_i , входящих в (2).

В работе [2] было показано, что спектр σ можно разбить на два подмножества σ_1 и σ_2 такие, что собственные значения, входящие в σ_1, не зависят от параметров α_i, т.е. не меняют своего положения на вещественной оси при изменении α_i; а собственные значения, входящие в σ_2, изменяются при изменении α_i. Оказывается, что при непрерывном изменении параметров α_i точки множества σ_2 также непрерывно перемещаются вдоль вещественной оси.

Теорема. Собственные значения задачи (1), (2) непрерывно зависят от параметров α_i, входящих в (2).

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. О теоремах сравнения для задачи на графе // Диф. ур-я. Т.25. N 7. С. 1147-1150.

2. Завгородний М.Г., Кулаев Р.Ч. О зависимости собственных значений краевой задачи на графе от параметров, входящих в условие гладкости // Деп. в ВИНИТИ 19.12.97, N 3697-В97. 19с.

О ПРИМЕНЕНИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕМЕННОГО К ПРИБЛИЖЕННОМУ ВЫЧИСЛЕНИЮ КОНЕЧНЫХ СУММ

Кулибеков Н.А. (Махачкала)

Обозначим через $Q_n(x) = Q_n(x, N)$ $(n = 0, 1, ..., N-1)$ конечную последовательность многочленов Чебышева, нормированных условием $Q_n(0) = 1$, образующую ортогональную систему в следующем смысле

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Q_n(k)Q_m(k) = \begin{cases} 0, & (n \neq m), \\ \frac{1}{\pi_n} & (n = m), \end{cases}$$

где

$$\pi_n = \pi_n(N) = (2n+1)\binom{N-1}{n}\binom{N+1}{n}^{-1}.$$

Положим $P_{n,N}(x) = \sqrt{\pi_n}Q_n((N-1)z)$. В настоящей работе указаны границы, отделяющие корни многочлена $P_{n,N}(x)$. Этот результат основан на асимптотической формуле, выражающей многочлены Чебышева через многочлены Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ с переменными верхними индексами α и β, установленный в работе Шарапудинова И.И. [1]. Такие оценки в рассматриваемой задаче важны потому, что в квадратурной формуле Гаусса

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(kh) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j) + R_{n,N}(f), \qquad (1)$$

где $z_j = z_j(n, N)$ - корни многочлена $P_{n,N}(z)$ степени n,а коэффициенты Кристоффеля λ_j выражаются формулой

$$\lambda_j = \frac{k_{n,N}}{k_{n-1,N}} \cdot \frac{1}{P_{n-1,N}(z_j)P'_{n,N}(z_j)},$$

где $k_{n,N}$ - старший коэффициент многочлена $P_{n,N}(x)$.

Суть рассматриваемой задачи, очевидно, состоит в том, чтобы при очень больших значениях N вычислить сумму в левой части равенства (1) с требуемой точностью за счет возможно малых значений степени n многочлена $P_{n,N}(z)$. Поэтому особую важность приобретают границы для нулей многочленов $P_{n,N}(z)$, у которых степень n существенно меньше числа точек деления N.

Поскольку нули многочлена $P_{n,N}(z)$, связаны линейно с нулями $Q_n((N-1)(1+t)/2)$, то нам достаточно оценить нули $Q_n((N-1)(1+t)/2)$. Обозначим через $\tau_n^{(0)} < \tau_n^{(1)} < \cdots < \tau_n^{(n)}$ -точки экстремумов функции $(1-t^2)^{\frac{1}{4}} P_n^{(0,0)}(t)$, а через $t_{n,N}^{(1)} < t_{n,N}^{(2)} < \cdots < t_{n,N}^{(n)}$ - нули многочлена $Q_n((N-1)(1+t)/2)$, $[\gamma]$-целая часть числа γ.

Имеет место

Теорема. *Если* $2 \le n \le (0,22(N-1))^{\frac{1}{3}}, N \ge 7856$, *то справедлива следующая оценка*
$\tau_n^{(j-1)} < t_{n,N}^{(j)} < \tau_n^{(j)} (j = 1, \ldots, [\frac{n}{2}])$.

В заключении хочу выразить благодарность И.И. Шарапудинову за постановку задачи и помощь в работе.

Литература

[1] Шарапудинов И.И., Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения. Махачкала: Из-во Даг.гос.пед.ун-та, 1997г.

L^p – ОЦЕНКИ В КЛАССАХ ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ПОЛИКРУГЕ

Лукавый А.П. (Брянск)[1]

e-mail: APLukav@mail.ru

Пусть D^n – открытый единичный полидиск в n-мерном комплексном пространстве C^n. Через $\Lambda_p(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ обозначим класс функций для которых

$$\left(\int_{[-\pi,\pi]^n} \left| f\left(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}, ..., r_n e^{i\varphi_n}\right)\right)^p d\varphi_1 d\varphi_2 ... d\varphi_n \right|^{1/p} \leq$$

$$\leq \omega_1(r_1)\omega_2(r_2)...\omega_n(r_n).$$

где $\omega_j(r)$, монотонно растущая на $[0,1)$ функция, такая что $\frac{|\omega_j'(r)|(1-r)}{|\omega_j(r)|} \leq C,\ j = \overline{1,n}$.

Пусть $F(z_1, z_2, ..., z_n) = U(z_1, z_2, ..., z_n) + iV(z_1, z_2, ..., z_n)$ – голоморфная в D^n функция. Сформулируем основной результат:

Теорема. Если $U(z_1, z_2, ..., z_n) \in \Lambda_p(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$, $0 < p \leq 1$, то $F(z_1, z_2, ..., z_n) \in L^p(\omega_1\tilde{\omega}_1, \omega_2\tilde{\omega}_2, ..., \omega_n\tilde{\omega}_n)$, где $\tilde{\omega}_j$ – "добавка", зависящая от скорости роста функции ω_j. Причем, справедлива следующая шкала условий.

Пусть $\omega_j(r) = \varphi_j\left(\log\frac{1}{1-r}\right)$, $j = \overline{1,n}$, тогда при условии существования указанных пределов:

Если $\lim_{r\to 1-0} \frac{\log \omega_j(r)}{\log\frac{1}{1-r}} > 0$, то $\tilde{\omega}_j(r) \leq Const$;

Если $\lim_{r\to 1-0} \frac{\log \omega_j(r)}{\log\frac{1}{1-r}} = 0$ и $\lim_{r\to 1-0} \frac{\log \omega_j(r)}{\log\log\frac{1}{1-r}} > 0$, то $\tilde{\omega}_j(r) \leq Const \frac{\varphi_j\left(\log\frac{1}{1-r}\right)}{\varphi_j'\left(\log\frac{1}{1-r}\right)}$;

Если $\lim_{r\to 1-0} \frac{\log \omega_j(r)}{\log\log\frac{1}{1-r}} = 0$, то $\tilde{\omega}_j(r) \leq Const \log\frac{1}{1-r}$.

Случай функции одной переменной для $p = \infty$ и $n = 1$ рассмотрен в [1]. Метод доказательства заимствован из работ [2] и [3].

Кроме того в работе строится линейный ограниченный проектор из L^p-весовых пространств n-гармонических функций на L^p-весовые пространства голоморфных функций при всех p.

[1]Работа выполнена при поддержке МО РФ (грант 97-0-1.6-110)

В докладе предполагается также привести результаты, касающиеся точности полученных оценок.

Литература

[1]. Н.К. Никольский. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа. Ленинград. "Наука", 1974

[2]. Ф. А. Шамоян. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. мат. журнал. - 1990, т.31. № 2.

[3]. Ф. А. Шамоян, А.П. Лукавый. О голоморфных функциях с граничными значениями из классов О. Бесова. Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Казань 1998 с. 262-264

ОЦЕНКА МАЖОРАНТЫ ЧАСТИЧНЫХ СУММ ОРТОГОНАЛЬНОГО РЯДА

Лукашенко Т.П. (Москва)[1]

В 1924 году А.Н.Колмогоров и Г.А.Селиверстов опубликовали работу о п.в. сходимости тригонометрического ряда при условии сходимости ряда коэффициентов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2+|b_k|^2\right)(\ln k)^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, где имелась оценка ([1, с.18] $\left\|\sup_{k\le n} S_k(f;x)\right\|_1 \le$ $\le C\ln n\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2+|b_k|^2\right)\right)^{1/2}$. В 1925 году они одновременно с А.И.Плесснером улучшили результат о п.в. сходимости, показав, что можно взять $\varepsilon = 0$. При этом была получена оценка ([1, с. 70]) $\left\|\sup_{k\le n}\left|\frac{S_k(f;x)}{\sqrt{\ln k}}\right|\right\|_1 \le C\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2+|b_k|^2\right)\right)^{1/2}$. Подобную оценку использовал С.Качмаж при получении аналога последнего результата о п.в. сходимости для общих ортогональных рядов. Для тригонометрических рядов Л.Карлесоном и Р.Хантом получены оценки лучше, но в ортогональных рядах оценка С.Качмажа продолжает сохранять свое значение.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ проект №99-01-00355 и программы поддержки ведущих научных школ РФ №00-15-96143.

В [2] автором для произвольных систем функций была доказана аналогичная оценка

$$\left\| \sup_{k\le n} \frac{|S_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \right\|_1 \le 4\sqrt{2} \left\| \sup_{k\le n} \frac{L_k(x)}{\lambda_k} \right\|_1^{1/2} \left(\sum_{k\le n} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \right)^{1/2},$$

где $L_k(x)$ — функции Лебега. Оценка применялась для доказательства теоремы о сходимости почти всюду для любых систем функций. В случае ортогональной системы функций получена более сильная оценка

$$\left\| \sup_{k\le n} \frac{|S_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \right\|_2 \le \sqrt{2} \left\| \sup_{k\le n} \frac{L_k(x)}{\lambda_k} \right\|_1^{1/2} \left(\sum_{k\le n} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \right)^{1/2}.$$

Литература

1. Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985.

2. Лукашенко Т.П. Об аналогах теоремы Колмогорова-Селиверстова-Плесснера для неортогональных систем функций // Матем. заметки. 2000. Т. 67, №1. С. 87-101.

О РАЗРЕШИМОСТИ СТЕПЕННОЙ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ НА НЕСКОЛЬКИХ ОТРЕЗКАХ

Лукашов А.Л. (Саратов)

LukashovAL@info.sgu.ru

Пусть $E = [a_1, a_2] \cup \ldots \cup [a_{2m-1}, a_{2m}]$, $-\infty < a_1 < \ldots < a_{2m} < +\infty$. Рассматривается следующая проблема моментов: для заданной последовательности действительных чисел $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ определить, существует ли неубывающая функция $\sigma(t)$, для которой

$$\int_E t^k d\sigma(t) = s_k, k = 0, 1, \ldots .$$

Известен [2] критерий разрешимости этой проблемы, основанный на проверке ненегативности ганкелевых форм, требующий проверки положительности 2^{m+1} последовательностей вида

$$\Delta_n\{\prod_{j\in J}(x-a_{2j})(x-a_{2j+1})\},\Delta_n\{(x-a_1)\prod_{j\in J}(x-a_{2j})(x-a_{2j+1})\},$$

$$\Delta_n\{(a_{2m}-x)\prod_{j\in J}(x-a_{2j})(x-a_{2j+1})\},$$

$$\Delta_n\{(x-a_1)(a_{2m}-x)\prod_{j\in J}(x-a_{2j})(x-a_{2j+1})\}$$

всевозможных подмножеств $J\subset\{1,2,\dots,m-1\}$, где

$$\Delta_n\{\sum_{k=0}^{m}a_kx^k\}=\left|\sum_{k=0}^{m}a_ks_{k+i+j}\right|_{i,j=0}^{n}.$$

С использованием методов теории автоморфных функций получена

Теорема 1 *Пусть система отрезков E такова, что числа $\omega_1(\infty),\dots,\omega_{l-1}(\infty),1$ линейно независимы над полем рациональных чисел (условие Г.Видома [3]). Тогда для разрешимости степенной проблемы моментов на E необходимо и достаточно, чтобы были положительны последовательности $\Delta_n\{P\}$, $\Delta_n\{Q\}$, где $PQ=-\prod_{j=1}^{2m}(x-a_j)$ - некоторое фиксированное разложение.*

(Без ограничения на систему отрезков E в [1] была доказана возможность использования четырех последовательностей указанного вида).

Литература

1. Allaway Wm.R., Liu X. Characterizations for the existence of a solution to the moment problem on a finite number of intervals// Topics in polynomials of one and several variables and their applications. Singapore, 1993, 9-33.

2. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973.

3. Widom H. Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane// Adv. Math., 1969, v.3, 127-232.

ОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ В $\mathbf{C}^n$ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В КРАТНОКРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Луковников А.Е., Нелаев А.В. (Москва)

1°. Продолжена начатая вторым автором [1] с помощью развиваемого им метода линейных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами разработка в пространстве $\mathbf{C}^n$ ($n > 2$) математического аппарата интеграла типа Темлякова-Баврина I-го рода первого порядка

$$\frac{1}{(2\pi)^n i}\int_0^1 d\varepsilon \int_0^{2\pi} d\theta_2 \ldots \int_0^{2\pi} d\theta_n \int_{|\eta|=1} \frac{\phi(\theta_2,\ldots,\theta_n,\eta)}{\eta - u}\, d\eta \qquad (1)$$

с n-круговой определяющей областью D типа A:

$$D = \{z \in \mathbf{C}^n : c_1|z_1| + \ldots + c_n|z_n| < 1, c_1 > 0, \ldots, c_n > 0\}.$$

применяемого далее к постановке и решению многомерной однородной задачи ленейного сопряжения.

2°. Поясним, что в (1) плотность φ — непрерывная по совокупности аргументов функция, удовлетворяющая по η условию Гельдера,

$$u = c_1 z_1 + c_2 \varepsilon z_2 e^{-i\theta_2} + \ldots + c_n \varepsilon z_n e^{-i\theta_n}.$$

Интеграл (1) голоморфен в области D и в сопрягающейся с ней по окружности особенностей

$$B_1 = \{z \in \mathbf{C}^n : z_1 = c_1^{-1}\zeta_1, z_2 = \ldots = z_n = 0, |\zeta_1| = 1\}$$

области

$$E_1 = \{z \in \mathbf{C}^n : c_1|z_1| - c_2|z_2| - \ldots - c_n|z_n| > 1\}.$$

На B_1 непрерывность интеграла (1) нарушается.

3°. Постановка задачи: Пусть в $\mathbf{C}^n$ задана область D типа A. Требуется найти функцию f, голоморфную в D и E_1, обращающуюся в нуль в бесконечно удаленных точках области E_1.

предельные значения которой в точках B_1 из областей D и E_1 удовлетворяют краевому условию

$$f^+(c_1^{-1}\zeta_1, 0, \ldots, 0) = G(\zeta_1) f^-(c_1^{-1}\zeta_1, 0, \ldots, 0),$$

где $G(\zeta_1)$ — определенная на B_1 не обращающаяся в нуль непрерывная по Гельдеру функция, индекс которой $\mathrm{Ind}G(\zeta_1) \geq 0$.

Решение задачи получено в виде интеграла (1), плотность которого определяется указанным в работе способом.

Литература

[1] *Нелаев А.В.* Операторная связь между некоторыми интегралами // Математический анализ и теория функций: Респ. сб. тр. М.: изд-во МОПИ. 1973. В. 1. С. 169-178.

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ УОЛША В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ

С. Ф. Лукомский (Саратов) [1]
lukomskyds@info.sgu.ru

Пусть (G, Σ, μ) пространство с конечной мерой μ и $\mu(G) = 1$.

Определение. *Пусть $p > 1, \alpha \geq 1$. Через $\hat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ обозначим совокупность всех измеримых, п. вс. конечных функций $f : G \to$ **R** таких, что*

1) *для каждой $f \in \hat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ существует положительная, непрерывная, строго возрастающая на $(0, \infty)$ функция φ такая, что*

$$\int_1^\infty \left(\frac{\varphi^{-1}(x)}{x^\alpha}\right)^p dx < \infty \quad (\varphi^{-1} - \text{обратная к } \varphi),$$

2) *существует постоянная $\gamma > 1$ такая, что $\int_G \gamma^{\varphi(|f|)} d\mu < \infty$.*

[1] Частично поддержано программой 'Ведущие научные школы', проект 00-15-96123

Теорема 1.$\mathcal{L}_{p,\alpha}(G)$ *есть Банахово пространство с нормой*

$$\|f\|_{\hat{p},\alpha} = \left(\int_1^\infty \left(\frac{\|f\|_x}{x^\alpha}\right)^p dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Укажем, где расположены пространства $\hat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ по шкале пространств Орлича.

Теорема 2. *Пусть* $p > 1, q > 0, \alpha \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \alpha$. *Тогда для любого* $\gamma > 1$ *и любого* $r > q$

$$L^0(\gamma^{|x|^r}) \subset \mathcal{L}_{p,\alpha}(G) \subset L^0(\gamma^{|x|^q}).$$

Функции Уолша $\{W_n(t)_{n=0}^\infty\}$ в нумерации Пэли рассмотрим на двоичной группе G. Мера μ в этом случае совпадает с мерой Лебега.

Теорема 3. *Пусть* $p > 1, \alpha \geq 1, S_m(f)$*- частичные суммы ряда Фурье-Уолша функции* f. *Тогда*

1)для любой $f \in \hat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}$ $\quad \|S_m(f)\|_{\hat{p},\alpha+1} \leq C_{p,\alpha}\|f\|_{\hat{p},\alpha}$,

2)для любой $f \in \hat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}$ $\quad \|S_m(f) - f\|_{\hat{p},\alpha+1} \to 0$,

3)существует $f \in \hat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}$, *что нормы* $\|S_m(f)\|_{\hat{p},\alpha+1-\varepsilon}$ *неграничены при всех* $\varepsilon > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. C.Finet and G.E.Tkebuchava. *Walsh-Fourier series and their generalisations in Orlicz spaces.* - Journal of mathematical analysis and applications, 221(1998), 405-418.

ПОСТРОЕНИЕ ПРОТОТИПА СИСТЕМЫ НАЧИСЛЕНИЯ ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ

Львов С.В., Резников А.А. (Воронеж)

Существует несколько подходов к разработке автоматизированных информационных систем. В нашем случае информация рассматривается как исходная точка для построения информационной системы, обслуживающей предприятие. Такое информационное проектирование характеризуется как подход к созданию систем, сконцентрированный на информации. Цель работы состоит в создании прототипа системы начисления заработных плат сотрудникам некоторого предприятия. Прототип

— это демонстрационная иллюстрация того, как система или часть системы могут работать. Первым шагом является создание ER-модели. Для этого используется технология моделирования взаимосвязей между сущностями — ER-моделирование (ER — Entity Relationship). Его применение создает надежную основу для разработки качественных систем, обеспечивающих решение прикладных вопросов. При проектировании ER-модели используются понятия сущности, атрибутов сущности, связи между сущностями. После завершения процесса моделирования создаётся ER-диаграмма системы. Далее производится нормализация модели, что приводит к созданию окончательной ER-диаграммы. На её базе строятся таблицы, а также происходит их связывание. Для этого применяется язык SQL - структурированный язык запросов. В качестве клиентского приложения для взаимодействия с СУБД Oracle используется программа SQL*Plus. После завершения создания модели производится заполнение таблиц данными, и решаются некоторые возможные задачи обработки информации. Результат работы — создание отчёта, в котором структурировано отображается вся имеющаяся информация системы и результаты обработки этих данных (подсчёт заработной платы).

Литература

1. Справочное руководство по языку SQL. Под ред. D. Cheu, B. Linden. Oracle Corporation. 1988, 1990. Перевод на рус. Больша- ков А.И. НПКО МЕКОМП. 1991.

2. Баркер Р. Моделирование взаимосвязей между сущностями. Oracle Corporation. 1990. Перевод с англ. Крюков А.В. 1992.

О СОСУЩЕСТВОВАНИИ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ РАЗЛИЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Любасова Г.Ю. (Старый Оскол)
E-mail lyubasova@mail.ru

В докладе рассматриваются бифуркации инвариантных торов из особых точек динамических систем. Эта задача сводится к изучению бифуркаций динамических систем вида

$$\dot{\xi_j} = \xi_j(\varepsilon_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(\varepsilon) \cdot \xi_k^2), j = 1, 2, ..., n. \qquad (1)$$

Основным предположением для системы (1) является условие невырожденности матрицы $A(0)$ и ее главных миноров:

$$det A_K(0) \neq 0, \forall K \subset 1, 2, ..., n, A_K(\varepsilon) = (a_{jk}(\varepsilon))_{(j,k) \in K \times K}. \qquad (2)$$

При условии (2) появляется возможность следить за бифуркацией как n -мерных торов, так и торов меньшей размерности. Кроме того, можно изучать сосуществование инвариантных торов разной размерности.

Задача бифуркации n-мерных торов из особой точки, являющаяся обобщением бифуркации Пуанкаре-Андронова-Хопфа, рассматривалась в ряде работ (Серебрякова Н.Н., Гаврилов Н.К., Хорозов Е.И., Гукенхеймер Дж., Жолондек Х., Самойленко А.М., Полеся И.В., Кубышкин Е.В. - при $n = 2$. Бибиков Ю.Н., Николенко Н.В. - при произвольном n.)

В двумерном случае автором были рассмотрены все возможные типы вещественных бифуркационных диаграмм (ранее были рассмотрены отдельные случаи). Были установлены условия устойчивости бифурцирующих торов, вычислены индексы неустойчивости, а также поставлена и полностью решена задача сосуществования торов. Доказано следующее **утверждение**: если динамическая система при $n = 2$ имеет при некотором значении параметра инвариантные торы разных размерностей, то индексы этих торов различны. В частности, отсюда вытекает невозможность сосуществования устойчивых одномерных и устойчивых двумерных торов.

В трехмерном случае полностью исследованы одномерные и двумерные торы (включая вычисление индексов неустойчивости).Трехмерные торы и сосуществование исследованы пока частично. Доказана, например, невозможность сосуществования устойчивых одномерных и устойчивых двумерных торов, а также невозможность сосуществования устойчивых двумерных и устойчивых трехмерных торов.

Гипотеза. Если при некотором значении параметра сосуществуют устойчивые инвариантные торы разной размерности, то носители этих торов не пересекаются (носитель - совокупность номеров ненулевых координат).

Литература

[1] Любасова Г.Ю. О бифуркации инвариантных торов в трехмерном случае. Топологические методы нелинейного анализа. - Воронеж: Изд-во ВГУ. 2000.-С.97-106.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ

А.С. Максаев (Москва)

macsaev@mail.ru

Доклад посвящен исследованию математической модели процесса конкуренции двух хозяйствующих субъектов, потребляющих общий ресурс (труд, инвестиции и т.п.). Модель описывается следующей системой функционально-дифференциальных уравнений с запаздываниями

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_1(t-\tau_1)\,[a_1\,y(t) - b_1 - \nu_{11}\,x_1(t) - \nu_{12}\,x_2(t-\tau_2)], \\ dx_2/dt = x_2(t-\tau_2)\,[a_2\,y(t) - b_2 - \nu_{22}\,x_2(t) - \nu_{21}\,x_1(t-\tau_1)], \\ dy/dt = q - [a_1\,x_1(t-\tau_1) + a_2\,x_2(t-\tau_2) + d]\,y(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} x_1(t) = {} & \phi_1(t), \quad t \in [-\tau_1, 0], \\ x_2(t) = {} & \phi_2(t), \quad t \in [-\tau_2, 0], \\ y(0) = {} & y_0. \end{aligned} \tag{1.1'}$$

В качестве искомых параметров выступают объемы производственных фондов хозяйствующих субъектов и объем обобщенного ресурса. В основание модели были положены известные в эволюционной биологии уравнения Лотка-Вольтерра.

Определяются и исследуются на устойчивость все стационарные режимы системы (1.1)-(1.1′), изучаются свойства ее неотрицательных решений. В конце доклада дается экономическая интерпретации полученных результатов.

БИОРТОГОНАЛЬНОСТЬ МАСШТАБИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Максименко И. Е. (Санкт-Петербург)

irene@ir4558.spb.edu

Пусть M - целочисленная матрица $d \times d$, такая что все её собственные числа по модулю больше 1, $m := |detM|$ и пусть $c : Z^d \to C$, $\phi : R^d \to C$, тогда уравнение $\phi(x) = \sum\limits_{q \in Z^d} mc(q)\phi(Mx - q)$, $x \in R^d$ назовем масштабирующим, и будем говорить, что функция ϕ является (M, c) - масштабирующей.

Маскам $c, \tilde{c}$ соответственно можно сопоставить 2π - периодические по каждой переменной функции, которые тоже часто называют масками $m_0(x) := \sum\limits_{k \in Z^d} c(k)e^{-i(k,x)}$, $\tilde{m_0}(x) := \sum\limits_{k \in Z^d} \tilde{c}(k)e^{-i(k,x)}$, $x \in R^d$. Положим $H = Z^d \cap M^*[0,1)^d$ (здесь M^* - сопряженная к M матрица).

Лемма 1. *Если целые сдвиги ϕ, $\tilde{\phi}$ биортогональны и финитны, то*

$$\sum_{s \in H} m_0(u + 2\pi(M^{-1})^* s)\overline{\tilde{m_0}(u + 2\pi(M^{-1})^* s)} = 1, \quad \text{для п.в. } u \in R^d. \tag{1}$$

Равенство (1) равносильно равенству (2):

$$m \sum_{q \in Z^d} c(q)\overline{\tilde{c}(q - Mp)} = \delta(p), \quad p \in Z^d,$$

где $\delta(0) = 1$ и $\delta(p)$ равно нулю при $p \neq 0$.

Лемма 2. *Пусть A — невырожденная, целочисленная матрица $d \times d$. Положим $h_A = A^{-1}(Z^d) \cap [0,1)^d$. Тогда для любой 1 - периодичной по каждой переменной функции $f \in L_1([0,1)^d)$*

$$\int\limits_{[0,1)^d} f = \sum_{r \in h_A} \int\limits_{A^{-1}[0,1)^d + r} f \qquad (3)$$

Теорема. *Пусть $\phi, \tilde{\phi}$ — соответственно (M, c), $(M, \tilde{c})$ - масштабирующие функции с компактным носителем, их маски m_0, $\tilde{m}_0$ удовлетворяют условию (1), $m_0(0) = \tilde{m}_0(0) = 1$. Для того чтобы целые сдвиги ϕ, $\tilde{\phi}$ были биортогональны необходимо и достаточно, чтобы существовал компакт K, конгруэнтный $[-\pi, \pi]^d$ по модулю 2π, содержащий окрестность 0, такой что*

$$\inf_{k \in N} \inf_{u \in K} |m_0((M^{-k})^* u)| > 0, \qquad \inf_{k \in N} \inf_{u \in K} |\tilde{m}_0((M^{-k})^* u)| > 0. \qquad (4)$$

Замечание. Множество K — компактно и, следовательно, ограничено. Из непрерывности m_0 и $\tilde{m}_0$ (они являются тригонометрическими полиномами) и того, что $m_0(0) = \tilde{m}_0(0) = 1$, получаем, что $|m_0((M^{-k})^* u)\tilde{m}_0((M^{-k})^* u)| > 1/2$ начиная с некоторого k_0. Таким образом выполнение соотношений (4) сводится к требованию, что $2k_0$ функций $m_0((M^{-1})^* u)$, $\tilde{m}_0((M^{-1})^* u), \ldots,$ $m_0((M^{-k_0})^* u)$, $\tilde{m}_0((M^{-k_0})^* u)$ не имеют нулей на K.

Литература

1. Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets* // CBMS-NSR Series in Appl. Math., SIAM, 1992.

2. Cohen A., Daubechies I. and Feauveau J.- C. *Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets.* // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1992. Vol. XLV. P. 485-560.

3. Wojtaszczyk P. *A Mathematical Introdaction to Wavelets.* // London Mathematical Society.

ТОЧНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ВО ВЛОЖЕНИЯХ КЛАССОВ ГЕРИНГА И МАКЕНХАУПТА

Малаксиано Н. А. (Одесса)

malax@ukr.net

Будем рассматривать функции неотрицательные на интервале I_0.

Определение 1. Функция f принадлежит классу Макенхаупта $A_q(B)$ на I_0, если для любого интервала $I \subset I_0$ имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I f(x)dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I f^{-\frac{1}{q-1}}(x)dx\right)^{q-1} \leq B.$$

Определение 2. Функция f принадлежит классу Геринга $G_p(C)$ на I_0, если для любого интервала $I \subset I_0$ функция f удовлетворяет "обратному неравенству Гёльдера" (условию Геринга):

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\frac{1}{|I|}\int_I f(x)dx\right).$$

Классы Геринга и Макенхаупта играют важную роль в теории весовых пространств и в других вопросах. Имеется ряд работ, в которых исследуется связь между этими классами. В одномерном случае известны точные границы показателей, при которых один класс Геринга содержится в другом классе Геринга. Аналогичный вопрос решен и для классов Макенхаупта.

Известно также, что каждый класс Геринга вложен в некоторый класс Макенхаупта и наоборот. Целью нашей работы является нахождение точных границ показателей, при которых имеют место эти вложения. Результат представлен в следующих двух теоремах.

Теорема 1. *Пусть $p > 1$ и $C > 1$, а число $q_0 > 1$ – корень уравнения*

$$q_0 \cdot \left(\frac{1}{1+p(q_0-1)}\right)^{\frac{1}{p}} = C.$$

Тогда для любого $q \in (q_0, +\infty)$ существует $B = B(p, C, q) < \infty$ такое, что имеет место включение $G_p(C) \subset A_q(B)$, причем для $q \leq q_0$ это включение неверно при любом B.

Теорема 2. *Пусть $q > 1$ и $B > 1$, а число $p_0 > 1$ – корень уравнения*

$$\left(\frac{p_0}{p_0 - 1}\right)\left(\frac{p_0(q-1)}{p_0(q-1)+1}\right)^{q-1} = B.$$

Тогда для любого $p \in (1, p_0)$ существует $C = C(q, B, p) < \infty$ такое, что имеет место включение $A_q(B) \subset G_p(C)$, причем для $p \geq p_0$ это включение неверно при любом C.

ЛИПШИЦЕВЫ СЕЛЕКЦИИ ОПЕРАТОРА МЕТРИЧЕСКОГО ε-ПРОЕКТИРОВАНИЯ НА ОБОБЩЕННЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

Маринов А.В. (Екатеринбург) [1]
marinov@imm.uran.ru

Пусть T – связный компакт, $C(T)$ – пространство непрерывных вещественных функций с равномерной нормой, M, N – подпространства из $C(T)$, причем существует $q \in N$ такой, что $q(t) \neq 0$ $\forall t \in T$. Положим $R = \{p/q : p \in M, q \in N, q > 0\}$, $E(f) = \inf_{x \in R} \|f - x\|$, $P(f, \varepsilon) = \{x \in R : \|f - x\| \leq E(f) + \varepsilon\}$ – метрическая ε-проекция на множество R. С.В. Конягин [1] для любого $\varepsilon > 0$ доказал существование на $C(T)$ непрерывной селекции $s(f) \in P(f, \varepsilon)$. Следующий результат показывает, что в предположении конечномерности M и N для отображения $P(f, \varepsilon)$, определенного на $C(T) \times \mathbf{R}_+$, где $\mathbf{R}_+ = (0, +\infty)$, существует локально липшицева селекция $s(f, \varepsilon) \in P(f, \varepsilon)$. Обозначим

$\|(p, q)\| = \max(\|p\|, \|q\|)$;
$\bar{q} = \min_{t \in T} q(t)$;
$\chi = \sup\{\bar{q} : p/q \in P(f, \varepsilon), \|(p, q)\| = 1/2\}$;
$d = \chi \min(1, \varepsilon\chi)/4$;
$\xi = \min_{t \in T} \max\{|p(t)| : p \in M, \|p\| \leq 1\}$;
$\zeta = \min_{t \in T} \max\{|q(t)| : q \in N, \|q\| \leq 1\}$;
$\eta = \min_{t \in T} \sup\{q(t) : p/q \in P(f, \varepsilon/2), \|(p, q)\| = 1\}$;

---

[1]Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00460) и программы "Ведущие научные школы" (проект 00-15-96035).

$\sigma = \max(\xi, \varepsilon\eta/2)$.

Теорема. *На множестве $C(T) \times \mathbf{R}_+$ существует такая селекция $s(f,\varepsilon) \in P(f,\varepsilon)$, что если зафиксировать пару $(f,\varepsilon) \in C(T)\times\mathbf{R}_+$ и определить для неё величины χ, d, η, σ, то для любых двух пар $(f_i, \varepsilon_i) \in C(T) \times \mathbf{R}_+$, $i = 1,2$, таких, что $|\varepsilon - \varepsilon_i| + 2\|f - f_i\| \le \sigma d/12$, и дробей $p_i/q_i = s(f_i, \varepsilon_i)$ выполняются неравенства* $(n = \dim M + \dim N)$:

$$\bar{q}_i \ge c_1(n)\zeta d^{n+1}, \qquad i = 1,2,$$

$$\left\|\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right\| \le \frac{c_2(n)}{\sigma\zeta^2\chi^4\varepsilon^{2n+4}}(|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + \|f_1 - f_2\|).$$

Литература

[1] Конягин С.В. О непрерывных операторах обобщенного рационального приближения// Мат. заметки. 1988. Т.44, №3. С. 404.

О ВЛОЖЕНИИ КЛАССОВ H^ω В КЛАССЫ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ВАРИАЦИИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Медведев А.В. (Москва)[1]

Определение классов $\Lambda BV([0,1]^2)$ дано в работе [1]. Модули непрерывности $\omega(t,\tau)$ и $\omega(f,t,\tau)$ определены в [2, стр. 123-124]. Через $H^\omega([0,1]^2)$ будем обозначать совокупность функций f на $[0,1]^2$, для каждой из которых найдется $c > 0$ такое, что $\omega(f,t,\tau) \le c\omega(t,\tau)$ при $(t,\tau) \in [0,1]^2$. Нами получены результаты:

Теорема 1. *Для вложения $H^\omega([0,1]^2) \subset \Lambda BV([0,1]^2)$ необходимо и достаточно, чтобы для всяких последовательностей $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ таких, что $t_k \ge 0$, $\tau_n \ge 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \le 1$,*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00062) и научной школы (проект 00-15-96143).

$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \le 1$ *выполнялось* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_k, 0)}{\lambda_k} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(0, \tau_n)}{\lambda_n} < \infty$, $\sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{\min\{\omega(t_k, 0), \omega(0, \tau_n)\}}{\lambda_k \lambda_n} < \infty$.

Следствие. *Пусть* $\omega(t, \tau) \neq 0$ *при* $(t, \tau) \neq (0, 0)$. *Тогда для вложения* $H^\omega([0,1]^2) \subset \Lambda BV([0,1]^2)$ *необходимо и достаточно, чтобы для всяких последовательностей* $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ *таких, что* $t_k \ge 0$, $\tau_n \ge 0$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \le 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \le 1$ *выполнялось* $\sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{\min\{\omega(t_k, 0), \omega(0, \tau_n)\}}{\lambda_k \lambda_n} < \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $\omega(t, \tau) = \omega(\tau, t)$, *при* $(t, \tau) \in [0,1]^2$. *Тогда для вложения* $H^\omega([0,1]^2) \subset \Lambda BV([0,1]^2)$ *необходимо и достаточно, чтобы для всякой невозрастающей последовательности* $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k \ge 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \le 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(t_k, 0)}{\lambda_k} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i}$ *сходился.*

Литература

[1] Саблин А.И. *Λ-вариация и ряды Фурье* // Изв. вузов, сер. матем., 1987, №10, 66-68.

[2] Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.*—М.—ГИФМЛ., 1960.

О КЛАССАХ H^ω И ΛBV

Медведева М.В. (Москва)[1]

В работе [1] исследуются классы H^ω и ΛBV. Ниже предполагается вогнутость $\omega(t)$. Обозначим через $\ln_k(x)$ k-кратный логарифм и через $\exp_k(x)$ обозначим k-кратную экспоненту.

Теорема 1. *1) Если* $\frac{t\omega'_+(t)}{\omega(t)} = \frac{1}{p} + O(\frac{1}{\ln t})$ *при* $t \to 0$, $1 < p < \infty$, *то для вложения* $H^\omega \subset \Lambda BV$ *необходимо и достаточно, чтобы*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-00062) и научной школы (проект 00-15-96143).

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(\omega(\frac{1}{\lambda_k}))^q < \infty$, *где* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *2) Если* $O(\frac{1}{\ln t})$ *заменить на* $O(\frac{(\ln_m |\ln t|)^\sigma}{\ln t})$, $m \in N$, $\sigma > 0$, *то указанное условие вложения* $H^\omega \subset \Lambda BV$ *теряет силу в части необходимости и достаточности.*

Теорема 2. *1) Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\omega(\frac{1}{\lambda_k}) < \infty$, *то* $H^\omega \subset \Lambda BV$. *2) Если* $\frac{t\omega'_+(t)}{\omega(t)} = O(\frac{1}{\sqrt{|\ln t|}})$ *при* $t \to 0$ *и существует* $a > 0$ *такое, что в окрестности нуля* $\frac{t\omega'_+(t)}{\omega(t)} \geq e^{-a\sqrt{|\ln t|}}$, *то для* $H^\omega \subset \Lambda BV$ *необходимо, чтобы* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\omega(\frac{1}{\lambda_k}) < \infty$. *3) Если* $O(\frac{1}{\sqrt{|\ln t|}})$ *заменить на* $O(\frac{(\ln_m |\ln t|)^\sigma}{\sqrt{|\ln t|}})$, $m \in N$, $\sigma > 0$, *то из* $H^\omega \subset \Lambda BV$ *не следует* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\omega(\frac{1}{\lambda_k}) < \infty$.

Теорема 3. *1) Пусть для* $\omega(t) = tu(x)$, *где* $x = \ln_{m-1}|\ln t|$ *при малых* t, $m \geq 1$, *выполняется* $\frac{xu'_-(x)}{u(x)} = \beta + O(\frac{1}{\ln x})$ *при* $x \to \infty$, $\beta > 0$, $\beta \neq 1$. *Тогда для* $H^\omega \subset \Lambda BV$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} [\exp_m \frac{c\lambda_k^{\frac{1+\beta}{\beta}}}{(u(\lambda_k))^{\frac{1}{\beta}}}]^{-1} < \infty$ *при некотором* $c > 0$. *2) При замене* $O(\frac{1}{\ln x})$ *на* $O(\frac{(\ln_r x)^\sigma}{\ln x})$, $r \geq 2$, $\sigma > 0$ *указанное условие вложения* $H^\omega \subset \Lambda BV$ *теряет силу в части необходимости и достаточности.*

Теорема 4. *1) Пусть для* $\omega(t) = tu(x)$, *где* $x = \ln_{m-1}|\ln t|$ *при малых* t, $m \geq 1$, *выполняется* $\frac{xu'_-(x)}{u(x)} = 1 + O(\frac{1}{\sqrt{\ln x}})$ *при* $x \to \infty$. *Тогда для* $H^\omega \subset \Lambda BV$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} [\exp_m \frac{c\lambda_k^2}{u(\lambda_k)}]^{-1} < \infty$ *при некотором* $c > 0$. *2) Если* $O(\frac{1}{\sqrt{\ln x}})$ *заменить на* $O(\frac{(\ln_r x)^\sigma}{\sqrt{\ln x}})$, $r \geq 2$, $\sigma > 0$, *то указанное условие вложения* $H^\omega \subset \Lambda BV$ *не будет необходимым. 3) Если* $\frac{xu'_-(x)}{u(x)} - 1 = o(1)$ *при* $x \to \infty$ *и эта разность не меняет знака при больших* x, *то указанное условие вложения* $H^\omega \subset \Lambda BV$ *является достаточным.*

Литература

[1] Медведева М.В. *О вложении классов* H^ω // Матем. заметки. 1998. Т.64,№5,713-719.

К ВОПРОСУ О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРОВ ГРИНА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мельчуков С. А. (Ижевск)
sam@ulm.uni.udm.ru

Пусть $L_p^{\mu}(p>1)$ — банахово пространство суммируемых на $[a,b]$ со степенью p вектор-функций $x : [a,b] \to C^{\mu}$, AC^{m-2} — обычное банахово пространство вектор-функций с абсолютно непрерывной $(m-2)$-й производной.

На основе теоремы 4.1 [1] и замечания к ней , а также схемы работы [2] получена

Теорема. *Пусть $T_1 : L_p^{\mu} \to L_p^{\mu}$ — ограниченный линейный оператор с $\|T_1\| < (cosec\frac{\pi}{2m}+2)^{-1}$, $T_2 : L_p^{\mu} \to L_p^{\mu}$ — линейный вполне непрерывный оператор, $T_3 : AC^{m-2} \to L_p^{\mu}$ — линейный ограниченный оператор. Если периодическая краевая задача*

$$(-1)^{m/2}x^{(m)} + T_1x^{(m)} + T_2x^{(m)} + T_3x = f,$$

$$x^{(j)}(a) = x^{(j)}(b), \quad j = \overline{0, m-1}$$

при $f=0$ имеет только тривиальное решение, то оператор Грина G этой задачи существует и имеет полную в L_p^{μ} систему корневых векторов. Кроме того, существует $\nu = \max_{\lambda\in C} dim\, ker(G-\lambda I)$ элементов $f_1,\dots,f_{\nu}$ из L_p^{μ} таких, что линейная оболочка семейства $\{G^k f_j : j=\overline{1,\nu},\ k=0,1,\dots$ плотна в $L_p^{\mu}\}$. Число ν уменьшить нельзя, не нарушая свойства полноты этой линейной оболочки.

Аналогичные теоремы получены для других классов краевых условий.

Литература

[1] А. С. Маркус. Некоторые признаки полноты системы корневых векторов линейного оператора в банаховом пространстве. // Матем. сборник. - 1966 т.70(112), 4, -с. 526-560.

[2] Г.Г Исламов. О некоторых приложениях теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения. II // Дифференц. уравнения. - 1990. - т. 26, 2. -с. 224-232.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ЭКСТРЕМУМА ВНУТРЕННЕГО РАДИУСА ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Микка В.П., Микка К.В., Осокина Е.А.
(Йошкар–Ола)
kokurin@marsu.ru

В работе [1] Л. А. Аксентьев установил, что вопрос о числе решений внешней обратной краевой задачи в постановке Ф. Д. Гахова сводится к установлению числа критических точек внутреннего радиуса $f(E)$. Последнее равносильно определению числа корней уравнения

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2} \tag{1}$$

в единичном круге E. Рассматривается следующая задача: пусть производная регулярной в E функции

$$w = f(\zeta) = \zeta + a_3\zeta^3 + \cdots \tag{2}$$

удовлетворяет условию

$$\ln f'(\zeta) \prec \frac{2b}{\pi}\ln\left[-ie^{-\frac{\mu\pi}{2b}}(w+\sqrt{w^2-1})\right], w(\zeta) = i\operatorname{sh}\frac{\mu\pi}{2b}\frac{1+\beta\zeta}{1-\alpha\zeta} \tag{3}$$

и $(\alpha,\beta) \in [-1,1]\times[-1,1]$, $\alpha \neq -\beta$.

Требуется определить ограничения на параметры, обеспечивающие единственность решения $\zeta = 0$ уравнения (1).

Теорема. *Если функция (2) удовлетворяет подчинению (3) и*

$$M(\alpha,\beta,\mu,b) = \frac{2b}{\pi}|\alpha+\beta|\operatorname{th}\frac{\mu\pi}{2b} < 1, \quad |\alpha| < \frac{1}{2}, |\beta| < \frac{1}{2}, \tag{5}$$

то внутренний радиус области $f(E)$ имеет единственную точку экстремума $\zeta = 0$. При этом выполнение строгого неравенства для $M(\alpha,\beta,\mu,b)$ существенно.

Отметим, что при $b = \pi/2$, $\mu \to \infty$ данная задача исследовалась в [2].

Литература

1. Аксентьев Л.А. Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области //Изв. вузов. Математика - 1984.- N2. - С. 3-11.

2. Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Попов Н.И. О теоремах единственности для внешней обратной краевой задачи в подклассах однолистных областей //Изв. вузов. Математика - 1998.- N8. - С. 3-13.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Минюк С.А. (Гродно, Беларусь)

zhuk@grsu.unibel.by

Рассмотрим стационарную систему с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + bu(t),\ t \in T = [0, t_1], \tag{1}$$

при начальном условии

$$x(0) \equiv 0,\ -h < \Theta \leq 0, \tag{2}$$

где x — n-вектор фазовых координат, u - скалярное управление, U - множество кусочно-непрерывных на T функций (допустимых управлений); A, A_1, b — постоянные матрицы соответствующих размерностей, $t_1 > nh$. Пусть $D^n[a,b]$ - пространство абсолютно непрерывных функций $x(\cdot) : [a,b] \to R^n$, где $\|x(\cdot)\| =| x(a) | + \int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt$, причем $| \cdot |$ — норма в пространстве R^n.

Решение системы (1) — это такой элемент $x(\cdot) \in D^n[0, t_1,]$ для которого равенство (1) выполняется при почти всех $t \in T$.

Пусть M_0— множество достижимости системы (1), (2) в пространстве $D^n[t_1 - h, t_1]$, т.е. $M_0 = \{g(\cdot) \in D^n[t_1 - h, t_1] : \exists u(\cdot) \in U |$ $x(\tau) = g(\tau),\ \tau \in [t_1 - h, t_1.]$

Определение 1. Систему (1) назовем управляемой в функциональном пространстве $D^n[t_1 - h, t_1]$, если $\overline{M}_0 = D^n[t_1 - h. t_1]$ [1, с. 64].

Пусть

$$B_1^*(\lambda) = \lambda^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} B_{k0}\lambda^{n-k-1},$$

$$B_{i+1}^*(\lambda) = \sum_{k=i}^{n-1} B_{ki}\lambda^{n-k-1}, i = \overline{1, n-1},$$

где постоянные $-n \times n-$матрицы $B_{ki}, k = \overline{1, n-1}, i = \overline{0, k}$ определены в [1, с. 63].

Построим $-n \times n-$-матрицу

$$K^*(\lambda) = [B_1^*(\lambda)b, B_2^*(\lambda)b, \cdots, B_n^*(\lambda)b],$$

где $B_i^*(\lambda)b$ ее i-тый столбец.

Теорема 1. Пусть C– поле комплексных чисел. Для управляемости системы (1) в пространстве $D^n[t_1 - h, t_1]$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий: 1)$\text{rank}[\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}, b]$ $\forall \lambda \in C$ и $\text{rank}[A_1, b] = n$ или 2) $\text{rank} K^*(\lambda) = n$ при некотором $\lambda \in C$ и $\text{rank}[\lambda_i E_n - A - A_1 e^{-\lambda_i h}, b] = n$ при $\lambda_i \in C$, являющихся корнями уравнения $|K^*(\lambda)| = 0$.

Здесь E_n —единичная $-n \times n-$ матрица.

Литература.

1. Минюк С.А. Об одной задаче оптимального управления для стационарных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, N 1. С. 62-70.

ОЦЕНКИ МИНИМАЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Мурышкина О.В. (Москва)[1]

olgam@kiam.ru

Рассматривается задача

$$y''(x) + \lambda p(x) y(x) = 0, \qquad x \in (0,1) \tag{1}$$

$$\begin{cases} y'(0) - k^2\, y(0) = 0 \\ y'(1) + k^2\, y(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

где $p(x)$ - положительная непрерывная функция на $[0,1]$, удовлетворяющая условию:

$$\int\limits_0^1 p^{\alpha}(x)\,dx = 1, \qquad \alpha \neq 0 \tag{3}$$

Устанавливается зависимость минимального собственного значения λ_1 задачи (1)-(2)-(3) от потенциала $p(x)$ при различных α.

Доказано, что первое собственное значение λ_1 может быть найдено следующим образом:

$$\lambda_1 = \inf_{y(x)\in M} \frac{\int\limits_0^1 y'^2\,dx + k^2\,y^2(0) + k^2\,y^2(1)}{\int\limits_0^1 p(x)\,y^2\,dx},$$

где M - множество непрерывных дифференцируемых функций на $[0,1]$.

Оцениваются значения

$$m_\alpha = \inf_{p\in A_\alpha} \lambda_1, \qquad M_\alpha = \sup_{p\in A_\alpha} \lambda_1,$$

[1]Работа выполнена в рамках научной программы 015 Министерства образования РФ "Фундаментальные исследования высшей школы в области естественных и гуманитарных наук. Университеты России", код проекта /НИР 015.04.01.22.

где A_α - множество положительных непрерывных функций, удовлетворяющих условию (3).

В частности доказана следующая теорема:

Теорема 1.

Если $\alpha > 1$, тогда $0 < m_\alpha < \infty$, $M_\alpha = \infty$

Если $\alpha = 1$, тогда $m_1 = \frac{4k^2}{2+k^2}$, $M_1 = 2k^2$.

Если $\alpha < 1$, тогда $m_\alpha = 0$, $0 < M_\alpha < \infty$.

Литература.

1. Yu. Egorov, V. Kondratiev. On Spectral Theory of Elliptic Operators. Operator Theory Advances and Applications, v. 89, Birkhauser, 1996, p. 1-325.

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ТИПА БЕСОВА И ЛИЗОРКИНА-ТРИБЕЛЯ

Наджафов А.М. (Баку, Азербайджан)

e-mail: guliev@azdata.net

В работе построены пространства типа Бесова $B^l_{p,\theta}(Q,G)$, $p \in [1,\infty]^n$, $\theta \in [1,\infty]$ и типа Лизоркина-Трибеля $\mathcal{L}^l_{p,\theta}(Q,G)$, $p \in (1,\infty)^n$, $\theta \in (1,\infty)$, получены интегральные представления и изучены с точки зрения теории вложения некоторые свойства функций из построенных пространств. Здесь G-область, удовлетворяющая условию гибкого λ-рога введенным О.В.Бесовым, $e_n = \{1,2,\dots,n\}$, $e_n^0 = e_n \cup \{0\}$; $\emptyset \neq e \subset Q \subset e_n$; $l,h \in (0,\infty)^n$; $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_j = 1$ при $j \in Q$; $0 < \lambda_j < \infty$ при $j \in e_n \backslash Q$ и пусть при $i,j \in e_n \backslash Q$, $h_i = h_j$, h_0–фиксированный положительный вектор. Пусть $m = (m_1,\dots,m_n)$, m_j- натуральные, $k = (k_1,\dots,k_n)$, k_j- целые неотрицательные числа, $m_0 = l_0 = k_0 = 0$.

$$\|f\|_{B^l_{p,\theta}(Q,G)} = \sum_{e\subset Q} \sum_{i\in e_n^0\backslash Q} \left\{ \int_0^{h_0} \left[\frac{\left\|\Delta^{m_i^e}(h;G_h)D^{k_i^e}f\right\|_{p,G}}{\prod\limits_{j\in e\vee i} h_j^{l_j-k_j}} \right]^\theta \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{j\in e\vee i} \frac{dh_j}{h_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

$m_j > l_j - k_j > 0, j = 1, \ldots, n$

$$\|f\|_{\mathcal{L}^l_{p,\theta}(Q,G)} =$$

$$= \sum_{e \subset Q} \sum_{i \in e_n^0 \setminus Q} \left\| \left\{ \int_0^1 \left[\prod_{j \in e \vee i} h_j^{(k_j - l_j)\lambda_j} \delta^{m_i^e - k_i^e}(t^\lambda) D^{k_i^e} f(\cdot) \right]^\theta \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \prod_{j \in e \vee i} \frac{dh_j}{h_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \right\|_p,$$

$m_j > l_j > k_j \geq 0, j = 1, \ldots, n.$

Здесь $m_i^e = m^e$ при $j \in e$, $m_i^e = m_i$ при $j = i \in e_n \setminus Q$; $j \in e \vee i$– означает, что j принадлежит либо e, либо $j = i$.

$$\delta^{m_i^e}(t^\lambda) f(x) = \int_{-1}^1 |\Delta^{m_i^e}(t^{\lambda_i^e} u, G_{t^\lambda}) f(x) du^{e \vee i}$$

Отметим, что при $Q \equiv \emptyset$, $B^l_{p,\theta}(Q, G)$ совпадают пространством Бесова $B^l_{p,\theta}(G)$, $\mathcal{L}^l_{p,\theta}(Q, G)$ пространством Лизоркина-Трибеля $L^l_{p,\theta}(G)$, а при $Q \equiv e_n$ $B^l_{p,\theta}(Q, G)$ совпадают доминирующим пространством Бесова $S^l_{p,\theta}B(G)$ и $\mathcal{L}^l_{p,\theta}(Q, G)$ доминирующим пространством Лизоркина-Трибеля $S^l_{p,\theta}L(G)$.

Доказаны теоремы вложения типа $(\theta < \theta_1)$:

1) $D^\alpha : B^l_{p,\theta}(Q, G) \subset\!\!\succ L_q(G)$; $D^\alpha : \mathcal{L}^l_{p,\theta}(Q, G) \subset\!\!\succ L_q(G)$

2) $D^\alpha : B^l_{p,\theta}(Q, G) \subset\!\!\succ B^{l^1}_{q,\theta_1}(Q, G)$; $D^\alpha : \mathcal{L}^l_{p,\theta}(Q, G) \subset\!\!\succ \mathcal{L}^{l^1}_{q,\theta_1}(Q, G)$; $D^\alpha : \mathcal{L}^l_{p,\theta}(Q, G) \subset\!\!\succ B^{l^1}_{q,\theta_1}(Q, G)$.

Выражаю признательность проф.А.Д. Джабраилову и проф. В.С. Гулиеву за обсуждение работы.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ K-ФУНКЦИОНАЛА И ОБОБЩЕННОГО НЕСИММЕТРИЧНОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ ПОРЯДКА r

Напеденина А.Ю. (Москва)[1]

Будем рассматривать несимметричный оператор обобщенного сдвига, введенный М. К. Потаповым.

$T_y(f,x) = \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{1} f(R)\psi(x,y,z)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, $\tilde{T}_t(f,x) = T_{\cos t}(f,x)$,

где $\psi(x,y,z) = \frac{\cos(\varphi+\mu-2\varphi_1)(1-R)\sqrt{1-R^2}}{(1+y)^2(1-x)\sqrt{1-x^2}}$, $x=\cos\theta$, $y=\cos t$,

$R = xy + z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$, $\cos\varphi_1 = z$, $\sin\varphi_1 = \sqrt{1-z^2}$,

$\cos\varphi = \frac{-x\sqrt{1-y^2}+yz\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-R^2}}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-R^2}}$,

$\cos\mu = \frac{z(1-xy)-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{1-R}$, $\sin\mu = \frac{\sqrt{1-z^2}(y-x)}{1-R}$,

Кроме того рассмотрим оператор D_x^r и определяемый с помощью оператора $\tilde{T}$ обобщенный модуль гладкости $\tilde{\omega}_r$ порядка $r \in N$.

$$D_x = (1-x)^{-3}(1+x)^{-1}\frac{d}{dx}(1-x)^4(1+x)^2\frac{d}{dx};\, D_x^r = D_x D_x^{r-1}.$$

$$\tilde{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|t_i|\le\delta, i=1,\dots,r} \|\Delta^r_{t_1\dots t_r}(f,x)\|_{p,\alpha,\beta},$$

где $\Delta_t^1(f,x) = \tilde{T}_t(f,x) - f(x)$, $\Delta^r_{t_1\dots t_r}(f,x) = \Delta^1_{t_r}(\Delta^{r-1}_{t_1\dots t_{r-1}}(f,x).x)$, норма $\|g(x)\|_{p,\alpha,\beta}$ — есть норма в $L_{p,\alpha,\beta}$, понимаемая как норма в $L_p[-1,1]$ функции $g(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ (если $p=\infty$, то $L_\infty[-1,1] \equiv C[-1,1]$).

Определим $LD^r(p,\alpha,\beta)$ как класс функций, удовлетворяющих следующим условиям

1. $f \in L_{p,\alpha,\beta}$; $D_x^l f \in L_{p,\alpha,\beta}$ $(l=1,\dots,r)$.
2. Для всех $y_i \in (-1,1)$ $(i=1,\dots,l)$ и почти всех $x \in (-1,1)$ справедливы равенства:

$$T^l_{y_1,\dots,y_l}(D_x^s f, x) = D_x^s T^l_{y_1,\dots,y_l}(f,x)(s=1,\dots,r)$$

---

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 00-01-00042) и программы поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96143).

$$T_y(f,x) - f(x) = \int_1^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5} \int_1^v (1+u)^4 T_u(D_x f, x)\, du dv$$

$$T_y(f,x) - T_0(f.x) = -\int_1^y (1-v)^{-1}(1+v)^{-5} \int_v^{-1} (1+u)^4 T_u(D_x f, x)\, du dv$$

Назовем K-функционалом Петре для $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ величину

$$K_r(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{g \in LD^r(p,\alpha,\beta)} (\|f-g\|_{p,\alpha,\beta} + \delta^{2r}\|D_x^r g\|_{p,\alpha,\beta})$$

Теорема. *Пусть даны числа p, α и r такие, что $1 \le p \le \infty$, $r \in N$, $1/2 - 1/(2p) < \alpha < 1 - 1/(2p)$ при $1 \le p < \infty$, $1/2 \le \alpha < 1$ при $p = \infty$. Пусть $f \in L_{p,\alpha+1,\alpha}$. Тогда для любого $\delta \in (0,\pi)$ справедливы неравенства:*

$$C_1 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)^{4r(r-1)} K_r(f,\delta)_{p,\alpha+1,\alpha} \le \tilde{\omega}_r(f,\delta)_{p,\alpha+1,\alpha} \le$$

$$\le \frac{C_2}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{4r}} K_r(f,\delta)_{p,\alpha+1,\alpha},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и δ.

ОБРАТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЕ ГАХОВА

Насыров С.Р. (Казань)[1]

E-mail: snasyrov@ksu.ru

Описываются постановки обратных и смешанных обратных краевых задач по различным параметрам. Особое внимание уделяется внешним обратным краевым задачам, т.е. задачам, в которых искомая область содержит бесконечно удаленную точку. Основным этапом их решения является нахождение в канонической области (круге или полуплоскости) мероморфной функции

[1]Поддержано грантами РФФИ No 99–01–00365 и 99-01-00366.

f, отображающая ее на искомую область. При этом необходимым условием разрешимости задачи является условие равенства нулю вычета производной этой функции в точке z_0, которая является полюсом. Это равенство называется уравнением Гахова.

В случае обратной краевой задачи по параметру s Ф.Д.Гахов доказал разрешимость этого уравнения относительно z_0. Далее различными авторами исследовались вопросы единственности решения этого уравнения, структура множества корней, а также различные обобщенные задачи. В частности, доказана разрешимость уравнения Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x, описана структура решений этого уравнения.

Описываются основные достижения в исследовании внешних обратных краевых задач, в частности, в изучении уравнения Гахова в односвязных и многосвязных областях, и их приложения в механике и физике. Ставятся нерешенные задачи.

О ПОНЯТИИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Нахман А.Д. (Тамбов)
nakhman@apmath.tstu.ru

В рамках небольшого количества часов, отводимых на комплексный анализ в курсе математики технических вузов, целесообразно более тесно увязывать вводимые понятия и факты с другими разделами курса.

– Так, определение комплексного числа в виде $z = x + iy$ носит формальный характер и нуждается хотя бы в каком-то (скажем, геометрическом) истолковании. Интерпретируя число i как конец вектора $\bar{e}_2$, мы чисто мнимое число yi рассматриваем как конец вектора $y \cdot \bar{e}_2$; соответственно, увязываем дейтвительное число x с $x \cdot \bar{e}_1$, где $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ -вектора стандартного ортонормированного базиса на плоскости. Заменяя в записи радиуса-вектора $\bar{r} = x \cdot \bar{e}_1 + y \cdot \bar{e}_2$ произвольной точки плоскости $z(x, y)$ вектора-компоненты на их концы, приходим естественным образом к алгебраческой форме $z = x \cdot 1 + y \cdot i$.

Дальнейшая аналогия с векторами делает затем более понятными определения линейных операций над комплексными числа-ми.

Указанный подход и некоторые другие методические приемы, ориентированные на уровень математической подготовки студентов технических вузов, содержатся в нашем учебном пособии "Элементы теории функций комплексного переменного и операционного ичисления" (издательтво ТГТУ. Тамбов, 2000).

СУММЫ ФУРЬЕ ПО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАМ В МЕТРИКЕ L^p

Нахман А.Д. (Тамбов)

nakhman@apmath.tstu.ru

Пусть $G_N = [-\pi, \pi]^N, N = 1, 2, \dots$ and $L^p(G_N)$ -пространство 2π-периодических по каждой переменной функций $f = f(\mathrm{x})$ со стандартной нормой, $\mathbf{n} \in Z^N, \mathbf{m} \in Z_+^N$ и

$$\tilde{S}_{\mathbf{m}}^W(f) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}_{\mathbf{m}}} c_{\mathbf{k}}(f) \cdot \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\cdot$$

$$\cdot\prod_{r=1}^{W}(-i\cdot\mathrm{sgn}\quad(q_{r\ 1}k_1 + \dots + q_{r\ r-1}k_{r-1} + k_r - n_r))$$

-частичные суммы сопряженного по первым W переменным кратного ряда фурье, порожденного параллелепипедом

$$\mathcal{P}_{\mathbf{m}} = \{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^N : |q_{r1}k_1 + \dots + q_{r\ r-1}k_{r-1} + k_r - n_r| \le m_r, r = 1, \dots, N\},$$

где $q_{\mu\nu}$- элементы треугольной матрицы: $q_{\mu\nu} = 0$, если $\mu < \nu; q_{\mu\mu} = 1$.

Установлены следующие оценки:

$$\sup_{\mathbf{m}} ||\tilde{S}_{\mathbf{m}}^W(f)||_p \le A\ ||f||_p \quad (p > 1),$$

$$\sup_{\mathbf{m}} ||\tilde{S}_{\mathbf{m}}^W(f)||_1 \le A\{1 + \int_{G_N} |f(\mathrm{x})|(\ln^+ |f(\mathrm{x})|)^N d\mathrm{x}\},$$

$$\sup_{\mathbf{m}} ||\tilde{S}_{\mathbf{m}}^W(f)||_p \le A\{1 + \int_{G_N} |f(\mathrm{x})|(\ln^+ |f(\mathrm{x})|)^{N-1} d\mathrm{x}\}\ (0 < p < 1).$$

Постоянные $A > 0$ зависят лишь от N, W и соответствующего p.

Соотношение

$$\lim_{M\to\infty} ||\tilde{S}^W_{\mathbf{m}}(f) - f||_p = 0 \quad (M = \min\{m_1, ..., m_N\})$$

имеет место:

а) при каждом $p > 1$ для любой $f \in L^p(G_N)$;

б) при $p = 1$, если $|f|(\ln^+ |f|)^N \in L(G_N)$;

в) при $0 < p < 1$ для $|f|(\ln^+ |f|)^{N-1} \in L(G_N)$.

Результаты (с соответствующими изменениями в формулировках) переносятся и на случай кратных рядов Фурье по многочленам Чебышева первого и второго рода.

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ ИЗ $\mathbf{C}^n$

Нелаев А.В. (Москва)

На основе одного из установленных автором (см., напр., [1]) интегральных представлений функций, голоморфных в классе Λ ограниченных выпуклых полных круговых областей $D \subset \mathbf{C}^n$ ($n \geq 2$), вводится в рассмотрение соответствующий интеграл типа и исследуются его свойства. Разрабатываемый математический аппарат применяется далее к постановке и решению многомерных краевых задач линейного сопряжения.

Рассмотрим область $D = \{z \in \mathbf{C}^n : \sum_{\mu=1}^{n} |r_{\mu 1} z_1 + \ldots + r_{\mu n} z_n| < 1\}$, где $r_{\mu\nu}$ — произвольные комплексные постоянные с условием $\det ||r_{\mu\nu}|| \neq 0$, и неограниченные области

$$E_k = \{z \in \mathbf{C}^n : |r_{k1} z_1 + \ldots + r_{kn} z_n| -$$

$$- \sum_{j=1\,(j\neq k)}^{n} |r_{j1} z_1 + \ldots + r_{jn} z_n| > 1\},\ k = 1, \ldots, n.$$

Каждая из E_k сопрягается с D по замкнутой плоской кривой

$$B_k = \{z \in \mathbf{C}^n : z = (0, \ldots 0, \tilde{\zeta}_k, 0, \ldots, 0),$$

$$|\tilde{\zeta}_k| \equiv |r_{k1}z_1 + \ldots + r_{kn}z_n| = 1\},$$

в которой нарушается непрерывность голоморфного в $D \cup E_1 \cup \ldots \cup E_n$ интеграла

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi)^n i} \int_0^{2\pi} dt_2 \ldots \int_0^{2\pi} dt_n \int_{|\eta|=1} \frac{\phi(t_2, \ldots, t_n, \eta)}{\eta - u} d\eta. \quad (1)$$

где плотность ϕ — определенная на множестве $\{0 \leq t_j \leq 2\pi, |\eta| = 1, j = 2, \ldots, n\}$ непрерывная функция, удовлетворяющая по η условию Гельдера $\mathbf{H}_\alpha$,

$$u = \sum_{\mu=1}^{n} (r_{\mu 1} z_1 + \ldots + r_{\mu n} z_n) e^{i t_\mu} \quad (t_1 \equiv 0).$$

Постановка задачи: Требуется найти функцию f, голоморфную в D и E_1 (или пару функций $f^+ \in \mathbf{H}(D), f^- \in \mathbf{H}(E_1)$), обращающуюся в нуль на множестве бесконечно удаленных точек E_1, предельные значения которой в точках B_1 из D и E_1 удовлетворяют краевому условию

$$f^+(\tilde{\zeta}_1, 0, \ldots, 0) = G_1(\tilde{\zeta}_1) f^-(\tilde{\zeta}_1, 0, \ldots, 0) + g_1(\tilde{\zeta}_1),$$

где $G_1(\tilde{\zeta}_1)$ и $g_1(\tilde{\zeta}_1)$ — определенные на B_1 непрерывные по Гельдеру функции, причем $G_1(\tilde{\zeta}_1)$ нигде на B_1 не обращается в нуль.

Решение задачи (отдельно разобраны однородный и неоднородный случаи) получено в виде интеграла (1), плотность которого определяется указанными способами.

Литература [1] *Нелаев А.В.* Интегральные представления в круговых областях // Межвуз. сб. научн. тр. "Комплексный анализ и его приложения". М.: "Прометей". МПГУ. 1996. С. 75-92.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_{p,\infty}$

Новиков С.Я. (Самара)

nvks@ssu.samara.ru

Известная теорема Никишина-Пизье ([1], [2]) дает внутреннюю характеризацию счетных множеств $U \subset L^0([0,1], \mathcal{M}, \mathbf{m})$, которые ограничены в пространстве $L_{p,\infty}([0,1], \mathcal{M}, \nu)$, где мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\mathbf{m}$:

Эквивалентны следующие утверждения для последовательности $(x_n) \in (L^0(\mathbf{m}))^{\mathbf{N}}$ и для $p > 0$:

1) $\forall a = (a_n) \in l_p$, $\sup_i |a_n x_n| < \infty$ почти всюду на $[0,1]$;

2) $\exists f \in L_1(\mathbf{m})$, $f \geq 0$, $\int_{[0,1]} f\, d\mathbf{m} \leq 1$ и $\exists r \in (0,p)$ такие, что последовательность $\left(x_n f^{-1/r}\right)$ ограничена в пространстве $L_{p,\infty}(\nu)$, где

$\nu(E) = \int_E f\, d\mathbf{m}$, $E \in \mathcal{M}$.

В данной работе выделены характеристические свойства тех множеств, которые ограничены в пространстве $L_{p,\infty}(\mathbf{m})$, и порядково ограничены в пространстве $L_p(\mathbf{m})$.

Теорема. *Эквивалентны следующие утверждения* $(p > 0)$:

1) Множество $U \subset L^0(\mathbf{m})$ ограничено в пространстве $L_{p,\infty}(\mathbf{m})$;

2) $\forall (a_n) \in l_p$, $\forall (x_n) \in U^{\mathbf{N}}$, $\forall (f_n) \in (L^0(\mathbf{m}))^{\mathbf{N}}$, $f_n \stackrel{d}{=} x_n$,

$$\sup_n |a_n f_n| < \infty$$

почти всюду на $[0,1]$;

3) $\forall (a_n) \in l_{p,q}$, с некоторым $q \leq p$, $\forall (x_n) \in U^{\mathbf{N}}$, $\forall (X_n) \in (L^0(\mathbf{m}))^{\mathbf{N}}$, X_n — независимые в вероятностном смысле функции, $X_n \stackrel{d}{=} x_n$,

$$\sup_n |a_n X_n| < \infty$$

почти всюду на $[0,1]$.

Запись $f \stackrel{d}{=} x$ означает, что

$$\mathbf{m}(t : |f(t)| > \tau) = \mathbf{m}(t : |x(t)| > \tau), \ \tau \geq 0.$$

Литература

1. Никишин Е.М. *Резонансные теоремы и надлинейные операторы.*// Успехи математических наук.— 1970. — Т.10, 6. — С.129-191.

2. Pisier G.*Factorisation of Operators through $L_{p,\infty}$ and $L_{p,1}$*// Math.Annalen. — V.276. — P.105-136.

О ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННОГО ТИПА

Л.В. Новикова (Ростов-на-Дону)

znanie@jeo.ru

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u_x^2 + u_y^2. \quad (u = u(x, y, t)) \tag{1}$$

в случае периодических граничных условий

$$u(x, y, t) \equiv u(x + 2\pi; y, t) \equiv u(x; y + 2\pi; t)$$

как эволюционное уравнение

$$\frac{du}{dt} = Au + \Phi(u)$$

в банаховом пространстве E 2π-периодических по x и по y функций

$$u(x, y) = \sum_{n,m \in Z} u_{n,m} e^{i(nx+my)},$$

таких, что $\sum\limits_{n,m \in Z} |u_{n,m}| < \infty$, с нормой $||u||_E = \sum\limits_{n,m \in Z} |u_{n,m}|$.

В работе показано, что уравнение (1) приводится аналитической по Фреше заменой переменных $u = \nu + h(\nu)$, $h = \sum\limits_{k=2}^{\infty} h_k$ в окрестности нуля в E к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \Delta \nu \tag{2}$$

причём $h(\nu) = \ln(1+\nu) - \nu$.

Таким образом, замена переменных $u = \ln(1+\nu)$ приводит нелинейное уравнение (1) к линейному уравнению (2). Заметим, что эта подстановка аналогична подстановке Хопфа-Коула, линеаризующей уравнение Бюргерса.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Новоженов М.М., Сумин М.И. (Нижний Новгород)[1]

E-mail: m_sumin@mm.unn.ac.ru

Рассматривается задача оптимального управления с фиксированным временем

$$I_0(\pi) \to \min, \quad I_1(\pi) \in \mathcal{M}, \quad \pi \in \mathcal{D},$$

где $\pi \equiv (u, v, w)$ - тройка управлений, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_1 \equiv \{u \in L_\infty(Q_T) : u(x,t) \in U \text{ п.в. на } Q_T\}$, $\mathcal{D}_2 \equiv \{v \in L_\infty(\Omega) : v(x) \in V \text{ п.в. на } \Omega\}$, $\mathcal{D}_3 \equiv \{w \in L_\infty(Q_T) : w(x,t) \in W \text{ п.в. на } Q_T\}$, $U \subset R^m$, $V \subset R^1$ - компакты, $W \subset R^l$ - выпуклый компакт, $\mathcal{M} \subset C(\mathcal{X})$ - множество всех неотрицательных функций на компакте $X \subset [0,T]$,

$$I_0(\pi) \equiv \int_\Omega F(x, z[\pi](x,T), v(x))\, dx,$$

$I_1 : \mathcal{D} \to C(X)$ - оператор, задаваемый равенством

$$I_1(\pi)(t) \equiv \int_\Omega G(x, t, z[\pi](x,t))\, dx, \quad t \in X,$$

$z[\pi] \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ - соответствующее тройке π решение краевой задачи

$$z_t - \frac{d}{dx_i} a_i(x, z, z_x, w(x,t)) + a(x, z, z_x, u(x,t)) = 0.$$

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 98-01-00793.

$$z(x,0) = v(x)\ \ z(x,t) = 0,\ (x,t) \in S_T.$$

При некоторых естественных для теории оптимального управления достаточно общих условиях на исходные данные задачи (1) рассматриваются следующие вопросы: 1) необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Л.С.Понтрягина: 2) достаточные условия оптимальности. В случае некоторых дополнительных условий на функции a, a_i рассматриваются также вопросы: 3) регулярности и нормальности задачи (1); 4) существования оптимальной тройки для задачи (1); 5) расширение задачи (1) в смысле Р.В.Гамкрелидзе, Дж.Варги.

Обсуждаются два различных подхода для доказательства необходимых условий оптимальности, поточечных по u, v и интегральных по w . В первом подходе задача (1) трактуется как задача с бесчисленным множеством "обычных" функциональных ограниений. Во втором исходная задача "аппроксимируется" последовательностью аналогиных задач, в каждой из которых число функциональных ограничений конечно.

КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, ВЫТЕКАЮЩЕЙ ИЗ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЕМКОСТИ

Орлов В.В., Темнов А.Н. (Москва)
v_orlov@hotmail.com, a_temnov@hotmail.com

Рассматривается задача о малых движениях идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей осесимметричную ёмкость произвольной формы и вращающейся вместе с ней вокруг оси Ox_3 с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_3$. Жидкость вытекает через поверхность слива Σ со скоростью V_Σ. В подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$, вращающейся с угловой скоростью ω_0 и перемещающейся вместе со свободной поверхностью со скоростью V_0 задача приобретает вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - 2\omega_0(\vec{v} \times \vec{k}) + \nabla p = \vec{f}, \qquad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \qquad \text{в } Q, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla p_0 \cdot \vec{v} = 0 \qquad \text{на } \Gamma_0, \tag{2}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \qquad \text{на } S, \qquad p = \gamma \vec{v} \cdot \vec{n}_{\Sigma} \qquad \text{на } \Sigma, \tag{3}$$

$$\vec{v}(x, 0) = \vec{v}^0(x). \tag{4}$$

Здесь Q - область, занимаемая жидкостью, S - твердая стенка, Γ_0 - невозмущённая свободная поверхность; $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S, n_{Σ} - нормаль к поверхности Σ, $\gamma = \xi V_{\Sigma}$, ξ - обобщенный коэффициент сопротивления поверхности слива.

Показана разрешимость рассматриваемой эволюционной задачи в соответствущем гильбертовом пространстве и изучена спектральная проблема, получающаяся из уравнений (1)-(4)

Рассмотрены различные модельные задачи по определению собственных чисел и собственных форм колебаний жидкости. Наличие вращения и истечения топлива из бака приводит к необходимости решения комплексного матричного уравнения четвёртого порядка относительно коплексного коэффициента затухания λ.

$$\left(A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + iD\lambda + E\right)\{u\} = 0,$$

Реализован алгоритм расчета частот и форм колебаний и представлены результаты. Результаты для осесимметричных сосудов сложной формы получены с использованием метода конечных элементов.

Литература

[1] Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан // Операторные методы в линейной гидродинамике. М., Наука, 1989, - 416с.

[2] И.Н. Молчанов, Л.Д.Николенко // Основы метода конечных элементов. Киев., Наукова думка, 1989, - 272с.

О СХОДИМОСТИ ОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Осколков В.А. (Москва)

E-mail: Oskolkov@math.mephi.msk.su

Пусть G- односвязная область в C и $A(G)$ - пространство функций, аналитических в G, с топологией компактной сходимости. Пусть задана линейно независимая система $\varphi = \{\varphi_n(z)\}_0^\infty \subset$

$A(G)$. Символом $A_\varphi(G)$ обозначим подпространство $A(G)$ функций $F(z)$, представленных рядами $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(z)$, сходящимися в топологии $A(G)$. Пусть задана система функций $f = \{f_n(t)\}_0^\infty \subset A(D)$ (D - односвязная ограниченная область), которая полна и минимальна в $A(D)$ и $\Psi = \{\Psi_n(t)\}_0^\infty$ - биортогональная с f система. Рассмотрим функцию $\Phi(t,z)$ - сумму этого ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(t)\varphi_n(z)$, равномерно сходящегося по t и z, соответственно, внутри областей D и G). Поставим функции $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(z) \in A_\varphi(G)$ в соответствие новую функцию $g(t;\Phi,F) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n(t)$. Символом $A_\varphi(\Phi,G,D)$ обозначим пространство функций $F(z) \in A_\varphi(G)$, для каждой из которых все особые точки функции $g(t;\Phi;F)$ лежат в области D.

Рассматривается интерполяционная задача, заданная системой линейных и непрерывных функционалов $\{L_n\}_0^\infty$, таких, что $L_n(\varphi_k) = 0\ \forall n > k$, $L_n(\varphi_n) \neq 0\ \forall n = 0,1,\ldots$. Эта система единственным образом определяет условиями биортогональности систему "полиномов" $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_{k,n}\varphi_k(z)$ $(b_{n,n} \neq 0)$, $n = 0,1,\ldots$. Положим

$$\rho_1 = \sup \limsup_{n\to\infty} \left(\max_{t\in\overline{K}} |L_n^{(z)}(\Phi(t,z))| \right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\rho_2 = \sup \limsup_{n\to\infty} \left(\max_{z\in\overline{M}} |P_n(z)| \right)^{\frac{1}{n}},$$

где $L_n^{(z)}$ означает, что функционал L_n действует по переменной z, точные верхние грани берутся, соответственно, по всем компактам $\overline{K} \subset D$ и $\overline{M} \subset G$.

Теорема. *Если $\rho_1\rho_2 < 1$, то пространство $A_\varphi(\Phi,G,D)$ является пространством сходимости данной интерполяционной задачи.*

Существуют примеры, показывающие, что неравенство теоремы нельзя заменить более слабым $\rho_1\rho_2 \leq 1$.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Павленко В.Н., Винокур В.В. (Челябинск)

pavlenkocsu.ru. vadimcsu.ru

В гильбертовом пространстве H рассматриваются уравнения вида

$$Au + Tu = f, \tag{1}$$

где $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ фредгольмово отображение нулевого индекса, оператор $T : H \to H$ компактный (возможно, разрывный) и удовлетворяет условию $Tu/||u|| \to 0$ при $||u|| \to +\infty$, $f \in H$.

Определение 1 *Элемент $u \in H$ называется сильно регулярной точной для оператора $Q : H \to H$, если найдется $h \in H$, для которого*

$$\limsup_{v \to 0}(Q(u+v), h) < 0.$$

Доказывается следующее утверждение.

Теорема *Пусть выполнены условия:*

1) оператор A принадлежит классу $(S)_+$ [1];

2) существует линейный изоморфизм M между $\ker A$ и $\ker A^*$ такой, что для любой последовательности $(u_n) \subset H$ с $||u|| \to +\infty$ и $||u_k||^{-1} \cdot u_k \to v \in \ker A$ верно неравенство

$$\limsup_{k \to \infty}(Tu_k, Mv) > (f, Mv);$$

3) Точки разрыва отображения $Au + Tu - f$ сильно регулярные.

Тогда уравнение (1) имеет решение u_0, которое является точкой непрерывности оператора T.

Данная теорема уточняет результат, сформулированный в [2].

Литература

[1] Скрыпник И.В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат., 1990. - т.37, с.3-87.

[2] Павленко В.Н., Винокур В.В. О разрешимости уравнений с разрывными некоэрцитивными операторами. Воронеж, ВГУ, 1999. - с.54.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛУЧА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Павленко В.Н., Потапов Д.К. (Челябинск)
pavlenko@csu.ru, dpotapov@csu.ru

Рассматривается уравнение

$$Au = \lambda Tu \tag{1}$$

с параметром $\lambda > 0$, где A - линейный самосопряженный оператор из E в E^* (E - вещественное рефлексивное банахово пространство), $T : E \to E^*$ антимонотонное отображение, ограниченное и квазипотенциальное (возможно, разрывное) на E, $T(0) = 0$. Ищутся $\lambda > 0$, для которых уравнение (1) имеет ненулевые решения (такие λ называют собственными значениями уравнения (1)).

Вариационным методом получен следующий результат.

Теорема. *Предположим, что*

1) A - линейный самосопряженный оператор из E в E^* (E - вещественное рефлексивное банахово пространство), пространство E представляется в виде прямой суммы замкнутых подпространств E_1 и $E_2, E_1 = KerA$, причем существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что $(Au, u) \geq \alpha ||u||^2 \ \forall\, u \in E_2$;

2) отображение T антимонотонное, квазипотенциальное и ограниченное на E, а его квазипотенциал f равен нулю в нуле и для некоторого $u_0 \in E$ значение $f(u_0) > 0$; если $E_1 \neq \{0\}$, то дополнительно $\lim\limits_{u \in E_1, ||u|| \to +\infty} f(u) = -\infty$;

3) существуют положительные константы δ и ε такие, что для любой точки разрыва u оператора T найдется $h \in E$, для которого $\lim\limits_{t \to +0} (T(u + th), h) > \delta$ и $(Au, h) < \varepsilon$.

Тогда найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ существует $u_\lambda \in E, u_\lambda \neq 0, f^\lambda(u_\lambda) = \inf\limits_{v \in E} f^\lambda(v), f^\lambda(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - \lambda f(u)$ и любое такое u_λ удовлетворяет уравнению (1) и является точкой радиальной непрерывности оператора T.

О ЧЕЗАРОВСКИХ СРЕДНИХ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ОРТОПОДОБНЫХ СИСТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ

Павликов А.Н. (Москва)[1]

pavlikov@mech.math.msu.su

Т. П. Лукашенко в работе [1] дал определение обобщенных ортоподобных систем разложения, являющихся расширением класса ортогональных систем. В настоящей работе для таких систем обобщены классические результаты из [2], касающиеся теорем о суммируемости ортогональных рядов методами чезаровских средних.

Пусть $\{\Omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ – такое фиксированное исчерпывание Ω - пространства со счетно-аддитивной неотрицательной мерой μ, что все Ω_k – измеримы, $\Omega_0 = \emptyset$, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ для $k \in \mathbf{N}$, $\bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_k = \Omega$. Пусть $\{\mathrm{e}^{\omega}\}_{\omega\in\Omega}$ — обобщенная ортоподобная неотрицательная система разложения, а $c(\omega)$ – числовая функция на Ω.

Определение. Последовательность $\{s_k^m\}_{k=1}^{\infty}$, где $s_k^m = \int_{\Omega_k} c(\omega)e_m^{\omega}\,d\mu(\omega)$, интеграл понимается в собственном или несобственном смысле (см. [1]), назовем *последовательностью частичных интегралов* интеграла $\int_{\Omega} c(\omega)e_m^{\omega}\,d\mu(\omega)$.

Последовательность $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $s_k = \int_{\Omega_k} c(\omega)\mathrm{e}^{\omega}\,d\mu(\omega)$, интеграл понимается как предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\Omega_k} c(\omega)e_n^{\omega}\,d\mu(\omega)$ в H (см. [1]), назовем *последовательностью частичных интегралов* интеграла $\int_{\Omega} c(\omega)\mathrm{e}^{\omega}\,d\mu(\omega)$.

Последовательность $\{\sigma_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$, где $\sigma_n^{(m)} = \frac{1}{n}(s_1^{(m)} + \dots + s_n^{(m)})$ назовем последовательностью $(C, 1)$-средних для $\{s_k^{(m)}\}_{k=1}^{\infty}$, где $s_k^{(m)}$ это соответственно s_k или s_k^m.

Нами рассмотрена связь между методами суммирования Чезаро и Абеля–Пуассона и вопрос о законности перестановки предельных переходов для σ_n^m.

Пусть $\mathrm{H}{=}L^2(X)$, где X — пространство со счетно-аддитивной неотрицательной мерой ν.

Теорема 1. *Пусть $c(\omega) \in L^2(\Omega)$ и последовательность частичных интегралов суммируется методом $(C, 1)$ почти всюду на*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №99-01-00354).

X. Тогда равенство

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sigma_n^m(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sigma_n^m(x)$$

выполняется почти во всех точках $x\in X$.

Теорема 2. *При условии* $c(\omega)\in L^2(\Omega)$ *для суммируемости интеграла* $\int_\Omega c(\omega)e^\omega(x)d\mu(\omega)$ *почти всюду все методы* (C,α) *для* $\alpha>0$ *равносильны между собой и равносильны методу Абеля-Пуассона.*

Литература

[1] *Лукашенко Т. П.* Обобщенные системы разложения, подобные ортогональным.// Вестник Московского ун-та. Серия 1, Матем., Мех. 1998, №4, с. 6–10.

[2] *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. М., 1963.

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ МАКСВЕЛЛА, ДОПУСКАЮЩИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ВИНТЫ

Паринов М.А. (Иваново)[1]

E-mail: parinovivanovo.ac.ru

Термин "пространство Максвелла" введен в [1] и обозначает тройку (M,g,F), где M – 4-мерное вещественное многообразие, $g=g_{ij}dx^idx^j$ – псевдоевклидова структура на M (т. е. пара (M,g) – пространство Минковского или область в нем), а $F=F_{ij}dx^i\wedge dx^j$ – обобщенная симплектическая структура на M $(dF=0)$. При выполнении второго уравнения Максвелла

$$\nabla_kF^{ik}=\frac{1}{c\varepsilon_0}J^i$$

тензор F_{ij} описывает электромагнитное поле, поэтому теория пространств Максвелла может служить естественной базой для

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (проект 97-0-1.3-99)

изучения электромагнитных полей. При этом не все пространства Максвелла допускают физическую интерпретацию. На существование "нефизических" полей F_{ij} указывает, например, возможность для тока J^i иметь сверхсветовую скорость.

В [2] сформулирована проблема групповой классификации электромагнитных полей. В случае пространств Максвелла это проблема классификации по подгруппам группы Пуанкаре.

В настоящей работе проведена классификация пространств Максвелла (электромагнитных полей), допускающих 1-мерные группы эллиплических винтов

$$\tilde{x}^1 = x^1 \cos a + x^3 \sin a, \quad \tilde{x}^2 = \lambda a + x^2,$$

$$\tilde{x}^3 = -x^1 \sin a + x^3 \cos a, \quad \tilde{x}^4 = \mu a + x^4,$$

где λ, $\mu = \mathrm{const}$, а a - групповой параметр. Описано 13 классов. Классификация будет опубликована в 4-м выпуске сборника "Научные труды Ивановского государственного университета. Математика" (2001 г.)

Литература

[1] *Паринов М. А.* Групповая классификация пространств Максвелла// Современный анализ и его приложения: Тезисы докладов ВЗМШ. Воронеж, 2000. С. 129 - 130.

[2] *Паринов М. А.* Задача групповой классификации электромагнитных полей//Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тезисы докл. ВЗМШ. Воронеж, 1999. С. 156.

ОБРАТИМОСТЬ РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Песковатсков В.Ю. (Воронеж)

wind@uc.vrn.ru

Будем рассматривать разностный оператор

$$\mathcal{D}x(n) = A(n)x(n) - B(n)x(n), \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$\mathcal{D} : l_p(\mathbf{Z}, \mathcal{X}) \to l_p(\mathbf{Z}, \mathcal{Y}),$$

$\mathcal{X} = (X(n), n \in \mathbf{Z})$, $\mathcal{Y} = (Y(n), n \in \mathbf{Z})$ – последовательности комплексных банаховых пространств с "sup" нормами.

Определение. Будем говорить, что для пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ имеет место экспоненциальная дихотомия с постоянными $M > 0$ и $q \in (0,1)$, если существуют две ограниченные проекторнозначные функции $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{Q}_0$, определённые на $\mathbf{Z}$,

$$\mathcal{P}_0(n) \in EndX(n), \quad \mathcal{Q}_0(n) \in EndY(n),$$

такие, что выполнены условия:

1)$A(n)\mathcal{P}_0(n) = \mathcal{Q}_0(n)A(n), \quad n \in \mathbf{Z}$;

2)$B(n)\mathcal{P}_0(n-1) = \mathcal{Q}_0(n)B(n), \quad n \in \mathbf{Z}$;

3)Операторы $B_0(n) : X_0(n-1) \to Y_0(n), \quad n \in \mathbf{Z}$, являющиеся сужениями операторов $B(n)$ на $X_0(n-1)$, являются обратимыми операторами;

4)Операторы $A_1(n) : X_1(n) \to Y_1(n), \quad n \in \mathbf{Z}$, являющиеся сужениями операторов $A(n)$ на $X_1(n)$, являются обратимыми операторами;

5)Для семейства операторов $\{U(n,m)\}$, определённых равенствами

$U(n,m) = \prod_{j=0}^{m-n-2} (B_0^{-1}(n+j)A_0(n+j)), \quad m > n$,

$U(n,m) = I, \quad m = n$,

$U(n,m) = \prod_{j=0}^{n-m-1} (A_1^{-1}(n-j)B_1(n-j)), \quad m < n$ имеет место оценка

$$||U(n,m)|| \le Mq^m, \quad n, m \in \mathbf{Z}, m > 0$$

Теорема. Для обратимости оператора $\mathcal{D}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие экспоненциальной дихотомии пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. При этом, если оператор $\mathcal{D}$ обратим, то обратный определяется формулой $(\mathcal{D}^{-1}f)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n,m)f(m)$, где функция $G : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to Hom(Y, X)$ определяется равенствами

$G(n,m) = -U(n+1, m+1)B_0^{-1}(n)\mathcal{Q}_0(m), \quad m > n$

$G(n,m) = U(n,m)A_1^{-1}(n)\mathcal{Q}_1(m), \quad m \le n$.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЕ ЛЕБЕГА-СТИЛТЬЕСА

Покорный Ю.В., Клюева М.Б.(Воронеж)[1]

Pokorny@kma.vsu.ru

Привлечение интеграла Стилтьеса к анализу дифференциальных уравнений с обобщенными (сингулярными) коэффициентами позволяет обходиться без аппарата теории обобщенных функций (теории распределений по Л.Шварцу). Однако формальное использование такого интеграла приводит к трудностям, в общей теории интеграла не обследованным. Например, для любой функции ограниченной вариации $f(x)$, определенной сплошь на промежутке $[a, b]$, интеграл вида $\int\limits_a^x df$ как функция от x определен лишь в точках непрерывности $f(x)$. Если же , например, ξ–точка разрыва f, то смысл этого интеграла может быть истолкован двояко: либо как интеграла на промежутке от a до ξ , как если бы справа от точки ξ функция $f(x)$ была не определена, либо по Радону, т.е. в смысле меры, задаваемой f в целом на промежутке $[a, b]$. В обоих случаях мера точки ξ оказывается неодинаковой. Избежать подобной трудности в теории дифференциальных уравнений нельзя, поскольку интеграл с переменным верхним пределом–основное средство построения и анализа решений. При стандартном введении меры Лебега-Стилтьеса концы промежутка интегрирования также заряжаются особенностями. Обозначение меры и порождающей ее функции обычно отождествляются, что весьма часто приводит к серьезным недоразумениям. Неявная попытка уйти от описанных трудностей привела к традиции: рассматриваемые в теории интеграла функции ограниченной вариации постулируются непрерывными всюду справа (или слева). Последнее делает невозможным интегрирование по частям для разрывных функций.

Частным случаем следующей теоремы являются все известные формулы интегрирования по частям.

Теорема. *Пусть $u, v \in BV[a. b]$, α, β-произвольные точки.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке: Грант Минвуза (КЦ СПбГУ) № 97-0-1.8-100, Грант Минвуза (КЦ Новосибирского госун-та), грант ВГУ НИЧ-0017

$a < \alpha < \beta < b$. *Тогда*

$$\int\limits_{[\alpha-0,\beta+0]} u(x-0)dv + \int\limits_{[\alpha-0,\beta+0]} v(x+0)du = uv|_{\alpha-0}^{\beta+0}$$

Обозначением $[\alpha-0, \beta+0]$ промежутка интегрирования (вместо $[\alpha, \beta]$) мы обращаем внимание на то, что оба интеграла берутся по Радону.

Из сказанного следует, что для корректной работы с интегралом Лебега-Стилтьеса в дифференциальных уравнениях необходимо предполагать "продолженность" за пределы $[a, b]$ не только и не столько для интегрируемой функции (как это делали Феллер, М.Крейн и их последователи), сколько для "интегрирующей" функции, т.е. меры.

О ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ЗАДАЧИ О ДЕФОРМАЦИИ ЧАСТИЧНО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Покорный Ю.В. Провоторов А.В. (Воронеж)[1]

В классе дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, l]$ функций рассматривается обобщенное уравнение:

$$(Pu'')'' - Q'u'' + R'u = F' \tag{1}$$

при краевых условиях:

$$u(0) = u'(0) = 0, u''(l) = u'''(l) = 0 \tag{2}$$

В (1) функции Q, R, F- обычные функции ограниченной вариации, штрихи означают их обобщенное дифференцирование. Задача (1) , (2) соответствует поперечным деформациям упругого стержня. При этом R -определяется жесткостью упругой подушки, а Q- продольным сжатием стержня.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке: Грант Минвуза (КЦ СПбГУ) № 97-0-1.8-100. Грант Минвуза (КЦ Новосибирского госун-та), грант ВГУ НИЧ-0017

Например, если подобная модель возникает при описании деформации мачты высотой l с растяжками на уровне ξ, то соответствующая функция $R(x)$ имеет вид:

$$R(x) = \gamma \cdot \Theta(x - \xi)$$

(здесь как обычно, $\Theta(x)$ - стандартная функция Хевисайда), т.е. соответствующий коэффициент в (1) оказывается обычной дельта-функцией т.е.

$$R'(x) = \gamma \cdot \delta(x - \xi)$$

Для Q' в случае мачты будет верно равенство:

$$Q'(x) = k \cdot (1 - \Theta)(x - \xi),$$

причем связь между k и γ определяется углом наклона растяжек к горизонту.

Уравнение (1) в точке ξ реализуется в виде специальных условий трансмиссии, которые для случая мачты с растяжками принимает вид:

$$\gamma \cdot u(\xi) + k \cdot u'(\xi - 0) + p \cdot u'''(\xi + 0) - p \cdot u'''(\xi - 0) = 0$$

$$u''(\xi + 0) - u''(\xi - 0) = 0$$

Если Q и F не возрастают, то задача (1) и (2) оказывается корректно поставленной и однозначно разрешимой для любой $F(x)$ с ограниченным изменением. Для этой задачи существует функция Грина $G(x; s)$ непрерывная на квадрате $0 \leq x, s \leq l$

Она оказывается строго положительной внутри этого квадрата. Для случая, когда Q и R возрастают - а именно этому случаю соответствует реальные модели - отмеченные свойства сохраняются, если Q и R имеют достаточно малые вариации. Случай $Q' \equiv 0$ соответствующий простейшей ситуации (стержню с упругой опорой в точке ξ без анамалей типо неравномерного сжатия) ранее изучался Покорным Ю.В. и Голованевой Ф.В.

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ПОЧТИ ВЫПУКЛОСТИ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ

Попов Н.И. (Йошкар–Ола)

E–mail: kokurin@marsu.ru

Пусть функция $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ является регулярной в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$. Регулярная функция $f(z)$ называется почти выпуклой в E, если для нее существует такая выпуклая в E функция $g(z)$, что $\mathrm{Re}[f'(z)/g'(z)] > 0$ для всех $z \in E$ [1].

В работе [2] доказан новый критерий для почти выпуклости регулярной в E функции.

Теорема 1 [2]. *Пусть функция $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ является регулярной в E. Если*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1+z}{1-z} - zf'(z)\right] > 0 \qquad (z \in E), \tag{1}$$

тогда, или $f(z)$ является почти выпуклой в E функцией, или $f(z)$ тождественно равна нулю.

В [2] была отмечена возможность обобщения полученного результата. Действительно, доказано более общее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функция $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ является регулярной в круге E и $0 \le \alpha \le 1$. Если*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z} - zf'(z)\right] > \alpha,\ z \in E, \tag{2}$$

тогда, или $f(z)$ является почти выпуклой в E функцией, или $f(z)$ тождественно равна нулю.

Отметим, что при $\alpha = 0$ из условия (2) следует (1).

Литература

1. Kaplan W. Close–to–convex schlicht functions// Michigan Math. J.–1952.–V.1.–No.2.–P.169–185.

2. Singh R., Singh S. A new criterion for close–to–convexity // J. Indian Math. Soc.–1992.–V.58.–No.1.–P.1–3.

ВЗАИМОСВЯЗЬ ОБОБЩЕННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ И K–ФУНКЦИОНАЛА ПЕТРЕ

Потапов М.К. (Москва)[1]

mkpotapov@mail.ru

Скажем, что функция $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, если f измерима на $[-1,1]$ для $1 \le p < \infty$, $\alpha > -1/p$, $\beta > -1/p$ и $\|f(x)\|_{p,\alpha,\beta} = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}|dx\right)^{1/p} < \infty$, f — непрерывная на $[-1,1]$ для $p = \infty$, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$ и $\|f(x)\|_{p,\alpha,\beta} = \max\limits_{-1\le x\le 1} \left|f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\right|$.

Для каждой пары натуральных чисел s и r введем оператор обобщенного сдвига

$$T_y(f,x) = \frac{2^{s+r}}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} f(R)\psi(x,y,z)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \text{ где}$$

$$\psi(x,y,z) = \frac{\cos[s(\varphi_1-\varphi)+r(\varphi_1-\mu)](1-R)^r(1-R^2)^{\frac{s}{2}}}{(1+y)^{s+r}(1-x)^r(1-x^2)^{\frac{s}{2}}},$$
$$R = xy + z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}, \quad \cos\varphi_1 = z, \quad \sin\varphi_1 = \sqrt{1-z^2},$$
$$\cos\varphi = \frac{-\sqrt{1-y^2}x + yz\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-R^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-R^2}},$$
$$\cos\mu = \frac{z(1-xy)-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{1-R^2}, \quad \sin\mu = \frac{\sqrt{1-z^2}(y-x)}{1-R},$$

Для функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ определим обобщенный модуль гладкости

$$\tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|t|\le\delta} \|T_{\cos t}(f,x) - f(x)\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Введем оператор дифференцирования $D = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + \left[(\nu-\mu) - (\nu+\mu+2)x\right]\frac{d}{dx}$. Скажем, что функция $g \in AD(p,\alpha,\beta,\nu,\mu)$, если $g \in L_{p,\alpha,\beta}$ и $Dg \in L_{p,\alpha,\beta}$. Пусть

$$K(f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{g\in AD(p,\alpha,\beta,\nu,\mu)} \left(\|f-g\|_{p,\alpha,\beta} + \delta^2\|Dg\|_{p,\alpha,\beta}\right)$$

— K–функционал Петре.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 00-01-00042) и программы поддержки ведущих научных школ (проект 00-15-96143).

Теорема. *Пусть даны числа* s, r, p *и* α *такие, что* s *и* r — *натуральные числа,* $1 \le p \le \infty$, $s/2 - 1/2 < \alpha \le s/2$ *при* $p = 1$, $s/2 - 1/(2p) < \alpha < s/2 + 1/2 - 1/(2p)$ *при* $1 < p < \infty$, $s/2 \le \alpha < s/2 + 1/2$ *при* $p = \infty$. *Пусть функция* $f \in L_{p,\alpha+r,\alpha}$. *Тогда для любого* $\delta \in [0,\pi)$ *справедливы неравенства*

$$C_1 K(f,\delta,s+2r,s)_{p,\alpha+r,\alpha} \le \tilde{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha+r,\alpha} \le$$

$$\le \frac{C_2}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{2s+2r}} K(f,\delta,s+2r,s)_{p,\alpha+r,\alpha},$$

где положительные постоянные C_1 *и* C_2 *не зависят от* f *и* δ.

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ВЯЗКО-УПРУГИХ МОДЕЛЕЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ С.Л. СОБОЛЕВА

М.В. Придущенко (Воронеж)

Для одного из уравнений С.Л. Соболева рассматривается задача:

$$Lu = f(t,x,y); \quad t > 0, \ (x,y) \in R^2_+; \tag{1}$$

$$u|_{t=+0} = u_0(x,y); \quad (x,y) \in R^2_+; \tag{2}$$

$$y\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=+0} = h(t,x); \quad t > 0; \ x \in R; \tag{3}$$

$$u = 0(1); \quad x \to \pm\infty, \ y \to +\infty; \tag{4}$$

где L определяется формулой:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^4}{\partial x^4} + B_y, \quad B_y = y^{-1}\frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y}; \tag{5}$$

и $u_0(\cdot,\cdot), u(t,\cdot,\cdot), f(t,\cdot,\cdot) \in S'_+(\overline{R^2_+})$, $h(t,\cdot), S'(R)$ $(t > 0)$.

Построено фундаментальное решение Коши оператора L, являющееся регулярной функцией класса $S'_+(R \times R^2_+)$:

$$E(t,x,y) = \frac{\theta(x)}{2 \cdot 3^{1/3} \cdot t^{4/3}} Ai(z), \tag{6}$$

$$z = \frac{x + y^2/4t}{(3t)^{1/3}}, \qquad (7)$$

где $Ai(\cdot)$ — функция Эйри первого рода (см. [1]), $\theta(x)$ — "тета"-функция Хевисайда. С его помощью доказана теорема существования решения и построена функция Грина задачи (1)–(4). Доказана также единственность этого решения.

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.:Наука, 1973. Т. 2. — 378 с.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ БЫСТРО УБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ТЕОРЕМЫ ТИПА ПЭЛИ-ВИНЕРА

Прошкина А.В. (Москва)[1]

E-mail: sedlet@mail.ru

В статье [1] был рассмотрен аналог теоремы Пэли-Винера для целой функции

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt-a|t|^\alpha} \cdot f(t)dt, \quad \alpha > 1,\ a > 0,\ f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{R}). \qquad (1)$$

В настоящем сообщении речь идет о теоремах типа Пэли-Винера для четырех классов целых функций, которые в определенном смысле можно назвать крайними по отношению к классу (1). Подробнее остановимся на одном из этих классов, а именно

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt-m|t|\cdot\ln|kt|} \cdot |t|^{1/4} f(t)dt, \quad m, k > 0. \qquad (2)$$

Имеет место следующая теорема типа Пэли-Винера

Теорема. *Класс функций, представимых в виде (2) с* $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{R})$, *совпадает с классом целых функций, для которых*

$$\left\|F(x+iy)\exp\left(-\frac{m}{k}\cdot e^{|y|/m-1}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{R}^2)} < \infty.$$

[1]Работа поддержана РФФИ, грант №00-01-00396.

Литература

1. *Седлецкий А.М.* // Изв. РАН. 1997. Т.61, №3. С. 187-202.

КРИТЕРИИ ЭЛЕМЕНТА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ЗНАКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ

Рамазанов А.-Р.К., Рамазанов З.А. (Махачкала)

Для ограниченных на отрезке $\Delta = [a, b]$ функции $f(x)$ и веса $p(x) = (p_-(x), p_+(x))$, следуя Е.П. Долженко и Е.А. Севастьянову, положим $(f, p)(x) = f^+(x)p_+(x) - f^-(x)p_-(x))$ ($f^+(x)$ и $f^-(x)$ — срезки) и определим p-норму равенством $|f|_{p,\Delta} = \sup\{|(f, p)(x) : x \in \Delta|\}$.

Аналог теоремы о чебышевском альтернансе для полиномиальных приближений непрерывных функций в p-норме в случае непрерывного положительного веса получен М.Г. Крейном и А.А. Нудельманом, а в случае ограниченного веса — Е.П. Долженко и Е.А. Севастьяновым. Как показано ниже, в случае ограниченных (вообще говоря, разрывных) приближаемой функции $f(x)$ и веса $p(x)$ наличие (обобщенного) чебышевского альтернанса уже не является критериальным свойством элемента наилучшего приближения. Поэтому рассмотрена еще задача об условиях на функцию $f(x)$ и вес $p(x)$, при которых чебышевский альтернанс полностью характеризует элемент наилучшего приближения.

Для веса $p(x)$ точку $y \in \Delta$ назовем p_+-точкой (p_--точкой) разности $Q(x) - f(x)$ полинома $Q(x)$ и функции $f(x)$, если при любом $\delta > 0$ супремум (соответственно, инфимум) величины $(Q - f, p)(x)$, когда $x \in (y - \delta, y + \delta) \cap \Delta$, равен $E = |Q - f|_{p,\Delta}$ (соответственно, $-E$). При этом точку y назовем точкой двойного p-экстремума разности $Q(x) - f(x)$ на Δ, если она является одновременно p_+-точкой и p_--точкой этой разности на Δ.

Для алгебраического полинома $Q(x)$ степени $\leq n$ ($n = 0, 1, \ldots$) и функции $f(x)$ чебышевским p-альтернансом на отрезке Δ назовем семейство $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ чередующихся p_+- и p_--точек разности $Q(x) - f(x)$ на Δ, начиная с любой из них.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ и вес $p(x)$ ограничены на Δ, $Q(x)$ — алгебраический полином степени $\leq n$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Для того чтобы $|Q - f|_{p,\Delta} = \inf\{|P - f|_{p,\Delta}$, где инфимум берется по всем алгебраическим полиномам $P(x)$ степени $\leq n$ с действительными коэффициентами, необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий: (1) найдется точка двойного p-экстремума разности $Q(x) - f(x)$ на Δ: (2) существует чебышевский p-альтернанс пары $Q(x)$ и $f(x)$ на Δ.*

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ В $L_2(\Omega)$ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРНЫХ ИСТОЧНИКОВ OG ЗАДАННЫХ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ $\partial\Omega$

Редкозубов С.А. (Москва, МГГУ),
Обгадзе Т.А. (Тбилиси, *tamaz@mail.ru*),
Квасов Д. С. (Владимир, *dominic99@mail.ru*),
Абрахин С.И. (Владимир, *abrahin_s@mail.ru*)

В работе рассматривается задача приближения вектор-функций $F_i(x, y, z) \in L_2(\Omega)$, где Ω - компактное множество с Липшицевой границей, линейной комбинацией неортогональных функций $\varphi(r_i^2)$ где $\left\|lim\varphi(r_i^2)\right\| \prec\prec 1$ если $r_i - \eta$ для $\forall\eta \geq diam\Omega$, а $r_i^2 = (x - \xi_i)^2 + (y - \mu_i)^2 + (z - \zeta_i)^2$, $p_i = (\xi_i, \mu_i, \zeta_i) \in \partial\Omega$.

Такие функции $\varphi(r_i^2)$ называются регулярными источниками OG и часто применяются для приближения векторных полей

$$F(x, y, z)_i = f_i(x, y, z)$$
$$f_i(x, y, z) = \sum_{j \in I} \alpha_{ij}\varphi(r_j^2) \wedge i = \overline{1, 3}$$

В гидродинамике, для уравнений Навье-Стокса применялись регулярные источники экспоненциального вида, что при решении методом Галеркина-Петрова дало результаты на 10-15 % улучшающие порядок аппроксимации по сравнению с другими типами "базисных" базисных функций, хотя, надо строго доказать полноту системы функций

$$\left\{EXP\left(-r_j^2\right)\right\}_{j\in I} \quad \wedge \quad p_j \in \partial\Omega \quad ,$$

в множестве дивергентных функций удовлетворяющих уравнениям Навье-Стокса в Ω и условиям прилипания на $\partial\Omega$ т.е. f_i на $\partial\Omega$ равна нулю в смысле $L_2(\Omega)$.

СОЛИТОН И ЛОКАЛЬНЫЕ АТМОСФЕРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Редькина Т.В. (Ставрополь)

Природные явления, происходящие в жидкой и газообразной среде, чаще всего носят локальный характер. К таким явлениям относятся ураганы, смерчи, тайфуны, водовороты и др. Их возникновение связано со значительными изменениями некоторых характеристик на ограниченной области. Действие некоторых факторов обеспечивают длительное стационарное существование таких процессов.

Как известно из практики такие процессы, как правило, имеют стабильный и очень интенсивный характер, поэтому могут быть охарактеризованы как уединенные волны - солитоны. Солитон - локализованная уединенная волна, имеющая постоянные характеристики (амплитуду, скорость, форму, частоту), не меняющиеся даже при взаимодействии с другими волнами. Очень похожую форму, перевернутый солитон, имеет и смерч. Наиболее узкая часть области вертикального ветра и минимум давления находятся практически у земли. С высотой область локализации процесса расширяется и чаще всего заканчивается в грозо-градовом облаке. Визуально на удалении 10-20 км смерч имеет вид хобота, опущенного из грозо-градового облака.

Анализируя физические свойства гидродинамических явлений можно предположить, что математические модели этих процессов будут описываться некоторыми дифференциальными уравнениями с частными производными, допускающими солитонные решения. В настоящее время в этой области не получено обобщающих результатов.

В частности, хорошо известно, что из уравнения изоспектральной деформации $L_t = [L, A]$, которое называют также уравнением Лакса, следует постоянство собственных чисел оператора L. Одним из следствий этого обстоятельства является простейшая динамика солитонных решений. Однако это не верно, если оператор L параметрически зависит от дополнительных переменных, дифференцирования по которым входят в оператор A, но не входят в оператор L. Если рассматривать класс функций, зависящих от трех (t, x, y) и более переменных, а оператор L задает дифференцирование только по переменной x, то следует ожидать, что собственные числа $\lambda(t, y)$ не являются постоянными, а удовлетворяют нелинейным дифференциальным уравнениям.

Во многих задачах гидродинамики возникают одномерные волны Римана, которые определяются уравнением

$$\nu_t = k\nu\nu_y.$$

В силу этих уравнений с течением времени происходит опрокидывание графиков, как для волны Римана, так и для собственных чисел $\lambda(t, y)$, что приводит к возникновению их многозначности. Двумерное взаимодействие волны Римана, распространяющейся по оси y, с длинными волнами, распространяющимися по оси x, в некотором приближении наблюдается в волнах на поверхности моря, а так же при возникновении ударной волны. Такое же опрокидывание происходит и в солитонных решениях.

Применительно к метеорологической ситуации, необходимым условием для возникновения мощных процессов является наличие местного вращения воздушной массы относительно вертикали к поверхности Земли, при этом ураган имеет центрально симметричную структуру, а в сечении плоскостью проходящей через ось - солитон. На оси процесса возникает труба тока, по которой с минимальным трением всасывается приземный слой воздуха. По анализу дифференциальных уравнений из множества существующих взаимозависимостей можно выделить те, которые обеспечивают устойчивость и стационирование процесса даже в условиях сильных внешних воздействий.

Литература

1. Каплан Л.Г. Движение и силовое равновесие локального процесса (солитона) в сплошной жидкой среде. ИФЖ Т. 73 № 2, 2000.

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫПУСКЕ ПРОДУКЦИИ

Резникова Н.П. (Москва)

Рассматривается задача оптимизации выпуска готовой продукции предприятия. В результате проведения опроса потребителей получаются сведения о том, какие свойства выпускаемой продукции наиболее предпочтительны для них. Результаты опроса оформляются в виде векторов предпочтения. Требуется подобрать типы, выпускаемых товаров, наиболее соответствующие запросам потребителей (при этом количество типов выпускаемых товаров ограничено).

Пусть N — число рассматриваемых свойств выпускаемых товаров. Тип товара обозначается вектором длины N, состоящим из 0-лей и 1-иц (1 ставится, если товар обладает данным свойством, в противном случае ставится 0).

Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — типы товаров, выбранные опрашиваемыми потребителями (k — число опрошенных).

Пусть мощность предприятия позволяет выпускать не более m различных типов товаров ($m \ll k$). (Типы выпускаемых товаров будут, в дальнейшем, обозначаться $w_1, \ldots, w_r$ ($r \leq m$).)

Рассмотрим экстремальную задачу.

Пусть (U_N, ρ) — это пространство всех последовательностей из 0 и 1, длины N, с расстоянием ρ, задаваемым следующим образом:

$$\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{N} |a_i - b_i|,$$

где $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots b_N) \in U_N$.

Пусть заданы $v_1, \ldots, v_k \in U_N$. Для $V_1, \ldots, V_r$ — непересекающихся подмножеств V, $V = \bigcup_{j=1}^{r} V_j$ и точек $w_1, \ldots, w_r \in U_N$ ($r \leq m$) обозначим:

$$M = M(V_1, \ldots, V_r, w_1, \ldots, w_r) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{v_i \in V_j} \rho(w_j, v_i).$$

Требуется минимизировать M по всевозможным выборам разбиений $V_1, \ldots, V_r$ и точек $w_1, \ldots, w_r$. (Данная задача относится к типу задач о квантизаторах (см. [1, стр. 81]).)

Автором получен алгоритм нахождения оптимального решения данной задачи при произвольном выборе параметров N, k, m и векторов $v_1, \dots, v_k \in U_N$.

Литература

1. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990.

О СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рогова Н.В. (Воронеж)

Пусть R_+^m обозначает полупространство $x_m > 0$ точек $x = (x', x_m)$, где $x' = (x_1, ..., x_{m-1})$ евклидова m-мерного пространства R^m. Пусть Ω^+ – произвольная ограниченная область, расположенная в R_+^m и прилегающая к гиперплоскости $x_m = 0$. Через Γ^0 обозначим часть границы Ω^+, лежащей на гиперплоскости $x_m = 0$, а через $\bar{\Gamma}^+$ – замыкание оставшейся части границы. Предполагается, что граница $\bar{\Gamma}^+$ достаточно гладкая и составляет с гиперплоскостью $x_m = 0$ угол, равный $\pi/2$. Пусть $C_{0,+}^2(\Omega^+)$ – множество функций, которые дважды непрерывно дифференцируемы в конечной области Ω^+, четны по переменной x_m и обращаются в нуль в некоторой пограничной полосе границы $\bar{\Gamma}^+$.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{L}u = -\sum_{i,j=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \\ -\frac{1}{x_m^k}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(x_m^k\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) + B(x)u = f(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где $f(x)$ предполагается квадратично суммируемым с весом x_m^k в Ω^+, коэффициент $B(x)$ вещественный, измеримый и ограниченный в Ω^+, причем $\inf\limits_{x\in\Omega^+} B(x) > \lambda$. При указанных ограничениях оператор $\tilde{L}$ является положительно определенным.

Задача Дирихле при однородном краевом условии состоит в отыскании решения уравнения, обращающегося в нуль на Γ^+, четного по последней переменной.

Теорема 1. Оператор $\widetilde{L}$, заданный на множестве $C_{0,+}^{2}(\Omega^{+})$, допускает расширение до самосопряженного. Если же оператор $\widetilde{L}$ уже таким образом расширен, то уравнение (1) имеет решение при произвольной $f(x) \in L_{2,k}(\Omega^{+})$. Это решение имеет квадратично суммируемые в Ω^{+} с весом x_m^k обобщенные первые производные и допускает сколь угодно близкую аппроксимацию в смысле средней квадратичной близости первых производных, функциями равными нулю в пограничной полосе $\bar{\Gamma}^{+}$.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХАРДИ – ЛИТЛВУДА – ПЭЛИ

Родионов Т.В. (Москва)[1]

Обобщая известную в теории тригонометрических и ортогональных рядов теорему Харди – Литлвуда – Пэли, Марцинкевич и Зигмунд в работе [1] получили следующий результат (далее $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система (ОНС), $r \in (2, \infty]$, $\|\varphi_k\|_r \le M_k$, $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} c_j\varphi_j$, $k \in \mathbf{N}$):

Теорема 1. *Пусть $M_1 \le M_2 \le \ldots$. Тогда, если $2 \le p < r$ и для $\mathbf{c} = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет место оценка* $J_{r,p}(\mathbf{c}) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^p k^{(p-2)\frac{r-1}{r-2}} M_k^{(p-2)\frac{r}{r-2}}\right)^{1/p} < \infty$, *то существует такая функция $f \in L^p[a,b]$, что $f = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$ в L^p, и $\|f\|_p \le A(r,p)J_{r,p}(\mathbf{c})$.*

В статье [2] С. А. Кириллов показал существенность условия монотонности $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ в теореме 1, а именно, он построил такую ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^{\infty}[0,1]$, что для любого $p > 2$ найдется числовая последовательность $\mathbf{c} = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $J_p(\mathbf{c}) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^p k^{p-2} M_k^{p-2}\right)^{1/p} < \infty$, где $M_k = \|\psi_k\|_{\infty}$, но L^2-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 99-01-00354) и программы "Ведущие научные школы РФ" (проект № 00-15-96143).

сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k \notin L^p[0,1]$.

Изучая разложения функций из пространств L^p по ортоподобным системам разложения, введенным в [3], автор получил, в частности для счетных ортоподобных (в том числе и полных ортонормированных) систем, условия на $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, достаточные, для того чтобы $f \in L^p$.

Теорема 2. *Если последовательность $\{u_k > 0\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет оценке*

$$\sum_{u_k M_k^2 > z} \frac{1}{u_k^2 M_k^2} \le \frac{B}{z} \quad , \quad z > 0, \text{ и} \tag{1}$$

$$\tilde{J}_{r,p}(\mathbf{c}) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p u_k^{(p-2)\frac{r-1}{r-2}} M_k^{(p-2)\frac{r}{r-2}} \right)^{1/p} \quad , \quad 2 \le p < r. \tag{2}$$

то существует такая функция $f \in L^p$, что $f = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$ в L^p, и $\|f\|_p \le A(r,p,B)\tilde{J}_{r,p}(\mathbf{c})$.

В случае монотонной $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно взять $u_k = k$ и получить теорему 1. Но теорема 2 позволяет и для, вообще говоря, произвольных $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ подбором $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ получать условия вида (2) менее жесткие, чем $J_{r,p}(\mathbf{c}) < \infty$ с $M_k^* = \max\limits_{j=1,\dots,k} M_j$ вместо M_k, которое всегда дается теоремой 1. Например, для упомянутой выше системы $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ найдено семейство последовательностей $\{u_k(\varepsilon)\}_{k=1}^{\infty}$, $0 < \varepsilon < 1/2$, удовлетворяющих неравенству (1), для которых $\tilde{J}_{\infty,p}(\mathbf{c})$ при $\varepsilon \to 1/2-0$ стремится к $J_p(\mathbf{c})$. При этом $A(\infty, p, B)$ остается ограниченной.

Литература

1. *Marcinkiewicz J., Zygmund A.* Some theorems on orthogonal systems // Fund. Math. - 1937. - v. 28. - p. 309 - 335.

2. *Кириллов С. А.* О теореме Марцинкевича - Зигмунда // Мат. заметки. - 1998. - т. 63, вып. 3. - с. 386-390.

3. *Лукашенко Т. П.* Ортоподобные неотрицательные системы разложения // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1.Матем.Механ. - 1997. - № 5. - с. 27 - 31.

О 2-КРАТНОЙ НЕПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рыхлов В.С. (Саратов)[1]

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ квадратичный пучок второго порядка $L(\lambda)$, определяемый дифференциальным выражением

$$l(y,\lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$

и двухточечными краевыми условиями

$$U_\nu(y,\lambda) \equiv U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda) :=$$
$$\left(\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)\right) + \left(\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)\right) = 0, \nu = 1,2,$$

где $p_j, \alpha_{\nu s}, \beta_{\nu s} \in \mathbf{C}$. Для определенности считаем, что $\alpha_{\nu 1}\beta_{\nu 1} \neq 0$.

Пусть ω_1, ω_2 — корни характеристического уравнения. Предположим, что эти корни лежат на одном луче, выходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать $0 < \omega_1 < \omega_2$. Ф.С.Р. уравнения $l(y,\lambda) = 0$ есть $y_1(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_2 x)$. Обозначим $v_{\nu j}(\lambda) := U_{\nu 0}(y_j,\lambda)$, $w_{\nu j}(\lambda) := e^{-\lambda\omega_j} U_{\nu 1}(y_j,\lambda)$, $\nu, j = 1,2$, и $V_j(\lambda) := [v_{1j}, v_{2j}]^T$, $W_j(\lambda) := [w_{1j}, w_{2j}]^T$, $j = 1,2$. Пусть $\tau := \omega_2/\omega_1$. Очевидно $\tau > 1$. Положим $a_{sj} := \det[W_s, W_j]$, $a_{\bar{s}j} := \det[V_s, W_j]$, $a_{s\bar{j}} := \det[W_s, V_j]$, $a_{\bar{s}\bar{j}} := \det[V_s, V_j]$, $b_0 := -a_{2\bar{2}}/a_{2\bar{1}}$. Основными являются следующие предположения

$$a_{12} = 0, \quad a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0, \quad a_{\bar{1}2} \neq 0. \tag{1}$$

Обозначим $\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{C} : \Delta(\lambda) = 0\}$, $Y = \{y(x,\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$, где $\Delta(\lambda) := a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1} a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2}$, $y(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_2 x) + b_0 \exp(\lambda\omega_1 x)$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество всех ненулевых собственных значений пучка $L(\lambda)$, а множество $Y \setminus \{y(x,0)\}$ есть множество всех собственных функций пучка, соответствующих ненулевым собственным значениям. Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Если выполняются условия* (1) *и* $a_{2\bar{2}} \neq 0$ *(в этом случае* $b_0 \neq 0$*, а* $a_{1\bar{2}}$ *может равняться нулю, а может*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №00-01-00075) и программы "Ведущие научные школы" (проект №00-15-96123)

быть и отличным от нуля), то система Y 2-кратно не полна в пространстве $L_2[0,\sigma]$ и имеет бесконечный дефект относительно 2-кратной полноты при любом $\sigma > 0$.

Теорема 2. *Если выполняются условия (1) и $a_{2\bar{2}} = 0$, то $a_{1\bar{2}} = 0$ и система Y, определяемая в данном случае функциями $y(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_2 x)$ и $\Delta(\lambda) = a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2}$, 1-кратно полна, минимальна и образует базис Рисса в $L_2[0,1]$, а относительно 2-кратной полноты имеет бесконечный дефект.*

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ-ФАБЕРА-ШАУДЕРА ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Сабурова Т.Н.(Москва)
E-mail:tania@sab.misa.ac.ru

Система Фабера-Шаудера $\varphi_m(x)$, как известно, является базисом в C[0,1] — пространстве функций, непрерывных на отрезке [0,1]. Она порождается одной функцией φ_2(x) : если $m = 2^k + l$,то φ_m $=\varphi_2(2^k x - (l-1))$,причем предполагается, что $\varphi_2(x)$ равна нулю вне отрезка [0,1]. Из результатов [1] следует,что произведение $\varphi_{m_1}(x_1)\varphi_{m_2}(x_2)...\varphi_{m_n}(x_n)$(при нумерации по квадратам) образует базис в $C[0,1]^n$ - пространстве функций, непрерывных на n-мерном единичном кубе $[0,1]^n$. Такой базис также назовем базисами Фабера- Шаудера (БФШ).

Пусть теперь $T = \{T_m(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ - БФШ на $[0,1]^n$; А - класс функций $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in C[0,1]^n$, у которых сходится ряд $\sum \mid a_m(f) \mid$ (здесь$\{a_m(f)\}$ - последовательность коэффициентов Фурье БФШ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$). Нас будет интересовать вопрос: при каких условиях, наложенных на функцию $F(x)$, можно утверждать, что для любой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ суперпозиция $F(f(x_1, x_2, ..., x_n)) \in$ А. Такого рода задачи решали ранее многие авторы применительно к той или иной системе , например, для тригонометрической - Y.Katznelson и P.Levy, для Хаара - П.Л.Ульянов, автором также рассматривался этот вопрос для системы Фабера-Шаудера.

Для функций нескольких перменных удалось получить следующий результат.

Теорема. *Если функция* $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ *и* $F(x)$ *- целая функция, то функция* $F(f(x_1, x_2, ..., x_n)) \in A$.

Замечание. *При n=1 этот результат вытекает из ранее доказанной автором более общей теоремы (см.[2]).*

Литература

1. Z. Semadeni *Product Schauder Bases and Approximation with Nodes in Spases of Continuous Functions*//Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math.- 1963. - T.X 1,No. 6.- C. 387-391.

2. Сабурова Т.Н. *Суперпозиции функций и их ряды по системе Фабера-Шаудера*// Известия АНРФ,серия математическая-1972. - Т.36,No. 2.-С. 401-423.

О НЕКОТОРЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЯДРАХ

Садекова Е.Х. (Москва)

В вопросах, связанных с приближением функций полиномами в хаусдорфовой метрике, важную роль играют полиномиальные положительные ядра с хорошей δ-образностью, точнее, такие четные положительные тригонометрические полиномы $K_n(\delta; x)$ порядка n, для которых при условии $\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(\delta; x)\,dx = 1$ величины

$$\int\limits_0^\delta K_n(\delta; x)\,dx, \int\limits_0^\delta xK_n(\delta; x)\,dx$$

малы при фиксированном $\delta \in (0, \pi)$ и больших n. Ниже для построения таких ядер предлагается использовать полиномы $U_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \cdot (cos(n+1)arccosx)'$ Чебышёва второго рода.

Теорема 1. *Пусть* $n = 1, 2, \dots, 0 < \delta < \pi, (n+1)\delta \geq 2$,

$$V_n(\delta; x) := U_n^2(cos\frac{x}{2} \Big/ cos\frac{\delta}{2}).$$

Тогда

$$\int_{\delta}^{\pi} V_n(\delta;x)dx \Big/ \int_{0}^{\delta} V_n(\delta;x)dx \le \frac{10}{cos\frac{\delta}{2}} \frac{\sqrt{(n+1)\delta}}{e^{(n+1)\delta}} ln(e^3(n+1)\delta).$$

Теорема 2. *Пусть* $n = 2, 3, ..., 0 < \delta < \pi, (n+1)\delta \ge 2,$

$$W_n(\delta;x) := U^4_{[\frac{n}{2}]}(cos\frac{x}{2} \Big/ cos\frac{\delta}{2}).$$

Тогда

$$\int_{\delta}^{\pi} xW_n(\delta;x)\,dx \Big/ \int_{0}^{\delta} W_n(\delta;x)\,dx \le \frac{20}{cos^4\frac{\delta}{2}} \frac{((n+2)\delta)^{5/2}}{e^{(n+1)\delta}}\delta.$$

Нормировав полиномы $V_n(\delta;x)$ и $W_n(\delta;x)$, получаем ядра с нужными свойствами.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СЛЕДЫ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Садовничая И.В. (Москва)

savchuk_am@public.mtu.ru

В пространстве $L_2[0,\infty)$ рассмотрим самосопряженный оператор L, порождаемый выражением $l(y) = (-1)^n \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + xy$, $n \in N$, и общими краевыми условиями в точке $x = 0$. Этот оператор полуограничен снизу, с дискретным спектром. В работе [1] для таких операторов в случае четного n получены асимптотические разложения собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ по степеням k при $k \to \infty$ и вычислены регуляризованные следы всех порядков, т.е. ряды вида

$$\sum_k (\lambda_k^m - A_m(k)) = S_m, \qquad m \in N_0, \tag{1}$$

где $A_m(k)$ – некоторые выражения, обеспечивающие сходимость ряда. Выражения $A_m(k)$ и S_m предъявляются явно. В настоящей работе рассматривается случай нечетного n.

Теорема 1

$$\lambda_k \sim \left(\frac{2n+1}{2n}\pi k\right)^{\frac{2n}{2n+1}} \left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\eta_s k^{-s}\right), \quad k\to\infty,$$

где коэффициенты η_s вычисляются по рекуррентным формулам.

Из асимптотики (2) видно, что нам известны собственные значения при больших n с высокой точностью. Для получения большей информации о собственных значениях, особенно первых, выписываются системы тождеств (1). Для вычисления регуляризованных следов используется метод дзета–функции оператора.

Теорема 2. *Для любого $\tau \in N$ и любого целого m, $0 \le m < \frac{(2n+1)\tau}{2n}$, справедливы равенства:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\lambda_k^m - \left(\frac{2n+1}{2n}\pi k\right)^{\frac{2nm}{2n+1}} - \sum_{s=1}^{\tau}\xi_s k^{\frac{2nm}{2n+1}-s}\right] =$$

$$= \gamma_{1+\frac{2nm}{2n+1}} - \sum_{s=0}^{\tau}\xi_s\zeta\left(s-\frac{2nm}{2n+1}\right),$$

где $\xi_s = \eta_s(\frac{2n+1}{2n}\pi)^{\frac{2nm}{2n+1}}$, $\eta_0 = 1$, η_s, γ_s – коэффициенты асимптотических разложений; ζ — дзета-функция Римана.

Литература

[1] Печенцов А. С. О следах сингулярных дифференциальных операторов высших порядков // ДАН СССР, 1990, т. 312, /No 6, с. 1321–1324.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Сакбаев В.Ж. (Москва)

seva@math.mipt.ru

В предлагаемой работе изучается задача Коши для уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = Lu = -\frac{\partial}{\partial x}(\epsilon(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{i}{2}(\frac{\partial a(x)u}{\partial x} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in R,\ t \in R_+ = (0, +\infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in R, \tag{2}$$

в которой оператор L является линейным дифференциальным оператором переменного типа. Здесь $u_0(x)$ - заданная комплекснозначная функция, функция $u(x,t)$ подлежит определению. Вещественнозначные функции $\epsilon(x)$ и $a(x)$ ограничены и непрерывны за исключением конечного число точек разрыва первого рода и $\epsilon(x) \geq 0$.

Рассматривается следующая модельная задача:

$$\epsilon(x) = \theta(x) + (1-\theta(x))\epsilon; \quad a(x) = a\theta(x),$$

где $\theta(x)$ - функция Хевисайда, $\epsilon \geq 0$, $a \in R$.

Максимальную область определения симметического оператора L в пространстве $L_2(R)$ обозначим через $D(L)$ и превратим в гильбертово пространство с нормой графика оператора L. Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию $u(x,t) \in C^1(R_+, L_2(R) \bigcap C(R_+, D(L))$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду и $\lim\limits_{t\to 0} ||u(x,t) - u_0(x)||_{L_2(R)} = 0$.

Указана корректная постановка задачи Коши (1), (2) для семейства невырожденных задач ($\epsilon > 0$); для вырожденной задачи ($\epsilon = 0$) указан класс $N \subset L_2(R)$ начальных условий $u_0(x)$, для которых задача (1), (2) имеет единственное решение. Показано, что для любого $u_0(x) \in N$ и любого $T > 0$ имеет место соотношение $||u_\epsilon(x,t) - u(x,t)||_{C([0,T],L_2(R)} \to 0$ при $\epsilon \to 0$.

Изучается вопрос об изменении постановки вырожденной задачи (1), (2) в случае, когда $u_0(x) \notin N$. Подробнее см. [1].

Литература

1. Сакбаев В.Ж.// Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики, 1999, сб. МФТИ, с. 161-178.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ РЕДУКЦИИ КАЧЧИОПОЛИ

Сапронов Ю.И., Смольянов В.А. (Воронеж)

Yuri@spr.vsu.ru

Известно, что многие нелинейные задачи математической физики записываются в виде уравнения $f(x) = 0,\ \ x \in \mathcal{O} \subset X$, в котором f — гладкое фредгольмово индекса нуль отображение банаховых пространств X, Y [1]. Исследование такого уравнения можно осуществлять по схеме Каччиополи редукцией к конечномерному уравнению [1] $\theta(\xi) = 0,\ \ \xi \in M^n$, в котором $\theta = P \cdot f|_M$, M — гладкое n-мерное (ключевое) подмногообразие в $\mathcal{O}$, P — проектор на конечномерное подпространство в F. При этом предполагается, что f трансверсально $Im\ P$ (на $\mathcal{O}$) и $M = f^{-1}(Im\ P)$.

Схема Каччиополи естественно переносится на случай, в котором вместо P задано гладкое семейство проекторов $P(x)$, $dim\ Im\ P(x) = n$, с условием $M^n = \{x : (I - P(x))f(x) = 0\}$ и $(I - P(a))\frac{\partial}{\partial x}(I - P(x))f(x)$ — эпиморфизм на $Im\ (I - P(a))$ $\forall a \in M^n$. Исходное уравнение сводится к эквивалентному уравнению $\theta(\xi) = 0,\ \ \xi \in M^n$, в котором $\theta(\xi) = P(\xi)f(\xi)$ — гладкое сечение n-мерного векторного расслоения с базой M^n, порожденного пучком n-мерных подпространств $Im\ P(x)$. Если ключевое подмногообразие M^n компактно, то оно структурно устойчиво: при малых гладких возмущениях f вблизи M^n сохранится диффеоморфное M^n гладкое ключевое подмногообразие возмущенного уравнения.

Данная схема позволяет исследовать ветви решений уравнений с параметром в ситуации разрушения непрерывной симметрии уравнения (эквивариантности относительно действия непрерывной компактной группы Ли). Ключевое подмногообразие возмущенного уравнения возникает вблизи регулярной орбиты решений невозмущенного уравнения (см. [2]). Опираясь на данную схему, можно построить эффективную схему вычисления и анализа циклов, бифурцирующих из сложного фокуса (с сильным резонансом) для гладкой динамической системы $\dot{x} = X(x, \varepsilon),\ \ x \in \mathbf{R}^n, \varepsilon \in \mathbf{R}^m$.

Литература.

1. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные

фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера// Успехи матем. наук. 1977. Т.32, вып.4. С.3-54.

2. Сапронова Т.Ю. Квазиинвариантные подмногообразия фредгольмовых функционалов // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. Воронеж. 1999. С.150-155.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНДЕКСОВ МОРСА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПЕТЕЛЬ В SO(n)

Т.Ю. Сапронова (Воронеж)
Tanya@spr.vsu.ru

Известно, что геодезические петли в единице группы $SO(n)$ являются экстремалями функционала Дирихле $V(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{f}(t)|^2 dt$ на банаховой группе Ли $\mathcal{M}$ C^2-петель $f : [0,1] \longrightarrow SO(n)$, $f(0) = f(1) = I$. Функционал V инвариантен относительно действия $(g, f) \mapsto g^{-1}fg$ группы $SO(n)$ на $\mathcal{M}$. Нетрудно показать, что индекс Морса критической орбиты петли f совпадает с суммой кратностей отрицательных собственных значений второго кодифференциала $\nabla^2 V(f) := \hat{\Pi}_f \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f}(f)$, где $\mathcal{F}(f) = grad_{\mathcal{M}} V(f)$, $\hat{\Pi}_f$ — ортогональный (в L_2) проектор на $\hat{T}_f(\mathcal{M}) := \{h \in C^0([0,1], Mat(3,3)) : f^{-1}(t)h(t) \in so(3)) \ \forall t\}$.

Поскольку петля f является экстремалью функционала V тогда и только тогда, когда $f^{-1}\dot{f} = W = const$ $(f(t) = exp(tW),\ exp(W) = I)$, то на критической петле f имеет место представление $\nabla^2 V(f) = -L_f A L_f^{-1}$, в котором L_f — оператор левого группового сдвига, а $A = -\left(\frac{d^2}{dt^2} + ad_W \frac{d}{dt}\right)$.

Вычисление индекса Морса петли f сводится к отысканию отрицательных собственных значений оператора A и отвечающих им собственных векторов [1]. Это предложение вытекает из общего утверждения о том, что симметричный оператор $J = \frac{d^2}{dt^2} + B\frac{d}{dt}$ (B — постоянная кососимметрическая матрица) обладает полной ортонормированной в $L_2([0,1], R^m)$ системой собственных векторов, принадлежащих $\overset{o}{W_2^2}([0,1], R^m) = W_2^2([0,1], R^m) \cap \{h(0) = h(0) = 0\}$.

Литература:

[1] Борисович Ю.Г., Сапронова Т.Ю. Спектральный подход к вычислению индексов Морса критических орбит интеграла Дирихле на многообразии C^2–петель в группе $SO(3)$ // Труды математического факультета. Новая серия. – Воронеж, ВГУ. 1998. N3. – С.9-14.

СИНГУЛЯРНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Сахаров А.Н. (Нижний Новгород)

ngsha@sandy.ru

В работе рассматривается задача о существовании и аналитических свойствах преобразования $x = U(z)y$, приводящего голоморфную в кольце $\{z \in \mathbf{C} : 0 < |z| < r\}$ систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dz} = A(z)x, \quad x \in \mathbf{C}^n \tag{1}$$

к простейшему виду: *сингулярной нормальной форме.*

Получены следующие результаты:

Теорема 1. *Существует формальное преобразование $x = U(z)y$, приводящее систему (1) к формальной нормальной форме вида*

$$\frac{dy}{dz} = \sum_{k=-r}^{r} B_{j_k} z^{j_k}. \tag{2}$$

Формальная нормальная форма интегрируема.

Формальная нормальная форма строится с помощью модификации алгоритма нормализации теории резонансных нормальных форм Пуанкаре-Дюлака [1]. Формальная фундаментальная матрица решений имеет структуру, аналогичную структуре фундаментальной матрицы решений регулярной системы [4]. Последнее обстоятельство связано с тем, преобразование $U(z)$ представляется формальным рядом Лорана с бесконечной главной частью.

Теорема 2. *Нормализующее преобразование аналитично, если система (1) является малым возмущением системы класса*

Фукса:

$$A(z) = z^{-1}A_{-1} + R(z,\varepsilon).$$

Препятствием для сходимости в общем случае является наличие критических точек семейства матриц $B_{-1}(\varepsilon) = A_{-1} + O(\varepsilon)$.

В качестве применения этих результатов рассмотрена задача о приводимости системы

$$z\frac{dx}{dz} = z^{1-s}A(z)x, \quad s > 0,$$

где $A(z)$ - целая матрица-функция, $A(0) \neq 0$, к *биркгофовой стандартной форме* голоморфно оратимым в нуле преобразованием $x = U(z)y$ (см. [2], [3]).

Литература

[1] В. И. Арнольд, *Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений*// М: Наука. 1978.

[2] А. А. Болибрух, *Об аналитическом преобразовании к стандартной биркгофовой форме*//ДАН 1994. 334. 5. 553-555.

[3] G. Birkhoff, *Equivalent singulare points of ordinary linear differential equations*//Math. Ann. 74. 1913. 134-139.

[4] H. M. Levelt, *Hypergeometric functions* // Proc. Konicl. Netherlands Acad. Wet. Ser. A, Math. Sci. 64. 1961. 361-401.

ОБ ОДНОМ МНОЖЕСТВЕ "НОВЫХ" РЕЗУЛЬТАТОВ

Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. (Челябинск)

ridyu@cgu.chel.su, kar@cgu.chel.su

В [1] были введены в рассмотрение относительно σ-ограниченные операторы, в [2] – относительно секториальные операторы. В [3] рассмотрены относительно p-секториальные операторы. Основные итоги этих исследований подведены в [4]. В [5] полученные результаты распространены на замкнутые операторы. В [6] были изучены относительно радиальные, а в [7] – относительно p-радиальные операторы. Полные доказательства приведенных здесь результатов содержатся в [8].

Предложенная авторами теория линейных уравнений соболевского типа и вырожденных групп и полугрупп операторов стала фундаментом многих исследований [9]-[16]. Кроме того, одним из соавторов она адаптирована к уровню студентов старших курсов математических специальностей [17]. Однако, несмотря на обилие результатов и приложений, теория остается малоизвестной широкой математической общественности. По этой причине в последнее время в печати появляются статьи, в которых с использованием другой терминологии без доказательств и ссылок приводятся полученные авторами результаты. Именно, в [18, 19] таким способом препарированы результаты [1, 2, 4, 9], а в [20] – результаты [5-8]. В связи с этим обращаем внимание господ будущих плагиаторов на учебное пособие [17]. В нем содержатся подробные доказательства большинства упомянутых результатов, изложенные на весьма доступном уровне.

1. Свиридюк Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором // ДАН СССР. 1991. Т.318, № 4. С.828-831.

2. Свиридюк Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальными операторами // ДАН. 1993. Т.329, № 3. С.274-277.

3. Бокарева Т.А. Исследование фазовых пространств уравнений типа Соболева с относительно секториальными операторами. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Санкт-Петербург, 1993.

4. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. Т.49, № 4. С.47-74.

5. Дудко Л.Л. Исследование полугрупп операторов с ядрами. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Санкт-Петербург, 1996.

6. Свиридюк Г.А. Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывные полугруппы разрешающих операторов с ядрами // ДАН. 1994. Т.337, № 5. С.581-584.

7. Федоров В.Е. Линейные уравнения типа Соболева с относительно p-радиальными операторами // ДАН. 1996. Т.351, № 3. С.316-318.

8. Федоров В.Е. Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений типа Соболева. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Челябинск: ЧелГУ, 1996.

9. Свиридюк Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным

оператором // Алгебра и анализ. 1994. Т.6, № 5. С.252-272.

10. Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева // Сиб. матем. журн. 1995. Т.36, № 5. С.1130-1145.

11. Ефремов А.А. Исследование оптимального управления линейными уравнениями типа Соболева. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Челябинск: ЧелГУ, 1996.

12. Келлер А.В. Исследование ограниченных решений линейных уравнений соболевского типа. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Челябинск: ЧелГУ, 1998.

13. Якупов М.М. Исследование фазовых пространств некоторых задач гидродинамики. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Челябинск: ЧелГУ, 1999.

14. Кузнецов Г.А. Исследование относительно спектральных свойств линейных операторов. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Челябинск: ЧелГУ, 1999.

15. Федоров В.Е. Бесконечно дифференцируемые полугруппы операторов с ядрами // Сиб. мат. журн. 1999. Т.40, № 6. С. 1409-1421.

16. Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т.12. вып.3. С.173-200.

17. Федоров В.Е. Полугруппы и группы операторов с ядрами: Учебное пособие. - Челябинск: ЧелГУ, 1998.

18. Баскаков А.Г., Чернышов К.И. К спектральной теории пар линейных операторов // Изв. РАЕН, сер. МММИУ. 1997. Т.1, № 2. С.3-30.

19. Баскаков А.Г., Чернышов К.И. Линейное уравнение с вырожденным оператором при производной // Тез. докл. Всеросс. научн. конф., посв. пам. В.К.Иванова. Екатеринбург. 1998. С.44-45.

20. Баскаков А.Г., Чернышов К.И. Построение фазового пространства и решений линейных уравнений, не разрешенных относительно производной // ДАН. 2000. Т.371, № 3. С.295-298.

О РАВНОМЕРНОМ СВОЙСТВЕ САКСА СЕМЕЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ЗАРЯДОВ

Свистула М.Г. (Самара)

Здесь B – булева алгебра, Y – линейное нормированное пространство, все рассматриваемые функции $\mu : B \to Y$ являются конечноаддитивными, то есть зарядами.

Говорят, что семейство зарядов $\{\mu_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$:

– *равномерно исчерпывающее*, если для любой последовательности $\{b_n\} \subset B$, где $b_n \wedge b_m = 0$ при $n \neq m$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in N$ такое, что для всех $n > n_0$ имеем $\|\mu_\gamma(b_n)\| < \varepsilon$ сразу для всех $\gamma \in \Gamma$; в случае одной функции говорят, что она *исчерпывающая*;

– обладает *равномерным свойством Сакса*, если для любого $b \in B$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{b_1, \dots, b_n\}$ элемента b такое, что для всякого $i \in \overline{1,n}$ выполняется

$$\sup\{\|\mu_\gamma(a)\|, \ a \in B, \ a \leq b_i, \ \gamma \in \Gamma\} < \varepsilon;$$

в случае одной функции говорят, что она обладает *свойством Сакса*.

Известно, что для меры на булевой σ – алгебре свойство Сакса эквивалентно неатомичности.

Получена *теорема*:

Равномерно исчерпывающее семейство зарядов, каждый из которых обладает свойством Сакса, обладает равномерным свойством Сакса.

Следствие 1. Пусть $\mu_n : B \to Y$ – исчерпывающий заряд со свойством Сакса, $n \in N$; B – σ – алгебра; пусть $\mu(b) = \lim\limits_n \mu_n(b)$, $b \in B$. Тогда μ будет исчерпывающим зарядом со свойством Сакса.

Следствие 2. Поточечный предел последовательности неатомических мер на σ – алгебре будет неатомической мерой.

Литература

1. M. Bhaskara Rao and K.P.S. Bhaskara Rao. *Charges on Boolean algebras and almost discrete spaces* //Mathematika. 1973. N 20. P. 214-223.

2. Климкин В. М. *Введение в теорию функций множества.* Издательство Саратовского университета, Куйбышевский филиал. 1989. 210 с.

СУЩЕСТВУЮТ ЛИ БАЗИСЫ ИЗ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ L^p НА ПРЯМОЙ ?

Седлецкий А.М. (Москва)[1]

E-mail: sedlet@mail.ru

Рассматривается система взвешенных экспонент

$$\left(e^{i\lambda_n t}\exp(-a|t|^\alpha)\right), \quad \lambda_n \in \Lambda,\ a > 0,\ \alpha > 1. \tag{1}$$

В работах [1]-[3] содержатся различные достаточные, а также некоторые необходимые условия полноты системы (1) в $L^2(R)$. В [4] впервые была предъявлена полная и минимальная система (1) в $L^2(R)$ в случае $\alpha = 2$. Этот результат (также при $\alpha = 2$) был расширен в [5]. В статье автора [6] для произвольного $\alpha > 1$ построены классы полных и одновременно минимальных систем (1) в $L^p(R)$, $p \geq 2$.

Спрашивается, существуют ли базисы среди известных в литературе полных и минимальных систем (1) в $L^p(R)$?

Нами получено необходимое условие равномерной минимальности системы (1) в $L^p(R)$, $1 \leq p < \infty$. Оно формулируется в терминах индикатора порождающей функции, т.е. целой функции порядка $\beta = \alpha/(\alpha - 1)$, множество корней которой совпадает с Λ.

Оказалось, что во всех перечисленных выше случаях это необходимое условие не выполняется. Значит, известные в литературе полные и минимальные системы (1) в $L^p(R)$ не являются равномерно минимальными. Подавно они не могут быть базисами.

Литература

1. *Zalik R.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V.243. P. 299-308.

2. *Faxen B.* // Arc. Math. 1981. V.19. №2. P. 271-289.

3. *Седлецкий А.М.* // Матем. сб. 1984. Т.123. №1. С. 92-107.

4. *Zalik R., Abuabara Saad T.* // J. Math. Anal. Appl. 1987. V.126. P. 483-493.

5. *Сальникова Т.А.* // Матем. заметки. 1994. Т.55. №3. С. 118-129.

---

[1]Работа поддержана РФФИ, грант №00-01-00396.

6. *Седлецкий А.М.* // Матем. сб. 1998. Т.189. №3. С. 125-140.

К ВОПРОСУ ОБ УПРАВЛЕНИИ СПЕКТРОМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Сивков Д.А. (Ижевск)
dimasiv@udm.ru

Пусть Y – комплексное банахово пространство.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с линейным ограниченным ω-периодическим оператором $A(t) : Y \to Y$, зависящим от времени t,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), t \geq 0. \qquad (1)$$

Для того чтобы оператор Коши $X(t)$ периодического уравнения (1) допускал представление Флоке $X(t) = F(t)e^{tK}$ в виде произведения периодической дифференцируемой оператор-функции $F(t)$, имеющей ограниченный обратный оператор $F^{-1}(t)$, на операторную экспоненту e^{tK} с постоянным оператором K, необходимо и достаточно, чтобы оператор монодромии $X(\omega)$ этого уравнения имел логарифм. В частности, это имеет место, если спектр оператора монодромии не окружает нуля. Последнее справедливо в случае конечномерного пространства Y или если $A(t)$ – оператор-функция с вполне непрерывными значениями [1, с.285].

В статье [2] в случае конечномерного пространства Y исследована следующая задача:

требуется найти такой ω-периодический оператор $B(t) : Y \to Y$ минимального ранга, при котором спектр оператора монодромии возмущенной системы

$$\dot{x}(t) = (A(t) - B(t)F^{-1}(t))x(t) \qquad (2)$$

не пересекается с заданной ограниченной областью Ω комплексной плоскости C. Под рангом оператора $B(t)$ понимается rang $B(t) = \dim\{B(t)z | z \in Y, t \geq 0\}$.

С помощью представления Флоке и теоремы двойственности статьи [3] результат статьи [2] распространяется на бесконечномерный случай.

Теорема. *Пусть Ω – произвольная область C, содержащая не все ненулевые комплексные числа и такая, что ее замыкание $\overline{\Omega}$ не содержит единицу. Пусть, далее, существует компактный $\ln X(\omega)$. Тогда*

$$\max_{\rho \in \Omega} \dim \ker(X(\omega) - \rho I) = \min \operatorname{rang} B,$$

где минимум берется по всем ω-периодическим операторам $B(t)$, для которых спектр оператора монодромии возмущенной системы (2) не пересекается с областью Ω.

Литература

[1] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.-М.:Наука, 1970. -536 с.

[2] Исламов Г.Г. Об одном свойстве мультипликаторов линейных периодических систем // Изв. вузов. Математика.-1999.-N2.-С. 57-59.

[3] Исламов Г.Г. Экстремальные возмущения замкнутых операторов // Изв. вузов. Математика.-1989.-N1.-С. 35-41.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ БИФУРКАЦИОННОГО ТИПА

Сидоров Е.А. (Нижний Новгород)

ngsha@sandy.ru

Важное теоретическое и прикладное значение имеют специальные и обобщенные спектральные задачи, в частности, зависимость спектра от параметров (ветвление собственных значений, области устойчивости и неустойчивости).

В общей задаче ветвления решений наряду с развитием классичемких, в основном локальных методов (алгебраических, аналитических, топологических), широкое применение приобретают эффективные теоретико-групповые подходы [1].

В частных классах задач конструктивные результаты можно получить с использованием симметрии, инвариантных соотношений, например, подобия и др.

Ниже характер ветвления собственных значений спектральной задачи с параметрами $F(t,x,\lambda,\mu) = 0$, где F - оператор, определенный на соответствующем пространстве функций $X = \{x(t)\}$, λ - спектральный параметр, μ - "малый" параметр, исследуется на основе подобия при следующих условиях.

Предполагается, что при $\mu = 0$ существует собственное значение $\lambda = \lambda^*$ кратности m с собственными функциями (их базисом в линейном случае) $x_k(t)$ $(k = 1,...,m)$. Рассмтривается случай, когда при μ, близких к 0, происходит ветвление $\lambda_k = \lambda_k(\mu)$ $(k = 1,...,m)$ с соответствующими собственными функциями $x_k = x_k(t,\mu)$, причем выполняется соотношение подобия: $x_k(t,\mu) = h(t,\mu)x_k(t)$. В качестве примера можно привести задачу о ветвлении собственных значений для уравнения Хилла-Матье [2] (о пограничных кривых зон параметрического резонанса).

Наиболее просто рассматриваетсся случай 1-ой зоны для уравнения

$$x'' + (\lambda + \mu f(t,\mu))x = 0,$$

где f имеет период $T = \pi$ по t и $\lambda^* = 1$; $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$, так что $x_2 = x_1 \operatorname{tg} t$. Последнее соотношение при $\mu \neq 0$ приводит к следующим выражениям $x_2(t,\mu) = \cos t e^{\mu \sin^2 t}$, $\lambda_{1,2} = 2 - (1 \mp \mu)^2$; $f(t,\mu) = -4\cos 2t + \mu \cos^2 2t$.

Для случая n-ой зоны нетривиальные результаты получаются при более сложном соотношении между x_2 и x_1, например, $x_2 = \operatorname{tg}[nt(1+\mu\cos t)]$, то же относится и к связи между собственными функциями для различных собственных значений.

Изложенный подход применим и к оператору Лапласа, некоторым нелинейным уравнениям, например, $x''+(\lambda+\mu f)x+x^3 = 0$.

Замечание. В приведенной выше задаче построенные собственные функции являются субгармоническими порядка 2 с периодом $T_1 = 2T = 2\pi$, причем $x(t+\pi) = -x(t)$, так что квадрат этих функций имеет период π. Для нелинейного дифференциального уравнения существование такой пары решений можно рассматривать как своеобразную бифуркацию. В связи с этим установлено, что для уравнения Риккати $L(x) = x^2 + p(t)$, где

L - линейный дифференциальный оператор с коэффициентами периода π, а $p(t)$ - периода 2π, сумма двух решений, имеющих период 2π не может иметь период, меньший 2π. Аналогичный результат при некоторых условиях справедлив и для уравнения Абеля.

Литература

[1] Б. В. Логинов, *Теория ветвления решений нелинейных уравненей в условиях групповой инвариантности* // Ташкент: ФАН, 1985, 184.

[2] А. Найфе, *Методы возмущений*//М: Мир, 1976, 456.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЭЛЕМЕНТА НАИЛУЧШЕГО НЕСИММЕТРИЧНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Симонов Б.В. (Волгоград)[1]

Пусть $\Phi-$ совокупность непрерывных, неотрицательных, неубывающих и выпуклых вниз на $[0,+\infty)$ функций, удовлетворяющих Δ_2-условию; $L_0(T)-$множество измеримых функций m переменных, конечных почти всюду на $T \subset \mathbf{R^m}$; знаковая функция α_i равна $+$, если $i=1$, и $-$, если $i=2$; $f^+ = max\{f,0\}$, $f^- = (-f)^+$: $L_{\varphi_+\varphi_-} = \{f \in L_0(T) :\| f \|_{\varphi_+\varphi_-} = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_T \varphi_{\alpha_i}(f^{\alpha_i})d\mu < \infty\}$. Для веса $p = (p_+, p_-)$, где $p_{\alpha_i} \in L_0(T)(i=,1,2)$, введем обозначение: $(f;p) = \sum_{i=1}^{2} f^{\alpha_i} \cdot p_{\alpha_i}$. Положим $\rho(f,g) = \|(f-g;p)\|_{\varphi_+\varphi_-}$. Величину $\rho(f,H) = \inf\limits_{g\in H} \rho(f,g)$, где $H-$ конечномерное подпространство в $L_{\varphi_+\varphi_-}$, назовем наилучшим несимметричным приближением (н.н.п.), а элемент $g_0 \in H$, для которого $\rho(f,g_0) = \rho(f,H)$, $-$ элементом н.н.п.

Утверждение 1. Пусть $\varphi_+, \varphi_- \in \Phi$ и не являются константами или, наоборот, обе функции φ_+ и φ_- $-$ константы;

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 00-01-00042.

$p = (p_+, p_-)$– такой вес, что

$$\sum_{i=1}^{2} \mu\{t = (t_1, \ldots, t_m) \in T : p_{\alpha_i}(t) = 0\} = 0.$$

Тогда для любого конечномерного подпространства H из $L_{\varphi_+\varphi_-}$ и любой функции f из $L_{\varphi_+\varphi_-}$ существует элемент н.н.п.

Утверждение 2. Пусть $\varphi_+, \varphi_- \in \Phi, H$– конечномерное подпространство в $L_{\varphi_+\varphi_-}, \{q_i\}_{i=1}^{n}$–базис подпространства $H, p = (p_+, p_-)$–такой вес, что $f \cdot \varphi_{\alpha_i}, q_j \cdot \varphi_{\alpha_i} (i = 1, 2; j = 1, \ldots, n)$ принадлежат $L_{\varphi_+\phi_-}$.

Тогда для того чтобы функция $g_0 \in H$ была элементом н.н.п., необходимо, чтобы для любой функции g из H выполнялось условие:

$$\sum_{i=1}^{2} \Bigg\{ \int\limits_{T\setminus E} g(t)(sign(f(t) - g_0(t)); p(t))^{\alpha_i} \cdot (sign(f(t) - g_0(t)); \qquad (1)$$

$$D_g(\varphi_{\alpha_i}(((f(t) - g_0(t)); p(t))^{\alpha_i})))d\mu +$$

$$+\varphi'_{\alpha_i \Pi}(0) \int\limits_{E} (g(t(0); p(t))^{\alpha_i} d\mu \Bigg\} \geq 0,$$

где $E = \{t \in T : f(t) - g_0(t) = 0\}$.

Утверждение 3. Пусть $\varphi_+, \varphi_- \in \Phi, p = (p_+, p_-)$– вес, H– конечномерное подпространство в $L_{\varphi_+\varphi_-}, g_0 \in H$.

Тогда если для любой функции g из H выполняется условие (1), то функция g_0 является для f элементом н.н.п.

ДВУПОРОГОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ КВАЗИНОРМОЙ

Симонов Б.В. (Волгоград)[1]

Пусть Φ— совокупность непрерывных, неотрицательных, неубывающих и выпуклых вниз на $[0, +\infty)$ функций, удовлетворяющих Δ_2—условию; $L_0(T)$—множество измеримых функций n переменных, конечных почти всюду на $T \subset \mathbf{R^n}$; знаковая функция α_i равна $+$, если $i = 1$ или $-$, если $i = 2$ или $=$, если $i = 3$; $f^+ = max\{f, 0\}$, $f^- = (-f)^+$, $f^= = 1 - sign f^+ - sign f^-$; $L_{\varphi_+\varphi_-} = \{f \in L_0(T)$:
$\| f \|_{\varphi_+\varphi_-} = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_T \varphi_{\alpha_i}(f^{\alpha_i}) d\mu < \infty\}$; $(f)_{\lambda_1\lambda_2}^{\alpha_i\alpha_j} = f \cdot sign(f - \lambda_1)^{\alpha_i} \cdot sign(f-\lambda_2)^{\alpha_j}, j = 1, 2, 3,$ где $\lambda_1, \lambda_2 \in L_0(T)$— две пороговые функции. Для веса $p = (p_{++}, p_{+-}, p_{-+}, p_{--}, p_{-=}, p_{+=}, p_{+=}, p_{-=}, p_{==})$, где $p_{\alpha_i,\alpha_j} \in L_0(T)(i, j = 1, 2, 3)$, и функции f введем обозначение: $(f; p) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} f_{\lambda_1,\lambda_2}^{\alpha_i\alpha_j} \cdot p_{\alpha_i\alpha_j}$.

Пусть H— конечномерное подпространство в $L_{\varphi_+\varphi_-}$, $f, g \in L_{\varphi_+\varphi_-}$. Положим $\rho(f, g) = \| (f - g; p) \|_{\varphi_+\varphi_-}$. Величину $\rho(f, H) = \inf\limits_{g \in H} \rho(f, g)$ назовем наилучшим двупороговым приближением (н.д.п.), а элемент $g_0 \in H$, для которого $\rho(f, g_0) = \rho(f, H)$— элементом н.д.п. Элемент $g_0 \in H$ назовем псевдоэлементом н.д.п. для минимизирующей последовательности $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \in H$ (т.е. такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(f, g_k) = \rho(f, H)$), если существует такая ее подпоследовательность g_{k_s}, что
$\lim\limits_{s\to\infty} g_{k_s}(t) = g_0(t)$ для почти всех t.

Утверждение. Пусть $\varphi_+, \varphi_- \in \Phi$ и не являются константами или, наоборот, обе функции φ_+ и φ_-— константы; p— такой вес, что

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \mu\{t \in T : p_{\alpha_i\alpha_j}(t) = 0\} = 0.$$

Тогда для любого конечномерного подпространства H из $L_{\varphi_+\varphi_-}$ и любой функции f из $L_{\varphi_+\varphi_-}$ существует элемент н.д.п.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 00-01-00042.

Если $g_0 \in H$ – такой ее псевдоэлемент н.д.п., что

$$\sum_{i=1}^{2} \mu\{t \in T_1 : f(t) - g_0(t) = \lambda_i(t), \lambda_i(t) \neq 0\} = 0$$

(где $T_1 = T \setminus (E_{011} \cup E_{101} \cup E_{111} \cup E_{00} \cup E_{222}, E_{011}, E_{101}, E_{111}, E_{00}$, E_{222} являются множествами, зависящими от пороговых функций $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ и веса p), то g_0 является элементом н.д.п.

Аналогичное утверждение справедливо и для m-порогового приближения ($m \in N$).

О НОВОЙ ДЕСКРИПТИВНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛОВ БОХНЕРА И ДАНЖУА–БОХНЕРА

Скворцов В.А., Солодов А.П. (Москва)[1]

vaskvor@mech.math.msu.su, asolodov@mech.math.msu.su

Понятие вариационной меры относительно дифференциального базиса, порождаемой функцией интервала, играет существенную роль в теории интегрирования вещественнозначных функций. Оно может быть использовано и при изучении вопросов интегрирования банаховозначных функций.

Определение вариационной меры в банаховозначном случае полностью аналогично вещественному случаю. Пусть F — банаховозначная функция интервала, определенная на семействе $\mathcal{J}$ интервалов из $\mathbf{R}^n$, составляющих базис. Для положительной функции $\delta : \mathbf{R}^n \longrightarrow (0, \infty)$ и множества $E \subset \mathbf{R}^n$ определим *δ-вариацию Мак-Шейна* $\operatorname{Var}(F, \delta, E) = \sup \sum_j \left\| F(I_j) \right\|$, где sup берется по всем наборам пар $\left\{ (I_j, x_j) \right\}_j$, удовлетворяющих условию: интервалы $I_j \in \mathcal{J}$ не перекрываются, $x_j \in E$ и I_j содержится в $\delta(x_j)$–окрестности точки x_j. При замене условия $x_j \in E$ в последнем определении условием $x_j \in E \cap I_j$

[1]Работа поддержана РФФИ (грант № 99-01-00354) и программой поддержки ведущих научных школ РФ (грант 00-15-96143)

получаем определение *δ-вариации Хенстока.* Тогда *вариационной мерой Мак-Шейна (Хенстока)* является функция множества $V_F(E) = \inf \mathrm{Var}(F, \delta, E)$, где inf берется по всем положительным функциям δ. Функция V_F является метрической внешней мерой.

В терминах вариационной меры для широкого класса базисов можно дать следующую дескриптивную характеристику вариационного интеграла, определяемого для соответствующего базиса (определения см. в [1]): *аддитивная функция интервала F, определенная на подинтервалах некоторого интервала I_0 и принимающая значения в банаховом пространстве X является вариационным интегралом на I_0 (в смысле базиса $\mathcal{B}$) некоторой функции $f : I_0 \longrightarrow X$ тогда, и только тогда, когда соответствующая вариационная мера, порождаемая функцией F, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, функция F дифференцируема п. в. относительно базиса $\mathcal{B}$ и $F'_{\mathcal{B}}(x) = f(x)$ п. в. на I_0.*

Это утверждение обобщает соответствующую теорему из [2], доказанную для базиса, образованного всеми подинтервалами некоторого интервала на прямой, и дающую дескриптивную характеристику интеграла Данжуа-Бохнера. В этом последнем случае для класса банаховых пространств X, не содержащих подпространства, изоморфного l_1, среди условий, достаточных для того, чтобы функция $F : \mathcal{J} \longrightarrow X$ была интегралом некоторой функции f, можно опустить требование дифференцируемости F почти всюду, если интеграл понимать в смысле некоторого обобщения интеграла Гельфанда (см. [3]), а в качестве подинтегральных функций f допускать функции, принимающие значения в X^{**}.

Литература

1. B. Bongiorno, L. Di Piazza, V. A. Skvortsov, *On Variational measure related to some bases*// Journal of Math. Analysis (в печати).

2. В. А. Скворцов, А. П. Солодов, *Сравнение некоторых обобщений интеграла Бохнера*// Современные проблемы теории функций и их приложения:Тезисы докладов, Саратов, 2000, 130 с.

3. J. Diestel, J. J. Uhl, *Vector Measures*, Providence, 1977.

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ В СМЫСЛЕ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ ФУНКЦИЙ ОТРЕЗКЕ $[-1, 1]$

Смотрицкий К.А. (Беларусь, Гродно)
K_Smotritski@mail.ru

Пусть задана последовательность чисел $\{\alpha_k\}_{k=0}^{+\infty}$: $\alpha_0 = 0$, $|\alpha_k| < 1$, $k \in \mathbf{N}$. В работе [1] М.М. Джрбашяна и А.А. Китбаляна построена ортонормальная по весу $1/\sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$ система рациональных функций. Е.А. Ровбой [2] был введен ряд Фурье для суммируемой на отрезке $[-1, 1]$ с весом $1/\sqrt{1-x^2}$ функции f по этой системе. Будем полагать, что числа α_k являются действительными либо попатно комплексно сопряженными. Тогда частную сумму этого ряда можно представить в виде

$$s_n(x, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos t) D_n(t, \theta) dt, \quad x = \cos\theta,$$

$$D_n(t, \theta) = \sin \frac{\int_\theta^t (1/2 + \lambda_n(u)) du}{\sin \frac{t-\theta}{2}},$$

$$\lambda_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \theta_k) + |\alpha_k|^2}.$$

Для функции $f \in C[-1, 1]$ рассмотрим также оператор Валле–Пуссена (см. [2]).

$$V_{2n}(x, f) = \frac{1}{2\pi(1 + \lambda_n(\theta))} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) Q_{2n}(t, \theta) dt, \quad x = \cos\theta,$$

$$Q_{2n}(t, \theta) = \frac{\sin^2 2\lambda_n(t, \theta) - \sin^2 \lambda_n(t, \theta)}{\sin^2 \frac{t-\theta}{2}},$$

$$\lambda_n(t, \theta) = \frac{1}{2} \int\limits_\theta^t (1 + \lambda_n(u)) du.$$

Теорема 1. *Если функция* $f \in W^r V[-1,1]$, $r > 0$, *то параметры* α_k, $k = \overline{1,n}$ *можно выбрать так, что справедливы оценки:*

$$\|f - s_n(\cdot, f)\|_{C[-1,1]} \leq \frac{C_1 \ln n}{n^{r+1}}, \quad n \geq n_0,$$

$$\|f - V_{2n}(\cdot, f)\|_{C[-1,1]} \leq \frac{C_2}{n^{r+1}}, \quad n \geq n_0,$$

где C_1, C_2 *— положительная постоянные, зависящие лишь от* r *и* M, $M = \|f\|_{C[-1,1]}$.

В случае операторов Валле-Пуссена полученная оценка является точной по порядку на данном классе, а в случае приближений рациональными операторами Фурье — отличается от точной разве лишь множителем $\ln n$.

Литература

1. Джрбашян М.М., Китбалян А.А. Об одном обобщении полиномов Чебышева // Докл. АН Арм. ССР. - 1964. - Т.38. № 5. - С.263-270.

2. Ровба Е.А. Рациональные интегральные операторы на отрезке // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1. — 1996. — № 1. — С.34–39.

КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ СЕМЕЙСТВА СЛАБО РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА

Срибная Т.А. (Самара)

В работе обобщена теорема Дьедонне - Гротендика [1] о равномерной непрерывности семейства ограниченных аддитивных регулярных функций множества.

Пусть (T, η) – регулярное хаусдорфово топологическое пространство, Σ – некоторая алгебра подмножеств множества T, $\Sigma \supset \eta$; пусть (X, τ) – произвольное топологическое пространство; $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \to X$, $\varphi(\emptyset) = e$, $e \in X$, – некоторое семейство функция множества; пусть $\mathcal{H}$ – фундаментальная система окрестностей точки $e \in X$. Если $\varphi \in \Phi$ и $E \in \Sigma$, то $\widetilde{\varphi}(E) = \{\varphi(F),\ F \subset E,\ F \in \Sigma\}$.

Будем говорить, что функция множества $\varphi \in \Phi$ слабо регулярная, если для любого множества $E \in \Sigma$ и для любой окрестности $u \in \mathcal{H}$ существует такое компактное множество $F \subset E$, что $\varphi(E \setminus F) \in u$.

Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно квазитреугольные, если для любой окрестности $u \in \mathcal{H}$ существует окрестность $\vartheta \in \mathcal{H}$, такая что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любых непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$ справедливо: если $\varphi(A) \in \vartheta$, $\varphi(B) \in \vartheta$, то $\varphi(A \cup B) \in u$; если $\varphi(A) \in \vartheta$, $\varphi(A \cup B) \in \vartheta$, то $\varphi(B) \in u$.

Теорема. Если $\Phi = \{\varphi\}$ – семейство слабо регулярных, равномерно квазитреугольных функций множества, заданных на алгебре Σ, содержащей класс открытых множеств регулярного хаусдорфова топологического пространства (T, η), и принимающих значения в топологическом пространстве X, то следующие условия эквивалентны.

1. Функции множества семейства Φ равномерно исчерпывающие на классе η открытых множеств. 2. Для любого множества $E \in \Sigma$ и для любой окрестности $u \in \mathcal{H}$ существует такое компактное множество F, что $F \subset E$, и $\widetilde{\varphi}(E \setminus F) \subset u$ и для любой функции $\varphi \in \Phi$. 3. Функции множества семейства Φ равномерно непрерывные на Σ. 4. Функции множества семейства Φ равномерно слабо непрерывные на классе η открытых множеств.

Литература

1. Grothendieck A. *Sur les applications lineaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$* //Canad. J. Math. 1953. V.51. P.129-173.

АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Старовойтов А. П. (Гомель, Беларусь)

Svoitov@gsu.unibel.by

Обозначим через $C_{2\pi}$ $(C^*_{2\pi})$ – банахово пространство действительных (комплекснозначных) 2π -периодических непрерывных функций, а $C^*(E)$ – банахово пространство непрерывных на компакте $E \subset \mathbf{R}$ комплекснозначных функций. Пусть $R_n^t(f)$ ($R_n^{*,t}(f)$) – наилучшие приближения функции $f \in C_{2\pi}$ ($f \in C_{2\pi}^*$) – тригонометрическими рациональными функциями с действительными(комплексными) коэффициентами; $R_n^*(f, E)$ - наилучшие приближения алгебраическими рациональными функциями с комплексными коэффициентами. Е.П. Долженко [1] установил, что если для $f \in C^*(E)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n^*(f, E) < \infty \quad \Longrightarrow \quad f\text{-абсолютно непрерывна на } E.$$

Им же показано, что для абсолютно непрерывной функции f ее наилучшие рациональные приближения $R_n^*(f)$ могут стремиться к нулю сколь угодно медленно. Позже А.А. Пекарский обнаружил [2], что теорема Е.П. Долженко справедлива и в $C_{2\pi}^*$: если для $f \in C_{2\pi}^*$

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n^{*,t}(f, E) < \infty \quad \Longrightarrow \quad f\text{-абсолютно непрерывна.}$$

В данном сообщении дается положительный ответ на следующий вопрос (см.[3-4]): Существует ли для заданной последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ действительная абсолютно непрерывная функция $f \in C_{2\pi}$ такая, что

$$R_n^t(f) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots ?$$

Существование функции $f \in C_{2\pi}$ устанавливается с помощью принципа Шаудера о неподвижной точке, а в основу ее конструкции положены алгебраические дроби Чебышева-Маркова наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке [-1,1]. При этом в доказательстве абсолютной непрерывности искомой функции мы не используем теорему Е.П. Долженко, а опираемся лишь на свойства алгебраических дробей Чебышева-Маркова. Построенная функция является нечетной.

Литература

1. Долженко Е. П. *Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций.* Матем. сб. 1962. Т.56(98). С. 403-433.

2. Пекарский А. А. *Рациональные приближения абсолютно непрерывных функций с производной из пространства Орлича.* Матем. сб. 1982. Т. 117(159). С. 114-130.

3. Долженко Е. П. *Сравнение скоростей рациональной и полиномиальной аппроксимаций.* Матем. заметки. 1967. Т.1. №3. С. 313-320.

4. Старовойтов А. П. *К проблеме описания последовательностей наилучших тригонометрических рациональных приближний.* Матем. сб. 2000. Т. 191. № 6. С. 145-154

ОТСУТСТВИЕ ШКАЛЫ ДЛЯ МЕТОДОВ ДИСКРЕТНЫХ СРЕДНИХ РИССА

Степанянц С.А. (Москва)[1]

В данной работе рассматриваются вопросы включения для двух классов методов суммирования числовых рядов (для методов дискретных средних Рисса (Rd,α) и методов Чезаро (C,α)). Если не оговорено противное, условимся считать, что k и l — целые числа, $k \geq 0$, $l \geq 0$, α, β —действительные числа, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Суммируемость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ к числу B методом P обозначается: $\sum a_n = B(P)$.

Говорят, что $\sum a_n = B(Rd,\alpha)$, если $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} (n-\nu)^\alpha a_\nu = B$. Определение методов (C,α) см. [1, глава 5, §4,5]. Будем говорить, что метод Q включается методом P $(Q \subset P)$, если из $\sum a_n = B(Q)$ следует, что $\sum a_n = B(P)$ (если Q не включается в P, то будем писать $Q \not\subset P$). Методы P и Q эквивалентны, если $P \subset Q$ и $Q \subset P$. Хорошо известны следующие включения методов суммирования:

1) $(C,\alpha) \subset (C,\beta)$ $\alpha \leq \beta$; $(C,\beta) \not\subset (C,\alpha)$ при $\alpha < \beta$. (т. е. методы Чезаро образуют шкалу — чем выше порядок метода, тем он "сильнее").

---

[1]Работа поддержана РФФИ (грант 00-01-00042) и программой поддержки ведущих научных школ РФ (грант 00-15-96143)

2) $(C,\alpha) \subset (Rd,\beta)$ $\alpha \leq \beta$; $(Rd,\beta) \not\subset (C,\alpha)$ при $\alpha < \beta$.

Особый интерес вызвал вопрос о справедливости включения $(Rd,\beta) \subset (C,\alpha)$ при $\alpha = \beta$. Еще в 1923 г. М. Риссу было известно, что при $\alpha = 2$ или $\alpha = 3$ $(Rd,\alpha) \not\subset (C,\alpha)$. Окончательный результат был получен в 1962 г. (см. [2]): $(C,\alpha) \sim (Rd,\alpha)$ для $\alpha < 2$; $(Rd,\alpha) \not\subset (C,\alpha)$ при $\alpha \geq 2$.

Тогда из 1 и 2 имеем: $(Rd,\alpha) \subset (Rd,\beta)$ при $\alpha < 2$; $\alpha < \beta$.

Исследуем вопрос о включении $(Rd,k) \subset (Rd,l)$ при $2 \leq k < l$. Справедлива

Теорема 1. $(Rd,2) \subset (C,3)$.

Следствие $(Rd,2) \subset (Rd,\beta)$ при $\beta \geq 3$.

Теорема 2. (отсутствие шкалы у методов дискретных средних Рисса) *Для любых целых k, l, таких что $3 \leq k < l$ существует ряд, такой что $\sum a_n = B(Rd,k)$, но $\sum a_n$ не суммируем (Rd,l), т. е. $(Rd,k) \not\subset (Rd,l)$*

Литература

1. Харди Г., Расходящиеся ряды. М.:ИЛ, 1951.

2. Kuttner B., On discontinuous Riesz means of type n // J. London Math. Soc. 37(1962), 354-364.

О МЕТОДЕ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ИТЕРАТИВНОГО АГРЕГИРОВАНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Стеценко В.Я., Гробова Т.А. (Ставрополь)

В работах [1,2] был предложен вариант метода итеративного агрегирования для решения линейных интегральных и операторных уравнений вида

$$x = Ax + f \qquad (1)$$

с линейным оператором A. По этому варианту был накоплен большой экспериментальный материал, показывающий эффективность этого метода и устанавливающий факты его сходимости для уравнений вида (1) с операторами A, спектральный радиус которых не только близок к единице, но и в ряде случаев превосходит единицу, т.е. в случае, когда $r(A) > 1$. Накопленный опыт использования метода [1] подсказал возможности использования аналога метода итеративного агрегирования и для решения нелинейных операторных уравнений вида

$$x = F(x) + f \tag{2}$$

с нелинейным оператором $F(x)$. В данной работе мы изучаем часть имеющегося экспериментального материала по применению аналога метода итеративного агрегирования для решения нелинейных операторных уравнений вида (2). При этом в качестве агрегирующих использован широкий класс функционалов. Сразу скажем, что в этом случае для сходимости метода к решению уравнения приходится предъявлять более жесткие требования к оператору $F(x)$ по сравнению с линейными уравнениями. Более того, проведенные эксперименты свидетельствуют о том, что даже сам факт "экспериментальной" сходимости метода далеко не всегда обеспечивает его сходимость к решению уравнения (2).

В этой связи, на наш взгляд, представляет определенный интерес теорема 1, содержащая достаточное условие сходимости метода итеративного агрегирования к решению нелинейного уравнения (2). Эти достаточные условия выглядят несколько жесткими, однако вычислительная практика свидетельствует о сходимости метода итеративного агрегирования и при нарушении этих условий. В этом случае наблюдается полная аналогия со случаем линейного операторного уравнения, для которого также установленные достаточные условия сходимости выглядят много "жестче", чем реальные условия сходимости, о чем уже было сказано выше (так, достаточное условие сходимости метода однопараметрического итеративного агрегирования, отмеченное в [1], имеет вид: $\rho(A) < 0.293$. В то же время, при практической реализации этого метода метод является сходящимся даже в тех случаях, когда $\rho(A)$ близок к единице, а в ряде случаев и превосходит 1).

При решении нелинейных алгебраических уравнений по методу однопараметрического итеративного агрегирования очень удобно использование универсальной системы MathCad 8.

Литература

1. Стеценко В.Я. Исследование сходимости метода многопараметрического итеративного агрегирования при решении линей-

ных алгебраических систем и интегральных уравнений.// Материалы совещания "Теория и практика использования методов агрегирования в планировании и управлении". – Киев: Изд. АН АРМ ССР, 1984. – С. 74-81.

2. Итеративное агрегирование и его применение в планировании. Под ред. Дудкина Л.М. – М.: Экономика, 1979. – 328с.

ВСПЛЕСКИ, ПОРОЖДАЕМЫЕ В–СПЛАЙНАМИ

Стрелков Н.А. (Ярославль)[1]

strelkov @ univ.uniyar.ac.ru

Доклад посвящен исследованию возможности кратно-масштабного анализа (вообще говоря, неортогонального) в $W_2^m(R)$ с масштабирующей функцией, являющейся B–сплайном.

Пусть m – фиксированное натуральное число, φ и ψ – функции, образы Фурье которых имеют следующий вид:

$$\widehat{\varphi}(t) = \left\{\frac{1-e^{-it}}{it}\right\}^{m+1}, \widehat{\psi}(t) = \frac{P(e^{-it/2})}{t^{m+1}}$$

(здесь

$$P(x) = x^{2s-1}\int_1^x \frac{(1-t^2)^m}{t^{2s}}dt$$

– зависящий от $s = 1, \dots, m$ алгебраический многочлен степени $2m$).

Тогда

1) $\varphi \in W_2^m(R)$ – B–сплайн Шенберга порядка m с носителем $[0, m+1]$;

2) $\psi \in W_2^m(R)$ – кусочно–полиномиальная функция с носителем $[0, m]$;

3) Если

$$V_0 = \{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in Z}, V_1 = \{\varphi(2\cdot - k)\}_{k\in Z}, W_0 = \{\psi(\cdot - k)\}_{k\in Z}, \quad (1)$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ и программы "Университеты России – фундаментальные исследования".

то $V_1 = V_0 \dot{+} W_0$, т.е. любой элемент $f \in V_1$ однозначно представляется в виде $f = g + h$, где $g \in V_0$, $h \in W_0$, причем имеется простая конструктивно описываемая зависимость коэффициентов разложения g и h от коэффициентов разложения f по базисам, фигурирующим в (1);

4) $\{\psi(2^n \cdot -k)\}_{n,k \in Z}$ – базис пространства $W_2^m(R)$.

Базисы вида 4) не являются ортогональными; исключение составляет случай $m = s = 1$, когда имеет место ортогональность относительно скалярного произведения $(f,g)_{W_2^1(R)} = (f',g')_{L_2(R)}$ (этот факт объясняется тем, что производные базисных функций с точностью до умножения на константу образуют ортонормированный в $L_2(R)$ базис Хаара).

Предполагается также осветить вопросы квазиортогональности и структуры двойственных базисов.

ОБ УГЛОВЫХ ОПЕРАТОРАХ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ОПЕРАТОРОВ КЛАССА (H)

Сухочева Л.И. (Воронеж)[1]

E-mail lsukh@imath.vsu.ru

Пусть $\mathcal{K}$ — пространство Крейна с индефинитной метрикой $[\cdot,\cdot]$, A — линейный непрерывный оператор одного из следующих классов: самосопряженный ($[Ax,y] = [x,Ay]$), диссипативный ($\mathrm{Im}\,[Ax,x] \geq 0$), унитарный ($[Ax,y] = [x,A^{-1}y]$) или сжимающий ($[Ax,Ax] \leq [x,x]$).

Говорят, что оператор A принадлежит классу Helton'a ($A \in (H)$), если у него существуют максимальне неотрицательное ($\mathcal{L}_+$) и максимальное неположительное ($\mathcal{L}_-$) инвариантные подпространства и каждое такое подпространство разлагается в сумму равномерно дефинитного и конечномерного нейтрального подпространств.

Примером таких операторов могут быть операторы, максимальные семидефинитные инвариантные подпространства которых имеют компактные угловые операторы относительно вы-

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 99-01-00391 и NWO-RFBR 047-008-008.

бранной фундаментальной симметрии. Именно такие унитарные операторы и рассматривал впервые J.W. Helton. Однако, примеры показывают, что не всегда угловые операторы максимальных семидефинитных инвариантных подпространств операторов класса (H) компактны.

Основной результат доклада:

Пусть $A \in (H)$. Тогда существует такое каноническое разложение пространства $\mathcal{K}$, что все угловые операторы максимальных семидефинитных инвариантных подпространств оператора A конечномерны.

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С РЕДКО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Теляковский С.А. (Москва)[1]

satelesatel.mian.su

Рассматриваются ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \tag{1}$$

и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \tag{2}$$

коэффициенты которых удовлетворяют условию $a_k = a_{n_m}$ для $n_{m-1} < k \le n_m$, где последовательность $\{n_m\}$ представима в виде объединения конечного числа лакунарных последовательностей.

Теорема 1. *Если $ka_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то ряд (1) сходится равномерно. Если $k|a_k| \le C$ для всех k, то последовательность частных сумм ряда (1) равномерно ограничена.*

Теорема 2. *Если ряд (2) сходится при $x = 0$ и $ka_k \to 0$ при $k \to \infty$, то ряд (2) сходится равномерно. Если последовательность частных сумм ряда (2) при $x = 0$ ограничена и $k|a_k| \le C$*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-01210).

для всех k, то последовательность частных сумм ряда (2) равномерно ограничена.

В этих утверждениях условия на скорость убывания коэффициентов рядов и необходимы, если последовательность $\{n_m\}$ лакунарна. В общем случае они не являются необходимыми.

УТОЧНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОЦЕНОК МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ

Тихонов С.Ю. (Москва)[1]

Работа посвящена уточнению оценок, полученных в статье [1]. Будем придерживаться введенных там обозначений. Также нам понадобятся следующие классы функций:

M_γ–класс функций $f(x) \in L_p$, имеющих ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, где $a_n n^\gamma \searrow 0 (n \longrightarrow \infty)$ для данного $\gamma \geq 0$; Λ–класс функций $f(x) \in L_p$, имеющих ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2^{n-1} x$.

Утверждение 1*Если $f(x) \in M_\gamma$, то*

а) утверждение теоремы 1([1]) верно при замене условия $0 < s \leq \theta$ на два условия: $0 < s \leq p$ и $0 < r < \gamma$;

б) утверждение теоремы 2 ([1]) верно при замене условия $\tau \leq s < +\infty$ на два условия: $p \leq s < +\infty$ и $0 < r < \gamma$.

Утверждение 2*Если $f(x) \in \Lambda$, то*

а) утверждение теоремы 1 ([1]) верно при замене условия $0 < s \leq \theta$ на условие $0 < s \leq 2$;

б) утверждение теоремы 2 ([1]) верно при замене условия $\tau \leq s < +\infty$ на условие $2 \leq s < +\infty$.

Литература

1. Тихонов С. Ю. *Оценки модулей гладкости функций с преобразованным рядов Фурье.*// Современные проблемы теории функций и их приложения. Саратов.–2000.–С. 139–140.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No 00-01-00042) и программы поддержки ведущих научных школ (грант No 00-15-96143).

О РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДАХ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С ПОТЕНЦИАЛОМ НА КРУГЕ

Томина И.В., Томин Н.Г. (Иваново)

rootigta.asinet.ivanovo.su

Пусть $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ – круг, S – его граничная окружность, T – самосопряженный оператор в $L^2(G)$, порожденный спектральной граничной задачей Дирихле $\Delta u + \lambda u = 0$ на $G, u|_S = 0$, где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа. Пусть при $n = 0, 1, 2, \ldots$ $J_n(r)$ есть функция Бесселя первого рода порядка n, $\{k_{nm}\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность ее положительных нулей, занумерованных в порядке возрастания. Полагаем $I = \{(s, n, m) \in \mathbf{Z}^3 \mid n \geq 0, m \geq 1, s \in \{0, 1\}, (s, n) \neq (1, 0)\}$ и $u_{snm}(x, y) = B_{nm} J_n(k_{nm} r) \cos(n\varphi - \pi s/2)$ при всех $(s, n, m) \in I$, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $B_{nm} = \sqrt{2\gamma_n/\pi}/J'_n(k_{nm})$, $\gamma_0 = 1/2$, $\gamma_n = 1$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Система $U = \{u_{snm} \mid (s, n, m) \in I\}$ является полной ортонормированной в $L^2(G)$ и для любого $\alpha > 0$ состоит из собственных функций u_{snm} оператора T^{α}, соответствующих собственным числам $k_{nm}^{2\alpha}$ ([1], с. 332–333). Пусть P – оператор умножения в $L^2(G)$ на функцию $p(x, y) \in L^{\infty}(G)$. Тогда $\forall \alpha > 1$ оператор $T^{\alpha} + P$ имеет ядерную резольвенту и все его собственные числа можно записать с учетом алгебраических кратностей в виде $\{\mu_{snm}(p, \alpha) \mid (s, n, m) \in I\}$ так, что $|\mu_{snm}(p, \alpha) - k_{nm}^{2\alpha}| \leq C$ при всех $(s, n, m) \in I$, где постоянная C не зависит от s, n, m.

Теорема. *Для любого $\alpha > 1$ существует такая неограниченная возрастающая последовательность положительных чисел $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$, что $\forall p(x, y) \in L^{\infty}(G)$ справедлива формула следов*

$$\lim_{j \to +\infty} \sum_{(n,m) \in F_j} \Big\{ A_{nm}(p, \alpha) - \gamma_n k_{nm}^{2\alpha} -$$

$$B_{nm}^2 \int_0^1 q(r) J_n^2(k_{nm} r) r\, dr \Big\} = 0,$$

где $F_j = \{(n, m) \in \mathbf{Z}^2 \mid n \geq 0, m \geq 1, k_{nm} \leq \omega_j\}$, $A_{nm}(p, \alpha) = [\mu_{0nm}(p, \alpha) + \mu_{1nm}(p, \alpha)]/2$ при $n \in \mathbf{N}$, $A_{0m}(p, \alpha) = \mu_{00m}(p, \alpha)/2$, $q(r) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi$.

Доказательство опирается на теорему из [2].

Литература

1. С.Г. Михлин. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977 г.

2. В.А. Садовничий, С.В. Конягин, В.Е. Подольский.// ДАН, 2000 г., т. 373, № 1, с. 26-28.

ОДИН КЛАСС СИНТЕЗИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Трушкова Е.А. (Саратов)

Рассматриваем задачи оптимального управления $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, $t \in [0,1]$, $J = \int\limits_0^1 \Big((x, Mx) + u^2\Big)dt \longrightarrow \min$, задавая различные граничные условия. Здесь $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, b есть n-векторы, A - матрица $n \times n$, $u \in R$ - управление. M - положительно определенная матрица, пара (b, A) управляема. Множество оптимальных траекторий $\mathcal{M}$ рассматриваемых задач является общим решением системы дифференциальных уравнений принципа максимума Л.С.Понтрягина: $\dot{x} = Ax - \frac{1}{2}bb^T\psi$, $\dot{\psi} = -A^T\psi - 2Mx$. То есть, $\mathcal{M} = \Big\{x(t)\Big|\exists C \in R^{2n} : x(t) = \Phi_1(t)C\Big\}$, где $\Phi_1(t)$ - первые n строк фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ системы уравнений принципа максимума. Пусть $\mathcal{M}_{k,D,d} = \Big\{x(t)\Big|\exists p \in R^k : x(t) = \Phi_1(t)\left(Dp + d\right)\Big\} \subseteq \mathcal{M}$, где p - k-мерный вектор-параметр, $rankD = k$, k - целое, $k \in (0, 2n]$.

А.П.Хромовым в работе [1] были построены функции, синтезирующие семейства $\mathcal{M}_{k,D,d}$ при $k = n$. С использованием методов работы [1] были построены функции для случая $n < k \leq 2n$. Оказалось, что в этом случае синтезирующие функции зависят от $t, x, x_1^{(n)}, \ldots, x_1^{(k)}$.

Теорема. *Пусть*

$$u\left(t, x, x_1^{(n)}, \ldots, x_1^{(k)}\right) = x_1^{(n)} - r_n Ax + x_1^{(k)} - r_1\Phi_1^{(k)}(t)\times$$

$$\times \left(D(F_k(t)D)^{-1} \left((x, x_1^{(n)}, \ldots, x_1^{(k-1)})^T - F_k(t)d \right) + d \right),$$

где $r_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $r_n = (0, \ldots, 0, 1) \in R^n$, $F_k(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ Q^{k-n}\Phi_1^{(n)}(t) \end{pmatrix}$, $Q^{k-n} = (E_{k-n}\ 0)$ *- матрица* $(k-n) \times n$, E_{k-n} *- единичная матрица* $(k-n) \times (k-n)$.

Если $x(t)$ *- решение системы* $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu\left(t, x, x_1^{(n)}, \ldots, x_1^{(k)}\right)$, *и* $x(t)$, $x^{(n)}(t)$ *непрерывны на множестве нулей функции* $\det(F_k(t)D)$, *то* $x(t) \in \mathcal{M}_{k,D,d}$. *Обратно, если* $x(t) \in \mathcal{M}_{k,D,d}$, *то* $x(t)$ *- решение системы* $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu\left(t, x, x_1^{(n)}, \ldots, x_1^{(k)}\right)$.

Литература

1. Хромов А.П. О синтезирующих функциях линейных дифференциальных систем с квадратичным критерием качества // Сборник "Теория функций и приближений", Труды 4-ой Саратовской зимней школы, ч.1, СГУ, 1990

КОЭРЦИТИВНЫЕ ОЦЕНКИ И КОРРЕКТНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Тюрин В.М. (Липецк)

В конечномерном фазовом пространстве X рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$P = \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha(x) D^\alpha \quad (m \in N)$$

с частными производными $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial x_{x_n}^{\alpha_n}$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс. Коэффициенты $A_\alpha \in C(R^n, EndX)$ и равномерно непрерывны по Гельдеру на R^n с показателем $\gamma_a \in (0,1)$. Далее, $L^p(G, X)$ — пространство Лебега; $L^p_\gamma(G, x)$ — пространство, состоящее из функций $u \in L^p(G, X)$, у которых конечна интегральная полунорма Гельдера на G; $W^m(L^p)$ — пространство Соболева функций $u : R^n \to X$; W^m_γ

— пространство функций $u \in W^m(L^p)$ с конечной интегральной гельдеровской полунормой на R^n; $L^p_\gamma = L^p_\gamma(R^n, X)$.

Следуя В.В. Жикову, оператор P назовем корректным (относительно пары (W^m_γ, L^p_γ)), если можно указать такую постоянную $k > 0$, что $||u||_{W^m_\gamma} \le k||Pu||_{L^p_\gamma}$ как только $u \in W^m_\gamma$, $Pu \in L^p_\gamma$.

Для корректных дифференциальных операторов, как правило, справедливы равнопарные локальные коэрцитивные (РЛК) оценки, играющие важную роль в анализе краевых задач в различных функциональных пространствах. Универсальных РЛК оценок пока не найдено. Поэтому представляют интерес РЛК оценки в конкретных функциональных пространствах. В докладе обсуждается следующий результат.

Теорема. *Если оператор P корректен $(0 < \gamma < \gamma_a \le 1)$, то существует такая постоянная $d = d(n, \gamma, \gamma_a, P, k) > 0$, что имеет место неравенство*

$$||D^\alpha u||_{L^p_\gamma(B(\xi,T))} \le d||Pu||_{L^p_\gamma(B(\xi,4T))} + \frac{d}{T}||Pu||_{L^p_\gamma}$$

в любой точке $\xi \in R^n$ при $T > 1$, $|\alpha| \le m$.

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ В КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВ ГРОТЕНДИКА

Устинов Г.М. (Екатеринбург)

Vladimir.Balaganskii@imm.uran.ru

Если Q – компакт, то подпространство $L \subset C(Q)$ называется подпространством Гротендика (G-пространством), если $L = \{f = f(q'_\alpha) = \lambda_\alpha f(q''_\alpha),\ q'_\alpha,\ q''_\alpha \in Q,\ \lambda_\alpha \in R,\ \alpha \in A\}$. Рассматривается вопрос о том, при выполнении каких условий G-пространство есть пространство существования, т.е. $P_L g = \left\{h \in L : ||h - g|| = \inf\limits_{f \in L} ||g - f||\right\} \ne \emptyset \quad \forall\ g \in C(Q)$. Для каждого G-пространства, следуя [1], полагаем $Z_L = \{g \in Q : f(q) = 0 \quad \forall\ f \in L\}$, $W_q = \left\{t \in Q : \delta_{t|_L} = \lambda_t \cdot \delta_{q|_L},\ \lambda_t \ne 0\right\}$ для $q \in Q \backslash Z_L$, $\tau : \ Q \to 2^Q$, $\tau(q) = \begin{cases} W_q, & q \in Q\backslash Z_L, \\ Z_L, & q \in Z_L \end{cases}$. Назовем точку $q^* \in W_q$ отмеченной, если из равенства $\delta_{t|_L} = \lambda_t \cdot \delta_{q^*|_L}$

следует $|\lambda_t| \leq 1 \quad \forall\ t \in W_q$. Пусть T_L – множество всех отмеченных точек. Каждой точке $q \in \overline{T}_L$ сопоставим множество B_q, $B_q = \{t \in Q : \exists\, t_n \to t,\ t_n \in W_{q_n},\ q_n \to q,\ q_n \in T_L\}$ и пусть $W' = \{q \in Q \backslash Z_L : |W_q| = 1\}$.

Теорема. *Пусть L – G-пространство, удовлетворяющее условиям: 1) $\lambda_\alpha \geq 0\ \forall\ \alpha \in A$, 2) L порождает счетное число классов W_q, $|W_q| \geq 2$, 3) $\overline{T}_L \subset T_L \cup W'$.*

Для того, чтобы L было подпространством существования, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: 1) отображение τ было полунепрерывно сверху в точках $q \in T_L$, 2) если $q \in \overline{T}_L \backslash T_L$, то для множества B_q либо $B_q = \{q\}$, либо $B_q \subset Z_L$.

Заметим, что при изучении G-пространств существования в пространствах абстрактных функций в [1] изначально предполагалось, что отображение τ полунепрерывно сверху в любой точке $q \in Q$ и $W_q = \overline{W}_q$, $q \in Q$.

Литература

1. Blatter J. Grothendick spaces in approximation theory// Mem. Amer.Math. Soc. 1972. №120, P. 1–121.

О КРИТИЧЕСКИХ ТОЧКАХ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

Феоктистов В.В. (Москва)
e-mail: apmath@bmstu.ru

Из качественной теории дифференциальных уравнений нестационарных пограничных слоев следует, что неустановившиеся пограничные слои разбиваются на два класса по типу передней критической точки: 1 — "критические пограничные слои" — течение с передней критической точкой, в которой скорость распространения возмущения равна нулю; 2 — "пограничные слои с острой передней кромкой", когда возмущению, идущему от передней кромки, требуется конечное время, чтобы достичь какой-либо точки вниз по потоку.

В работе предложено обобщенное уравнение, которое позволяет выделить динамический процесс вблизи критической точки и сделать анализ непрерывного перехода течения от конечной скорости распространения возмущения к нулевой. Теория изложена на основе единой формы записи системы дифференциальных уравнений переменного типа, со сменой направления параболичности:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial\eta^3} + \left[(n+1)\xi^2 - (1-m)\xi\frac{\partial f}{\partial\eta}\right]\frac{\partial^2 f}{\partial\eta\partial\xi} +$$
$$+\left[\frac{m+1}{2}f + (1-m)\xi\frac{\partial f}{\partial\xi} - \frac{n}{2}\xi\eta\right]\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} + m -$$
$$-m\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}^2\right) + n\xi\left(1 - \frac{\partial f}{\partial\eta}\right) = 0.$$

Здесь $\xi = x/(Ut)$, $\eta = y\sqrt{U/\nu x}$, $U = ax^m t^n$ — безразмерные координаты вдоль поверхности тела, по нормали к поверхности тела и скорость внешнего потока соответственно. $\frac{\partial f}{\partial\eta} = u$ — безразмерная скорость потока вдоль направления x.

Математические модели таких процессов в пограничных слоях учитывают эффекты аккумуляции дискретных вихрей при переносе энергии, количества движения, массы. Для решения краевых задач с указанным уравнением, кроме традиционных краевых условий для пограничных слоев, требуется дополнительное условие на фронте возмущения. Т.е. для уравнения параболического типа со сменой направления параболичности требуются "эллиптические" краевые условия.

О ВЕКТОРНОМ УРАВНЕНИИ ЭЙЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Фомин В.И. (Тамбов)

В банаховом пространстве E методом малых стабилизирующих возмущений ([1]) изучается уравнение вида

$$t^2x''(t) + tAx'(t) + Bx(t) = f(t), \qquad 0 < t < \infty, \qquad (1)$$

с $f(t) \in C([.0,\infty]; E)$. Исследования, проведённые в случае $A, B \in L(E)$ ([2], [3]), показывают, что вид решения уравнения (1) определяется свойствами операторного дискриминанта $D = (A-I)^2 - 4B$.

Пусть A, B — замкнутые линейные неограниченные операторы с плотными в E областями определения и $D = C^2$, где C — линейный непрерывно обратимый оператор (случай $D = 0$ исследован в [4]). Тогда функция

$$x_0(t) = C{-1}\int\limits_0^t \left[U_2\left(\ln\frac{t}{s}\right) - U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\right]\frac{f(s)}{s},$$

где $U_1(\bullet)$ и $U_2(\bullet)$ — полугруппы, порождённые операторами $\Lambda_1 = \frac{1}{2}(I - A - C)$ и $\Lambda_2 = \frac{1}{2}(I - A + C)$, при условиях, обеспечивающих существование непрерывной производной $x_0'(t)$, является решением уравнения (1) и $x_0(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} x_\varepsilon(t)$, $t \in (0, \infty)$, где $x_\varepsilon(t)$ — решение возмущённой задачи

$$\begin{cases} (t+\varepsilon)^2 x_\varepsilon''(t) + (t+\varepsilon)Ax_\varepsilon(t) + Bx_\varepsilon(t) = f(t), & 0 \le t < \infty, \\ x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}, \quad x_\varepsilon'(0) = x_{\varepsilon,0}'. \end{cases}$$

Литература

1. Фомин В.И. // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, 12.С.1712.

2. Фомин В.И. // Вестник ТГТУ. - Тамбов, 1999. - Т. 5, 4. С. 603-612.

3. Фомин В.И. // Вестник ТГТУ. - Тамбов, 2000. - Т. 6, 1. С. 114-118.

4. Фомин В.И. // Вестник ТГУ. Сер. Естеств. и технич. науки. - Тамбов, 1999. - Т.4, вып.1. С. 67-69.

О ПОНЯТИИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ВУЗОВСКОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Фомин В.И. (Тамбов)

Опыт преподавания в техническом вузе со стандартной программой по математике показывает, что строгое определение общего решения дифференциального уравнения ([1, с.85]) вызывает у студентов определённые затруднения. В связи с этим предлагается следующая, более доступная формулировка понятия общего решения дифференциального уравнения, близкая к определению этого понятия из ([2, с.57]).

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

где x — независимая переменная, $x \in M$, $M \subseteq R$; $y = y(x)$ — неизвестная функция, $y' = y'(x)$ — производная неизвестной функции; $f(x, y)$ — некоторая заданная функция, $(x, y) \in D$, D — некоторая область в R^2.

Определение. *Общим решением уравнения (1) называется семейство функций $y = \varphi(x, C)$, заданных на M, где C — параметр, $C \in Q$, $Q \subseteq R$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) любая функция из этого семейства является решение уравнения (1), т.е. при любом фиксированном $C_* \in Q$ функция $y = \varphi(x, C_*$ является решением уравнения (1);

2) для любого фиксированного набора начальных данных $(x_0, y_0) \in D$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & (2) \\ y(x_0) = y_0 & (3) \end{cases}$$

принадлежит этому семейству, т.е. найдётся такое $C_0 \in Q$, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением задачи Коши (2), (3).

Литература

1. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений – Мн.: Наука и техника, 1979. – 744с.

2. Герасимович А.И. и др. Математический анализ: Справ, пособие. В 2ч. Ч.2. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 272с.

О ВНУТРЕННИХ ПОТРЕБНОСТЯХ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ В ИЗУЧЕНИИ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА

Фомин В.И. (Тамбов)

Несмотря на то, что понятие предела является одним из фундаментальных понятий математики, в действующих учебниках для средней общеобразовательной школы ([1], [2]) теме "Пределы" незаслуженно отводится роль бедного родственника.

Важность и полезность изучения понятия предела в школьном курсе математики обусловлены следующими факторами.

1. Понятие предела функции на бесконечности и в точке позволяет успешно реализовать следующие цели, поставленные в разделе "Требования к математической подготовке учащихся" программы по математике для общеобразовательных учреждений ([3, с. 20]):

а) "получить наглядные представления о непрерывности и разрывах функций";

б) "научиться ... отражать свойства функции на графике, включая "поведение функции" на границах её области определения, строить вертикальные и горизонтальные асимптоты графика";

в) "овладеть понятием производной";

г) "овладеть понятиями первообразной и интеграла".

2. Понятие предела числовой последовательности используется в явной или неявной форме при выводе формул для площади квадрата ([4, с.118]), длины окружности ([4, с.265]), площади круга ([4, с.267]), объёма прямоугольного параллелепипеда ([5, с.150]), объёма цилиндра ([5, с.154]), площади сферы ([5, с.167]), а также в ряде других вопросов, например, при нахождении суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Литература

1. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. – М.: Дрофа, 1999.

2. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. – М.: Мнемозина, 1999.

3. Программы общеобразовательных учреждений. Математика. – М.: Просвещение, 1994.

4. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 7-9 кл. – М.: Просвещение, 1999.

5. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10-11 кл. – М.: Просвещение, 1999.

АЛГОРИТМЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТОЧКИ НА ГЛАДКИЙ ВЫПУКЛЫЙ КОМПАКТ С КВАДРАТИЧНОЙ СКОРОСТЬЮ СХОДИМОСТИ

Хабаров Н.В. (Москва)[1]

nkhabarov@supermail.ru

Задачи оптимального управления с терминальным функционалом специального вида можно свести к проблеме проектирования точки на множество. Настоящая работа посвящена исследованию вопросов, связанных с разработкой эффективных численных методов решения таких задач с линейной динамикой. Проведен также ряд численных экспериментов, подтверждающих полученные теоретические результаты.

Постановка задачи. Для фиксированных множества U и точки y необходимо найти $u_* = \operatorname*{argmin}_{u\in U} \|u - y\|$. При этом предполагается выполнение следующих условий: первое, $c(U, \psi) > 0$, $\forall\, \psi \in S_1$, где S_1 – единичная сфера в R^n с центром в нуле; второе, $c''(U, \psi)$ – непрерывна в $R^n \setminus \{0\}$; третье, $\operatorname{rg} c''(U, \psi) = n - 1$, $\forall\, \psi \in S_1$, где $c(U, \psi) = \max_{u\in U}(u, \psi)$.

Численный метод. Рассмотрим множество $E(p)$: $c(E(p), \psi) = (a(p), \psi) + \sqrt{\psi^* B(p)\psi}$, где $B(p) = \frac{1}{2}[c(U,p) + c(U,-p)]\cdot c''(U,p) + [c'(U,p) - a(p)][c'(U,p) - a(p)]^* \in R^{n\times n}$ и $a(p) = \frac{1}{2}[c'(U,p) + c'(U,-p)]$. Ищем решение в виде $u_* = c'(U, p_*)$, где $p_* = \operatorname*{argmin}_{\psi\in S_1} \|c'(U,\psi) - y\|$. Возьмем некоторое начальное приближение p_0. Итерационный процесс определяется соотношением: $p_{k+1} = G(p_k)$, где $G(p) = H(p)/\|H(p)\|$, $H(p) = y - x(p)$, $x(p) =$

[1]Работа поддержана программой поддержки научных школ "Моделирование и управление в многомерных динамических системах" N 961596116.

$\operatorname*{argmin}_{v\in E(p)} \|v-y\|$. Критерием окончания процесса является условие $\|p_k - p_{k-1}\| \le \varepsilon$.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: (1) рассматриваемый метод сходится к точке p_*; (2) функция $c(U,p)$ имеет непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно всюду в $R^n \setminus \{0\}$; (3) ни одно из множеств $E(p_k)$ не содежит проектируемой точки y. Тогда существует такая константа $C \ge 0$, что для всех k справедливо неравенство

$$\|p_{k+1} - p_*\| \le C\|p_k - p_*\|^2.$$

О ТРЕХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Хаиров Рагим А. (Махачкала)

Обозначим через

$$f\left(\frac{x}{(\gamma).}\right), \quad f\left(\frac{(\alpha).}{(\gamma).}x\right), \quad f\left(\frac{(\alpha).(\beta).}{(\gamma).}x\right) \tag{1}$$

суммы рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{(\alpha)_n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}x, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}x^n,$$

полученных из $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Функции (1) удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{gathered}
D_\gamma f\left(\tfrac{x}{(\gamma).}\right) = f'\left(\tfrac{x}{(\gamma).}\right), \\
D_\gamma f\left(\tfrac{(\alpha).}{(\gamma).}x\right) = \left(x\tfrac{d}{dx} + \beta\right) f'\left(\tfrac{(\alpha).}{(\gamma).}x\right), \\
D_\gamma f\left(\tfrac{(\alpha).(\beta).}{(\gamma).}x\right) = \left(x\tfrac{d}{dx} + \alpha\right)\left(x\tfrac{d}{dx} + \beta\right) f\left(\tfrac{(\alpha).(\beta).}{(\gamma).}x\right),
\end{gathered} \tag{2}$$

где $D_\gamma = x\frac{d^2}{dx^2} + \gamma\frac{d}{dx}$.

Три функции, полученные из $f(x) = e^x$ путем указанных преобразований, обозначим через $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$. Согласно уравнениям (2) они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$D_\gamma u = u, \quad D_\gamma v = \left(x\frac{d}{dx} + \alpha\right) v,$$

$$D_\gamma w = \left(x\frac{d}{dx} + \alpha\right)\left(x\frac{d}{dx} + \beta\right) w$$

или, что то же самое,

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + \gamma\frac{du}{dx} - u = 0,$$

$$x\frac{d^2v}{dx^2} + (\gamma - x)\frac{dv}{dx} - \alpha v = 0, \tag{3}$$

$$x(1-x)\frac{d^2w}{dx^2} + (\gamma - (\alpha+\beta)x)\frac{dw}{dx} - \alpha\beta w = 0.$$

Первое из уравнений (3) может быть преобразовано в уравнение Бесселя, а второе и третье являются вырожденным гипергеометрическим уравнением и гипергеометрическим уравнением.

Если к функциям $\cos x$ и $\sin x$ применим второе преобразование, то получим функции

$$u = \cos\frac{(\alpha).}{(\gamma).}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\alpha)_{2n}}{(2n)!(\gamma)_{2n}}x^{2n}, \tag{4}$$

$$v = \sin\frac{(\alpha).}{(\gamma).}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\beta)_{2n+1}}{(2n+1)!(\gamma)_{2n+1}}x^{2n+1},$$

которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} D_\gamma u = -\left(x\frac{d}{dx} + \alpha\right) v, \\ D_\gamma v = \left(x\frac{d}{dx} + \alpha\right) u. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ функция (4) множителем $x^{1-\gamma}\Gamma(\gamma)$ отличается от функции Юнга.

О ДВУХ КОНЕЧНЫХ СИСТЕМАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ, РОДСТВЕННЫХ С КЛАССИЧЕСКИМИ

Хаиров Рахман А. (Махачкала)

Общие свойства классических ортогональных многочленов в [1] получены, исходя из дифференциального уравнения уравнения Пирсона. При этом из всех решений уравнения Пирсона, соответствующих различным наборам пяти параметров, выделяются три, которые являются классическими весовыми функциями. Мы выделяем еще два решения этого уравнения и рассматриваем им соотвестсвующие системы многочленов:

$$H_m(x;t,\beta) = (-1)^m \left(1+\frac{x^2}{t}\right)^{\beta} \frac{d^m}{dx^m}\left(1+\frac{x^2}{t}\right)^{m-\beta};$$

$$L_m(x;t,\alpha,\beta) = (-1)^m x^{-\alpha}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{\beta} \frac{d^m}{dx^m}\left(x^{m+\alpha}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{m-p}\right).$$

Система многочленов $\{H_m(x;t,\beta)\}_{m=0}^{\infty}$ обладает свойством ортогональности

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{t}\right)^{-\beta} H_k(x;t,\beta)H_m(x;t,\beta)dx = 0 \quad (k\neq m),$$

только при $k+m<2\beta-1$, а для системы $\{L_m(x;t,\alpha,\beta\}_{m=0}^{\infty}$ имеют место соотношения

$$\int\limits_{0}^{\infty} x^{\alpha}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{-\beta} L_k(x;t,\alpha,\beta)L_m(x;t,\alpha,\beta)dx = 0 \quad (k\neq m),$$

при $\alpha>-1$, $m+k<\beta-\alpha$.

Для многочленов указанных систем получены рекурентные соотношения, формулы Кристоффеля–Дарбу, линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с полиномиальными коэфиициентами, производящие функции и интегральные представления.

Следует отметить, что

$$1)\ \lim_{t\to+\infty} H_m(x;t,t) = H_m(x), \quad \lim_{t\to+\infty} L_m(x;t,\alpha,t) = L_m(x,\alpha),$$

где $H_m(x)$ и $L_m(x;\alpha)$ — многочлены Чебышева–Эрмита и Чебышева–Лагерра соответсвенно;

$$2)\max\left(\det\left\|\left(1+\frac{x_i^2}{t}\right)^{-\beta}x_i^j\right\|_{i,j=0}^m\right)^2,$$

$$\max\left(\det\left\|x_i^{\alpha+j}\left(1+\frac{x_i}{t}\right)^{-\beta}\right\|\right)^2,$$

достигается тогда и только тогда, когда $x_0, x_1, \ldots, x_m$ — нули многочленов $H_{m+1}(x;t,\beta)$ и $L_{m+1}(x;t,\alpha,\beta)$ соотвественно. Потребность в оптимизации квадрата определителя матрицы вида $\|w(x_i)x_i^j\|_{i,j=0}^m$ возникает в теории планирования эксперимента ([2], гл. X).

Литература

1. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. - 2-ое изд. М.: Наука, 1979.

2. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. - М.: Наука, 1976.

О ЗАДАНИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С КОММУТИРУЮЩИМИ МАТРИЦАМИ

Хайлов Е.Н. (Москва)[1]

khailov@cs.msu.su

Рассматриваем билинейную систему со скалярным управлением

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)Bx(t) + cu(t) + d,\ x(0) = x_0, \\ 0 \le u(t) \le u_{(+)},\ t \in [0,T],\ T > 0,\ u_{(+)} > 0, \end{cases} \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ согласно проекту 00-01-00682, гранта поддержки научных школ 96-15-96116, а также программы "Университеты России - Фундаментальные исследования" (проект 5143).

где A, B - матрицы порядка $n \times n$; $x(\cdot), c, d \in R^n$.

Предполагаем, что $AB = BA$ и $p = Bd - Ac \neq 0$.

Пусть векторы $p, Ap, \ldots, A^{n-1}p$ линейно независимы, а λ_i, $i = \overline{1,n}$ - попарно различные вещественные собственные значения матрицы A. Тогда, как известно, матрица B также имеет лишь вещественные собственные значения μ_i, $i = \overline{1,n}$. При этом, $\mu_i = \varphi(\lambda_i)$, $i = \overline{1,n}$, где $\varphi(\lambda)$ - некоторый многочлен с вещественными коэффициентами. Пусть $\varphi(\lambda) = \Delta + \lambda \cdot \psi(\lambda)$, где Δ - заданное число, а $\psi(\lambda)$ - многочлен меньшей степени. Считаем, что $\psi(\lambda_i) > -(u_{(+)})^{-1}$, $i = \overline{1,n}$.

Пусть $X(T)$ есть множество достижимости системы (1) в момент времени T. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема. Каждой точке $x \in X(T)$ отвечает кусочно постоянное управление $u(t)$, $t \in [0,T]$, принимающее значения $\{0; u_{(+)}\}$ и имеющее не более $2(n+1)$ переключений на интервале $(0,T)$.

Этот факт позволяет использовать моменты переключения как средство описания множества достижимости $X(T)$ для последующего применения в численных расчетах.

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ 4-ГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Хворова М.В. (Гродно)

masza@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$v_{xxxx} = 2vv_{xxx} + 6v_xv_{xx} + F, \tag{1}$$

где F – полином 2-ой степени от функции v и ее частных производных по x, t до 3-его порядка (причем производные 3-его порядка входят линейно) с аналитическими в некоторой области D коэффициентами.

Для уравнения (1) упрощённым является уравнение

$$v_{xxxx} = 2vv_{xxx} + 6v_xv_{xx}, \tag{2}$$

имеющее свойство Пенлеве, так как из (2) найдем: $v_x = v^2 + H$, $H_{xxx} = 0$.

Решение уравнения (2) можно записать в виде

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \psi^{k-1} \tag{3}$$

где $v_k = v_k(t)$, $\psi_x = 1$, тогда функция ψ_t и коэффициенты v_2, v_3, v_4 – произвольные функции от t (так называемые резонансные коэффициенты, отвечающие резонансам $r = 2, 3, 4$).

Требуя, чтобы в полном уравнении (1) с решением вида (3) функция ψ_t была произвольной и резонансные коэффициенты были те же, то есть v_2, v_3, v_4, получим, что уравнение (1) должно иметь один из следующих видов:

$$\begin{aligned}(v_x - v^2)_{xxx} = a(v_x - v^2)_{xx} + b(v_x - v^2)_{xt} + c(v_x - v^2)_{tt} + \\ + d(v_x - v^2)_x + e(v_x - v^2)_t + g(v_x - v^2) + h,\end{aligned} \tag{4}$$

$$(v_x - v^2)_{xxx} = a(v_x - v^2)_{xx} + b(v_x - v^2)_x + c(v_x - v^2)_t + d(v_x - v^2) + e, \tag{5}$$

где a, b, ..., h – аналитические по x, t в области D функции.

Легко убедиться, что преобразованием $v_x = v^2 + u$ для функции u получим соответственно

$$u_{xxx} = au_{xx} + bu_{xt} + cu_{tt} + du_x + eu_t + gu + h, \tag{6}$$

$$u_{xxx} = au_{xx} + bu_x + cu_t + du + e. \tag{7}$$

Уравнения (6), (7) линейные и не имеют подвижных особенностей. Найдя из них функцию u, для v получим уравнение Рикатти, которое обладает свойством Пенлеве, следовательно, и уравнения (4), (5) также обладают этим же свойством. Таким образом, верна

Теорема. Чтобы уравнеие (1) обладало свойством Пенлеве необходимо и достаточно, чтобы оно имело один из видов (4) или (5).

ТЕОРЕМА О БАЗИСНОСТИ РИССА СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Хромов А.П., Курдюмов В.П. (Саратов)[1]

E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

В пространтсве $L_2[0,1]$ рассматривается интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt, \qquad x \in [0,1].$$

Предполагается, что при $0 \le t \le x \le 1$ существуют и непрерывны $\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial t^j} A(x,t)$ $(i = \overline{0,n};\ j = 0,1)$ и, кроме того,

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x,t)\bigg|_{t=x} = \delta_{n-1,j} \qquad (j = \overline{0,n}),$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Теорема. *Система собственных и присоединенных функций оператора A образует базис Рисса в $L_2[0,1]$.*

Для случая $n = 1$ данный результат установлен в [1]. Настоящая работа обобщает на случай произвольного натурального n результат из [1] и существенно развивает предложенный ранее метод.

Литература

1. Курдюмов В.П. // Саратовская 9-ая зимняя матем. школа. Тез. докл. 1997.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №00-01-00075) и программы "Ведущие научные школы" (проект №00-15-96123)

СВОЙСТВА МНОГОЗНАЧНОГО ИНТЕГРАЛА СТИЛТЬЕСА ОТ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Цалюк В.З. (Краснодар)
vts@math.kubsu.ru

Попытка рассмотрения обобщенных функций в качестве свободных членов линейных дифференциально-функциональных уравнений приводит к проблеме интерпретации символа $\int_a^b x(t)\,dg(t)$, где и x, и g суть функции ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$. Если g непрерывна, то существует обычный интеграл Римана-Стилтьеса. Аппроксимируя функцию g непрерывными функциями g_i, сходящимися в некотором специальном смысле к g, и объединив все получающиеся предельные точки, получим выпуклое компактное множество

$$\begin{aligned}&\int_a^b x(t)\,dg(t) = \int_a^b x(t)\,dg^c(t)+\\ &+(g(a+0)-g(a))x(a+0)+(g(b)-g(b-0))x(b-0)+\\ &+\sum_{\tau\in J(g)}(g(\tau+0)-g(\tau-0))\cdot[x(\tau-0),\,x(\tau+0)],\end{aligned}$$

где g^c — непрерывная составляющая функции g, а $J(g)$ — множество ее точек разрыва на интервале (a,b) ($[c,d]$ — отрезок, соединяющий точки c и d). Это почти совпадает с интегралом Ауманна по мере Стилтьеса dg от многозначной функции $\bar{x}(t) = [x(t-0),\,x(t+0)]$ при $t\in(a,b)$, $\bar{x}(a) = [x(a),\,x(a+0)]$, $\bar{x}(b) = [x(b-0),\,x(b)]$. (Разница возникает лишь при наличии разрывов функции x в концах отрезка $[a,b]$.) Из этой формулы, в частности, видно, что если x и g не имеют общих точек разрыва, то интеграл однозначен.

Введем обозначение: $x\Big|_a^b g = x(b-0)g(b) - x(a+0)g(a) + {}$ $+(x(a+0)-x(a))g(a+0)+(x(b)-x(b-0))g(b-0)$. Справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_a^b x(t)\,dg(t) = x\Big|_a^b g - \int_a^b g(t)\,dx(t).$$

Поэтому полученный интеграл по своим свойствам почти симметричен относительно перестановки функций x и g.

Получены результаты о непрерывной зависимости интеграла от функций x и g, изучены свойства интеграла как функции его пределов интегрирования.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ СТЕПЕНИ ОДНОРОДНОСТИ $\alpha = -1$

Цалюк М.В. (Краснодар)

mtsalyuk@math.kubsu.ru

Изучается интегральное уравнение вида

$$x(t) = \int_1^t K(t,s)x(s)\,ds + f(t), t \in [1,\infty) \qquad (1)$$

где $K(t,s)$ – однородная функция степени $\alpha = -1$, то есть $K(t,s) = \frac{1}{s}Q(\frac{t}{s})$ при $s \neq 0$. Функции $K(t,s)$ и $f(t)$ предполагаются непрерывными.

ТЕОРЕМА. *Пусть существуют такое целое $m \geq 0$, что $t^{m-1}Q(t) \in L_1[1,\infty)$, $t^m Q(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и уравнение*

$$1 - \int_1^\infty u^{-(z+1)}Q(u)\,du = 0$$

имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq -m$ корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ целой кратности $m_1, m_2, ..., m_k$ соответственно, причем ни один из них не лежит на прямой $\operatorname{Re} z = -m$. Тогда, если свободный член $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{m} c_n t^{-n} + o(t^{-m})$ при $t \to \infty$, то решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} P_{m_i-1}(\ln t)t^{\lambda_i} + \sum_{n=0}^{m} c_n t^{-n} + o(t^{-m})$$

при $t \to \infty$, где $P_{m_i-1}(t)$ — некоторые многочлены степени не выше $m_i - 1$.

Литература

1. Дербенев В.А., Цалюк З.Б. Асимптотика резольвенты неустойчивого ядра уравнения Вольтерра с разностным ядром // Математические заметки. 1997. Т.62. Вып.1.

ОБ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ ДВОЙНОГО РЯДА ФАБЕРА

Цвиль М.М. (Ростов–на–Дону)

E-mail: vpm@jeo.ru

В настоящей работе изучается область сходимости двойного ряда по полиномам Фабера двух переменных, введенных в работе [1].

Пусть остов биобластей $D^{\pm\pm} = D_1^{\pm} \times D_2^{\pm}$ в пространстве C^2 образуют спрямляемые жордановы кривые L_k, $k = 1, 2$; D_k^+ — ограниченная, а D_k^- — неограниченная области с границей L_kв плоскости C^1; $w_k = \varphi_k(z_k)$ — функция, конформно и однолистно отображающая область D_k^- на область $U_k^- = \{w_k \in C^1 : |w_k| > 1\}$ так, что $\varphi_k(\infty) = \infty$ и $\lim\limits_{z_k \to \infty} \varphi_k(z_k)/z_k > 0$; $z_k = \psi_k(w_k)$ — функция, обратная к $\varphi_k(z_k)$; $U^{\pm\pm} = \{(w_1, w_2) \in C^2 : |w_1| \le 1;\ |w_2| \le 1\}$; G — полная логарифмические выпуклая двоякокруговая область с центром в точке $(0,0)$ в пространстве C^2 переменных w_1, w_2, содержащая $\overline{U}^{++}$; $\{\Phi_{nm}(z_1, z_2)\}$ — система обобщенных полиномов Фабера двух переменных, построенная с помощь. производящей функции (см. [1]):

$$\mathcal{G}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} = \frac{g(\psi_1(w_1), \psi_2(w_2))\psi_1'(w_1)\psi_2'(w_2)}{(\psi_1(w_1) - z_1)(\psi_2(w_2) - z_2)};$$

где $g(z_1, z_2)$ — весовая функция, аналитическая в D^{--} и $g(\infty, \infty) = g_{00} > 0$.

Произвольная последовательность комплексных чисел $\{a_{nm}\}$, декартово произведение ограниченных континуумов $S_1 \times S_2$ и весовая функция $g(z_1, z_2)$ определяют двойной ряд Фабера

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}\Phi_{nm}(z_1, z_2). \tag{1}$$

Изучается область сходимости ряда (1), когда весовая функция $g(z_1, z_2) \neq 1$ и гиперповерхность сопряженных радиусов сопутствующего двойного степенного ряда расположена так, что $G \cap U^{--} \neq \emptyset$. При этих условиях показано, что двойной ряд Фабера (1) сходится абсолютно и равномерно в области вида $D \cup B_1 \cup B_2$, где $D = \bigcup\limits_{r,s} D_{rs}^{++}$, $r, s > 1$ и удовлетворяют условию $\overline{\lim\limits_{n+m\to\infty}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}|r^n s^m} = 1$;

$$B_1 = \left\{(z_1, z_2) \in C^2 : \; z_1 \in D^+_{R(z_2)}, \; z_1 \in D^+_2\right\},$$

$R(z_2)$ имеет достаточно сложную конструкцию.

Литература

1. Цвиль М.М. *Оценки и асимптотические формулы для обобщенных полиномов Фабера двух переменных* // Матем. заметки, 1981. Т. 29, вып. 2. С. 201–209.

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ

Черных Е.В. (Москва)

Рассмотрим в области $Q^T = \{|x| < 1, 0 < t < T\}$ уравнение

$$\operatorname{sgn} x \; u_t - u_{xx} + a(x,t)u_x + b(t,x)u = f(x,t) \qquad (1)$$

с вещественными коэффициентами $a(x,t), b(x,t) \in C(\overline{Q}^T)$. Функцию $f(x,t)$, стоящую в правой части уравнения (1), будем предполагать принадлежащей пространству $L_2(Q^T)$.

Теорема. *Пусть функция $u(x,t)$ является обобщенным решением из $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ уравнения (1) таким, что*

$$\int\limits_0^T \int\limits_{-1}^1 u_x^2(1 - x^2)dxdt < \infty,$$

тогда существуют такие функции

$$\varphi_1(x,t) \in L_2(0,T), \; \varphi_2(x,t) \in L_2(0,T),$$

$$u_1(x) \in L_2((-1,1);(1-x^2)), \ u_2(x) \in L_2((-1,1);(1-x^2)),$$

что

$$\lim_{\substack{r \to 1-0 \\ \beta \to +0}} \int_{\beta}^{T-\beta} (u(-r,t) - \varphi_1(t))^2 dt = 0,$$

$$\lim_{\substack{r \to 1-0 \\ \beta \to +0}} \int_{\beta}^{T-\beta} (u(r,t) - \varphi_2(t))^2 dt = 0,$$

$$\lim_{\substack{r \to 1-0 \\ \beta \to +0}} \int_{-r}^{r} (u(x,\beta) - u_1(x))^2 (r^2 - x^2) dt = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{\substack{r \to 1-0 \\ \beta \to +0}} \int_{-r}^{r} (u(x,T-\beta) - u_2(x))^2 (r^2 - x^2) dt = 0.$$

Нами получена эквивалентность следующих условий:

• *Обобщенное из $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ решение уравнения (1) принадлежит классу Харди H^2.*

• *Справедливо следующее условие Литтлвуда-Пэли:*

$$\int_0^T \int_{-1}^1 u_x^2 (1-x^2) dx dt < \infty.$$

• *Существуют такие функции $\varphi_1(x,t) \in L_2(0,T)$, $\varphi_2(x,t) \in L_2(0,T)$, $u_1(x) \in L_2((-1,1);(1-x^2))$ и $u_1(x) \in L_2((-1,1);(1-x^2))$, что выполняются равенства (2).*

Литература

1. Petrushko I.M. On the first mixed problem for parabolic equations of second order. Math. Sbornik 1979, vol. 20, p.1009-1012.

2. I.M.Petrushko, "On boundary values of solutions of elliptic equations degenerating on the boundary", Mat. Sb. 136 (178) (1988), 569-588; English transl. in Math. USSR-Sb. 48 (1984).

3. I.M.Petrushko, "Boundary values of solutions of Keldysh-type degenerate elliptic equations with weak degeneracy", Non-classical equations and mixed-type equations, Novosibirsk 1990, p. 166-182.

4. Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск. НГУ, 1973.

5. Kislov N.V. Nonhomogeneous boundary value problems for differential - operator equations of mixed type, and their application. Math. Sbornik 1986, vol. 53, p.17-35.

6. Kislov N.V. Nonhomogeneous boundary value problems for an equation of mixed in in a rectangular domain. Dokl. Akad. Nauk USSR 255 (1980), 26-30; English transl. In Soviet Math. Dokl. 22 (1980).

ОБ УРОВНЯХ СЛАБО ВОЗМУЩЕННОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Чубурин Ю.П. (Ижевск)

Пусть $V(x)$, $W(x)$ — вещественные ограниченные функции, причем функция $V(x)$ — периодическая с периодом 1 по всем переменным, $W(x)$ — периодическая по переменным x_1, x_2 с периодом 1, удовлетворяющая оценке $W(x) \leq \exp(-a|x_3|), a > 0$. Рассматривается оператор Шредингера вида $H_\varepsilon(k_{\|}) = -\Delta + V(x) + \varepsilon W(x)$, где $\varepsilon \in R$, областью определения которого служат блоховские по переменным x_1, x_2 ($k_{\|}$ — соответствующий квазиимпульс) функции из $L^2(\Omega)$, $\Omega = [0,1] \times \mathbf{R}$ (эти операторы получаются при разложении оператора $H = -\Delta + V(x) + \varepsilon W(x)$, действующего в $L^2(^3)$, в прямом интеграле пространств $L^2(\Omega)$).

Обозначим через $\Gamma(x, y, k_{\|}, E)$ ядро резольвенты (возможно, продолженное по параметру E) оператора $H_0(k_{\|})$. Назовем уровнем значение $E \in \mathbf{C}$, для которого существует ненулевое решение уравнения

$$\psi(x) = -\varepsilon \int_{\Omega} \Gamma(x, y, k_{\|}, E) W(x) \psi(y) dy,$$

такое, что $\sqrt{W}\psi \in L^2(\Omega)$ (то есть E — собственное значение или резонанс).

Рассмотрим оператор $H_0(k) = -\Delta + V(x)$, действующий в $L^2([0,1]^3)$ и определенный на блоховских по всем переменным функциях; здесь $k = (k_{\|}, k_3)$ — трехмерный квазиимпульс. Собственные значения $H_0(k)$ обозначим через $E_n(k)$. Предположим, что E_0 — точка экстремума функций $E_{n(j,\alpha)}(k)$, $j = 1, \ldots, N$, $\alpha = 1, \ldots, A_j$ в точках $k_j = (k_{\|}, k_{3,j})$ (A_j — кратность собственных значений в этих точках); например, E_0 — граница зоны спектра оператора $H_0(k_{\|})$. Предположим, что

$$\partial^2 E_{n(j,\alpha)}(k_j)/\partial k_3^2 \neq 0. \tag{1}$$

(В [1] рассматривался случай $N = A_1 = 1$). Можно доказать, что в окрестности точки E_0 существует ровно $\kappa = \sum\limits_{j=1}^{j=N} A_j$ уровней (не исключено слияние некоторых из них). (Заметим, что для сделанного утверждения не требуется выполнения условия (1)). При этом уровни представляются рядами Пюизо по ε. Если E_0 — граница зоны, одна из функций $E_{n(j_0,\alpha_0)}(k_{j_0})$ является четной по k_3 в окрестности k_{3,j_0} (это имеет место, если, например, W — четная функция по x_3 и $k_{3,j_0} = 0$), и уровень $E(\varepsilon)$ находится в лакуне для $\varepsilon \neq 0$, то $E(\varepsilon)$ аналитически зависит от ε. Наконец, для всякого уровня имеет место соотношение $E(\varepsilon) = E_0 + a_0\varepsilon^{2+\sigma} + o(\varepsilon^{2+\sigma})$, где $a_0 \not\emptyset$, $\sigma \geq 0$.

Литература

Ю.П. Чубурин. Теор. и матем. физика. Т.110. N 3. С.443-453.

О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ БЛЯШКЕ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА И В КЛАССАХ ТИПА ВМОА

Шамоян Р.Ф. (Брянск)

Пусть $0 < p, q < \infty, s \in (0,1), AB^s_{p,q}(\mathbf{D})$ — аналитические пространства Бесова

$$AB^s_{p,q}(\ bfD) =$$

$$= \left\{ f \in H(\mathbf{D}) : ||f||^q_{AB^s_{p,q}} = \int\limits_0^1 M^q_p(f', r)(1-r)^{(1-s)q-1} dr < \infty \right\},$$

где $H(\mathbf{D})$ — класс голоморфных в круге $\mathbf{D} = z : |z| < 1$ функций, $M_p^p(f', r) = \int\limits_T |f'(r\xi)|^p dm(\xi), r \in (0, 1)$.

Опираясь на характеристику типа BMO классов $AB^s_{p,q}(\mathbf{D})$ (см.[2]) в докладе будет установлена

Теорема1 *Пусть* $s \in (0,1); p, q \in (1, \infty); 0 < \gamma < (\frac{1}{p'}, \frac{1}{p}), \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, *последовательность* $\{(z_k)_{k=1}^{\infty}\}$ $(\{(w_k)_{k=1}^{\infty}\})$ *удовлетворяет условию* $WN(CN), B(z, z_k)$ — *произведение Бляшке, соответствующее последовательности* $\{(z_k)_{k=1}^{\infty}\}$. *Тогда*

1) $B(z, w_k) \in AB^s_{1,1}$ *в том и только том случае, если* $\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |z_j|)^{1-s} < \infty$

2) $B(z, z_k) \in AB^s_{1,q}(\mathbf{D})$ *тогда и только тогда, когда* $\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |z_j|)^{(1-s)q} < \infty$

3) $B(z, z_k) \in AB_{p,p}(\mathbf{D})$ *тогда и только тогда, когда* $\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |z_j|)^{1-\gamma p} < \infty$. (по поводу условий CN и BN см. монографию [1]) Аналогичные результаты будут приведены для классов типа BMOA (см.[2])

Теорема 2 *Следующие условия равносильны:*

1) последовательность $\{(z_k)_{k=1}^{\infty}\}$ *удовлетворяет условию* (WN);

2) оператор $T_B : (T_B f)(r^2\xi) = \int\limits_T f(rt) B(\bar{t}r\xi) dt$ *действует ограниченно из* $BMOA(\mathbf{D})$ *(см.[1]) в* $H_k^{\infty,\infty}$, *где* $H_k^{\infty,\infty}(\mathbf{D}) = \{f \in (\mathbf{D}) : M_\infty(f^{(k+1)}, r)(1 - r)^k < \infty, k \in \mathbf{N}\}$;

3) $\hat{B}(k) = O\left(\frac{1}{k}\right), \hat{B}(k)$ — *коэффициент Тейлора функции* $B(z, z_k)$.

Литература

1. Дж.Гарнетт Ограниченные аналитические функции, Москва,Мир.1984,469 с.

2. K.M.Djakonov Besov spaces and Outer funktions, Mich Math. Jour,45,1998,143-157

ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ СО СМЕШАННЫМИ НОРМАМИ В ПОЛИКРУГЕ

Шамоян Ф.А., Часова Н.А. (Брянск)[1]

e-mail: sham@bgpi.bitmcnit.bryansk.su

Пусть $\mathbf{D}^n$ – открытый единичный полидиск в n-мерном комплексном пространстве C^n. T^n – его остов. Пусть $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $0 < p_k < \infty$ $(k = 1, \ldots, n)$. Пространство Харди $H^{\vec{p}}(\mathbf{D}^n)$ со смешанными нормами определим как пространство голоморфных в $\mathbf{D}^n$ функций f, для которых

$$\sup_{0 \le r < 1} \left(\int_T \cdots \left(\int_T \left(\int_T |f(r\zeta)|^{p_1} dm_1(\zeta_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\ dm_1(\zeta_2) \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \ldots dm_1(\zeta_n) \right)^{\frac{1}{p_n}} < \infty,$$

где $T = T^1$, $dm_1(\zeta)$ – мера Лебега на T. В случае $p_1 = \ldots = p_n = p$ пространство $H^{\vec{p}}(\mathbf{D}^n)$ совпадает с обычным пространством Харди $H^p(\mathbf{D}^n)$. (см.[1]) Положим $e_z(\zeta) = \prod\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{1-\zeta_j z_j}$. Обозначим через $\lambda^{\vec{p}}$ множество всех голоморфных в $\mathbf{D}^n$ функций g, для которых выполняется оценка

$$|D^{\alpha+1} g(z_1, \ldots, z_n)| \le const \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(1 - |z_j|)^{\alpha_j + 2 - \frac{1}{p_j}}},$$

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{D}^n,$$

где D^α – обычный оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля. В пространстве $\lambda^{\vec{p}}$ естественным образом вводится норма $||\cdot||$, относительно которой пространство $\lambda^{\vec{p}}$ превращается в банахово. (см.[2])

---

[1] Работа выполнена при поддержке МО РФ (грант 97-0-1.6-110) и РФФИ 99-01-00103

Теорема. Пусть Φ – линейный непрерывный функционал на $H^{\vec{p}}(D^n), \vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $0 < p_i \leq 1, (i = 1, \ldots, n)$ и пусть $g(z) = \Phi(e_z)$.

Тогда $g \in \lambda^{\vec{p}}$, Φ представим в виде:

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \int_{T^n} f(\rho\zeta) g(\rho\bar{\zeta}) dm_n(\zeta) \tag{1}$$

и существуют положительнные константы c_1, c_2, такие что справедлива оценка:

$$c_1 ||g||_{\lambda^{\vec{p}}} \leq ||\Phi|| \leq c_2 ||g||_{\lambda^{\vec{p}}}. \tag{2}$$

Обратно: каждая функция $g \in \lambda^{\vec{p}}$ по формуле (1) порождает линейный непрерывный функционал на $H^{\vec{p}}(D^n)$ для которого справедлива оценка (2).

Аналогичная теорема доказана и для случая $H^p(D^n)$, при $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n), 1 < p_i < \infty$, $(i = 1, \ldots, n)$.

В частном случае, когда $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p, 0 < p \leq 1$, из данной теоремы следует результат А.Фрезера. (см. [3])

Литература

[1]. У. Рудин. Теория функций в поликруге. М., "Мир", 1974.

[2]. Ф. А. Шамоян. Сиб.мат. журнал. - 1990, т.31, N 2. с. 197-215.

[3]. A. P. Frazier. Duke Math. J. V.39, 1972, p. 369-379.

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОГО КЛАССА ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Шамоян Ф. А.[1], **Шубабко Е. Н.** (Брянск)

E-mail: sham@bgpi.bitmcnit.bryansk.su

Пусть $\mathbf{D}$ – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbf{C}$, $\alpha \geq 0$. Обозначим через $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$ класс голоморфных в $\mathbf{D}$ функций f, для которых $T(r, f) \leq \frac{c_f}{(1-r)^\alpha}, 0 \leq r < 1$, где $T(r, f) =$

[1]Первый автор поддержан грантами МО РФ (97-0-1.6-110) и РФФИ (99-01-00103).

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ln^+|f(re^{i\phi})|d\phi$ характеристика Р. Неванлинны функции f (см. [1]), c_f–положительная константа, зависящая только от f.

Очевидно, что при $\alpha = 0$ $\mathbf{N}_0(\mathbf{D})$=$\mathbf{N}(\mathbf{D})$ совпадает с известным классом Неванлинны функций ограниченного вида. Характеристика корневых множеств и факторизационное представление класса $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$ установлены в работе авторов [2].

В работе устанавливается следующая

Теорема. *1.) Пусть*

$$f \in \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D}), \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{f}(k) z^k, \quad z \in \mathbf{D}.$$

Тогда справедлива оценка

$$|\hat{f}(k)| \leq e^{c_f k^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}}, \quad k = 1, 2... \tag{1}$$

2.) Для произвольного положительного числа c можно построить аналитическую в области $\mathbf{C}\backslash\{1\}$ функцию f $\in\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{D})$ такую, что

$$|\hat{f}(k)| \geq e^{ck^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}}, \quad k = 1, 2... \tag{2}$$

Замечание. При $\alpha = 0$ оценки (1) и (2) совпадают с хорошо известной оценкой С. Н. Мергеляна. (см. [3], с. 152)

Литература

1. R. Nevanlinna, *Eindeutige Analytischefunktionen*, Springer, Berlin, 1936.

2. F. A. Shamoyan and E. N. Shubabko, *Parametrical Represetations of Some Classes of Holomorphic Function in the Disk*, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 113, Birkhauser Verlag Basel, 2000.

3. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, Гостехиздат, Москва, 1950.

О ЧАСТИЧНОЙ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ МНОЖЕСТВ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОРТЕВЕГА ДЕ ФРИЗА

Шананин Н. А. (Москва)[1]

nshananin@sci.pfu.edu.ru

Предположим, что в уравнении типа Кортевега де Фриза:

$$u_t + a(t,x)u_{xxx} = f(t,x,u,u_x), \quad (t,x) \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^2, \tag{1}$$

коэффициент $a(t,x) \in C^\infty(\Omega)$ является вещественнозначной, отличной от ноля во всех точках открытого множества Ω функцией, функция $f(t,x,u,v)$ вещественнозначна, обладает свойством Каратеодори и для любых компактов $K_1 \subset \Omega$ и $K_2 \subset \mathbf{R}^2$ с некоторой константой $C = C(K_1, K_2)$ для почти всех $(t,x) \in K_1$ и всех (u^1,v^1), $(u^2,v^2) \in K_2$ выполняется липшицева оценка: $|f(t,x,u^1,v^1) - f(t,x,u^2,v^2)| \le C(|u^1-u^2| + |v^1 - v^2|)$. Будем говорить, что подмножество множества обобщенных функций переменных $(t,x) \in \Omega$ образует *x-квазианлитический класс*, если из равенства двух его элементов в окрестности точки (t^0,x^0) следует их равенство в окрестности связной компоненты слоя $\{t = t^0\} \cap \Omega$, содержащей точку (t^0,x^0).

Теорема 1. *Множество вещественнозначных решений* $u(t,x) \in \mathcal{B}(\Omega) = \{u(t,x) \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega) \mid u_x \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega),\ u_{xx} \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)\}$ *уравнения* (1) *образует x-квазианалитический класс.*

Пусть $g : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathcal{B}(\Omega_g)$, где $\Omega_g \subseteq \mathbf{R}^2$ - открытое множество. Будем говорить, что *росток* обобщенной функции $u(t,x)$ в точке $(t^0,x^0) \in \Omega$ *инвариантен относительно отображения* g, если $(t^0,x^0) \in \Omega_g$ и $g(u)(t,x) = u(t,x)$ в некоторой окрестности (t^0,x^0). Будем говорить, что *отображение* g *сохраняет решения уравнения* (1), если $\Omega \cap \Omega_g \ne \emptyset$ и образ $g(u)(t,x)$ любого решения $u(t,x) \in \mathcal{B}(\Omega)$ уравнения (1) является решением этого уравнения на множестве $\Omega \cap \Omega_g$.

Теорема 2. *Если в точке* (t^0,x^0) *росток решения* $u(t,x) \in \mathcal{B}(\Omega)$ *уравнения* (1) *инвариантен относительно отображения* g, *сохраняющего решения, то во всех точках связной компоненты*

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 99-01-01139.

слоя $\{t = t^0\} \cap \Omega \cap \Omega_g$, *содержащей точку* (t^0, x^0), *ростки* $u(t, x)$ *инвариантны относительно* g.

Литература

[1] Шананин Н.А., Об однозначном продолжении решений дифференциальных уравнений со взвешенными производными. // Матем. сборник, т. 191, вып. 3, 2000, 113-142.

[2] Шананин Н.А., О частичной квазианалитичности обобщенных решений слабо нелинейных дифференциальных уравнений со взвешенными производными. // Матем. заметки, т. 68, вып. 4, 2000, 608-619.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда

ИСПРАВЛЕННЫЕ СУММЫ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

Шарапудинов И.И. (Махачкала)[1]

E-mail: sharapud@datacom.ru

Рассмотрены аппроксимативные свойства исправленных сумм Фурье $\mathcal{Y}n + 2r(f) = \mathcal{Y}n + 2r(f, x)$ по полиномам Лежандра $Pn(x)$, введенных автором в работе [1] по формуле

$$\mathcal{Y}n + 2r(f) = \mathcal{Y}n + 2r(f, x) = Sn(f, x) + \psi r, n(x),$$

где $Sn(f, x)$ – частная сумма Фурье по полиномам Лежандра порядка n, $\phi r, n(x)$ – поправка вида

$$\phi r, n(x) = (-1)^r \sum_{k=n-r+1}^{n+r} \frac{\hat{f}r, k}{k^{[r]}} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n+r-k}{2}\right]} (-1)^i \sigma^k i Pk - r + 2i(x),$$

$[a]$ – целая часть числа a, $k^{[r]} = k(k-1)\dots(k-r+1)$,

$$\hat{f}r, k = \frac{2k+1}{2} \int -1^1 f^{(r)}(t) Pk(t) dt$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект 00-01-00037 а.

$$\sigma i^k = \sigma i^k(m) = \frac{2^m \left(k^{[m]}\right)^2 m^{[i]}(1/2)i(2k+1-2m+4i)}{(2i)!(2k)^{[2m-2i]}(k-m+1)i(k+3/2)i(2k+1)}$$

$(a)0 = 1$, $(a)i = a(a+1)\cdots(a+i-1)$ $(i \geq 1)$.

В работе [1] было доказано, что суммы $\mathcal{Y}n + 2r(f,x)$ и их производные $\mathcal{Y}n + 2r^{(\nu)}(f,x)$ имеют достаточно хорошими аппроксимативными свойствами на некоторых специальных классах функций, обладающих с переменной гладкостью на $[-1,1]$.

В настоящей работе, в частности показано, что суммы $\mathcal{Y}n + 2r(f,x)$ и их производные $\mathcal{Y}n + 2r^{(\nu)}(f,x)$ сохраняют свои хорошие аппроксимативные свойства также для функций, принадлежащих хорошо известным классам $W^r L2$ и классам аналитических функций. Например, доказано, что если $f \in W^r L2$, то

$$|f(x) - \mathcal{Y}n + 2r(f,x)| \leq c(r)(1-x^2)^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \frac{En + r(f^{(r)})L2}{n^{r-1/2}}.$$

где $En + r(f^{(r)})L2$ – наилучшее приближение пороизводной $f^{(r)}(x)$ алгебраическими полиномами степени $n + r$ в метрике пространства $L2[-1,1]$.

Рассмотрены также дискретные аналоги операторов $\mathcal{Y}n + 2r^{(\nu)}(f)$, построенные на основе полиномов Чебышева, ортогональных на равномерных сетках и исследованы их аппроксимативные свойства.

Литература

1. Шарапудинов И.И., Приближение функций с переменной икадкостью суммами Фурье-Лежандра // Матем. сборник. Т. 191. N 5. стр. 143–160.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ КВАЗИОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Юсубов Ш.Ш. (Баку, Азербайджан)
E-mail: guliev@azdata.net

Рассматривается задача минимума функционала

$$S(u_1, \ldots, u_n) = G_n^0(x_n(\theta_n))$$

при ограничениях

$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i(t), u_i(t)),\ t \in [\theta_{i-1}, \theta_i],\ i = \overline{1,n},$

$x_{i+1}(\theta_i) = G_i(x_i(\theta_i)),\ i = \overline{1, n-1},$

$x_1(\theta_0) = G_0(x_0(\theta_0)) = x_0.$

Здесь $f_i(t, x_i, u_i)$–заданные n_i–мерные вектор функции, непрерывные в $[t_0, T] \times R^{n_i} \times R^{r_i}$ вместе с частными производными по x_i, u_i до второго порядка включительно, $G_i(x_i)$-заданные n_i–мерные дважды непрерывно–дифференцируемые вектор функции, $G_n^0(x_n)$– заданная дважды непрерывно–дифференцируемая скалярная функция, $x_0 \in R^{n_1}$– заданная точка, моменты $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$ ($t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{n-1} < \theta_n = T$) фиксированы, $u_i(t)$– r_i- мерные кусочно–непрерывные вектор функции управления, принимающие значения из заданного ограниченного выпуклого множества $U_i \subset R^{r_i}$ (допустимое управление):

$$u_i(t) \in U_i \subset R^{r_i},\ t \in [\theta_{i-1}, \theta_i],\ i = \overline{1,n}.$$

Получены новые необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БАЗОВЫХ АЛГОРИТМОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ КУРСАНТОВ МАТЕМАТИКЕ В ВОЕННОМ ИНСТИТУТЕ

Якупов З.Я., Насырова Е.В. (Казань)

E-mail: snasyrov@ksu.ru

Рассматриваются различные аспекты применения в процессе изучения курсантами математики в высшем военном учебном заведении понятий и методов, связанных с используемыми в образовании информационными технологиями.

Основой такого подхода служит понятие базового алгоритма:

1) как важной структурной единицы учебного материала, составляющего содержание различных разделов математики;

2) как структурного элемента развиваемого у обучаемых логического мышления.

Воспитание логического мышления в процессе изучения математики служит основой выработки точности и полноты логических суждений, что сейчас немаловажно для всех, кто соприкасается с вопросами эксплуатации сложной военной техники, передачи и обработки информации, принятия решений в условиях нестандартных ситуаций. При этом требуется организовать процесс обучения математике и воспитания логического мышления так, чтобы были учтены военно-практические потребности при подготовке командного состава.

За отправную точку, на наш взгляд, следует взять известный факт, что воспитание алгоритмического мышления изначально является ступенью для формирования логического, а в конечном итоге — эвристического мышления. При этом можно наблюдать за тем, как в процессе обучения математике выделяемые базовые алгоритмы, постепенно укрупняясь, становятся структурными элементами логического мышления.

Здесь мы ведем речь именно о выделенных базовых алгоритмах курса "Математика", понимая под этим набор формальных операций, определяющих действия, проводимые с наглядно просматривающейся или конструктивно задаваемой формой объектов.

В докладе рассматривается большое число примеров базовых алгоритмов, выделенных во всех программных разделах математики, изучаемых в высших военных учебных заведениях.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АССОЦИИРОВАННЫХ С БИКРУГОМ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Якшина А.С. (Москва)

1°. С помощью развиваемого А.В. Нелаевым [2] метода линейных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами устанавливается формула дифференциальной связи между вводимым интегралом типа Коши-Баврина второго порядка и соответствующим интегралом типа Коши, на основе которой далее получена система двух дифференциальных уравнений в формальных производных, которой рассматриваемый интеграл удовлетворяет вне бикруга

$$U^{++} = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}.$$

2°. На базе одного из установленных И.И. Бавриным с помощью созданного им метода интегродифференциальных операторов голоморфных функций [1] интегральных представлений для бикруга U^{++}, введем в рассмотрение класс функций, определяемых интегралом

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 t^{\gamma-1}\, dt \int_0^1 \tau^{\beta-1}\, d\tau \int_{T^2} \frac{\phi(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2}{(\zeta_1 - v_1)(\zeta_2 - v_2)}, \tag{1}$$

где плотность $\phi(\zeta_1, \zeta_2)$ — определенная на остове бикруга U^{++} торе T^2 удовлетворяющая условию Гельдера функция,

$$v_\nu = \tau^{\delta_\nu} (t^{\sigma_\nu} z_\nu + (1 - t^{\sigma_\nu}) z'_\nu) + (1 - \tau^{\delta_\nu}) z^0_\nu, \quad \nu = 1, 2;$$

константы $\beta \geq 1$, $\gamma \geq 1$; δ_ν и σ_ν — любые неотрицательные числа с условием $\delta_1 + \delta_2 > 0$, $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$; (z^0_1, z^0_2) и (z'_1, z'_2) — фиксированные по произволу точки из U^{++}; τ и t — вещественные параметры. Будем использовать стандартные обозначения областей пространства $\mathbf{C}^2$: U^{-+}, U^{+-}, U^{--}.

3°. **Теорема 1.** *Интеграл (1) голоморфен в бикруге U^{++} и, кроме того, в области U^{-+} — если $\sigma_1 + \delta_1 = 0$, или в области U^{+-} — если $\sigma_2 + \delta_2 = 0$.*

Теорема 2. *В области U^{--} и в областях U^{-+} (при $\sigma_1 > 0$) и U^{+-} (при $\sigma_2 > 0$) интеграл (1) является непрерывной, неголоморфной, вообще говоря, функцией.*

Теорема 3. *В областях U^{++}, U^{-+}, U^{+-} и U^{--} интеграл (1) связан с соответствующим интегралом типа Коши единой формулой дифференциальной связи*

$$(\beta + R)\left[(\gamma + R_1)\left[F(z_1, z_2)\right]\right] = \Psi(z_1, z_2), \tag{2}$$

где $R = \sum_{\nu=1}^{2} \delta_\nu \left((z_\nu - z_\nu^0) \frac{\partial}{\partial z_\nu} + (\bar{z}_\nu - \bar{z}_\nu^0) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu} \right)$, *а* R_1 *образуется из* R *при замене* δ_ν *на* σ_ν, *а* $z_\nu^0 (\bar{z}_\nu^0)$ — *на* $z'_\nu (\bar{z}'_\nu)$.

Теорема 4. *В областях U^{-+}, U^{+-} и U^{--} интеграл (1) удовлетворяет обобщенным условиям Коши-Римана*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu} \left\{ (\beta + R)\left[(\gamma + R_1)\left[F(z_1, z_2)\right]\right] \right\} = 0, \quad \nu = 1, 2. \tag{3}$$

Система (3) является важным квазианалитическим свойством интеграла (1); она существенно используется в дальнейшем исследовании этого интеграла.

Выражаю искреннюю признательность доценту МПУ А.В.Нелаеву за руководство работой.

Литература [1] *Баврин И.И.* Операторный метод в комплексном анализе. М.: "Прометей". МПГУ. 1991.

[2] *Нелаев А.В.* Метод линейных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами в исследовании комплексных интегралов в $\mathbf{C}^n$ // Математика. Компьютер. Образование: Сб. науч. трудов / под ред. Г.Ю. Ризниченко. М.: Прогресс-Традиция. 2000. В. 7. Ч. 2. С. 444-451.

ТЕНЗОРНАЯ МЕТОДОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ ЦЕПНЫХ ЗАДАЧ ИЗ ОБЛАСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Павлов Ю.С.

Поведение целого ряда простых объектов носит цупной характер, выражаемый наличием конечного набора состояний $\{S_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, сменяющихся в дискретные моменты времени t. Такие задачи для простых объектов традиционно решаются на базе теории марковских процессов.

В сложных системах $S_k \in \{S_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, обычно является состоянием морфологии системы, а $\{S_i\}$ описывает траекторию ее движения во времени и определяет динамику этого процесса, который в общем случае может иметь нестационарность произвольного характера. Подобные процессы образуют сложные цепи Маркова порядка N, которые часто являются неоднородными. Оценки на основе теории прогнозирования показываю, что $(2-3) \leq N \leq 15$.

В таких задачахадекватное определение вероятностей переходов $S_i \rightarrow S_j$, $i, j = 1, 2, \ldots$, является самостоятельной слабоформализованной задачей с принциально нечетким характером.

Все эти обстоятельства резко усложняют использование теории марковских процессов при количественном решении цепных задач в области сложных систем м вынуждает к поиску альтернативных путей.

Такая альтернатива — сочетание принципов тензорной методологии анализа сетевых структур [1] и современной геометрии, выражающее поведение $\{S_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, сквозным отображением

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_0 & \rightarrow & S_1 & \rightarrow & S_2 & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & S_{n+1} & \rightarrow & \ldots \\ & \mathbf{C}_0 & & \mathbf{C}_1 & & \mathbf{C}_2 & & \mathbf{C}_n & & C_{n+1} & \end{array}$$

где $S_0 = S(t_0)$ — исходное состояние системы при $t = t_0$, $\mathbf{C}_i$ — тензор преобразования системы при переходе $S_i \rightarrow S_{i+1}$.

Полученная методология решения позволяет

- описывать динамику морфологии системы цепями $\{S_i\}$ и $\{\mathbf{C}_i\}$,

– прогнозировать будущее поведение этих цепей,

–преобразовать цепи путем укрупнения их состояний.

Для определения $\mathbf{C}_i$ существует [1] два сравнительно простых пути и правило выбора одного из них.

Литература

1. Крон Г. Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. радио, 1978. – 720с.

2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. – М.: Наука, 1979. – 760с.

Именной указатель

Компьютерная верстка и подготовка оригинал-макета:
Шабров С.А., Бурлуцкая М.Ш.

Центрально-Черноземное книжное издательство,
394053, г. Воронеж, ул. Лизюкова, 2.
Усл. п.л. 19.0 Бум. писчая. Печать трафаретная.
Тир. 300 Подписано к печати 29.12.2000.