Воронежский государственный университет
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ

Воронежской весенней математической школы
«Понтрягинские чтения – XVI»

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$$

В честь 100-летия академика
Сергея Михайловича Никольского

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ
Воронежской весенней математической школы
"ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ –XVI"

3 мая – 9 мая 2005 г.

ВОРОНЕЖ

УДК 517.94 (92; 054, 97)

Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения – XVI". – Воронеж: ВГУ, 2005. – 189 с.

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Математическим институтом им. В.А. Стеклова РАН и Московским государственным университетом.

Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средних и высших учебных заведениях.

ISBN 5-9273-0643-8

ISBN 5-9273-0643-8

REPRESENTATION OF THE SET OF MILD SOLUTIONS FOR THE RELAXED DIFFERENTIAL INCLUSION[1]

Benedetti I. (Florence, Italy), Panasenko E. (Tambov)
benedetti@math.unifi.it, panlena_t@mail.ru

Let E be a separable Banach space, and $\mathcal{K}(E)$ be a set of all compact subsets of E. By $C([0,d],E)$ we denote the Banach space of continuous functions $x : [0,d] \to E$ equipped with the usual sup-norm. Let the linear operator $A : D(A) \subseteq E \to E$ be the infinitesimal generator of a C_0-semigroup e^{At}, and the multimap $F : [0,d] \times E \to \mathcal{K}(E)$ be continuous with respect to both variables, integrably bounded, and satisfy the χ-regularity condition (see [1]).

We consider Cauchy problem for the relaxed differential inclusion:

$$x'(t) \in Ax(t) + \overline{\mathrm{co}}F(t,x(t)),\ t \in [0,d],\ \ x(0) = x_0 \in E. \qquad (1)$$

Let the function $\eta : [0,d] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ be measurable by the first argument, bounded by summable function, and for a.e. $t \in [0,d]$ satisfying the relations $\lim\limits_{\delta\to 0+0} \eta(t,\delta) = 0,\ \eta(t,0) = 0$. We also consider the following differential inclusion:

$$x'(t) \in Ax(t) + O_{\eta(t,\delta)}(F(t,x(t))),\ t \in [0,d],\ \ x(0) = x_0 \in E, \qquad (2)$$

where $O_{\eta(t,\delta)}(\cdot)$ stands for a closed $\eta(t,\delta)$-neighborhood of a set in E.

A continuous function $x \in C([0,d],E)$ is called a *mild solution* for the problem (1) (or (2)) on an interval $[0,d]$ (see [1]), if there exists a Bochner integrable selection f of corresponding multimap such that

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds,\ t \in [0,d].$$

Let H_{co} and $H_{\eta(\delta)}$ denote the sets of mild solutions for (1) and (2), respectively. In this report we discuss the conditions under which the equality

$$H_{\mathrm{co}} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}}$$

takes place (here the closure of the set $H_{\eta(\delta)}$ is taken in the space $C([0,d],E)$).

[1] Research is supported by RFBR, project № 04-01-00324.

References

1. M. Kamenskii, V. Obukhovskii, and P. Zecca. *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces.* – Berlin; New York: de Gruyter, 2001.

A 1D SCALAR FIELD WITH TWO ZERO RANGE SCATTERING CENTRES

Choroszavin S.A.

sergius@math.vsu.ru

The subject of the discussion is a method of how one can express the $u(t,x)$ which is implicitly described, on certain conventions, by

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - 4\gamma_a c\delta(x-x_a)u(t,x_a) - 4\gamma_b c\delta(x-x_b)u(t,x_b).$$

In $(t \geqslant 0)$, I represent that $u(t,x)$ by

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= F_a(t-|x-x_a|/c) + F_b(t-|x-x_b|/c) + u_0(t,x) \\
F_a(t) &= -2\gamma_a\int_0^t e^{-2\gamma_a(t-\tau)}F_b(\tau-T)d\tau \\
&\quad - 2\gamma_a\int_0^t e^{-2\gamma_a(t-\tau)}u_0(\tau,x_a)d\tau\,, \\
F_b(t) &= -2\gamma_b\int_0^t e^{-2\gamma_b(t-\tau)}F_a(\tau-T)d\tau \\
&\quad - 2\gamma_b\int_0^t e^{-2\gamma_b(t-\tau)}u_0(\tau,x_b)d\tau\,, \\
&\quad \Big(F_a(t)=0\,,\ F_b(t)=0\,,\ \text{ if } t<0\Big) \\
u_0(t,x) &= f(x+ct)+g(x-ct) \qquad \Big(\text{ for suitable } f\,,\, g\Big) \\
&\quad \text{and where } T := |x_b-x_a|/c\,.
\end{aligned}$$

If $\gamma_b = 0$, then these relations become

$$\begin{aligned}
F_a(t) &= -2\gamma_a\int_0^t e^{-2\gamma_a(t-\tau)}u_0(\tau,x_a)d\tau\cdot 1_+(t)\,, \\
u(t,x) &= F_a(t-|x-x_a|/c) + u_0(t,x) \qquad (t\geqslant 0)
\end{aligned}$$

If there accepts

$$u(t,x_a)\equiv 0 \qquad (t\geqslant 0)\,, \qquad \gamma_b=0\,,$$

then, in $(t\geqslant 0)$,

$$u(t,x) \;=\; -u_0(t-|x-x_a|/c,x_a)\cdot 1_+(t-|x-x_a|/c)+u_0(t,x)$$

ON THE QUALITY BEHAVIOUR OF SOLUTION NONLINEAR OBSTACLE PROBLEMS

Gadjiev T.S., Aliev S.Y. (BAKU)
tgadjiev@mail.az, ibvag@yahoo.com

We assume that

$$Lu=\frac{d}{dx_i}a_i\left(x,u,\nabla u\right)+b\left(x,u,\nabla u\right)$$

is an nonlinear elliptic operator with $a_i\left(x,u,\nabla u\right)\approx\left|\nabla u\right|^m$, $1<m\leqslant n$, , $\psi : R^n\to(-\infty,\infty)$ is a bounded Borel function, called an obstacle. Let domain $\Omega\subset R^n$, $n\geqslant 2$ with boundary $\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, and $W^1_{m,0}\left(\Omega\right)$ Sobolev spase of function which vanishes to zero on Γ_1.

A function u is said to be a local solution to the obstacle problem at the point $x_0\in R^n$ if there is an open neighborhood Ω of x_0 such that: u is in the $W^1_{m,0}\left(\Omega\right)$, $u\geqslant\psi$ m-quasieverywhere in Ω, $\int\limits_{\Omega} Lu\cdot\nabla\varphi dx\geqslant 0$ whenever $\varphi\in W^1_{m,0}\left(\Omega\right)$ and $\varphi\geqslant\psi-u$ m-quasieverywhere in Ω.Further, if $u-v\in W^1_{m,0}\left(\Omega\right)$, then u is sade to be solution to the obstacle problem with the boundary values v in Ω.

The precise meaning of "m-quasieverywhere" see [1].

In this paper we answer to question: what are the minimal conditions on ψ which ensure that u is continuous at x_0?

We established the Wiener criterion for nonlinear variational inequalities with irregular obstacles at mixed boundary conditions.

References

1. D. Kinderlehrer and G. Stampacchia. An introduction to variational inequalities and their applications, Academic Press, New York, 1980.

ON THE BEHAVIOUR OF SOLUTION MIXED BOUNDARY PROBLEM FOR NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

Gadjiev T.S., Jafarov S.H. (Baku)
tgadjiev@mail.az

We considered in unbounded domain $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$ with boundary $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ nonlinear elliptic equation

$$\frac{d}{dx_i} a_i(x, u, u_x) + b(x, u, u_x) = 0\,, \tag{1}$$

with mixed boundary conditions. On Γ_1 given condition to the Dirichlet, on Γ_2 condition to the Newman. The coefficients $a_i(x, u, p), b(x, u, p)$ measurable by $x \in \Omega$ and continuausly by $(u, p) \in R^{n+1}$,and satisfying conditions

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u, p) p_i \geqslant \mu_1 \left(1 + |p|\right)^{m-2} |p|^2 \ , \ m \geqslant 2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x, u, p) \leqslant \mu_2 \left(1 + |p|\right)^{2(m-2)} |p|^2 \ ,$$

μ_1, μ_2 positive constants.

For generalized solution mixed boundary problem for equations (1), belonding Sobolev space $W^1_{m,0}(\Omega)$, theorem of kind Fragmen-Lindeliof we established.This estimates depending geometry of domain.

ON THE EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR NEUTRAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH IMPULSIVE EFFECTS AT VARIABLE TIMES IN BANACH SPACE

Guedda L. (Tiaret, Algeria)
guedda@mail.univ-tiaret.dz

We give sufficient conditions for the existence of solutions for neutral functional inclusions with impulsive effects at variable times in separable Banach space

$$\frac{d}{dt}[x(t) + h(t, x_t)] \in Ax(t) + F(t, x_t),\ a.e.\, t \in [0, T], \tag{1}$$

$$t \neq \zeta_k(x(t)),\ k = 1, \ldots, m,\ x(t) = \varphi(t),\ t \in [-r, 0], \tag{2}$$

$$x(t^+) = I_k(x(t)),\ t = \zeta_k(x(t)),\ k = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Where $A : D(A) \subset E \to E$ is an unbounded linear operator generating a C_0-semigroup, $F : [0,T] \times \Lambda \to Kv(E)$, $h : [0,T] \times \Lambda \to E$ is a given function, where $\Lambda = \{z \in C([-r,0],E)\}$; $z(t)$ is continuous everywhere except for a finite set of points $\widetilde{t}$ at which $z(\widetilde{t^+})$ and $z(\widetilde{t})$ exist and $z(\widetilde{t^-}) = z(\widetilde{t})$, $\varphi \in \Lambda$, $0 < r < \infty$, $\zeta_k : E \to \mathbb{R}$, $I_k : E \to E$ are given functions, the function x_t represents the history of the state from time $t - r$ up to the present time t. Suppose that
$\mathbf{F_1}$) $F(.,x) : [0,T] \to Kv(E)$ is strongly measurable for all $x \in \Lambda$; $\mathbf{F_2}$) $F(.,x) : \Lambda \to Kv(E)$ u.s.c. for $a.e.\, t \in [0,T]$; $\mathbf{F_3}$) there exists $\alpha \in L^1_+([0,T])$ such that $\|F(t,x_t)\| \leqslant \alpha(t)(1 + \|x(t)\|)$ for all $x \in C([-r,T],E)$; such that $x_t \in \Lambda$, $t \in [0,T]$; $\mathbf{F_4}$) there exists $\kappa \in L^1_+([0,T])$ such that for all $\Omega \subset \Lambda$ $\chi(F(t,\Omega_t)) \leqslant \kappa(t)\chi(\Omega)(t)$, $a.e.\, t \in [0,T]$; $\mathbf{H_1}$) $\zeta_k \in C^1(E,\mathbb{R})$ for $k = 1,\ldots,m$, moreover $\forall x \in E$ $0 < \zeta_1(x) < \zeta_2(x) < \ldots < \zeta_m(x) < \zeta_{m+1}(x) = T$; $\mathbf{H_2}$) there exist constants c_k such that $\|I_k x\| \leqslant c_k$, $k = 1,\ldots,m$ for each $x \in E$; $\mathbf{H_3}$) $\forall x,y \in E$ if $\|x\| \leqslant \|y\|$ then $\zeta_k(x) \geqslant \zeta_k(y)$; $\mathbf{H_4}$) $\forall x \in E$ $\|I_k x\| \leqslant \|x\|$; $\mathbf{h_1}$) there exist constants $0 \leqslant d_1 < 1$, $d_2 \geqslant 0$ such that $\forall \in \Lambda$ $\|h(t,x_t)\| \leqslant d_1\|x(t)\| + d_2$, $t \in [0,T]$; $\mathbf{h_2}$) there exists a constant $0 < \omega < 1$ such that for all bounded $\Omega \subset \Lambda$, $\chi(h(t,\Omega_t)) \leqslant \omega\chi(\Omega(t))$, $a.e.\, t \in [0,T]$; $\mathbf{h_3}$) there exists a constant $0 < d_3 < 1$ such that $\forall x,y \in \Lambda$ $\|h(t,x_t) - h(t,y_t)\| \leqslant d_3\|x(t) - y(t)\|$, $a.e.\, t \in [0,T]$; $\mathbf{h_4}$) $\forall x \in C([-r,T],E)$ $\|x(t) - h(t,x_t)\| \leqslant \|x(t)\|$, $x_t \in \Lambda$, $t \in [0,T]$.

Theorem *Assume that all the conditions* $\mathbf{F_1}) - \mathbf{F_4})$ *and hypothesis* $\mathbf{H_1}) - \mathbf{H_4})$, $\mathbf{h_1}) - \mathbf{h_4})$ *hold, then the problem (1)-(3) has at least one solution in* $[-r,T]$.

ON REMOVABLE SETS OF SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS

Mamedova V.A. (Azerbaijan)
vafa_eng6@yahoo.com

The sufficient conditions of removability of sets for Neumann and mixed boundary value problems are obtained for linear parabolic equations in nondivergent form and also for quasilinear parabolic equations of the second order. The corresponding result for Laplace equation was obtained by L.Karleson [1], for elliptic equation of divergent structure was obtained by E. Moiseev [2]. Let's remind also the work of E.M. Landis [3] where the nondivergent elliptic equations were considered.

Let E_{n+1}, $n \geqslant 2$ be Euclidean space. We consider cylindrical domain $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$ be a bounded domain. The boundary Ω is not smooth surface. Consider in $C^\lambda(Q_T)$ the following equation

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u - u_t = 0, \qquad (1)$$

where $(a_{ij}(x))$ is a real symmetric matrix, are Lipschitzian in $\overline{Q}_T$ and

$$\gamma |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leqslant \gamma^{-1} |\xi|^2, \ \xi \in E_n, \ \ \gamma \in (0,1], \qquad (2)$$

$$|b_i(x)| \leqslant b_0, \quad -b_0 \leqslant c(x) \leqslant 0, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

$b_0 \geqslant a$ -is a constant.

Let's call the set E removable relative to Neumann problem for equation (1) in $C^\lambda(Q_T)$ if from

$$Lu = 0, \ x \in D \backslash E, \ \ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial D \backslash E} = 0, \ \ u(x) \in C^\lambda(Q_T) \qquad (4)$$

it follows $u(x) \equiv 0$ in D.

Theorem. Let Q_T be cylindrical domain in E_{n+1}, $E \subset \overline{Q}_T$ be a compact set. The coefficients L satisfy the conditions (2)-(3). In order that the compact E be removable relative to Neumann problem for equation (1) in the space $C^\lambda(Q_T)$ it is sufficient that

$$m_H^{n-2+\lambda}(E) = 0, \qquad (5)$$

where m_H^γ is a Hausdorff measure of order γ.

THE SOLUTION BEHAVIOR FOR BOUNDARY-VALUE PROBLEM IN NONCILINDRICAL REGULAR ENOUGH DOMAIN

Vinokur M.V. (Chelyabinsk)

marina@csu.ru

Consider a domain Q $\subset R^{n+1}$. By Ω_τ denote the projection of the section of the domain Q by the plain $t = \tau$ on the coordinate plane t=0. $Q_T = \{(x,t) \in Q | t \in [0,T]\}$. We shall say that the domain Q_T is *contracting* (Ω_0 is assumed not empty and bounded) if for any t_1, t_2 such that $\forall\, t_1,\ t_2,\ 0 \leqslant\ t_1\ \leqslant\ t_2\ \leqslant\ T,\ \Omega_{t_2}\ \subset\ \Omega_{t_1}$.

Consider the boundary-value problem in the *curvilinear* Q_T for the Sobolev type equation:

$$\operatorname{div}(\nabla u_t(x,t)) = u(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

$$\nabla u(x,t)\Big|_{t=0} = \nabla\varphi(x), x \in \Omega_0, \quad \frac{\partial u_t(x,t)}{\partial \nu_x}\Big|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0. \tag{2}$$

where Γ is the lateral surface of Q_T, $\Gamma = \{(x,t) \in \partial Q | t \in (0,T)\}$, and n is the outer normal to Ω_t.

The solution exsistence and uniqueness for the same problem with variable coefficients were studied in [1].

Definition By a regular enough domain we mean the domain Q_T that inequality Poincare is right for all sections Ω_t (the sufficient conditions are in [2]): for all $w(x,t) \in W_2^1(\Omega_t)$ that $\int\limits_{\Omega_t} w(x,t)dx = 0$, is right the estimation: $\int\limits_{\Omega_t} w^2(x,t)dx \leqslant \beta(t) \int\limits_{\Omega_t} |\nabla w(x)|^2 dx$.

Theorem Let Q_T is the regular enough domain, $u(x,t)$ — the solution of the problem (1)-(2), $\operatorname{mes}\Omega_t < \infty$. Then the next estimates are right almost everywhere for $t > 0$:

$$\int\limits_{\Omega_t} u^2(x,t)dx \leqslant \frac{1}{2t}\int\limits_{\Omega_0} |\nabla\varphi|^2 dx, \quad \int\limits_{\Omega_t} u^2(x,t)dx \leqslant \beta(t)\int\limits_{\Omega_0} |\nabla\varphi|^2 dx. \tag{3}$$

References

1. Иванова М.В., Ушаков В.И. Вторая краевая задача для псевдопараболического уравнения в нецилиндрических области // Математические заметки. – 2002. – Т. 72. – №1. – С. 43–47.

2. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Ленинград: Изд-во ЛГУ. – 1985. – 415с.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГАРАНТИРОВАННОГО ПО ВЫИГРЫШАМ И РИСКАМ ДЕЛЕЖА

Аввакумов А.В. (Москва)

dewsha81@mail.ru

Формализуется гарантированный по выигрышам и рискам дележ в кооперативной игре при неопределённости и без побочных платежей, причём о неопределённостях предполагаются известными лишь границы изменений, а какие-либо статистические характеристики отсутствуют.

Рассматривается кооперативная игра двух лиц без побочных платежей и при неопределённости $\Gamma = \left\langle \{1,2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y, \{f_i(x_1, x_2, y)\}_{i=1,2} \right\rangle$, $X_i \in R^{n_1}$, $Y \subseteq R^m$. На парах $(x,y) \in X \times Y$, где $X = X_1 \times X_2$, определена *функция выигрыша i-го игрока* $f_i(x,y)$ $(i = 1,2)$, значение которой на конкретной паре (x,y) *называется выигрышем i-го игрока* в ситуации $x \in X$ и при неопределённости $y \in Y$. Функция риска $\Phi_i(x,y)$ вводится в виде $\Phi_i(x,y) = f_i\left(x^S(y), y\right) - f_i(x,y)$ $(i = 1,2)$, где $x^S(y)$ является при каждом $y \in Y$ максимальной по Слейтеру альтернативой в двухкритериальной задаче $\langle X, \{f_i(x,y)\}_{i=1,2} \rangle$.

Опр: *Тройку* $(x^0, f^0, \Phi^0) \in X \times R^4$ *назовём гарантированным по выигрышам и рискам решением* Γ, *если* $\exists y^0 \in Y$, *при котором*
1) $f_i^0 = f_i(x^0, y^0)$, $\Phi_i^0 = \Phi_i(x^0, y^0)$ $(i = 1,2)$,
2) При $\forall x \in X[y^0]$ *несовместна система неравенств*

$$\begin{cases} f_i(x,y^0) > f_i(x^0,y^0), \\ \Phi_i(x,y^0) < \Phi_i(x^0,y^0) \ (i = 1,2), \end{cases}$$

где $X[y^0] = \left\{x \in X \mid x \text{ удовлетворяет условию индивидуальной рациональности для } f_i(x,y^0)(i = 1,2)\right\}$.
3) При $\forall y \in Y$ *несовместна система неравенств*

$$\begin{cases} f_i(x^0,y) < f_i(x^0,y^0), \\ \Phi_i(x^0,y) > \Phi_i(x^0,y^0) \ (i = 1,2). \end{cases}$$

В докладе на основе [1, 2] установлены условия существования гарантированного по выигрышам и рискам решения.

Литература

1. Жуковский В.И. Кооперативные игры при неопределённости и их приложения // М.: Эдиториал УРСС, 1999.

2. Аввакумов А.В. Гарантированные по выигрышам и рискам дележи в кооперативной игре // Известия института математики и информатики. Ижевск. 2005. №1(31) (в печати)

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ МОРАВЕЦ

Акимов А.А. (Стерлитамак)
andakm@rambler.ru

Рассмотрим уравнение

$$Lu = K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, в области D, ограниченной простой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$, кривой $\gamma_1 = AC : dx + \sqrt{-K(y)}dy \geqslant 0$ и характеристикой $\gamma_2 = CB : dx + \sqrt{-K(y)}dy = 0$ уравнения (1), исходящими из точки C при $y < 0$.

Пусть $K(y) \in C[y_c, 0] \cap C^2[y_c, 0)$, y_c - ордината точки C пересечения кривых γ_1 и γ_2, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$. Для уравнения (1) в области D поставим задачу типа Неймана, изученную К. Моравец [1].

Задача Моравец. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma \cup \gamma_1) \cap C^2(D_- \cup D_+)$; $Lu(x,y) \equiv F(x,y)$, $(x,y) \in D_+ \cup D_-$; $\delta_s[u]|_\Gamma = Ku_x dy/ds - u_y dx/ds = \varphi(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$; $\delta_x[u]|_{\gamma_1} = Ku_x dy/dx - u_y = \psi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, где φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции. Пусть α — угол между положительным направлением оси Ox и направлением касательной к кривой Γ. Будем считать, что на Γ в точке A выполняется следующее условие

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2. \tag{2}$$

Аналогично работе [2] доказана следующая

Теорема. *Пусть $u(x,y)$ решение задачи Моравец с нулевыми граничными условиями. Если кривая Γ удовлетворяет условию* (2), *то $u(x,y) = const$.*

Литература

1. Morawetz C.S. *Note on a maximum principle and a uniqueness theorem for an elliptic-hyperbolic equation.* Proc. Roy. Soc. 1956. V.236. №1024. С. 141-144.

2. Сабитов К.Б., Акимов А.А. *К теории аналога задачи Неймана для уравнения смешанного типа* . Изв. ВУЗов. Матем. 2001.№10. С. 73-80.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Акчурина Л.В.

Рассматривается забойный двигатель как стержневая конструкция. Вследствие действия переменных по длине активных сил возможен параметрический резонанс [1]. Уравнение поперечных колебаний двигателя описывается уравнением [2]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}EJU'' + \frac{\partial}{\partial x}P(x)U' + m\ddot{U} = 0, \tag{1}$$

где $P(x) = P_0 - qx$ переменная по длине сила.

Граничные условия, предложенные в расчетной схеме имеют вид:

$$\begin{aligned} Y''(0) = 0, Y'''(0) = -c_2Y(0) - P_0Y'(0), \\ Y''(l) = -cY'(l), Y'''(l) = c_1Y(l) - PY'(l), \end{aligned} \tag{2}$$

где c - жесткость верхней опоры на поворот; c_1, c_2- жесткость верхней и нижней опоры на поперечное смещение, соответственно; P- реакция колонны бурильных труб, P_0- реакция забоя, q- интенсивность продольной нагрузки. Находятся критические скорости вращения и формы поперечных колебаний двигателя.

Далее найденные формы используются при исследовании задачи о параметрических колебаниях, когда реакция забоя меняется во времени по гармоническому закону $P(x) = P_0 - qx + a_0 \cos\theta t$, где a_0- глубина модуляции, θ - вынуждающая частота. Уравнение сводится к задаче Матье. Определяются вынуждающие частоты и координаты "изображающей точки". Указывается ее положение на диаграмме Айнса-Стретта, таким образом, имеется возможность подобрать оптимальные режимы работы системы. Здесь же рассматриваются аналогичная задача, учитывающая вязкое трение между стенками скважины и самой бурильной колонной [3], [4].

Объемную и сложную задачу с достаточной степенью точности удается решить только с использованием ПЭВМ.

Литература

1. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем // М., Наука, 1964.- С.212-220.

2. Болотин В.В. "Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости", М. 1961, 339.

3. Гончаров М.Д., Акчурина Л.В. Определение частот внешней нагрузки при параметрических поперечных колебаниях, Воронеж, Труды 7-й международной научно-технической конференции "Высокие технологии в экологии", 2004, с.183-187.

4. Акчурина Л.В. "Оценка приближенных решений для уравнения типа Матье", Воронеж, Материалы 55-56-ой научно-технической конференций, ВГАСУ, 2001, стр.3-5.

ОБ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Алексеева С.М. (Калининград)

Одним из способов улучшения фундаментальной подготовки студентов при их обучении математике является преподавание таких учебных (специальных или факультативных) курсов и разработка соответствующих учебных пособий, которые могли бы дать общую картину нескольких взаимосвязанных дисциплин, имеющих направленность на универсальные и обобщенные знания, на формирование общей математической культуры.

Предлагается курс «Ортогональные системы функций и их приложения» (и одноименное учебное пособие), который читался автором студентам-математикам Калининградского университета. Изучение его разделов и тем оказалось полезным и студентам Балтийской академии, которые могут использовать данное учебное пособие при изучении практически всех разделов математики и специальных дисциплин, связанных с радиоэлектроникой, судовождением, механикой, гидродинамикой, сейсмологией, в задачах теплопроводности, оптимального управления.

Единый подход в изучении ортогональных систем функций и доступный язык функционального анализа связывают классические математические и профессиональные курсы, способствуют целостному восприятию научной картины мира, фундаментальной подготовке студентов технических вузов.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Алиев А.Б. (Баку)

Пусть $\Omega \subset R^n$ ограниченная область с гладкой границей Г. В цилиндре $Q = (0,T) \times \Omega$ рассматривается смешанная задача для квазилинейного уравнения

$$u_{tt}+(-1)^k\Delta^k u_{tt}+\sum_{|p|,|q|\leqslant m}(-1)^{|p|}D^p(a_{\alpha\beta}(t,x,\delta_r u)D^q u)+$$

$$+\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant \ell}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(b_{\alpha\beta}(t,x,\delta_r u)D^\beta u_t)-f(t,x,\delta_r u,\delta_s u_t)=0,$$

где $\delta_h u=\left\{u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\dots,\frac{\partial^h u}{\partial x_h}\right\},h\in N,$

$$a_{\alpha\beta}(t,x,\xi),b_{\alpha\beta}(t,x,\xi)\in C^{1,m,1}([0,T]\times\overline{\Omega}\times U),$$

$$f(t,x,\xi,\zeta)\in C^{1,0,1}([0,T]\times\overline{\Omega}\times U\times V)$$

$U\subset R^{æ_r}$, $V\subset R^{æ_s}$ некоторые шары с центром в начале координат, $æ_h=\frac{(n+h)!}{n!h!},k,l\leqslant m.$

При различных предположениях на $a_{\alpha\beta},b_{\alpha\beta}$ *и* f доказаны теоремы о глобальной разрешимости для соответствующих смешан-ных задач. В случае когда $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ не зависят от $\delta_r u$ доказаны теоремы о разрешимости "в целом".

Приведем теорему о глобальной разрешимости для одной смешанной задачи который следует из полученных общих результатов.

В полуполосе $[0,\infty]\times[0,1]$ рассмотрим смешанную задачу:

$$u_{tt}-u_{ttxx}+(a(u)u_{xx})_{xx}-\beta u_{txx}+\gamma u_t=0,\ t>0,\ x\in(0,1),\quad (1)$$

$$u(t,0)=u(t,1)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,1)=0,\ t>0,\quad (2)$$

$$u(0,x)=u_0(x),\ u_t(0,x)=u_1(x),\ x\in(0,1),\quad (3)$$

где $a(u)=a_0+a_1(u),\ a_0>0,\ a_1(u)\in C^1,\ a_1(\xi)=O\left(|\xi|^p\right),$

$$\xi\to 0,\quad p>1,\beta>0,\quad \gamma\geqslant 0,\quad (4)$$

Теорема. *Пусть выполнена условия (4). Тогда существует такое* $\delta_0>0$, *что при любых* $(u_0,u_1)\in U_{\delta_0}$ *задача (1)-(3) имеет единственное решение*

$$u(\cdot)\in C\left([0,\infty),H_0^1\cap H^2\right)\cap C^1\left([0,\infty):H_0^1\right)\cap C^2\left([0,\infty):L^2(0,1)\right).$$

ПРИМЕНЕНИЕ (ρ, β, λ)-АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ В ПАРАМЕТРИЗОВАННОМ МЕТОДЕ ЦЕНТРОВ

Андрианова А.А. (Казань)

aandr@mi.ru

Требуется найти приближенное с заданной точностью $\varepsilon > 0$ решение задачи $\min\{f(x), x \in D(0)\}$, где $D(\lambda) = \{x : x \in R_n, g(x) \leqslant \lambda\}$, $\lambda \in R_1$, $g(x) = \max\{f_i(x), i = 1..m\}$. Пусть $D'(\lambda) = \{x : x \in R_n, g(x) < \lambda\}$, $\overline{D'(0)} = D(0)$, функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу непрерывных функций, каждый локальный минимум которых является абсолютным, $f^* = \min\{f(x), x \in D(0)\} > -\infty$, множество $X_\varepsilon^* = \{x : x \in D,$ $f(x) \leqslant f^* + \varepsilon\}$ ограничено и $\min\{g(x), x \in R_n\} \neq \min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\}$.

Пусть также функция $f(x)$ удовлетворяет на множестве $D(0)$ условию Липшица с константой L, $g(x)$ - $(\rho, \beta, \lambda)-$аппроксимируемая на R_n функ- ция, где $\lambda > 0$ выбирается таким образом, что $\min\{f(x), x \in D(\lambda)\} = f^* + \varepsilon$. В частности, этому классу принадлежат выпуклые функции. Согласно [1] для заданного λ существует $\beta > 0$ такое, что выполняется неравенство $\beta\rho(x, D(\lambda)) + \lambda \leqslant g(x)$ для всех $x \in R_n \backslash D(\lambda)$, где $\rho(x, D(\lambda)) = \min\{||x - y||, y \in D(\lambda)\}$.

Для параметров $\alpha > 0, t, \gamma$ положим $F(x, t, \gamma, \alpha) = \max\{f(x) - t, \alpha g(x) - \gamma\}$, $Z(t, \gamma, \alpha) = Argmin\{F(x, t, \gamma, \alpha), x \in R_n\}$. Пусть известны числа f_1, f_2, для которых $f_1 \leqslant f^* \leqslant f_2$.

Получены правила фиксации параметров, при которых имеет место включение $Z(t, \gamma, \alpha) \subset X_\varepsilon^*$. Основное отличие от [2] заключается в возможности использования в качестве $f_i(x)$ $i = 1..m$ линейных функций.

Теорема 1. Если параметры $\alpha > 0, t, \gamma$ зафиксированы так, что $\varepsilon \geqslant \gamma \geqslant \delta > 0$, $t \geqslant f^* + \gamma$, $\alpha \geqslant -\frac{L(\varepsilon+\delta+f_1-t)}{\beta\varepsilon}$, то $Z(t, \gamma, \alpha) \subset X_\varepsilon^*$.

Теорема 2. Если параметры $\alpha' > 0, t, \gamma$ зафиксированы так, что $t \leqslant f^*$, $\alpha' \geqslant -\frac{L(\varepsilon-f_2+t)}{\beta\varepsilon}$, $\gamma = -\alpha\frac{\beta\varepsilon}{L} - \varepsilon$, то $Z(t, \gamma, \alpha) \subset X_\varepsilon^*$ для любого $\alpha \geqslant \alpha'$.

Если $f^* \leqslant t \leqslant f^* + \gamma$, $t = f(y)$, где $y \in D(0)$, $z \in Z(t, \gamma, \alpha)$ тогда при любых $0 < \gamma \leqslant \varepsilon$, $\alpha > 0$, если $z \notin D(0)$, то $y \in X_\varepsilon^*$, в противном случае $z \in X_0^*$.

Литература

1. Заботин Я.И., Фукин И.А. Алгоритмы в методе штрафов с аппрок- симацией допустимого множества. Изв.вузов. Математика.

N 1, 2004. - с.36-47.

2. Андрианова А.А., Заботин Я.И. Управление процессом миними- зации в параметризованном методе центров. Изв.вузов. Математика. N 12, 2002. - с.3-10.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ахундов А.Я. (Баку)

axundov@baku.az

Пусть $D \subset R^n$-ограниченная область с границей $\partial D \subset C^2$, $0 < T = const$, $\|q\|_l = \sum\limits_{k=1}^{m} \left\|q^k\right\|_{C^l}$, пространства $C^l(\cdot), C^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}(\cdot)$, $l = 0,1,2; 0 < \alpha < 1$ и соответствующие нормы вводятся общепринято.

Рассмотрим задачу определения $\left\{a^k(x), u^k(x,t), k = \overline{1,m}\right\}$ из условий:

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} = a^k(x)\Delta u^k + f^k(x,t,u_1,\cdots,u_m),\ (x,t) \in Q = D \times (0,T], \quad (1)$$

$$\begin{gathered} u^k|_{t=0} = \varphi^k(x), x \in \overline{D}, u^k|_S = \psi^k(x,t), \\ (x,t) \in S = \partial D \times [0,T], \int\limits_0^T u^k(x,t)dt = h^k(x), x \in \overline{D}, \end{gathered} \quad (2)$$

где Δ-оператор Лапласа, $f^k, \varphi^k, \psi^k, h^k$–заданная функции.

В работе, где неизвестные коэффициенты, в отличие от ранее рассмотренных подобных задач для скалярных уравнений, зависят от всех пространственных переменных, доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решения.

Приведем одну из доказанных теорем.

Теорема. *Пусть* $1^0. f^k \in C^{\alpha,\alpha/2}_{x,t}\left(\overline{Q}\right) \times Lip_{(loc)}(R^m), \varphi^k, h^k \in C^{2+\alpha}(\overline{D})$, $\psi^k \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{x,t}(S), \varphi^k(x) = \psi^k(x,0)$, $x \in \partial D$, $\left|\Delta h^k(x)\right| \geqslant \nu_0 > 0$, $x \in \overline{D}$, $k = \overline{1,m}$; 2^0. *существует решение задачи (1)-(2) и* $\left\{a^k, u^k, k = \overline{1,m};\right\} \in K = \left\{0 < \nu_1 \leqslant a^k \leqslant \nu_2,\ a^k \in C^\alpha\left(\overline{D}\right),\ u^k \in \right.$ $\left. \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{Q}\right)\right\}$. *Тогда решение задачи (1)-(2) единственно и верна оценка устойчивости:*

$$\|u - \overline{u}\|_0 + \|a - \overline{a}\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant M\left[\left\|f - \overline{f}\right\|_0 + \|\varphi - \overline{\varphi}\|_2 + \left\|\psi - \overline{\psi}\right\|_{2,1} + \left\|h - \overline{h}\right\|_2\right]$$

где $\nu_i = const$, $M > 0$—зависит от данных задачи и множества K, $\{\overline{a}^k, \overline{u}^k, k = \overline{1,m}\}$ — решение задачи (1)-(2) из множества K с данными $\overline{f}^k, \overline{\varphi}^k, \overline{\psi}^k, \overline{h}^k$, которые удовлетворяют условиям 1^0 теоремы.

О ДОПУСТИМЫХ ПРОЦЕССАХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Бабич О.В. (Ижевск)

lg@izh.com

В задачах оптимального управления всегда предполагается наличие допустимых процессов. Один из общих принципов максимума для задач с фазовыми ограничениями имеется в [1]. При исследовании задач управления с фазовыми ограничениями достаточно общего вида [2]

$$\int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)ds + \Psi x(0) \geqslant \beta,$$

где $x : [0,T] \to R^n$ — абсолютно непрерывная вектор-функция, $\Phi(s)$ — $m \times n$-матрица с суммируемыми на $[0,T]$ элементами, Ψ — постоянная $m \times n$-матрица, β — m-мерный вектор-столбец, возникает проблема наличия допустимых процессов [2]. Для построения допустимых кусочно-постоянных управлений в работе [2] используется принцип максимума. В докладе устанавливается связь принципов максимума работ [1] и [2].

Литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление -М.:Наука, 1979. -432 с.

2. Исламов Г.Г. О допустимых помехах линейных управляемых систем // Известия вузов. Математика. — N2 (447), 2002. -С.37—40

О КОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ ВОГНУТЫХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ[1]

Бадков В.М. (Екатеринбург)
Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

В работе [1] был введен в рассмотрение 2π-периодический вес

$$\varphi(\tau) := h(\tau) \prod_{\nu=1}^{m} w_\nu \left(\left| \sin \frac{\tau - \theta_\nu}{2} \right| \right) \qquad (-\pi < \theta_1 < \ldots < \theta_m \leqslant \pi),$$

где $w_\nu(u) \in L^1[0,1]$ $(\nu = 1, \ldots, m)$ — конечные произведения действительных степеней вогнутых модулей непрерывности; функция $h(\tau)$ неотрицательна, измерима и принадлежит L^∞ вместе с $[h(\tau)]^{-1}$.

При условии $\int\limits_0^\theta w_\nu(\tau)\,d\tau = O(\theta w_\nu(\theta))$ $(\theta \to +0;\ \nu = 1, \ldots, m)$ и ограничениях на гладкость функции $h(\tau)$ в работах [1, 2] для модулей многочленов, ортогональных на единичной окружности с весом $\varphi(\tau)$, и их производных натуральных порядков были получены двусторонние поточечные оценки в точках $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

В связи с этими результатами может представить некоторый интерес следующая теорема (основной результат сообщения).

Теорема. *Пусть функция $W(t)$ определяется равенством*

$$W(t) := [u_1(t)]^{\alpha_1} \cdots [u_l(t)]^{\alpha_l},$$

где $l \in \mathbb{N}$, $\alpha_\nu \in \mathbb{R}$, $u_\nu(t)$ $(\nu = 1, \ldots, l)$ — вогнутые модули непрерывности. Тогда найдутся вогнутые модули непрерывности $g_1(t)$, $g_2(t)$ и число $m \in \mathbb{N}$ такие, что $W(t) = [g_1(t)/g_2(t)]^m$ $(0 \leqslant t < \infty)$.

Литература

1. Бадков В.М. Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса // Тр. МИРАН. 1992. Т. 198. С. 41-88.

2. Бадков В.М. Асимптотика многочленов второго рода и двусторонние поточечные оценки их производных // Труды Института математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 71-83.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (проект 05–01–00233) и Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (проект НШ–1347.2003.1).

3. Бадков В.М. Поточечные оценки снизу модулей производных многочлена, ортогонального на окружности с весом, имеющим особенности // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 6. С. 3-14.

О ГЕТЕРАРХИИ В СИСТЕМЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Бадьянов В.И. (Якутск)
badyanov@rambler.ru

Рассматривается n-уровневая система принятия решений, описываемая кортежем

$$\Sigma : \{[t_0, T], M, X, Y, \mathcal{F}\}, \tag{1}$$

где $[t_0, T]$ – временной отрезок, M – множество модулей системы, X – множество связей системы, $\mathcal{F}$ – функция системы:

$$\mathcal{F} : [t_0, T] \times [t_0, T] \times M \times X \to Y,$$

Y – множество решений, вырабатываемых в системе.

В структуре системы на первом уровне находятся модули сбора, обработки и хранения информации M_1, разработки альтернатив и принятия решений M_2. В системе отсутствуют связи подчинения (иерархическая система принятия решений рассмотрена в [1]). Поэтому на первом уровне между модулями вводятся процедуры согласования относительно глобальной задачи, решаемой системой. Связи в системе отвечают аксиоме сочленения. Между k-тым и $(k+1)$-ым, $k = 1, 2, ..., n-1$, уровнями на основе байесовского подхода вводится поощрение выбора альтернативы, соответствующей глобальной задаче. Показано, что координация модулей первого уровня обеспечивает и структурную устойчивость системы (существование связей между модулями первого уровня на $[t_0, T]$). Изучается динамическая устойчивость системы, понимаемая как сохранение принципа оптимальности, определенного на временном отрезке $[t_0, T]$, на каждом отрезке $[t_{k-1}, t_k] \subset [t_0, T]$, $k = \overline{1, p}$, $t_p = T$. При доказательстве динамической устойчивости используется кусочно-непрерывная функция полезности

$$U = \sum_{k=1}^{p} A u_k^{\alpha} v_k^{1-\alpha},$$

где u_k, v_k — функции полезности связи x_{12} и обратной связи x_{21}, соответственно, на $[t_{k-1}, t_k]$, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$.

Литература

1. Толстихин О. Н., Трофимцев Ю. И. Экологический менеджмент. – Новосибирск: Наука, 1998.

КВАДРАТИЧНЫЙ ОПЕРАТОРНЫЙ ПУЧОК В ЗАДАЧЕ О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ НАГРУЖЕННОГО ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Базов И.А., Задорожный А.И. (Ростов-на-Дону)

bazzov2@mail.ru

Свободные колебания стержня с переменной погонной массой $m(x) \geqslant m_0 > 0$ и площадью поперечного сечения $F(x) \geqslant F_0 > 0$ описываются следующей краевой задачей на собственные значения

$$\begin{aligned} &(1+\tau\sigma)\frac{d}{dx}EF(x)\frac{dU}{dx} - \sigma^2 m(x)U = 0, \quad x \in (0,\ell), \\ &(1+\tau\sigma)EF(0)U'(0) - \sigma^2 M_0 U(0) = 0, \\ &(1+\tau\sigma)EF(\ell)U'(\ell) + \sigma^2 M_1 U(\ell) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где σ — искомый спектральный параметр, E — модуль Юнга, τ — время релаксации, $\eta = E\tau$ — вязкость материала по Фойгту, M_0, M_1 — сосредоточенные массы. Структура (1) типична для самосопряженного квадратичного операторного пучка .

Уравнение баланса энергии записывается в следующей форме:

$$\sigma^2 \left(M_0|U(0)|^2 + M_1|U(\ell)|^2 + \int_0^\ell m(x)|U(x)|^2\,dx \right) + \\ + (E+\sigma\eta)\int_0^\ell F(x)|U'(x)|^2\,dx = 0,$$

Справедливы следующие утверждения: спектр задачи дискретный и счетный, расположен в левой полуплоскости ($\mathrm{Re}\,\sigma < 0$), колебательных ($\mathrm{Im}\,\sigma \neq 0$) режимов может быть лишь конечное число. Условие сильной демпфированности пучка после применения неравенства Пуанкаре примет вид $\eta^2 > 4\ell^2 \frac{E}{F_{\min}} \left(M_0 + M_1 + \frac{1}{2} m_{\max}\ell \right)$.

Дальнейшие уточнения получаются при сведении квадратичного пучка к линейному естественной заменой $\lambda^2 = -\sigma^2(1+\tau\sigma)^{-1}$. Тогда спектр описывается отношением Рэлея

$$\lambda^2 = \frac{E\int_0^\ell F(x)|U'(x)|^2\,dx}{M_0|U(0)|^2 + M_1|U(\ell)|^2 + \int_0^\ell m(x)|U(x)|^2\,dx}.$$

Использование метода двусторонней оценки собственных чисел λ_n, $n \in N$ позволяет получить достаточные условия монотонности (апериодичности) и немонотонности (ангармоничности) затухания для каждой моды.

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИПШИЦЕВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С УПРАВЛЕНИЕМ

Балабаева Н.П. (Самара)
vao@samara.ru

Рассмотрен вопрос о равномерной экспоненциальной устойчивости дифференциального уравнения в R^n вида

$$\dot{x_\mu}(t) = \mu f(t, x_\mu(t), y(t)), \quad x_\mu(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Здесь $f : R_+ \times R^n \times R^m \to R^n$, $y : R_+ \to R^m$, $y(\cdot) \in Y$, где Y — подмножество множества всех измеримых функций, μ — малый параметр. Наряду с этой задачей рассмотрим усредненную задачу

$$\dot{\xi_\mu}(t) \in \mu F(\xi_\mu(t)), \quad \xi_\mu(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $F : R^n \to K(R^n)$ — совокупность непустых компактов в R^n.

В настоящей работе, в отличие от [1], условие липшицевости правой части дифференциального включения (2) заменяется на более слабое условие односторонней липшицевости [2], а от функции f из задачи (1) не требуется даже этого условия, но предполагается существование решения.

Возьмем произвольное начальное условие $x_0 \in R^n \setminus \{0\}$ и с помощью замены переменных $x = \|x_0\| z$ и $\xi = \|x_0\| \zeta$ введем в рассмотрение отображения $f_{x_0}(t, z, y(t)) = \dfrac{1}{\|x_0\|} f(t, \|x_0\| z, y(t))$, и $F_{x_0}(\zeta) = \dfrac{1}{\|x_0\|} F(\|x_0\| \zeta)$.

Предположим, что:

a) f измеримо по t; b) f и F удовлетворяют условию линейного роста по переменным x и ξ соответственно;

c) f_{x_0} равномерно непрерывна по z; d) F_{x_0} равномерно полунепрерывно сверху; e) равномерно по начальным условиям существует предел $\lim\limits_{\Delta \to \infty} h_0 \left(\bigcup\limits_{y \in Y} \dfrac{1}{\Delta} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} f_{x_0}(t, z, y(t)) dt, F_{x_0}(z) \right) = 0;$

f) F односторонне липшицево [2].

Теорема. Пусть выполнены предположения (a)–(f). Если усредненная система (2) равномерно экспоненциально устойчива, то исходная система (1) также равномерно экспоненциально устойчива.

Литература

1. *Grammel G., Maizurna I.* // Nonlinear Analysis.2004.V.56.

2. *Donchev T.,Farkhi E.*//SIAM J.Control OPTIM.1998.V.36.№.2.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ В РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С БЫСТРЫМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ[1]

Барабанов А.Е. (Санкт-Петербург)

Andrey.Barabanov@pobox.spbu.ru

Искусственно создаваемые предельные циклы в динамических объектах управления активно используются для идентификации их параметров. Большой распространение получили линейные системы с релейными обратными связями ввиду простоты их реализации и исследования. Пусть в линейной системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx \end{aligned}$$

со скалярным выходом y скалярное управления u выбирается по правилу $u = -\mathrm{sign}\, y$. Решение в случае скользящих режимов определяется по Филиппову. Известно, что коразмерность многообразия скользящего режима, если он существует, равна наименьшему неотрицательному числу k, для которого $CA^kB \neq 0$.

При $k > 0$ в окрестности многообразия скольжения возникают режимы с быстрыми переключениями. В [1] показано, что эти режимы неустойчивы при $k > 1$. Необходимые и достаточные условия устойчивости режима быстрых переключений (chattering) при $k = 1$ сформулированы в [2,3]. Там же доказано существование предельного цикла для систем специального вида.

В докладе методом теории абсолютной устойчивости выводятся достаточные условия глобальной устойчивости предельных циклов, содержащих отрезки траекторий с быстрыми переключениями.

Литература

1. K.H.Johansson, A.E.Barabanov, K.J.Astrom. Limit cycles with chattering in relay feedback systems. The 36th IEEE Conf. on Decision and Control. USA, December 15–17, 1997, pp. 3220–3225.

---

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 04-01-00084.

2. K.H.Johansson, A.E.Barabanov, K.J.Astrom. Limit cycles with chattering in relay feedback systems. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. AC-47, N 9, 2002, pp. 1414–1423.

3. A.E.Barabanov, Q.G.Wang. Stability of Limit Cycles with Chattering in Relay Feedback Systems. European Control Conference, Cambridge, England, 1–4 September, 2003. 6 p.

О МИНИМИЗАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ РАЗНОСТНО-ДАЛЬНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ В КОНУСЕ ВИДИМОСТИ

Барабанова Л.П. (Ковров)

kanir@kc.ru

Разностно-дальномерная задача (РДЗ) с минимальным числом маяков для навигационных систем типа GPS или ГЛОНАСС состоит в решении системы $|x - a_j| - |x - a_i| = c(t_j - t_i)$, $i, j \in \{0, ..., n\}$ относительно $x \in \mathbb{R}^n$, где t_i — момент приёма сигнала от известного маяка $a_j \in \mathbb{R}^n$, c — известная скорость сигнала.

Точность решения РДЗ оценивается коэффициентом геометрии $K = K(x)$, который связывает среднеквадратическую ошибку (СКО) псевдодальности ct_i с СКО местоопределения x:

$$\sigma_x = K \cdot \sigma_t.$$

Важное значение придается минимизации K [1]. В работе [2] получены формулы для коэффициента K для РДЗ с минимальным числом маяков. Коэффициент K абсолютно минимален для и только для правильной конфигурации маяков, то есть когда их образы на единичной сфере потребителя-наблюдателя образуют правильный тетраэдр [2]. В случае, когда раствор трёхмерного кругового конуса видимости маяков меньше 38°, существуют полуправильные конфигурации в виде ромба на единичной сфере потребителя-наблюдателя, превосходящие по критерию K правильную конфигурацию маяков [2].

В [3], [4] подробно описаны случаи, когда коэффициент K обращается в бесконечность, что соответствует возможной потери местоопределения обьекта.

Литература

1. Глобальная спутниковая радионавигационная система ГЛОНАСС/ Под ред. В. Н. Харисова, А. И. Перова, В. А. Болдина. — М.: ИПРЖР, 1998.

2. Барабанова Л. П. О геометрическом факторе разностно-дально- мерного позиционирования с минимальным числом маяков // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. №3.

3. Барабанова Л. П. Об особенностях разностно-дальномерной навигационной задачи в случае симплекса маяков // Известия РАН. Теория и системы управления. 2003. №1, С. 110-117.

4. Барабанова Л. П. Об особенностях разностно-дальномерной навигационной задачи в случае четырёх компланарных маяков // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. №1, С. 159-166.

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ

Билецкая С.А., Зернов А.Е., Кузина Ю.В., Чайчук О.Р., Чайчук О.Р. (Одесса, Украина)

zernov@ukr.net

В докладе делается обзор результатов, полученных авторами при исследовании асимптотических свойств решений сингулярных задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и для функционально-дифференциальных уравнений.

В первой части доклада рассматривается задача (1), во второй части – задача (2), а в третьей – (3) и (4).

$$F(t,x(t),x'(t))=0,\quad x(0)=0,\tag{1}$$

$$\alpha(t)x'(t)=F(t,x(t),x'(t)),\quad x(0)=0,\tag{2}$$

$$\alpha(t)x'(t)=F(t,x(g(t)),x'(h(t))),\quad x(0)=0\tag{3}$$

$$\begin{gathered}\alpha(t)x'(t)=F(t,x(g_1(t)),\dots,x(g_r(t)),x'(h_1(t)),\dots,x'(h_s(t))),\\ x(0)=0\end{gathered}\tag{4}$$

Здесь $x:(0,\tau)\to\mathbb{R}$ – неизвестная функция переменной t, $F:D\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция, где $D\in(0,\tau)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ для задач (1), (2), (3) и $D\in(0,\tau)\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^s$ для задачи (4); α, g, h, а также все g_i, h_j для $i\in\{1,\dots,r\}$, $j\in\{1,\dots,s\}$ – непрерывные положительные функции, определенные на $(0,\tau)$; $\lim\limits_{t\to+0}\alpha(t)=0$; если $t\in(0,\tau)$, то $g(t)\leqslant t$, $h(t)\leqslant t$, $g_i(t)\leqslant t$, $h_j(t)\leqslant t$ для всех i,j.

В четвертой части доклада рассматриваются сингулярные начальные задачи для гибридных систем уравнений типа (1)–(4).

В пятой части доклада рассматриваются возмущенные задачи типа (1)–(4), полученные добавлением в правые части уравнений слагаемых, малых в определенном смысле.

Решением каждой из задач (1)–(4) называется непрерывно дифференцируемая функция $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, ($\rho > 0$ достаточно мало), которая удовлетворяет соответствующему уравнению при всех $t \in (0, \rho]$ и при этом $\lim\limits_{t \to +0} x(t) = 0$.

Исследуются вопросы о существовании и числе решений задач (1)–(4) и об асимптотическом поведении решений при $t \to +0$. Определяется близость решений невозмущенных и возмущенных задач. Рассматриваются линейные, возмущенные линейные и нелинейные уравнения указанных типов.

АНАЛИТИЧНОСТЬ ОБОБЩЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ДВОЙНЫХ ЧИСЕЛ

Блюмин С.Л. (Липецк)
slb@stu.lipetsk.su

Пусть $\mathbf{U} = \{z = x + ye, e^2 = 1, x, y \in \mathbf{R}\}$ - алгебра двойных (гиперболических) чисел [1-3], $D = (\partial/\partial x) + (\partial/\partial y)e$ - двойной оператор Коши-Римана. Двойная аналитическая функция $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ определяется условием $Df(z) = 0$. Для самого аргумента $Dz = 2 \neq 0$, но для преобразованного аргумента $D\widehat{z} = 0, \widehat{z} = y - xe$; и для функции его обращения $D\widehat{z}^{-1} = 0, \widehat{z}^{-1} = (y - xe)^{-1} = \overline{y - xe}/[(y - xe)\overline{y - xe}] = (y + xe)/(y^2 - x^2), y^2 - x^2 \neq 0$. При $y^2 - x^2 = 0, y = \pm x$, то есть на подмножествах $\mathbf{U}_1 = \{x - y = 0\}, \mathbf{U}_2 = \{x + y = 0\} \subset \mathbf{U}$, эта функция не определена, но определены семейства функций обобщенного обращения [2] $\widehat{z}^-$ таких, что $\widehat{z}\widehat{z}^-\widehat{z} = \widehat{z}$. Двойные числа удобно представить в форме [1] $z = (x + y)((1 + e)/2) + (x - y)((1 - e)/2), ((1 + e)/2)^2 = (1 + e)/2, ((1 - e)/2)^2 = (1 - e)/2$, в которой $\widehat{z} = -(x - y)((1 + e)/2) + (x + y)((1 - e)/2)$. Для чисел подмножества $\mathbf{U}_1$ в этой форме $z = (x + y)((1 + e)/2), \widehat{z} = (x + y)((1 - e)/2)$, так что $Dz = 1 + e \neq 0$, $D\widehat{z} = 0$; при этом $\widehat{z}^- = u((1 + e)/2) + (1/(x + y))((1 - e)/2)$, где u - произвольная действительная функция действительных переменных x, y. Простейший ее выбор, обеспечивающий аналитичность - $u = 0$. Действительно, для $\widehat{z}^- = (1/(x + y))((1 - e)/2)$ выполняются соотношения обобщенного обращения $\widehat{z}\widehat{z}^-\widehat{z} = (x + y)((1 - e)/2)[(1/(x + y))((1 - e)/2)](x + y)((1 - e)/2) = (x + y)((1 - e)/2) = \widehat{z}$ и аналитичности $D\widehat{z}^- = ((\partial/\partial x) + (\partial/\partial y)e)([1/(x + y)] - [1/(x + y)]e)/2 = ([-1/(x + y)^2] + [1/(x + y)^2]e + [-1/(x + y)^2]e + [1/(x + y)^2])/2 = 0$. Аналогичные вычисления могут быть проведены для подмножества $\mathbf{U}_2$. Подобные выводы верны и для сопряженного аргумента $\overline{z} = x - ye = (x - y)((1 + e)/2) + (x + y)((1 - e)/2) : D\overline{z} = 0$, что означает антианалитичность [3] двойного аргумента, а на подмножествах $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ соответственно $\bar{z} = \widehat{z}$ и $\bar{z} = -\widehat{z}$.

Литература

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. - М.: Наука, 1973.

2. Blyumin S., Milovidov S. Investigation and Solution of Matrix Equations over Associative Rings // Comp. Maths Math. Phys. Vol. 34, No. 2. P. 133-142. 1994.

3. Шабат Б.В. Комплексный анализ. - М.: Наука, 1969.

АНАЛИТИЧНОСТЬ ОБОБЩЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Блюмин С.Л. (Липецк)

slb@stu.lipetsk.su

Пусть $\mathbf{V} = \{z = x + y\varepsilon, \varepsilon^2 = 0, x, y \in \mathbf{R}\}$ - алгебра дуальных чисел [1], $D = (\partial/\partial x) + (\partial/\partial y)\varepsilon$ - дуальный оператор Коши-Римана. Дуальная аналитическая функция $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ определяется условием $Df(z) = 0$. Для самого аргумента $Dz = 1 \neq 0$, но для преобразованного аргумента $D\widehat{z} = 0$, $\widehat{z} = y - x\varepsilon$; и для функции его обращения $D\widehat{z}^{-1} = 0$, $\widehat{z}^{-1} = (y - x\varepsilon)^{-1} = \overline{y - x\varepsilon}/[(y - x\varepsilon)\overline{y - x\varepsilon}] = (y + x\varepsilon)/y^2, y \neq 0$. В то же время $Dy\varepsilon = 0$ на подпространстве $\mathbf{V}^1 = \mathbf{R}\varepsilon = \{y\varepsilon,\ y \in \mathbf{R}\}$, состоящем из необратимых дуальных чисел. При $y \neq 0$ они и не обобщенно обратимы в $\mathbf{V}$: уравнение $y\varepsilon = (y\varepsilon)(y\varepsilon)^-(y\varepsilon) = 0$ имеет (произвольное) решение $(y\varepsilon)^- \in \mathbf{V}$ только для $y = 0$. Тем не менее необратимые дуальные числа $y\varepsilon$ имеют обобщенные обратные в расширенной алгебре $\mathbf{W}=(\mathbf{V}\times\mathbf{V}')/\,\bar{}^{reg} = \{w = x + y\varepsilon + k\varepsilon' + l\gamma + m\delta, x, y, k, l, m \in \mathbf{R}\}$ внедуальных чисел [1], которая может быть построена как свободное произведение двух алгебр $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$ при соотношениях регулярности [2] $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon = \gamma\varepsilon = \varepsilon\delta = \varepsilon$, $\varepsilon'\varepsilon\varepsilon' = \delta\varepsilon' = \varepsilon'\gamma = \varepsilon'$, следствиями которых являются $\varepsilon\gamma = \varepsilon'\delta = \gamma\varepsilon' = \gamma\delta = \delta\varepsilon = \delta\gamma = 0, \gamma^2 = \gamma, \delta^2 = \delta$. Семейство функций обобщенного внеобращения необратимых дуальных чисел описывается выражением [1] $f(y\varepsilon) = u + v\varepsilon + (1/y)\varepsilon' + s\gamma + t\delta$, где u, v, s, t - произвольные действительные функции действительных переменных x, y, k, l, m. Простейший их выбор, обеспечивающий аналитичность, таков: $u = v = t = 0$, $s = x/y^2$. Действительно, для $(y\varepsilon)\bar{} = (1/y)\varepsilon' + (x/y^2)\gamma$ выполняются соотношения обобщенного обращения $(y\varepsilon)(y\varepsilon)\bar{}(y\varepsilon) = (y\varepsilon)[(1/y)\varepsilon' + (x/y^2)\gamma](y\varepsilon) = [\gamma + (x/y)0](y\varepsilon) = y\varepsilon$

и аналитичности $D(y\varepsilon)\check{} = [(\partial/\partial x) + (\partial/\partial y)\varepsilon][(1/y)\varepsilon' + (x/y^2)\gamma] = 0\varepsilon' + (1/y^2)\gamma + (-1/y^2)\gamma + (-2x/y^3)0 = 0$. Последнее следует также из $D\widehat{z}^{-1} = 0$ и соотношения $(y\varepsilon)\check{} = \widehat{z}^{-1}\varepsilon'$ для $z = x + y\varepsilon, y \neq 0$.

Литература

1. Blyumin S., Milovidov S. Investigation and Solution of Matrix Equations over Associative Rings // Comp. Maths Math. Phys. Vol. 34, No. 2. P. 133-142. 1994.

2. Duplij S., Marcinek W. Regular Graded Algebras and Obstructed Categories with Duality. ArXiv: math.QA/0107022, 2001.

АЛГЕБРЫ С АНАЛИТИЧЕСКИМ АРГУМЕНТОМ (С НУЛЕВЫМ СЛЕДОМ ТАБЛИЦЫ УМНОЖЕНИЯ)

Блюмин С.Л. (Липецк)

slb@stu.lipetsk.su

Пусть Z - алгебра (гиперкомплексная система) [1] над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел с базисом $\{e_j, j = 1,..,n\}$, таблица умножения которого $M_Z = [e_je_k, j,k = 1,\ldots,n]$ имеет нулевой след $Tr_Z = \Sigma_j e_j^2 = 0$. Классический пример - поле $\mathbf{C}_{-1}$ комплексных чисел ($i^2 = -1$), где аргумент $z \in \mathbf{C}_{-1}$ и оператор Коши-Римана CR связаны соотношением $CRz = ((\partial/\partial x) + (\partial/\partial y)i)(x + yi) = 0$; аналитическая функция $f : \mathbf{C}_{-1} \to \mathbf{C}_{-1}$ определяется условием $CRf(z) = 0$, так что комплексный аргумент аналитичен.

В развитие этого, алгебра Z определяется как алгебра с аналитическим аргументом относительно оператора $D = \Sigma d_je_j$, удовлетворяющего условию $d_jz = e_j, j = 1,\ldots,n$, если $Dz = 0$, что сводится к свойству алгебры иметь нулевой след. Алгебры $\mathbf{C}_0$ дуальных ($i^2 = 0$) и $\mathbf{C}_{+1}$ двойных ($i^2 = +1$) чисел [1-3] не относятся к этому классу. Прямые [1-3] тензорные произведения $Z \otimes \mathbf{C}_{-1}, Z \otimes \mathbf{C}_0, Z \otimes \mathbf{C}_{+1}$, как и косое [3] тензорное произведение $Z\widehat{\otimes}\mathbf{C}_0$, не выводят из этого класса. Алгебры Клиффорда в представлении [3]

$\mathbf{C}_{-1}^{\widehat{\otimes}n_{-1}}\widehat{\otimes}\mathbf{C}_0^{\widehat{\otimes}n_0}\widehat{\otimes}\mathbf{C}_{+1}^{\widehat{\otimes}n_{+1}}$

относятся к этому классу при условии

$\{1 - n_{-1} + n_{+1} + (-1)^{n(n-1)/2}(-1)^{n_{-1}}0^{n_0}\}+$
$\Sigma_{\rho=2}^{n-1}(-1)^{\rho(\rho-1)/2}\Sigma_{\rho(\lambda)=\rho}\Pi_{i=1}^{n}e_{\lambda_i}^2 = 0,$

где $n = n_{-1} + n_0 + n_{+1}; 0^0 = 1, 0^{n_0} = 0$ при $n_0 \neq 0; \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \{0,1\}^n, \rho(\lambda) = \Sigma_i\lambda_i \in \{0,1,\ldots,n\}$. Например, алгебра полукватерни-онов [2] $\mathbf{C}_{-1}\widehat{\otimes}\mathbf{C}_0$, как и алгебра $\mathbf{C}_{-1}\widehat{\otimes}\mathbf{C}_{-1}\widehat{\otimes}\mathbf{C}_{+1}$, относятся, а алгебры [1-3] кватернионов $\mathbf{C}_{-1}\widehat{\otimes}\mathbf{C}_{-1}$, антикватернионов $\mathbf{C}_{-1}\widehat{\otimes}\mathbf{C}_{+1} \approx \mathbf{C}_{+1}\widehat{\otimes}\mathbf{C}_{+1}$, полуантикватернионов $\mathbf{C}_0\widehat{\otimes}\mathbf{C}_{+1}$, Грассмана $\mathbf{C}_0\hat{\otimes}\mathbf{C}_0$, как и алгебра $\mathbf{C}_{-1}\hat{\otimes}\mathbf{C}_{-1}\hat{\otimes}\mathbf{C}_{-1}$, не относятся к этому классу. Именно на алгебрах с аналитическим аргументом целесообразно развивать [4] аналоги классического комплексного анализа.

Литература

1. Бурбаки Н. Алгебра. - М.: ГИФМЛ, 1962.
2. Розенфельд Б.А. Неевклидовы геометрии. - М.: ГИТТЛ, 1955.
3. Постников М.М. Группы и алгебры Ли. - М.: Наука, 1982.
4. Laville G., Ramadanoff I. Holomorphic Cliffordian Functions. ArXiv: math.CV/0502066,2005.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ И ИХ РАВНОСИЛЬНОСТЬ

Бондаренко Т.Е., Трубицына О.В. (Воронеж)

Линия уравнений и неравенств играет в курсе математики средней школы значительную роль. В ее содержании могут быть выделены два важных аспекта. Один из них связан с теоретическим обоснованием процесса решения уравнений и неравенств: вопросами равносильности и логического следования. Другой – с изучением методов решения уравнений и неравенств различных видов. Зачастую такие методы состоят в преобразовании одной из частей уравнения или неравенства, в согласованном преобразовании их обеих частей или в преобразовании логической структуры. При этом представляется необходимым исследовать, как те или иные методы преобразования влияют на равносильность.

В процессе анализа методов решения уравнений основных видов, представленных в школьном курсе математики, могут быть выявлены преобразования, расширяющие область определения уравнения или область существования корней (например, приведение уравнения к целому виду, возведение в квадрат, переход от уравнения $k(f(x)) = k(g(x))$ к уравнению $f(x) = g(x)$), а также преобразования, сужающие такие области (использование свойств корней, логарифмов, некоторых формул тригонометрии). Применение преобразований первого типа может нарушить равносильность и привести к появлению посторонних корней, второго типа – к потере корней. Таким образом, актуализируется проблема методов и приемов, посредством которых "отсекаются" посторонние решения или не происходит их потери.

В связи с выше сказанным, представляется целесообразной разработка системы обучения решению уравнений схематически описываемой последовательностью "метод преобразования" $\to$ "причина неравносильности" $\to$ "средство нейтрализации". Например, при решении уравнения $\sqrt{x^2-1} = (x+5)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ преобразование его к виду $\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} = (x+5)\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ приводит к сужению области определения, что может послужить причиной потери корней. Нейтрализовать сужение области определения можно посредством избавления от иррациональности в знаменателе, выполняя преобразование уравнения в случае для $x > 1$, приведенном выше, и в случае $x \leqslant -1$: $\sqrt{1-x}\sqrt{-x-1} = (x+5)\frac{\sqrt{-x-1}}{\sqrt{1-x}}$, либо используя модули: $\sqrt{|x-1|}\sqrt{|x+1|} = (x+5)\frac{\sqrt{|x+1|}}{\sqrt{|x-1|}}$. Последнее преобразование расширяет область определения данного уравнения, что может привести к появлению посторонних корней, тогда средством "нейтрализации" послужит проверка корней, либо выявление их принадлежности области определения.

Литература

1. Алгебра и начала анализа: учебник для 11 класса общеобразовательных учреждений / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 2-ое изд.-М.:Просвещение,2003

2. Методика преподавания математики в Средней школе: Частная методика: Учебное пособие для студентов пед. Институтов по физ.-мат.спец. / А.Я. Блок, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др. – М.: Просвещение,1987

ОБОБЩЕННЫЕ И КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ[1]

Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н. (Тамбов)
aib@tsu.tmb.ru, beljaeva@bk.ru, uaa@nnn.tstu.ru

В докладе рассматриваются свойства обобщенных решений функционально-дифференциальных включений, правая часть которых не обладает свойством выпуклости по переключению значений. Введение понятия обобщенного решения для таких включений продиктовано следующими обстоятельствами. Прежде всего

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №04-01-00324.

это связано с тем, что все существующие в настоящее время методы исследования многозначных отображений нельзя применить даже для рассмотрения вопроса существования классического решения. Кроме того, в этом случае нарушается равенство между множеством квазирешений функционально-дифференциального включения и множеством решений "овыпукленного" функционально-дифференциального включения, впервые установленное Т. Важевским для обыкновенных дифференциальных включений. Дело в том, что в рассматриваемом случае замыкание (в слабой топологии пространства суммируемых функций) значений многозначного отображения не совпадает с его замкнутой выпуклой оболочкой. Вследствии чего не будут выполняться фундаментальные свойства множеств решений: принцип плотности и "бэнг-бэнг" принцип. Данную ситуацию нельзя исправить никакой непрерывностью отображения, не обладающего свойством выпуклости по переключению образов. Это обстоятельство еще раз подтверждает высказанное профессором В.М. Тихомировым предложение о том, что выпуклость по переключению является специфическим понятием пространства суммируемых функций, которое играет такую же фундаментальную роль, как понятие выпуклости множества в банаховом пространстве. Выпуклость по переключению неявно используется во многих разделах математики: в теории оптимизации, теории дифференциальных включений и т.д.

В докладе утверждается, что выход из данной ситуации можно найти с помощью введения понятия обобщенного решения, которое определяется с помощью выпуклой по переключению оболочки множеста, принадлежащего пространству суммируемых функций. Это обобщенное решение наследует многие свойства классического решения функционально-дифференциального включения.

Отметим также, что обобщенные решения функционально-дифференциальных включений описывают модели сложных многокомпонентных систем автоматического управления, в которых в связи с отказами тех или иных приборов и устройств объекты регулируются разными законами управления (разными правыми частями) с разными множествами допустимых значений управления. Так как отказы (переключения) могут происходить в любые моменты времени, и при этом всегда должно быть гарантировано управление объектом, то модель должна учитывать все возможные траектории (состояния), соответствующие любым переключениям. Обобщенные решения включения и составляют множество всех таких фазовых траекторий.

Литература

1. Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н. Функционально-дифференциальное включение с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестник Удмуртского университета. 2005. №1. С.3–20.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СУЩЕСТВЕННО НЕРЕГУЛЯРНОЙ СТРУНЫ[1]

Бурлуцкая М.Ш., Покорная И.Ю. (Воронеж), Гулынина Е.В. (Минеральные Воды)

На интервале $(0, l)$ рассматривается задача

$$-(pu')(x) + \int_0^x u\,dQ = \lambda \int_0^x u\,dM + \text{const}. \qquad (1)$$

с неубывающими Q и M, у которых допускаются особенности типа сингулярностей "чертовой лестницы" (функции Кантора). Псевдодифференциальное уравнение (1) несет в себе условия на концах $(0, l)$, определяемые соответствующими скачками $\Delta Q(0) = Q(+0) - Q(0)$, $\Delta Q(1) = Q(1) - Q(1-0)$ — значениями крайних коэффициентов упругости, и $M(+0) - M(0) = \Delta M(0)$, $M(1) - M(1-0) = \Delta M(1)$ — сосредоточенными на концах массами. Задача рассматривается в классе абсолютно непрерывных функций, производные которых имеют конечное изменение.

Спектр поставленной задачи осцилляционен, что означает прежде всего положительность и простоту всех собственных значений (порождаемых квадратами частот собственных колебаний).

В приложениях чрезвычайного важна возможность оценки зазора между главной собственной частотой и следующей по высоте частоты, соответствующей первому обертону. Такая возможность дается теорией фокусирующих операторов, если удается установить специальные двухсторонние оценки функции влияния $H(x, s)$ для связанной с (1) задачи

$$-(pu')(x) + \int_0^x u\,dQ = F(x) + \text{const}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Гранта Президента России на поддержку ведущих научных школ (НШ-1643.2003.1), программы "Университеты России" (проект УР 04.01.015) и грантов РФФИ (проекты 04-01-00049 и 04-01-00697)

при $F \in BV[0,l]$. Такие оценки в виде

$$u_0(x)v_0(x) \cdot u_0(s)v_0(s) \leqslant H(x,s) \leqslant \begin{cases} u_0(x)v_0(x) \\ u_0(s)v_0(s) \end{cases}$$

оказываются справедливыми в точном соответствии с классической теорией.

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА ОТНОСИТЕЛЬНО ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Васильев В.В., Иванов В.Е. (Тамбов)

Пусть $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ – множество компактов в $\mathbb{R}^n$; V^η – замкнутая η-окрестность множества V в соответствующем пространстве; $C(L)(L_\infty)$ – пространство непрерывных (суммируемых) (измеримых и существенно ограниченных) на $[a,b]$ вектор-функций с обычной нормой; K – множество функций $\psi : [a,b] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ таких, $\forall\, \delta \in [0,\infty)$ $\psi(\cdot,\delta) \in L_\infty$, $\forall\, \delta \in [0,\infty)$ $\exists m_\delta \in L_\infty$, что при п. в. $t \in [a,b]$ и $\forall\, \tau \in [0,\delta]$ выполняется $\psi(t,\tau) \leqslant m_\delta(t)$, при п. в. $t \in [a,b]$ $\lim\limits_{\delta\to 0+} \psi(t,\delta) = 0$ и $\psi(t,0) = 0$, $\forall\, \delta > 0\ \exists\, \beta_\delta \geqslant 0$, что при п. в. $t \in [a,b]$ $\psi(t,\tau) \leqslant \beta_\delta$; P – множество функций $\eta : [a,b] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, обл. св.: $\forall\, \delta > 0\ \exists r(\delta) > 0$, что при п. в. $t \in [a,b]$ $r(\delta) \leqslant \eta(t,\delta)$; $\widetilde{P} = K \cap P$; $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть функция $\eta \in \widetilde{P}$ такова, что при п. в. $t \in [a,b]$, и всех $x \in V \in \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\forall\, z \in \mathbb{R}^n$

$$\eta(t,\delta) \geqslant \sup_{y \in B[x,\psi(t,\delta)]} h[F(t,x,z), F(t,y,z)], \tag{1}$$

где h – расстояние по Хаусдорфу. Пусть элементы отображения $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ измеримы, $k(t) = \operatorname*{vraisup}\limits_{s\in[a,b]} |K(t,s)| \in L$. Пусть $\tau \in (0, b-a)$, $G_\tau : L \to L$ задан условиями: $(G_\tau(y))(t) = \int_a^{t-\tau} G(t,s)y(s)\,ds$, если $t \in [a+\tau, b]$, $(G_\tau(y))(t) = 0$, если $t \in [a, a+\tau)$. Рассмотрим включения $\dot{x}(t) \in \mathrm{co}\, F(t, x(t), (G_\tau \dot{x})(t))$, $\dot{x}(t) \in F(t, x(t), (G_\tau \dot{x})(t))^{\eta(t,\delta)}$. Множества их решений, лежащих в ограниченном замкнутом множестве $V \subset C$ обозначим $H_{\mathrm{co}}(V)$ и $H_{\eta(\delta)}(V)$. Обозначим $U(V)$ – множество значений функций из V.

Теорема. Для любой функции $\eta \in \widetilde{P}$, удовлетворяющей на $U(V)$ оценке (1) выполняется $H_{\mathrm{co}}(V) = \bigcap\limits_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V)}$, где черта означает замыкание в C.

Литература

1. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение однозначного оператора многозначным отображеним типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами // Изв. ВУЗов. 1999. №3(442)

2. *Булгаков А.И., Ефремов А.А., Панасенко Е.А.* Обыкновенные дифференциальные включения с внутренними и внешними возмущениями // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. N №12. С. 1587–1589.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ

Вахитов Р.Х. (Стерлитамак)

В курсе "Числовые системы" последовательно строятся и развиваются основные числовые системы – системы натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел. Изложение этой дисциплины дает благодатную почву для научно-исследовательской работы студентов (НИРС) по алгебраической тематике. Все числовые системы представляют собой алгебраические системы, поэтому неудивительно желание слушателей рассмотреть алгебраические операции и отношения в самом общем виде. Однако, научные изыскания в общей, или универсальной, алгебре требуют хорошего знания теории групп и теории колец. Студенческие работы по общей алгебре будут насыщены не столько решениями задач и доказательствами теорем, сколько фактами исторического или занимательного характера.

Построение и изучение полукольца натуральных чисел, кольца целых чисел и полей рациональных, действительных, комплексных чисел происходит с точки зрения теории колец. Естественно при этом возникает интерес к узнаванию строения ассоциативных колец. Впрочем, рассмотрение вопросов вложения регулярной полугруппы в группу частных может привести к знакомству с теорией групп. Очень важным свойством числовых систем является их линейная упорядоченность. В математике рассматриваются также направленные и решеточно упорядоченные группы, кольца и поля. В теории упорядоченных колец близки к анализу понятия функционального и почти функционального колец. Геометрическая интерпретация действительных и комплексных чисел дала импульс математикам 19-го века к поиску "многомерных", или гиперкомплексных, чисел. Исследование гиперкомплексных систем существенно повлияло на развитие алгебры, способствуя к определению понятия линейной алгебры. Теорема Фробениуса отвечает на вопрос о числе ассоциативных гиперкомплексных систем – конечномерных алгебр с делением над полем действительных чисел: таких систем 3. Обобщенная теорема Фробениуса утверждает, что существует ровно 4 альтернативных гиперкомплексных системы. Мы видим, что курс "Числовые системы" тесно связан с алгеброй и дает богатый материал для написания выпускных и дипломных работ студентов-математиков.

Как начинается НИРС? – С решения задач повышенной трудности, задач студенческих олимпиад. Пример задачи: "Доказать, что в конечномерной алгебре разрешимость уравнений $ax = b$, $a \neq 0$, равносильна тому, что алгебра не имеет делителей нуля". Некоторые студенты хотят составить какие-нибудь программы. Простой пример: составить программу для проверки ассоциативности или альтернативности конечномерных алгебр с заданной таблицей умножения базисных элементов. Самое главное, необходимо читать дополнительную литературу. Автором подготовлен некоторый материал для учебного пособия по числовым системам с алгебраическими приложениями, которые могут быть полезными при НИРС.

О РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДАХ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Вахитова Е.В. (Стерлитамак)

Применению различных методов в теории чисел посвящены работы [1]–[4]. В 1985 году А.А. Бухштаб [5] анонсировал новый тип весового решета. В работах автора [6]–[8] изучены веса Бухштаба нового типа, исследовано решето Сельберга с весами Бухштаба нового типа и рассмотрены приложения к конечным полиномиальным последовательностям (от натурального аргумента, от простого аргумента, от аргумента pq с ограничениями на p и q и от аргумента pq с ограничениями на pq) и коротким интервалам. При этом функции решета $F(u)$ и $f(u)$ определяются условиями: $F(u) = 2e^{\gamma}/u$, $f(u) = 0$ при $0 < u \leqslant 2$; $(uF(u))' = f(u-1)$, $(uf(u))' = F(u-1)$ при $u \geqslant 2$ (γ – постоянная Эйлера, $\gamma \sim 0,577215...$).

Литература

[1] *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука, 1983. – 240 с.

[2] *Хооли К.* Применения методов решета в теории чисел. Пер. с англ. В.Н. Чубарикова. – М.: Наука, 1987. – 135 с.

[3] *Halberstam H., Richert H.-E.* Sieve methods.– London: Acad. Press. 1974. – 364 P.

[4] *Wu J.* Primes of the form $p = 1 + m^2 + n^2$ in short intervals // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – V. 126. – N 1. – P. 1–8.

[5] *Бухштаб А.А.* Новый тип весового решета // Всесоюз. конф. "Теория чисел и её приложения". Тез. докл.–Тбилиси, 1985.–С. 22–24.

[6] *Вахитова Е.В.* Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа // Матем. заметки. – 1999. – Т. 66. – N 1. – С. 38–49 (РЖ Матем. – 2000. – 00.02-13А.91).

= *E.V. Vakhitova.* Selbergs One-Dimensional Sieve With Bukhstab Weights of New Type // Kinwer Academic / Plenum Publishees. 2000. P. 30 –39.

[7] *Вахитова Е.В.* Методы решета с весами Бухштаба и их приложения. Монография. – М.: МПГУ, Прометей, 2002. – 268 с. (РЖ Матем. – 2003. – 03.11-13А.115К).

[8] *Вахитова Е.В.* О методе весового решета // Междунар. алгебраическая конф. (посвященная 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры) 26 мая – 2 июня 2004 г. Тез. докл. – Россия, Москва, 2004. – С. 22–23.

БЕСКОНЕЧНЫЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ КАК ИГРЫ НА ОТКРЫТОМ КВАДРАТЕ

Вдовенко Н.В., Дьяконова Н.В. (Саратов)

В бесконечной антагонистической игре хотя бы один игрок имеет бесчисленное множество стратегий, и естественно для таких игр платежную матрицу составить практически невозможно. Невозможно распространить и теории конечных антагонистических игр на случай бесконечных. Так в случае смешанных стратегий конечных игр средний выигрыш находится, как сумма $\mu = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}p_iq_j$ и эта сумма всегда существует, а на случай бесконечных игр может случиться, что соответствующая сумма $\mu = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}p_iq_j$ не существует (т.е. ряд расходится). А может случиться, то суммы $\mu = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}p_iq_j$ и $\mu = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ij}p_iq_j$ существуют, но различны по величине.

Есть и другие трудности, поэтому нет общих методов решения бесконечных антагонистических игр. Однако известны некоторые приемы, годные для отдельных частных случаев [1-6].

Простейшим примером бесконечной антагонистической игры может служить игра на открытом единичном квадрате ($0 < x < 1$, $0 < y < 1$). Эта игра отличается от игры на закрытом единичном квадрате($0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$) тем, что вместо $x = 1$, например, следует брать $x \approx 1$ (с точностью до любого малого ε), и таких x будет бесчисленное множество. То же самое можно сказать и о $x \approx 0$, $y \approx 0$, $y \approx 1$. Следовательно, игру на открытом единичном квадрате можно считать практически бесконечной игрой, а за ее приближенное решение, (с точностью до ε) принять точное решение соответствующей игры на закрытом квадрате.

Отметим некоторую специфику антагонистических игр на закрытом единичном квадрате. Платежные функции будут иметь вид, соответственно: $H(x;y)$ $H(F(x),G(Y))$, где $F(x)$ и $G(y)$ интегральные функции распределения на множестве чистых стратегий X и Y. Основным моментом для игр на закрытом единичном квадрате является существование седловой точки на квадрате в области чистых стратегий, необходимым и достаточным условием которого является выполнение равенства $H(x^*;y^*) = \min\limits_{0 \leqslant y \leqslant 1} \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} H(x;y) = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} \min\limits_{0 \leqslant y \leqslant 1} H(x;y)$

Так, например, если оптимальная стратегия игрока A является смесью двух существенных стратегий x_1 и x_2 с вероятностями p_1 и p_2, то игра рассмотренная на закрытом квадрате, имеет две седловые точки $(x_1;\, p_1)$ и $(x_2;\, p_2)$. Что касается игры бесконечной, поставленной в условиях такой задачи, то для нее будут: $(x_1;\, p_1)$ $(x_2;\, p_2)$ — две ε-седловые точки и они выбираются с соответствующими вероятностями.

Литература

1. Бондарева О.П. О теоретико-игровых моделях в экономике. Л.,1974.

2. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.,1986.

3. Дюбин Г.П., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. М.,1981: Львов,1974.

4. Костевич Л.С., Лапко А.А.Теория игр. Исследование операций. Минск, 1982.

5. Крушевский А.В. Теория игр. Киев, 1977.

6. Юрьева А.А. Теория игр в экономике. Саратов, 2003.

ОБ АКТИВИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ РАЗДЕЛОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Вдовенко Н.В., Захарова Т.И., Хучраева Т.С., Цолан Н.А.
(Саратов)

Отличительной особенностью современного высшего образования является активизация самостоятельной работы студентов. Для глубокого усвоения материала студентам необходимо выполнить определённый набор типовых заданий по каждому разделу.

Для стандартного курса высшей математики этот набор традиционен, имеются много учебных пособий, содержащие достаточное число вариантов. Для специальных курсов и разделов (таких, как теория функций комплексного переменного, теория игр, математическое программирование, элементы теории графов и массового обслуживания, уравнения математической физики, функциональный анализ и др.) подобных разработок практически нет. В саратовском СГАУ появилось несколько сборников задач по теории функций комплексного переменного, по математическому программированию, по теории игр, которые частично восполнят этот пробел [1-2].

В основу таких сборников задач положен опыт преподавания указанных разделов в Саратовском Государственном Аграрном Университете. Эти учебные пособия проходят успешную апробацию при изучении соответствующих разделов высшей математики на технологических, экономических, сельскохозяйственных факультетах.

Большое количество задач (до 40 заданий в 30-ти вариатах по различным темам) и наличие решенных типовых примеров для каждого задания позволяет использовать эти пособия как для группы студентов, так и для студентов, занимающихся по индивидуальным планам.

Литература

1. Цолан Н.А., Хучраева Т.С. Пособие по математическому программированию для студентов товароведных специальностей Саратов. – 2005. – 51с.

2. Вдовенко Н.В., Корсунов В.П., Юрьева А.А. Элементы теории графов и массового обслуживания. Саратов. – 2004. – 182с.

КРИТЕРИЕ ПОЛНОТЫ И МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Велиев С.Г., Мирзоев С.С., Билалов Б.Т. (Баку)
b_bilalov@mail.ru

Рассмотрим систему экспонент

$$\left\{A^{+}(t)\cdot\omega^{+}(t)\,e^{int};A^{-}(t)\cdot\omega^{-}(t)\,e^{-i(n+1)t}\right\}_{n\geqslant 0}, \qquad (1)$$

в $L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$, где $A^{\pm}(t)\equiv|A^{\pm}(t)|\,e^{i\alpha^{\pm}(t)}$- комплексно-значные функции, $\omega^{\pm}(t)$- имеют представления

$$\omega^{\pm}(t)\equiv\prod_{i=1}^{\ell^{\pm}}\left\{\sin\left|\frac{t-\tau_i^{\pm}}{2}\right|\right\}^{\beta_i^{\pm}},$$

где $\{\tau_i^{+}\}\subset(-\pi,\pi)$; $\{\beta_i^{\pm}\}\subset R$ - некоторые множества действительных чисел. Пусть выполнены условия:

1). $\alpha^{\pm}(t)$- кусочно-гельдеревы на $[-\pi,\pi]$; $\{s_i\}_1^r\subset(-\pi,\pi)$- множество точек разрывов функции $\theta(t)\equiv\alpha^{-}(t)-\alpha^{+}(t)$;

2). $|A^{\pm}(t)|$- измеримые и $\sup vrai_{(-\pi,\pi)}\left\{|A^{+}|^{\pm 1};|A^{-}|^{\pm 1}\right\}<+\infty$

3). $\{\beta_i^{\pm}\}\subset\left(-\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Обозначим $\sigma_i{}_i^{\ell}\equiv S\bigcup T^{-}\bigcup T^{+}$, $\sigma_1<\cdots<\sigma_\ell$, где $S\equiv\{s_i\}_i^r$; $T^{\pm}\equiv\{\tau_i^{\pm}\}_1^{\ell^{\pm}}$.

Образуем соответствия $\tau_k^{\pm}\to\beta_k^{\pm}$; $s_k\to\frac{h_k}{2\pi}$ и определим

$$\lambda_i^{\pm}=\begin{cases}\frac{\beta_k^{\pm}}{2}, & \text{если } \{\sigma_i\}\bigcap T^{\pm}=\tau_k^{\pm}\\ 0, & \text{если } \{\sigma_i\}\bigcap T^{\pm}=\varnothing\end{cases}\qquad \lambda_i=\begin{cases}-\frac{h_k}{2\pi}, & \text{если } \{\sigma_i\}\bigcap S=s_k,\\ 0, & \text{если } \{\sigma_i\}\bigcap S=\varnothing\end{cases}$$

$\nu_i=-\left(\lambda_i^{+}+\lambda_i^{-}+\lambda_i\right)$, $i=\overline{1,\ell}$, где $\{\sigma_i\}$ - одноэлементное множество. Целые числа n_i, $i=\overline{1,\ell}$; определим из неравенств:

$$-\frac{1}{q}<\nu_i+n_{i-1}-n_i\leqslant\frac{1}{p},\ n_0=0,\ i=\overline{1,\ell}.$$

Пусть $\omega=\theta(-\pi)-\theta(\pi)+2\pi n\ell$.

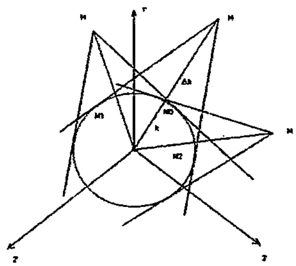
Справедлива

Теорема. *Пусть функции $A^{\pm}(t)$ и $\omega^{\pm}(t)$ удовлетворяют условиям 1)- 3). Тогда система экспонент (1) полна в $L_p(-\pi,\pi)$ только в том случае, если $\omega\leqslant\frac{2\pi}{p}$; мини-мальна в L_p только при $\omega>-\frac{2\pi}{q}$.*

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Вервейко Н.Д., Купцов А.В. (Воронеж)
verv@amm.vsu.ru

Используются экспериментально зафиксированные известные факты превышения предела пластичности (возникновения зуба пластичности или прерывистой пластичности) для линеаризации условия пластичности Мизеса. Это осуществляется таким способом, что само условие пластичности рассматривается как огибающая линейных элементов в пространстве напряжений и заменяется на касательные линии, точка пересечения которых отстоит на расстоянии k от поверхности текучести.



Линеаризированная за счет условия пластичности задача приводит к системе уравнений гиперболического типа с характеристиками, представленными в однородном виде для любых областей, совпадающими с характеристиками основной нелинейной задачи. Поле напряжений вычисляется итерационно по параметру $\Delta k/k$ при $\Delta k/k \to 0$.

На рис. 1 представлена схема замены условия пластичности Мизеса на множество касательных линий (плоскостей) так что система уравнений идеальной пластичности приводится к система уравнений идеальной пластичности приводится к системе полученных уравнений гиперболического вида с учетом параметра итерации.

Литература

1. Криштал М.М. /Физическая мезомеханика. 2004 Т.7 № 5.С.31-45.

2. Радаев Ю.Н./Механика твердого тела. 2003 № 5. С.103-120. М.:Наука.1971.

РАДИАЦИОННЫЙ ТЕПЛООБМЕН В УСТРОЙСТВАХ ПРЯМОГО РАЗОГРЕВА ГАЗА

Волов Д.Б. (Самара)
volovdm@mail.ru

На основе единого алгоритма для расчета термодинамических систем, в которых возможно разбиение на конечное число элементов установки [1], проведен численный анализ некоторых закономерностей, возникающих в системах двухстадийной оптико-баллистической накачки.

При работе оптико-баллистической установки исходная энергия - энергия сжатого компрессором толкающего поршень газа или химическая энергия порохового заряда - преобразуется в излучение.

Унифицированный алгоритм расчета справедлив как для импульсных, так и непрерывных устройств с перепуском газа [2]. Общее между импульсными и непрерывными устройствами подобного рода – то, что вкладываемая энергия преобразуется в полезное тепло. И те и другие относятся к типу тепловых машин по преобразованию механической работы в тепло.

Импульс двухстадийного сжатия имеет хорошо выделяемые элементы, присущие большинству режимов. Характерно два одинаковых по амплитуде пика по температуре в третьей секции, между которыми расположен один более слабый пик по температуре во второй секции. Этому режиму соответствуют максимальные значения давлений во второй и третьей секциях.

Возникает такая дилемма: либо использовать для получения излучения не всю массу рабочего газа и иметь около половины радиационных потерь, либо идти на увеличение диаметра сопла и на неизбежный удар поршня о стенку. Локальному максимуму энергии излучения на выходе соответствуют два значения диаметров сопла: первый, когда еще не вся масса рабочего газа сосредоточена на выходе, и второй, когда удар о стенку ствола уже ощутим.

Обнаружено, что при определенных соотношениях диаметров сопел секций существуют режимы, когда максимальное давление во второй секции постоянно и не зависит от диаметра сопла.

Определяя пороговую температуру, превышение которой означает появление статистически значимой составляющей радиационного излучения, необходимо задаваться характерным уровнем плотности вещества и характерным временем излучения.

Сделан вывод, что для любых преобразователей механической работы в излучение существует такое значение пороговой внутренней энергии рабочего газа, которое однозначно определяет предельный КПД.

Литература

1. Унифицированный алгоритм для расчета систем с неравновесным нагревом / Современные методы теории краевых задач. Материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения –XV". Воронеж, ВГУ, 2004. с. 51-52.

2. Математическое моделирование в термодинамических системах с разделенными секциями // Журнал ММ, т.16, №1, 2004г., стр.23-36.

ОБ ОДНОЙ БЕСКОАЛИЦИОННОЙ ИГРЕ

Высокос М.И. (Москва)

rzitlp_oz@t50.ru

Рассматривается бескоалиционная игр трех лиц при неопределенности:

$$\Gamma = \langle \{1,2,3\},\ \{X_i\}_{i=1,2,3},\ Y,\ \{f_i(x,y)\}_{i=1,2,3} \rangle.$$

Здесь $\{1,2,3\}$ — множество порядковых номеров игроков, $X_i \subseteq \mathbf{R}^{n_i}$ — множество стратегий x_i для i-го игрока $(i = 1,2,3)$, неопределенности $y \in Y \subseteq \mathbf{R}^m$, на $X \times Y$ определена функция выигрыша i-го игрока $f_i(x,y)$ $(i = 1,2,3)$, значение которой называется выигрышем i-го игрока, где $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ — множество ситуаций $x = (x_1, x_2, x_3)$ игры (1); далее $f = (f_1, f_2, f_3)$.

Учитываем следующие особенности игры Γ:

– каждый из игроков независимо от остальных формирует свою стратегию с целью достичь возможно большего своего выигрыша;

– игроки выбирают стратегии одновременно и при этом ориентируются на любые "действия" неопределенностей, о которых им известно лишь множество значений Y;

– одновременно игрок 2 стремится увеличить выигрыш первого игрока за счет "своих средств" и уменьшить выигрыш третьего.

Определение. Набор (x^K, f^{LK}) назовем *L-гарантированным K-равновесием игры* Γ, если существует неопределенность $y_L \in Y$, такая, что $f_i^{LK} = f_i(x^K, y_L)$ $(i = 1,2,3)$ и

$1^0)$ $\max\limits_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2^K, x_3^K, y_L) = f_1(x^K, y_L)$;

$2^0)$ $\max\limits_{x_3 \in X_3} f_3(x_1^K, x_2^K, x_3, y_L) = f_3(x^K, y_L)$;

$3^0)$ стратегия x_2^K является K-максимальной в 3-х критериальной задаче

$\langle X_2, \ \{f_1(x_1^K, x_2, x_3^K, y_L), f_2(x_1^K, x_2, x_3^K, y_L), -f_3(x_1^K, x_2, x_3^K, y_L)\}\rangle$;

4^0) неопределенность $y_L \in Y$ является L-минимальной в задаче

$$\langle Y, \ \{f_i(x^K, y)\}_{i=1,2,3}\rangle,$$

где $K(L) = S, P, B, G$ (S означает оптимум по Слейтеру, P — оптимум по Парето, B — оптимум по Борвейну, G — оптимум по Джоффриону).

Используя в определении одно из $K = S, P, B, G$ и одно из $L = S, P, B, G$ получаем 16 различных понятий гарантированных равновесий игры (1). Устанавливаются достаточные условия существования всех 16-ти связанных между собой гарантированных равновесий, доказана теорема существования.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Гачаев А.М. (Грозный)
niipma@mail333.com

Для уравнения

$$u'' + D_{0x}^{\alpha} u = \lambda u, \tag{1}$$

где $D_{0x}^{\alpha} u$ — дробная производная в смысле Римана-Лиувилля [1], рассмотрим задачу

$$u(0) - \beta u'(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{2}$$

Краевые задачи для уравнения (1) рассматриваются в работах [2], [3].

Доказаны теоремы

Теорема 1. *Число λ является собственным значением задачи (1)–(2) тогда и только тогда, когда λ является нулем функции*

$$U(\lambda) = \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^s(1+\beta s)}{s^2 + s^\alpha + \lambda} ds.$$

Теорема 2. *Пусть λ_j является нулем функции $U(\lambda)$, тогда соответствеющая собственному значению λ_j собственной функцией задачи (1)–(2) является функция*

$$U(\lambda_j, x) = \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{sx}(1+\beta s)}{s^2 + s^\alpha + \lambda} ds.$$

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. Алероев Т.С. О собственных значениях одной краевой задачи для дифференциального оператора дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, №10.

3. Алероев Т. С. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1998, Т. 34. № 1.

ВОЗМУЩЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Глазкова М.Ю. (Воронеж)

gmy@kma.vsu.ru

Теорема 1. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, A — неограниченный ограничено обратимый оператор в $\mathcal{H}$. Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство $\mathcal{H}$, $B : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — ограниченный симметрический оператор, такой что область значений $\operatorname{ran}(I - PA^{-1}B)$ оператора$(I - PA^{-1}B)$ замкнута. Здесь P — ортопроектор на $\mathcal{L}$.
Тогда следующие предположения эквивалентны:
(i) существует самосопряженный оператор $\widetilde{A}$, такой что $\mathcal{L} \subset \operatorname{dom} \widetilde{A}$, $\widetilde{A}|_{\mathcal{L}} = B$ и область определения оператора $A' := A \cap \widetilde{A}$ плотна в $\mathcal{H}$;
(ii) множество $\mathcal{D} := \{f \in \operatorname{dom} A : (Bx, f) = (x, Af),\ x \in \mathcal{L}\}$ плотно в $\mathcal{H}$;
(iii) $\overline{\operatorname{ran}(I - A^{-1}B)} \cap \operatorname{dom} A \subset \operatorname{ran}(I - A^{-1}B)$, и $Bx = Ax$ для $x \in \mathcal{L} \cap \operatorname{dom} A$.
Если выполнено (ii)–(iii), то каждое самосопряженное расширение $\widetilde{A}$ оператора $\widetilde{A}_1$, такого что $\operatorname{dom} \widetilde{A}_1 = \mathcal{L} + \mathcal{D}$ и $\widetilde{A}_1(x + f) = Bx + Af$, где $x \in \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{D}$ соответственно, искомое.

Следствие. Пусть оператор $A^{-1}B$ компактный. В этом случае $\widetilde{A}$ существует тогда и только тогда, когда:
$(iii)'$ $Bx = Ax$ для $x \in \mathcal{L} \cap \operatorname{dom} A$. В частности, если $\dim \mathcal{L} < \infty$, то $\widetilde{A}_1$ — самосопряженный оператор. Кроме того, в этом случае можно предположить, что оператор B действует из $\mathcal{L}$ на некоторое другое подпространство.

Лемма. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, A — неограниченный плотно определенный замкнутый оператор на $\mathcal{H}$. Тогда существует сепарабельное подпространство $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ такое, что $\mathcal{L} \cap \operatorname{dom} A = \{0\}$.

Литература

1. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. *Основы теории линейных операторов в простанствах с индефинитной метрикой*,М. "Наука", 1986.

2. Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, М., 1972

3. Крейн М.Г., *О самосопряженных расширениях ограниченых и полуунитарных эрмитовых операторов*, ДАН, 48 (1945), 323–386.

4. Brasche J., Neidhardt H. *On the singular continuon spectrum of self–adjoint extensions*, Math. Zeitschr. 222 (1996), 533–542.

ОДИН ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТИ ТИПА ЦЕПОЧКИ[1]

Глотов Н.В. (Воронеж)

На одномерной пространственной сети типа цепочки $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{3} [i-1, i]$ рассматривается следующая задача:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad (x \in \bigcup\limits_{i=1}^{3} (i-1,i),\ t \geqslant 0) \\ u_x(0,t) = -\lambda_0 u_t(0,t) \\ u_x(i+0,t) - u_x(i-0,t) = -\lambda_i u_t(i,0) \quad (i = 1,2) \\ -u_x(3,t) = -\lambda_3 u_t(3,t) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0 \quad (x \in \Gamma) \end{cases}.$$

Применяя подход, предложенный в [1], получаем следующую систему уравнений для $\alpha_i(t) = u_t(i,t)$, $i = \overline{0,3}$:

$$\{[-(M+P)V + 2A]D + \Lambda\}\alpha(t) = g(t),\ t \geqslant 0 \tag{1}$$

где $\alpha(t) = (\alpha_0(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))^T$, $(Mf)(t) = f(t-1)$, $(Pf)(t) = f(t+1)$, V – матрица валентностей Γ, A – матрица смежности узлов Γ, $\Lambda = diag(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $(Df)(t) = \sum\limits_{k=0}^{[(t-1)/2]} f(t-(2k+1))$ при $t \geqslant -1$, g – нечетная функция с периодом 2, описываемая через φ.

[1] Работа выполнена при поддержке Гранта Президента России на поддержку ведущих научных школ (НШ-1643.2003.1), программы "Университеты России" (проект УР 04.01.015) и гранта РФФИ (проект 04-01-00049)

Оказывается, что если $V^{-1}\Lambda = E$, где E – единичная матрица, то (ниже $\mu(n) = (1+(-1)^n)/2$) решение уравнения (1) описывается следующим образом:

$$\alpha(t+n) = (A^{-1}V)^n\alpha(t) + \frac{1}{2}(A^{-1}D^{-1})\left[\sum_{i=0}^{[n/2]-1}(A^{-1}V)^{2i}g(t+\mu(n)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{[n/2]-\mu(n)}(A^{-1}V)^{2i}g(t+\mu(n+1))\right], \ n \in \mathbb{N}, \ t \in [0,1).$$

Здесь следует отметить, что, во-первых, $D^{-1} = P - M$, и во-вторых, конечные суммы вида $\sum_{i=0}^{k}(A^{-1}V)^{2i}$ можно свернуть, что достигается переходом к жордановой форме $(A^{-1}V)$.

Литература

1. Прядиев В.Л. Один подход к описанию в конечной форме решений волнового уравнения на пространственной сети // Spectral and Evolution Problems: Proceeding of the Fifteenth Crimean Autumn Math. School –Symposium. Vol. 15, September 17-29, 2004, Sevastopol, Laspi. – Simferopol, 2005.

АКТИВИЗАЦИЯ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ

Глухова О.Ю. (Кемерово)

smolen@ic.kemsu.ru

В продуктивном формировании студента как будущего специалиста важную роль играет активность личности. Подготовка учителя математики является ключевой проблемой всей программы развития математического образования. Профессионализм учителя в первую очередь определяется хорошим знанием предмета, но без грамотной организации учебной деятельности студентов не достичь успеха в обучении. Использование различных методов обучения позволяет разрешить проблему "пассивной деятельности" студентов в процессе обучения и активной деятельности преподавателя. Современная классификация методов обучения четко выделяет среди всех остальных методов — методы активного обучения. Методы включают три основные группы: неимитационные, имитационные неигровые, имитационные игровые методы. Включение в систему лабораторных, самостоятельных работ по профессиональной подготовке учителя математики активных методов обучения и использование различных форм организации деятельности студентов интенсифицирует формирование профессиональных умений. Наибольшую значимость имеют игровые методы, которые позволяют воспроизвести на занятиях реальные производственные ситуации. В ходе таких занятий познаются принципы игрового общения: самоцельность и самоценность игры в ее процессе; всякая игра ситуативна, конкретна, уникальна, неповторима, имеет свои правила, свои роли, свой сюжет, свои задачи. Создание пакета активных методов обучения на занятиях по методике преподавания математики и включение его в систему лабораторных работ позволяет сделать процесс подготовки учителя более продуктивным.

СООТНОШЕНИЕ СВОЙСТВ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Глызин С.Д. (Ярославль)

glyzin@uniyar.ac.ru

Рассмотрим модельную динамическую систему

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + \mu F_2(x,x) + F_3(x,x,x) + \Delta(x), \qquad (1)$$

где $x(t) \in \mathrm{R}^n$, $n \geqslant 4$, $n \times n$ матрица A_0 имеет две пары простых чисто мнимых собственных чисел $\pm i\omega_0$, $\pm 2i\omega_0$, причем остальной ее спектр лежит в левой комплексной полуплоскости, F_2, F_3 – линейны по каждому своему аргументу, гладкая функция $\Delta(x)$ имеет по x порядок выше третьего, $|\varepsilon|, |\mu| << 1$ – малые параметры.

При сформулированных условиях система (1) в некоторой достаточно малой окрестности нуля имеет гладкое устойчивое четырехмерное инвариантное центральное многообразие. В зависимости от порядков малости величин ε, μ динамика на нем описывается различными укороченными нормированными системами. Например, если $|\varepsilon| << \mu^2$, то имеем

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_1\xi_2\cos\psi + \xi_1(\alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\,\xi_2^2), \\ \dot{\xi}_2 &= d\,\xi_1^2\cos(\psi+\delta) + \xi_2(\beta_1\xi_1^2 + \beta_2\,\xi_2^2), \\ \dot{\psi} &= -2\,\xi_2\sin\psi - d\,\frac{\xi_1^2}{\xi_2}\,\sin(\psi+\delta) + c_1\xi_1^2 + c_2\xi_2^2, \end{aligned} \qquad (2)$$

если же $\mu^2 \sim \varepsilon$, то в первые два уравнения добавляются члены порядка ξ_1, и ξ_2 соответственно, а в третье – константа. Устойчивым состояниям равновесия и циклам системы (2) соответствуют устойчивые циклы и торы исходной модели. Если же система уравнений нормальной формы демонстрирует хаотическое поведение, то судить по ним о решениях (1), вообще говоря, нельзя.

Численный анализ (2) показывает наличие областей изменения параметров, в которых старший ляпуновский показатель положителен и имеются фрактально расположенные окна периодичности. Вместе с тем, обнаружена область, где этот показатель положителен и отделен от нуля.

Анализ конкретных динамических систем вида (1) позволяет предположить, что последнее условие служит критерием существования соответствующего аттрактора как у нормальной формы, так и у исходной системы.

К ВАРИАЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОБЩЕГО ВИДА

Григорьева Е.Г., Клячин А.А., Миклюков В.М.
(Волгоград)
e_grigoreva@mail.ru, klchna@zmail.ru, miklyuk@vlink.ru

К числу первоначальных проблем, связанных с вариационными задачами для функционалов

$$I[f] = \int\limits_D F(x, \nabla f)\, dx\,, \quad f \in C^1_{\mathrm{loc}}(D) \cap C^0(\overline{D})\,,$$

с выпуклыми интегрантами $F(x,\xi)$, где $x \in D$, $\xi \in \Xi(x) \neq \mathbf{R}^n$ и $D, \Xi(x)$ – области в $\mathbf{R}^n$, относится проблема описания класса функций f, для которых $\nabla f(x) \in \Xi(x)$. Важнейшей задачей, возникающей при описании этого класса функций, является задача сравнения финслеровой метрики, построенной по распределению областей $\{\Xi(x)\}_{x\in D}$, с евклидовой. Мы базируемся на некоторых идеях, возникших в связи с проблемой С.М. Никольского [1], [2], [3] наилучшего приближения функций в областях с нерегулярной (квазиконформной) границей, и задачей продолжения соболевских функций в областях Джона [4]. В терминах "узости"области в окрестности ее границы нами устанавливается равномерная непрерывность финслеровой метрики относительно внутренней метрики области.

Литература

1. С.М. Никольский, О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица, Изв. АН СССР, сер. матем., v. 10, n. 4, 1946, 295-317.

2. В.К. Дзядык, К вопросу о приближении непрерывных функций в замкнутых областях с углами и о проблеме С.М. Никольского (первое сообщение), Изв. АН СССР, сер. матем., т. 26, п. 6, 1962, 796-824.

3. В.И. Белый, В.М. Миклюков, Некоторые свойства конформных и квазиконформных отображений и прямые теоремы конструктивной теории функций. Изв. АН СССР. сер. матем., 1974, т. 38, п. 6, 1343-1361.

4. P.W. Jones, Quasiconformal mappings and extendability of function in Sobolev spaces, Acta Mathematica, v. 147, 1981, 71-88.

5. E.G. Grigor'eva, A.A. Klyachin, V.M. Miklyukov, Problem of Functional Extension and Space-Like Surfaces in Minkowski Space. Journals of Analysis and its Applications, v. 21, n. 3, 2002, 719-752.

Ф-РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯ

Гумбаталиев Р.З. (Баку)
elshadent@yahoo.com

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H операторно–дифференциального уравнения

$$P\left(\frac{d}{dz}\right)u(z)=\left(-\frac{d^2}{dz^2}+A^2\right)^m u(z)+ \\ +\sum_{j=1}^{2m-1}A_j u^{(2m-j)}(z)=f(z),\quad z\in S_{(\alpha,\beta)}, \tag{1}$$

с начально краевыми условиями

$$u^{(s_\nu)}(0)=0,\qquad \nu=\overline{0,m-1}, \tag{2}$$

где A-положительно-определенный самосопряженный оператор, A_j $(j=\overline{0,m-1})$-линейные операторы в H, $u(z)$ и $f(z)$–H-значные голоморфные функции в области

$$S_{(\alpha,\beta)}=\{z|\ -\beta<\arg z<\alpha\},\ \ 0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\beta<\frac{\pi}{2},$$

а целые числа s_ν $(\nu=\overline{0,m-1})$ удовлетворяют условиям $0<s_0<\dots<s_{m-1}<m-1$. Справедлива следующая

Лемма *Краевая задача*

$$P_0\left(\frac{d}{dz}\right)u(z) \equiv \left(-\frac{d^2}{dz^2}+A^2\right)^m u(z) = v(z), \quad z \in S_{(\alpha,\beta)}, \quad (3)$$

$$u^{(j)}(0) = 0, \quad \nu = \overline{0, m-1}, \quad (4)$$

регулярно разрешима.

Теорема *Пусть A-положительно-определенный самосопряженный оператор с вполне непрерывным обратным A^{-1}. Резольвента $P^{-1}(\lambda)$ существует на лугах $\Gamma_1 = \left\{\lambda \middle| \arg\lambda = \frac{\pi}{2}+\beta\right\}$ и $\Gamma_2 = \left\{\lambda \middle| \arg\lambda = -\frac{\pi}{2}-\alpha\right\}$ и равномерно ограничена, оператора $B_j = A_j \cdot A^{-j}$ $(j = \overline{1, 2m-1})$ в полне непрерывен в H. Тогда задача (1), (4) Φ-разрешима.*

Литература

1. М.Г. Гасымов. О разрешимости краевых задач для одного класса операторно–дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 1977, т.235, №3, с. 505-508.

2. R.Z.Gumbataliyev. On F–solvability of boundary value problems for one class of operator-differential equations of the fourth order. Procedings of IMM AS Azerb., 2001, V. XV(XXIII), p.81-87.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПОДГОТОВКИ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Давыдова М.Б., Покорный Ю.В. (Воронеж)

Несколько лет назад из стандарта выпускников математических факультетов был вычленен и переведен в форму дополнительного образования цикл дисциплин, связанных с подготовкой преподавателей математики. На коммерческих началах, т. е. для желающих обучаться за деньги. А раз желающие платят деньги, то естественно, что курсы и дисциплины им предлагается выбирать. В некоторых рамках, но – выбирать. Так предусмотрено ориентирующим учебным планом. Однако к такому выбору был не готов преподавательский корпус.

Когда к работе в школе готовили по обязанности повально всех, а реально в школу шли единицы, то за качественное содержание математико-педагогических спецкурсов никто реально не отвечал. Хотя бы уже потому, что у студентов выбора не было. Сейчас же потенциальное право студентов сравнивать и выбирать обнажает весьма драматическое обстоятельство.

В середине XX в. математическая элита обнаружила своего рода двухслойность математической культуры. Об этом достаточно ярко писал Рашевский П. К. в предисловии к знаменитой книге Д. Гильберта "Основания геометрии". Об этой двухслойности на примере геометрии он говорил так:

"Геометрия как физика изучает свойства протяженности материальных тел. Ее положения могут и должны быть проверены опытным путем. Они воспроизводят материальный мир лишь в абстракции и истинны поэтому лишь приближенно.

Геометрия как математика интересуется лишь логическими зависимостями между своими положениями, более точно – занимается логическим выводом из некоторых положений всех остальных". Истинность подобных выводов определяется не соответствием натуре и смыслу, а логической точностью выводов.

Близкие взгляды на многогранность математики высказывались А. Н. Колмогоровым и многими другими крупнейшими учеными. Однако эта позиция, имея методологический характер, в те слишком идеологизорованные времена прошла мимо влияния широкой математической общественности, тем более – мимо учебников математики. Ибо методология математики определялась в основном диалектиками от марксизма, а они въехать в описанное положение так и не смогли.

Нам, преподавателям математики, по наследству досталось представление о ценности математического образования почти только лишь согласно второй формально-дедуктивной концепции. И потому университетские преподаватели практически полностью дезориентированы в содержании и задачах школьной математики, формировавшейся на протяжении веков в полном соответствии с первым слоем.

И здесь главная проблема преподавателей – осознание диаметральной противоположности методических концепций обеих математических культур.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ J-ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА[1]

Денисов М.С. (Воронеж)

Цель доклада — описать достаточные условия существования

[1]Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203.

ограниченного обратного оператора для оператора вида:

$$B = \begin{pmatrix} A & S \\ W & -A^* \end{pmatrix} : D(A) \bigcap D(W) \dot{+} D(A^*) \bigcap D(S) \to H \dot{+} H$$

где H - гильбертово пространство, и выполняются следующие условия

1. $\overline{D(A) \bigcap D(W)} = H, \qquad \overline{D(A^*) \bigcap D(S)} = H.$
2. Линейный оператор $A : D(A) \to H$ — замкнут.
3. Линейные операторы $W : D(W) \to H$ и $S : D(S) \to H$ — самосопряженные, неотрицательные.

Пусть $H \dot{+} H$ — гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и в нем заданы два индефинитных скалярных произведения $[x, y]_1 = (J_1 x, y)$, $[x, y]_2 = (J_2 x, y)$,
где $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}$.

Если относительно $[x, y]_1$ оператор iB — диссипативен, а относительно $[x, y]_2$ он симметричен, то такой оператор B называется неотридцательно гамильтоновым.

Проведенное исследование обобщает и уточняет результаты Г.А.Куриной [Дифференциальные уравнения, том 37, номер 6, стр. 839, 2001 г.] для неотридцательно гамильтонова оператора B.

СКОБКА ПУАССОНА В $J^3(\pi)$

Дикарева Е.В., Думачев В.Н. (Воронеж)
dumv@comch.ru

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений как подмногообразие Σ в расслоении джетов $J^3(\pi)$: $E \to M$, определяемое уравнениями $F(x, u, p_i) = 0$, где $x \in M \subset R$, $u = p_0 \in U \subset R$, $p_i \in J^i(\pi) \subset R$, $E = M \times U$. Записывая ее в вариационной форме $\partial_t u = D\delta H$, где D - единичная антисимметричная матрица

$$H = \frac{1}{2} \int \left(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) dt$$

получим расширенное распределение Картана

$$\theta_i = dp_i + (-)^{k+l} [p_i, H]_{k<l} \, dt,$$

со скобкой Пуассона

$$[x_i, H]_{kl} = \frac{\delta x_i}{\delta x_k}\frac{\delta H}{\delta x_l} - \frac{\delta x_i}{\delta x_l}\frac{\delta H}{\delta x_k}.$$

Бивекторное поле X на симплектическом многообразии (M, ω) называется гамильтоновым, если соответствующая ему 2-форма $\Theta = X \rfloor \omega$ является замкнутой $d\Theta = 0$. В нашем случае симплектическая форма задается в виде $\omega = dp_0 \wedge dp_1 \wedge dp_2 \wedge dp_3$ и

$$\Theta = X \rfloor \omega = \sum_{i<j} dH \wedge dS_{ij},$$

где $dS_{ij} = dp_i \wedge dp_j$.

Для динамической системы $\partial_t x_i = \langle x_i H \rangle$ гамильтоново бивекторное поле есть

$$X_H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left[\frac{\partial H}{\partial p_0} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\right]\frac{\partial}{\partial p_2}\wedge\frac{\partial}{\partial p_3} + \left[\frac{\partial H}{\partial p_0} - \frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial}{\partial p_1}\wedge\frac{\partial}{\partial p_3} \\ + \left[\frac{\partial H}{\partial p_0} - \frac{\partial H}{\partial p_3}\right]\frac{\partial}{\partial p_1}\wedge\frac{\partial}{\partial p_2} + \left[\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_2}\right]\frac{\partial}{\partial p_0}\wedge\frac{\partial}{\partial p_3} \\ + \left[\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_3}\right]\frac{\partial}{\partial p_2}\wedge\frac{\partial}{\partial p_0} + \left[\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_3}\right]\frac{\partial}{\partial p_0}\wedge\frac{\partial}{\partial p_1} \end{bmatrix}$$

Согласно теореме Лиувилля любое гамильтоново поле сохраняет форму объема, т.е. производная Ли от 4-формы ω по векторному полю X есть нуль: $L_X\omega = 0$. Другими словами генерируемая векторным полем X однопараметрическая группа симплектических преобразований $\{g_t\}$ (или фазовый поток) оставляет инвариантной форму ω, т.е. $g_t^*\omega = 0$.

СОСТАВНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СУММИРУЕМЫХ С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМИ ВЕСАМИ

Дыбин В.Б. (Ростов-на-Дону), Джиргалова С.Б. (Элиста)
vladimir-dybin@yandex.ru, dzhirgalovaSB@yandex.ru

Пусть $\{\alpha, \beta\}_p, \alpha, \beta \in (0, \infty), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, - пространство последовательностей $f = \{f_n\}_{n \in Z}$ вида $f_n = \alpha^n \widetilde{f}_n^+ + \beta^n \widetilde{f}_n^-, \widetilde{f}_n^\pm = P_\pm \widetilde{f}_n = \frac{1}{2}(1 \pm \operatorname{sign} n)\widetilde{f}_n, \{\widetilde{f}_n\} \in l_p(Z)$,

$$C(K)f = \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_{n-j} f_j \right\}_{n \in Z} \tag{1}$$

оператор дискретной свертки в пространстве $\{\alpha,\beta\}_p$. В работе построена теория обратимости составных операторов

$$\Pi^T = C(K_1)P_+ + C(K_2)P_-, \Pi = P_+C(K_1) + P_-C(K_2)$$

в пространстве $\{\alpha,\beta\}_p$ и тем самым решена проблема, поставленная И.Ц. Гохбергом и М.Г. Крейном в [1].

Алгебра операторов свертки вида (1) является алгеброй с символом. Символ $K(z)$ оператора $C(K)$ в пространстве $\{\alpha,\beta\}_p$ определен как преобразование Лорана последовательности $k \in \{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\}_1$, где $\widetilde{\alpha} = \min(\alpha,\beta), \widetilde{\beta} = \max(\alpha,\beta)$. Алгебра символов $W\left(\overline{K}_{\widetilde{\beta}^{-1}}^{\widetilde{\alpha}^{-1}}\right)$ состоит из функций, аналитических в кольце $K_{\widetilde{\beta}^{-1}}^{\widetilde{\alpha}^{-1}} = \{z|\widetilde{\beta}^{-1} < |z| < \widetilde{\alpha}^{-1}\}$, представимых в виде абсолютно сходящихся рядов Лорана в $\overline{K}_{\widetilde{\beta}^{-1}}^{\widetilde{\alpha}^{-1}}$.

Условие фредгольмовости операторов Π^T и Π имеет вид

$$K_1(z) \in GW(\Gamma_{\alpha^{-1}}), K_2(z) \in GW(\Gamma_{\beta^{-1}})$$

(И.А. Фельдман, [2]). Откуда следует, что нуль-множества $T(K_j)$ символов K_j в кольце $\overline{K}_{\widetilde{\beta}^{-1}}^{\widetilde{\alpha}^{-1}}, j = 1,2$, могут быть достаточно богатыми, в том числе и бесконечными, сгущающимися на свободных границах ($\Gamma_{\beta^{-1}}$ при $j = 1$, $\Gamma_{\alpha^{-1}}$ при $j = 2$). Этим объясняется более чем сорокалетняя задержка в решении поставленной проблемы. Она лежит на пересечении эллиптической и неэллиптической теории уравнений типа свертки, а также уравнений типа свертки с бесконечным индексом [3].

Во всех случаях описаны ядро и образы операторов и предъявлены конструкции обратных. Получены необходимые и достаточные условия того, чтобы каждый из рассматриваемых операторов был обратимым данного типа фредгольмовым оператором.

Литература

1. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Парное интегральное уравнение и его транспонированное.// Теор. и прикл. Математика, Львов, 1958, 1, 58-81.

2. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А.. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1988, 352 с.

3. Dybin V.B., Grudsky S.M.: Introduction to the theory of Toeplitz operators with infinite index.- Operator Theory: Advances and Applications, 137, Birkhauser, Basel-Boston-Berlin, 2002, 312 p.

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ СВЯЗАННЫХ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ И СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Егоров А.И. (Долгопрудный), Знаменская Л.Н. (Переславль-Залесский)

egorov@4unet.ru, lznam@lznam.pereslavl.ru

Рассматривается задача гашения колебаний в системе, состоящей из двух объектов. Колебания одного объекта описываются волновым уравнением с граничными условиями первого рода. Колебания другого объекта описаны обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, содержащим управляющую функцию. Задачи подобного типа возникают, например, при гашении колебаний газа в длинных трубопроводах.

Пусть $Q_{l,T} = \{0 < x < l,\ 0 < t < T\}$. Система описывается следующей краевой задачей:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in Q_{l,T}, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = y(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$\ddot{y}(t) + (a\mu)^2 y(t) = \nu(t) + b u_x(l,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = y^1. \tag{5}$$

Решения краевой задачи (1)-(5) берутся из пространства $C^2(\overline{Q_{l,T}})$.

Задача управления. Найти период времени T и функцию $\nu(t)$ такие, что решение $u(x,t)$ задачи (1)-(5) с начальными условиями (2) в момент времени T принимает нулевые финальные значения

$$u(x,T) = 0 \quad u_t(x,T) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{6}$$

В явном виде получены решения краевой задачи (1)-(5). Эти решения зависят от того, как связаны между собой коэффициенты a, b и μ. Рассмотрены три случая:

1) $b^2 - 4a^2(a\mu)^2 = 0$, 2) $b^2 - 4a^2(a\mu)^2 = c^2$, 3) $b^2 - 4a^2(a\mu)^2 = -c^2$.

Для каждого из указанных случаев получены в явном виде управления $\nu(t)$, решающие задачу гашения колебаний, период времени управления во всех случаях равен $2l/a$.

ЛОКАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРОСТРАНСТВА ОКОЛО НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Ененко И.А. (Воронеж)
enenkoira@yandex.ru

На основе точных трехмерных линеаризированных уравнений устойчивости исследуется в рамках динамического подхода устойчивость пространства, ослабленного многоугольной цилиндрической полостью, находящегося под действием однородного гравитационного поля и внутреннего давления q_0. Эта задача устойчивости, при принятии концепции продолжающегося нагружения, может быть сведена к определению критического значения внутренней нагрузки q_0 равномерно распределленой по контуру полости. Свойства материала в приконтурной области моделируются соотношениями упруговязкопластического тела с трансляционным упрочнением [1, 2]. В этом случае функция нагружения имеет вид

$$F = \left(S_i^j - c(\varepsilon_i^j)^p - \eta(e_i^j)^p\right)\left(S_i^j - c(\varepsilon_i^j)^p - \eta(e_i^j)^p\right) - k^2,$$

а соотношения ассоциированного закона течения -

$$(e_i^j)^p = v\left(S_i^j - c(\varepsilon_i^j)^p - \eta(e_i^j)^p\right).$$

Здесь c – коэффициент упрочнения; k – предел текучести; η – коэффициент вязкости; $S_i^j = \sigma_i^j - \sigma\delta_i^j$ – девиатор тензора напряжений; $\sigma = \frac{\sigma_k^k}{3}$; δ_i^j – символ Кронекера; ε_i^j – компоненты тензора деформаций; e_i^j – компоненты тензора скоростей деформаций; v – положительный множитель. Вычисления проводились для случая, когда пространство было ослаблено цилиндрической полостью, имеющей в поперечном сечении форму квадрата со сглаженными углами. Анализ численного эксперимента показал, что с ростом коэффициента упрочнения c, величина критического давления на контуре выработки увеличивается, а при увеличении вязкости - уменьшается.

Литература

1. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.

2. Спорыхин А.Н., Шашкин А.И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 232 с.

О ВЕКТОРНОЙ АДДИТИВНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Жадаева Н.Г., Романова Н.С. (Минск)

Egor.Romanov@solo.by

Построена векторная аддитивная модель для абстрактной задачи Коши [1]. Приведенные в сообщении результаты обобщают модель [2] на случай уравнений со смешанными производными, а также уравнений высших производных.

Рассмотрена билинейная форма $a(t; u, v)$, такая что существует коэрцитивный оператор $A \in L(V, V')$. Используем обозначения из [1,3]. $a(t; u, v) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} a_{\alpha\beta}(t; u, v)$, где $a_{\alpha\beta}(t; u, v)$ — билинейные формы, определенные на $V_\alpha \times V_\beta$ и $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$. Следуя [2], рассматриваются билинейные формы $\overline{a}(t; \overline{u}, \overline{v}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} a_{\alpha\beta}(t; u_\alpha, u_\beta)$, $\overline{u} = (u_1, \ldots, u_p)$. Билинейная форма $\overline{a}(t; u_\alpha u_\beta)$ порождает оператор $\overline{A} \in L(\overline{V}, \overline{V}')$, $\overline{a}^+(t; \overline{u}, \overline{v}) = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{\alpha} a_{\alpha\beta}^+(t; u_\alpha, u_\beta)$, $\overline{a}^-(t; \overline{u}, \overline{v}) = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=\alpha}^{p} \overline{a}_{\alpha\beta}(t; u_\alpha, u_\beta)$; $a_{\alpha\beta}^+ = a_{\beta\alpha}^- = a_{\alpha\beta}$, когда $\alpha \neq \beta$; $a_{\alpha\alpha}^+ = a_{\alpha\alpha}^- = 0.5\, a_{\alpha\alpha}$ индуцируют соответствующие операторы, причем $\overline{A} = A^+ + A^-$. Вводим H^{2p} гильбертового пространство вектор функций $V = (u_1^{\rightarrow}, \ldots, u_p^{\rightarrow}, u_p^{\leftarrow}, \ldots, u_1^{\leftarrow})$, $u_\alpha^{\rightarrow}, u_\alpha^{\leftarrow} \in H$, $\alpha = \overline{1,p}$, $u_\alpha^* = u_\alpha^{\rightarrow}$, $\alpha = \overline{1,p}$; $u_\alpha^* = u_{2p+1-\alpha}^{\leftarrow}$, $\alpha = \overline{p+1, 2p}$ и определяем из [3] $A_\alpha^* u_{(\beta)}$.

Предложена полудискретная модель на сетке $\omega_\tau = \{t | t = t_i = \tau j, j = 0, 1, \ldots, j_0\}$

$$\frac{dv_\beta}{dt} + A_\beta^* v_{(\beta)}(t_{j+1}) + \sum_{\alpha=1}^{\beta-1} A_\alpha^* v_{(\alpha)}(t_{j+1}) + \sum_{\alpha=\beta+1}^{2p} A_\alpha^* v_{(\alpha)}(t_i) = f(t),$$

$v_\beta(0) = u_0$, $\beta = \overline{1, 2p}$, $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$, а также дискретные модели [3]. Доказаны устойчивость и сходимость при $\tau \to 0$, $v_\alpha^{\rightarrow}(t)$, $v_\alpha^{\leftarrow}(t) \to u(t)$ почти для всех $t \in (0, T)$, где $u(t)$ — решение задачи Коши.

Литература

1. Лионс Ж.-Л., Манджинес Е. Неоднородные граничные задачи и их приложение. М.:Мир, 1971. 371 с.

2. Жадаева Н.Г. // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 7. С. 1218–1230.

3. Абрашин В.Н., Жадаева Н.Г. // Известия вузов. Матем. 2003. Т. 488, № 1. С. 3–11.

О ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Жуковская Т.В. (Тамбов)
zukovskis@mail.ru

Пусть оператор $F : D^n_{[a,\,b]} \to L^n_{[a,\,b]}$ является вольтерровым на совокупности множеств $e_\gamma = [\eta(\gamma),\, \nu(\gamma)] \subset [a, b]$, где функции $\eta(\cdot), \nu(\cdot)$ монотонны, $\nu(\gamma) - \eta(\gamma) = \gamma$ при всех $\gamma \in [0,\, b-a]$, $\eta(0) = \nu(0) = c \in [a, b]$, $\eta(b-a) = a$, $\nu(b-a) = b$. В частном случае, если $\eta(\gamma) \equiv a$, оператор F будет вольтерровым по А.Н. Тихонову, если же $\nu(\gamma) \equiv b$, то F будет опережающим оператором. Предлагаются методы приближенного решения задачи Коши для функционально-дифференциального уравнения

$$x'(t) = (F\,x)(t), \quad t \in [a,\, b], \quad x(c) = \alpha, \quad c \in [a, b]. \qquad (1)$$

Разобьем $[0, b-a]$ точками $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_k = b-a$. Пусть при каждом $k = 1, 2, \ldots$ построен такой оператор $F_k : D^n_{[a,\,b]} \to L^n_{[a,\,b]}$, что для $x,\, y \in D^n_{[a,\,b]}$, если $x(t) = y(t)$ при $t \in e_{\gamma_i}$, $i = \overline{0, k-1}$, то $(Fx)(t) = (Fy)(t)$ при $t \in e_{\gamma_{i+1}}$. Пусть, кроме того, для любого $x \in D^n_{[a,\,b]}$ имеет место $\lim\limits_{k\to\infty} \|F_k x - Fx\|_L = 0$. Метод состоит в замене задачи (1) приближенной задачей

$$x'_k(t) = (F_k\, x_k)(t), \quad t \in [a,\, b], \quad x_k(c) = \alpha, \quad c \in [a, b], \qquad (2)$$

решение которой строится последовательно на множествах e_{γ_i}, $i = \overline{1, k}$. Доказана сходимость решений задач (2) к решению (1). Построены конкретные операторы F_k, позволяющие получить аналоги методов Тонелли, Эйлера, Рунге-Кутта. Предложенные алгоритмы применены к решению уравнения

$$x'(t) = f(t,\, x(h(t, x(t)))), \quad t \in [a,\, b],$$
$$x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \text{если} \quad \xi \notin [a,\, b],$$

называемого в литературе дифференциальным уравнением с авторегулируемым отклонением аргумента. Это уравнение возникает при исследовании движения тяготеющих или электрически заряженных тел с учетом запаздывания сил взаимодействия.

РИСКИ И ИСХОДЫ В ЗАДАЧЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ[1]

Жуковский В.И. (Москва)
rzitlp_oz@t50.ru

Для задачи принятия решения при неопределенности

$$\Gamma = \langle X, Y, f(x,y) \rangle,$$

где альтернативы $x \in X \subset \mathbf{R}^n$, неопределенности $y \in Y \subset \mathbf{R}^m$, скалярный критерий $f(x,y)$, вводится *функция риска*

$$\varphi(x,y) = \max_{z \in X} f(z,y) - f(x,y)$$

и Γ ставится в соответствие двухкритериальная задача при неопределенности

$$\langle X, Y, \{f(x,y), \varphi(x,y)\} \rangle.$$

Определение. Тройку $(x^*, f^*, \varphi^*) \in X \times \mathbf{R}^2$ назовем *гарантированным по исходу и риску решением (ГИР) задачи* Γ, если существует неопределенность $y^* \in Y$, при которой $f^* = f(x^*, y^*)$, $\varphi^* = \varphi(x^*, y^*)$ и

1) при всех $x \in X$ несовместна система неравенств

$$f(x,y^*) > f^*, \ \varphi(x,y^*) < \varphi^*;$$

2) для любых $y \in Y$ несовместна система неравенств

$$f(x^*,y) < f^*, \ \varphi(x^*,y) > \varphi^*.$$

Устанавливаются достаточные условия существования ГИР, найден явный вид при линейно-квадратичном критерии и доказана

Теорема. Пусть в Γ

1) $X \in comp\mathbf{R}^n$, $Y \in comp\mathbf{R}^m$, причем X — выпукло,

2) $f(x,y) \in C(X \times Y)$ и вогнута по x при каждом $y \in Y$.

Тогда существует ГИР, причем

$$f^* = f(x^*, \mu^*), \ \varphi^* = \varphi(x^*, \mu^*),$$
$$f(x,\mu) = \int_Y f(x,y)\mu(dy), \ \varphi(x,\mu) = \int_Y \varphi(x,y)\mu(dy)$$

и

$$\max_{x \in X}[f(x,\mu^*) - (1-\alpha)\max_{z \in X} f(z,\mu^*)] = \min_{\mu(\cdot) \in \{\mu\}}[f(x^*,\mu) -$$
$$-(1-\alpha)\max_{z \in X} f(z,\mu)] = Idem[x \to x^*, \mu \to \mu^*],$$

постоянная $\alpha \in [0,1]$ и $\{\mu\}$ — множество вероятностных мер на компакте Y.

Литература

1. Zhykovskiy V.I., Salukvadze M.E. The Vector-Valued Maximin. - New York etc: Academic Press, 1994.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ N02-01-00612

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА[2]

Жуковский Е.С., Мишина М.Г. (Тамбов)
aib@tsu.ru

Пусть B– банахово пространство функций $x : [a,b] \to R^m$. Поставим в соответствие каждому $\gamma \in [0, b-a]$ измеримое множество e_γ с мерой $\mathrm{mes}(e_\gamma) = \gamma$ так, что для любых $\gamma, \eta \in [0, b-a]$, удовлетворяющих неравенству $\gamma < \eta$, выполнено $e_\gamma \subset e_\eta$. Обозначим $v = \{ e_\gamma \}$. Оператор $K : B \to B$ называем вольтерровым на v, если для любых $e_\gamma \in v$, $y, z \in B$ из $y(s) = z(s)$ на e_γ следует $(K y)(s) = (K z)(s)$ на e_γ.

Рассмотрим уравнения

$$x(t) - (Kx)(t) = 0, \quad t \in [a, b]. \tag{1}$$

$$x_i(t) - (K_i x_i)(t) = 0, \quad t \in [a, b], \tag{2}$$

с такими вольтерровыми на v операторами $K_i, K : B \to B$, что для каждой сходящейся последовательности $\{x_i\} \subset B$, $\|x_i - x\| \to 0$, имеет место $\|K_i x_i - Kx\| \to 0$. Предлагаются утверждения о сходимости решений уравнений (2) к решению уравнения (1). Особенностью этих результатов является то, что решения уравнений (2) могут быть определены на разных множествах. Однако, доказано существование множества e_β, положительной меры, входящего в область определения любого решения. Получены условия компактности последовательности решений уравнений (2), определенных на этом множестве. Доказано, что предельные точки этой последовательности являются локальными решениями уравнения (1). Полученные утверждения используются для обоснования разработанных авторами методов приближенного решения уравнений Вольтерра, позволяюших находить не только глобальные, но и предельно продолженные решения.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №04-01-00324

О МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ[1]

Жуковский С.Е. (Тамбов)

zukovskis@mail.ru

Одним из методов исследования дифференциальных неравенств, дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, задач управления является переход от уравнений к соответствующим включениям. Многие из перечисленных задач, являясь линейными, приводят к включениям с многозначными отображениями, имеющими линейные сечения.

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, 2^X – множество всех подмножеств множества X, $\overline{A}$ – замыкание множества $A \subset X$, $B(X,Y)$ – линейное нормированное пространство линейных ограниченных операторов $f : X \to Y$, $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\|$. Многозначное отображение $F : X \to 2^Y$ назовем внутренне линейным, если существует такое множество $\mathcal{B} \subset B(X,Y)$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$, что $Fx = \bigcup\limits_{f \in \mathcal{B}} \{fx\}$. В этом случае будем обозначать многозначное отображение $F = F_{\mathcal{B}}$ и говороть, что оно образовано линейными ограниченными операторами. Такое отображение назовем ограниченным, если существует $\sup\limits_{f \in \mathcal{B}} \|f\|$.

Теорема 1. *Пусть образованное линейными ограниченными операторами многозначное отображение $F_{\mathcal{B}} : X \to 2^Y$ ограничено. Тогда для его замкнутости необходимо и достаточно, чтобы $F_{\mathcal{B}}x = \overline{F_{\mathcal{B}}x}$ при всех $x \in X$.*

Теорема 2. *Если образованное линейными ограниченными операторами многозначное отображение $F_{\mathcal{B}} : X \to 2^Y$ замкнуто, то $F_{\mathcal{B}} = F_{\overline{\mathcal{B}}}$.*

Теорема 3. *Если множество $\mathcal{B} \subset \mathfrak{B}(X,Y)$ предкомпактно в сильной операторной топологии, то отображение $\overline{F_{\mathcal{B}}} : X \to 2^Y$, $\overline{F_{\mathcal{B}}}\,x = \overline{F_{\mathcal{B}}\,x}$ будет внутренне линейным, причем, оно будет образовано операторами из замыкания множества $\mathcal{B}$ в сильной топологии.*

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №04-01-00324

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Завалей Е.Г. (Краснодар)
alexzav@mail.ru

Рассматриваются вопросы L^1–асимптотической устойчивости линейного интегрального уравнения Вольтерра с положительным ядром

$$x(t) = \int_a^t Q(t,s)x(s)ds + f(t), \quad a < t < \infty. \tag{1}$$

Будем считать, что в уравнении (1) $n \times n$–матрица $Q(t,s) \geqslant 0$, измерима по совокупности переменных на множестве $a < s < t < \infty$ и для любых $b > a$ $(b \neq \infty)$ удовлетворяет условиям:

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{a<s<b} \int_s^b \|Q(t,s)\|\, dt < \infty,$$

$$\lim_{h\to 0+} \operatorname*{vrai\,sup}_{a<s<b} \int_s^{\min(s+h,\, b)} \|Q(t,s)\|\, dt = 0,$$

а свободный член $f \in L^1_{loc} = L^1_{loc}((a,\infty) \to \mathbb{R}^n)$.

Обозначим через $\tilde{C}_0$ пространство суммируемых на (a,∞) функций, для которых $\operatorname*{vrai\,sup}_{t>a} \|x(t)\| < \infty$ и $\operatorname*{vrai\,lim}_{t\to\infty} x(t) = 0$. Решение $x_{\bar{f}}$ будем называть L^1-асимптотически устойчивым, если оно L^1-устойчиво и из того, что $f - \bar{f} \in \tilde{C}_0$, следует, что $x_f - x_{\bar{f}} \in \tilde{C}_0$.

Теорема. *Пусть ядро уравнения уравнения (1)* $Q(t,\, s) = (q_{i,j}(t,\, s))$, $i,\, j = 1, \ldots, n$, *удовлетворяет условиям:*

1) $\operatorname*{vrai\,sup}_{s>a} \int_s^b \|Q(t,\, s)\|\, dt < \infty;$

2) $\operatorname*{vrai\,lim}_{t\to\infty} \int_{E_i} q_{i,j}(t,\, s)\, ds < \infty$, *для любых измеримых непересекающихся ограниченных подмножеств* E *из* $(a,\, \infty)$;

3) $\inf_k \sqrt[k]{\lim_{T_0\to\infty} \operatorname*{vrai\,sup}_{s>T_0} \int_s^\infty \|Q_k(t,\, s)\|\, dt} < 1.$

Тогда уравнение (1) L^1*- асимптотически устойчиво.*

ДИАГРАММА НЬЮТОНА В ЗАДАЧЕ ЛАМБА О ВОЛНАХ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Задорожная Н.С., Задорожный А.И. (Ростов-на-Дону)
simon@rnd.runnet.ru

Спектр задачи о свободных колебаниях тяжелой однородной капиллярной несжимаемой вязкой электропроводной жидкости бесконечной глубины, граничащей сверху с вакуумом и находящейся в стационарном кусочно постоянном магнитном поле, определяется из дисперсионного полинома

$$s^6 + 8\Theta s^5 + [3A + 2(1 + 12\Theta^2)]s^4 + [16A\Theta + 8\Theta(1 + 2\Theta^2)]s^3 +$$

$$+[4A(1+16\Theta^2)+3A^2+(1+8\Theta^2)]s^2+8\Theta A(1+A)s+A(1+A)^2 = 0. \quad (1)$$

Здесь $s = \sigma(1 + B_0^{-1} + A1)^{-\frac{1}{2}}, \sigma$ - искомый спектральный параметр, B_0-число Бонда, $\Theta = R^{-1}, R = Rg(1 + B_0^{-1} + A1)^{\frac{1}{2}}$,

Rg - гидродинамическое число Рейнольдса,

$A = A0(1 + B_0^{-1} + A1)^{-1}$, где $A0, A1$ - числа Альфвена в жидкой среде и в вакууме, соответственно. Посторонние корни отфильтровываются условиями $\Re(\sigma) \leqslant 0, \Re(\sqrt{1 + R(s + As^{-1})}) \geqslant 0$. При $A0 = A1 = 0$ из (1) получается классический многочлен Ламба.

Особый интерес в задачах рассматриваемого типа представляют асимптотические выражения собственого числа s в следующих предельных случаях: 1) малой или "исчезающей"вязкости, когда $\Theta << 1$ или, что то же $R >> 1$; 2) сильной демпфированности или большой вязкости, то есть при $\Theta >> 1 (R << 1)$; 3) $|R - R_*| << 1$, что отвечает окрестности кратного вещественного корня, при переходе через который апериодические моды сменяются ангармоническими. В этих случаях асимптотики построены методом диаграммы Ньютона. Заметим, что при $\Theta >> 1$ реализуются как режим "быстрого"затухания $s = -0.913R^{-1}[1 - (0.239 + 1.201A)R^2] + O(R^2)$, так и "медленного"

$$s = Rs_1 \left[1 - \frac{R^2}{16}\frac{24s_1^2 + B(1 + 2A)s_1 + (1 + A)(1 + 3A)}{3s_1 + (1 + 3A)}\right] + o(R^3),$$

где $16s_1^3 + 8(1 + 3A)s_1^2 + 8A(1 + A)s_1 + A(1 + A)^2 = 0$. Для отрицательного корня этого полинома вновь методом диаграммы Ньютона построены разложения при $A << 1, A >> 1$ и $|A - 1| << 1$, что с приемлемой точностью перекрывает практический диапазон.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Зарубин А.Н., Зарубин Е.А. (Орел)
aleks_zarubin@mail.ru

Уравнение

$$L_j u(x,t) = H(x-\tau)\, u(x,t-\tau) \;\; (j=1,\,2), \qquad (L_j)$$

где

$$L_1 u(x,t) \equiv D_{0t}^{\alpha} u(x,\xi) - u_{xx}(x,t), \;\; 0<\alpha<1;$$
$$L_2 u(x,t) \equiv u_t(x,t) - D_{+}^{2\gamma} u(\xi,t), \;\; 1<2\gamma<2;$$

$0<\tau\equiv \mathrm{const}$; $H(\xi)$ – функция Хевисайда; D_{0t}^{α} $\left(D_{+}^{2\gamma}\right)$ – оператор дробного интегродифференцирования в смысле Римана-Лиувилля, действующий на функцию $u(x,t)$ по переменной t (x) на полуоси (на оси), рассматривается в области $D = R^1 \times (0,+\infty)$.

Задача K. Найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения L_1 (L_2) такое, что $D_{0t}^{\alpha-1} u(x,\xi)$ $\left(D_{+}^{2\gamma-2} u(\xi,t)\right) \in C(\overline{D}) \cap C_{x,t}^{2,1}(D)$, удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{t\to 0+} D_{0t}^{\alpha-1} u(x,\xi) = \omega(x) \;\; (u(x,t)|_{t=0} = \omega(x)), \;\; x\in R^1,$$

где $\omega(x)$ – заданная непрерывная, достаточно гладкая функция, причем $\omega(\pm\infty)=0$.

Теорема единственности решения задачи K доказана исходя из положительной определенности интегралов, полученных после интегрирования тождества $D_{0t}^{\alpha-1} u(x,\xi) L_1 u(x,t) = 0$ $(u(x,t) L_2 u(x,t) = 0)$ по области D.

С помощью интегрального пребразования Фурье, аппарата специальных функций, построено решение

$$u(x,t) = \{u_k(x,t), \; (x,t)\in \overline{D}_k \; (k=0,\,1,\,2,\,\ldots)\},$$

где

$$u_k(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\xi) W_k(x-\xi,t)\, d\xi,$$

а $W_k(x,t)$ – фундаментальное решение задачи K в $D_k = R^1 \times (k\tau,(k+1)\tau)$, выражающееся через H-функцию (H-функции) Фокса для уравнения L_1 (L_2).

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ

Захаров А.В. (Екатеринбург)

hazarov@etel.ru

Математические модели движения релятивистской частицы, учитывающие эффект запаздывания, предложены в работах [1, 2]. Для изучения поведения траекторий частицы мы построили систему уравнений

$$u'' + u = \frac{u_\tau^2}{u^2 z^2}\left(\cos\tau - \frac{u'}{u}\sin\tau\right)\sqrt{1-(u'^2+u^2)z^2},$$

$$z' = -\frac{u_\tau^2}{u^2}\left(u' z\cos\tau - \frac{1-u^2z^2}{u\,z}\sin\tau\right)\sqrt{1-(u'^2+u^2)z^2},$$

$$\int\limits_{-\tau(\varphi)}^{0} \frac{ds}{u^2(s+\varphi)z(s+\varphi)} = \frac{\delta}{u(\varphi)},$$

где $u = u(\varphi)$, $z = z(\varphi)$, $\tau = \tau(\varphi)$, $u_\tau = u(\varphi - \tau)$.

Показано, что при малых значениях параметра δ рассмотренная система не имеет периодических решений, которые при $\delta = 0$ обращаются в периодические решения порождающей системы $u'' + u = z^{-2}\sqrt{1-(u'^2+u^2)z^2}$, $z' = -zu'\sqrt{1-(u'^2+u^2)z^2}$. В исследовании применены методы теории возмущения существенно нелинейных систем [3]. При построении уравнения разветвления использовался метод вспомогательных систем С.Н. Шиманова [4]. Для значений параметра $\delta > 2\pi$ найдены стационарные решения и показана их неустойчивость. Проведены численные исследования, подтверждающие теоретические результаты.

Литература

1. **Driver R.D.** A "Backwards" two–body problem of classical relativistic electrodynamics// Phys. Rev. 1969. V. 178, N. 5. pp. 2051–2057.

2. **Зубов Н.В.** Аналитическая динамика системы тел. Л., 1983. 344 с.

3. **Малкин И.Г.** Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956. 492 с.

4. **Шиманов С.Н.** Об одном способе получения условий существования периодических решений нелинейных систем // Прикл. матем. и механ. 1955. Т. 19, вып. 2. с. 255–268.

ПРИНЦИП ХИКСА ДЛЯ РАЗРЫВНОЙ СТРУНЫ[1]

Зверева М.Б. (Воронеж)
margz@rambler.ru

Классическая задача Штурма – Лиувилля

$$-(pu')' + Q'u = F', \quad u(0) = u(l) = 0 \tag{1}$$

для случая сингулярных особенностей коэффициентов, если те являются обобщенными производными элементов из $BV[0,l]$ (множество функций ограниченной вариации на $[0,l]$), может трактоваться, следуя М.Г.Крейну, в виде интегродифференциального уравнения

$$pu'(x) = pu'_+(0) + \int_0^x u(s)dQ(s) - \int_0^x dF(s), \quad u(0) = u(l) = 0. \tag{2}$$

Последнее уравнение Ю.В. Покорным [3] распространено на множество функций $u \in BV[0,l]$, имеющих возможность терпеть разрывы в точках, где имеются разрывы у $Q(x)$, $p(x)$, $F(x)$. Делается это за счет расширения понятия интеграла и расширения области определения функций (в точках разрыва мера расщепляется). В рамках такого подхода на задачу (2) удается перенести известный в математической экономике принцип Хикса. Для случая непрерывной струны аналог принципа Хикса рассмотрен в [1], [2].

Пусть $S(u)$ – множество точек разрыва функции $u(x)$. Введем специальное расширение $[0,l]$, обозначаемое через $\overline{[0,l]}_\mu$, заменив всякую точку $\xi \in S(u)$ парой $\{\xi - 0, \xi + 0\}$.

Теорема. *Пусть функции $Q(x)$, $F_1(x)$ монотонно не убывают на $[0,l]$, и пусть $p \in BV[0,l]$ – строго положительная функция. Пусть $u_1(x)$ — решение задачи (2) при $F(x) = F_1(x)$, а $u_2(x)$ — решение задачи (2) при $F(x) = F_1(x) + \theta(x-s)$, где $\theta(x-s)$— классическая функция Хевисайда при $s \notin S(u)$, а при $s = \xi - 0$ и $s = \xi + 0$, где $\xi \in S(u)$, функция Хевисайда, доопределенная в точке разрыва ξ единицей ($s = \xi - 0$) и нулем ($s = \xi + 0$) соответственно. Тогда* $\max\limits_{\overline{[0,l]}_\mu} \dfrac{(u_2 - u_1)(x)}{u_1(x)} = \dfrac{(u_2 - u_1)(s)}{u_1(s)}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ № НШ-1643.2003.1, гранта Минобразования РФ (КЦСПбГУ)(грант № Е02-1.0-46), РФФИ (гранты № 01-01-00418, 02-01-00307), программы "Университеты России" (проект УР.04.01.004)

Литература

1. Гулынина Е.В., Зверева М.Б. Принцип Хикса для обобщенной задачи Штурма-Лиувилля// 12-я Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теорий функций и их приложения": тез. докл. - Саратов, 2004. - С.63-64.

2. Гулынина Е.В., Зверева М.Б., Стеценко В.Я. О принципе Саймона-Хикса в нестандартных краевых задачах типа Штурма-Лиувилля// Воронежская зимняя математическая школа: тез. докл. - Воронеж, 2004. - С. 42-43.

3. Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. АН. – 1999. – Т.364, №2. – С.167-169.

О ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ РАЗРЫВНОЙ СТРУНЫ[1]

Зверева М.Б. (Воронеж)

margz@rambler.ru

В классе μ-абсолютно непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций рассматривается задача

$$-pu'_\mu(x) + \int\limits_0^x ud[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0), \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (1)$$

возникающая при описании малых плоских поперечных деформаций упругой струны, разорванной в точках $\xi_i \in (0,1)$ (множество точек разрыва не более, чем счетно). Функции $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ имеют ограниченные вариации, а функция $\mu(x)$ строго монотонно возрастает и разрывна в точках ξ_i. Запись $d[Q]$ дифференциала под знаком интеграла в (1) квадратными скобками подчеркивает, что имеется в виду не стандартный интеграл Стилтьеса, а его специальное расширение, введенное Ю.В. Покорным [1] на случай мер с двойными разрывами. Исходя из физической, точнее — вариационной мотивации уравнения (1), дается описание функции влияния $K(x,\xi)$ для исходной системы, позволяющей выразить решение за-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ № НШ-1643.2003.1, гранта Минобразования РФ (КЦСПбГУ) (грант № Е02-1.0-46), РФФИ (гранты № 01-01-00418, 02-01-00307), программы "Университеты России" (проект УР.04.01.004)

дачи (1) в традиционной для функции Грина форме

$$u(x) = \int_0^1 K(x,\xi)d[F(\xi)].$$

и изучить свойства функции влияния.

Автор выражает благодарность Покорному Ю.В. и Шаброву С.А. за постановку задач и обсуждение результатов.

Литература

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. АН. – 1999. – Т.364, №2. – С.167-169.

ПОЛНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С КОНТРОЛЬНОЙ ТОЧКОЙ

Зубова С.П., Раецкая Е.В. (Воронеж)

Рассматривается линейная динамическая система, описываемая уравнением

$$\dot{x}(t) = Bx + Du. \tag{1}$$

Требуется установить: существует ли управление u, переводящее состояние x системы (1) из произвольного состояния x^0 в начальный момент времени $t = 0$ в произвольное состояние x^t в конечный момент времени T через произвольное состояние x^τ в момент τ, $0 < \tau < T$.

То есть: существует ли функция $u(t)$, при подстановке которой в соотношение (1) получается дифференциальное уравнение, решение $x(t)$ которого удовлетворяет трём условиям:

$$x(0) = x^0,\ x(\tau) = x^\tau,\ x(T) = x^T$$

с любыми значениями x^0, x^τ, x^T и любыми значениями $\tau > 0$, $T > 0$,
$\tau > T$.

В случае существования такой функции $u(t)$ будем говорить, что *система (1) с контрольной точкой полностью управляема.*

Теорема. *Система (1) с контрольной точкой полностью управляема в том и только том случае, когда она полностью управляема (то есть без условия $x(\tau) = x^\tau$).*

Для полностью управляемой системы с контрольной точкой в докладе будет дан метод построения некоторого семейства функций управления $u(t)$ и соответствующего семейства функций состояния $x(t)$.

Литература

1. Ли Э.Б. // Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л.М. Маркус. - М. :Наука, 1972.- 574 с.

2. Раецкая Е.В. // Критерий полной условной управляемости сингулярно возмущенной системы. Оценки функции состояния и управляющей функции / Е.В.Раецкая // Кибернетика и технологии XXI века: V международ. научн.-техн. конф., Воронеж, 12-13 мая 2004г.- Воронеж, 2004. - С.28-36.

АДДИТИВНО-МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Исламов Г.Г. (Ижевск)

gislamov@udm.ru

В докладе раскрывается главная роль принадлежащего акад. С.М. Никольскому критерия фредгольмовости линейного оператора [1] в формировании, становлении и развитии теории линейного абстрактного функционально-дифференциального уравнения [2]. Пусть B и D - два банаховых пространства. При изучении скорости аппроксимации линейного ограниченного оператора $G : B \to D$ конечномерными операторами $K : B \to D$ оказалась полезной факторизация (эквивалентность $G \sim \Lambda$) вида $G = (\Lambda + K)P^{-1}$, где $\Lambda : B \to D$ - модельный оператор, P - линейный гомеоморфизм банахова пространства B [3]. С помощью критерия фредгольмовости С.М. Никольского в статье [4] получены необходимые и достаточные условия такой эквивалентности, а в [5,6] описан алгоритм получения соответствующей факторизации.

Литература

1. Никольский С.М. Изв. АН СССР, сер. мат. 7, № 3, 1943, с. 147-166.

2. Azbelev N.V.,Rakhmatullina L.F. Memoirs on Differen. equations and Math. Physics, 1996, Vol. 8, p. 1 - 102.

3. Исламов Г.Г. ДУ, 1989, Т. 25, № 9, с. 1496 - 1503.

4. Исламов Г.Г. ДУ, 1989, Т. 25, № 11, с. 1872 - 1881.

5. Исламов Г.Г. ДУ, 1990, Т. 26, № 2, с. 224 - 232.

6. Исламов Г.Г. Изв. отд. матем. и инфор. УдГУ. Ижевск, 1994, вып. 2, с. 3 - 24.

О ПОЛЕ ЭКСТРЕМАЛЕЙ В НЕРЕГУЛЯРНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОБЩЕЙ СТРУНЫ

Ищенко А.С. (Белгород)
science@bupk.ru

Рассматривается квадратичный функционал $\Phi(u) = \int\limits_a^b pu'^2 dx + \int\limits_a^b u^2 dQ$ (интегралы понимаются по Стилтьесу), определяемый в классе абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций, производные которых имеют ограниченную вариацию. Необходимым условием минимума $\Phi(u)$ на некоторой функции $u_0(x)$ является следующий псевдодифференциальный аналог классического уравнения Эйлера $-pu' + \int\limits_0^x u(x)\, dQ = const.$

При обсуждении условия сильного минимума поставленной экстремальной задачи возникает необходимость анализа возможности построения точного аналога классического понятия "поля экстремалей". Одна из трудностей, стоящих на пути этого вопроса, является проблема качества зависимости решения псевдодифференциального уравнения Эйлера от параметра.

Теорема. *Пусть* $\inf p(x) > 0$ *на* $[a, b]$ *и* $p(x)$ *абсолютно непрерывна на* $[a, b]$. *Пусть псевдодифференциальное уравнение* $-pu' + \int\limits_0^x u(x)\, dQ = const$ *не осциллирует на* $[a, b]$, *т.е. имеет хотя бы одно строго положительное на* $[a, b]$ *решение. Тогда исследуемая на экстремум экстремаль* $u_0(x)$ *допускает включение в поле* z_λ *экстремалей, т.е. существует функция двух переменных* $z(x, \lambda) = z_\lambda(x)$, *такая что:*

а) при некотором λ_0 *функция* $z(\lambda_0, x)$ *совпадает с* z_0*;*

б) функция $z_\lambda(\cdot)$ *непрерывно дифференцируема по* λ *в некоторой окрестности точки* $\lambda = \lambda_0$*;*

в) при каждом λ *из этой окрестности функция* $z_\lambda(x)$ *удовлетворяет по* x *псевдодифференциальному уравнению Эйлера, т.е. является экстремалью;*

г) при λ *вблизи* λ_0 *графики экстремалей* $z_\lambda(x)$ *не пересекаются.*

Автор благодарен Ю.В. Покорному за постановку задачи и внимание к работе.

НОВЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ПО ЛИНЕЙНЫМ ФОРМУЛАМ

Кадченко С.И., Кинзина И.И. (Магнитогорск)
kadchenko@masu.ru

Развивая идеи метода вычисления первых собственных чисел возмущенных самосопряженных операторов [1, 2], получены линейные формулы, позволяющие находить приближенные значения собственных чисел таких операторов.

Теорема. *Пусть T — дискретный полуограниченный снизу оператор, а P — ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве. Если существует $n_0 \in N$ такое, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $\dfrac{2\|P\|}{|\mu_{n+1} - \mu_n|} < 1$, то собственные числа оператора $T + P$, номер которых $m > n_0$, вычисляются по формулам*

$$\beta_m = \mu_m + \sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k^{(1)}(m) - \alpha_k^{(1)}(m-1)].$$

Здесь $\alpha_k^{(1)}(m)$ — k-тые поправки теории возмущений оператора $T+P$ первого порядка, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные числа оператора T, занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные числа оператора $T+P$, занумерованные в порядке возрастания их абсолютных величин с учетом алгебраической кратности.

Разработан эффективный метод вычисления суммы абсолютно сходящегося числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}[\alpha_k^{(1)}(m) - \alpha_k^{(1)}(m-1)]$ и получена оценка предельной абсолютной погрешности вычислений.

Литература

1. Садовничий В.А., Дубровский В.В. Замечание об одном новом методе вычисления собственных значений и собственных функций дискретных операторов // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М.: МГУ, 1994. В. 17. С. 244–248.

2. Кадченко С.И. Новый метод вычисления первых собственных чисел дискретных несамосопряженных операторов // Уравнения соболевского типа. Сб. науч. работ. Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2002. С. 42–59.

ОБ ОБРАТИМОСТИ, НЕТЕРОВОСТИ И ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ

Калитвин А.С. (Липецк)
kalitvin@lipetsk.ru

Линейный непрерывный оператор A в комплексном банаховом пространстве X называется нетеровым (фредгольмовым), если множество его значений замкнуто в X и конечны (конечны и равны) размерности ядра и коядра. Через $\sigma(A)$ и $\sigma_{ew}(A)$ ($\sigma_{es}(A)$) будем обозначать спектр и существенный спектр в смысле Вольфа (Шехтера) оператора A. $\sigma_{ew}(A)$ ($\sigma_{es}(A)$) - это множество всех комплексных чисел λ, при которых оператор $\lambda I - A$ не нетеров (не фредгольмов). Дополнение множества $\sigma_{ew}(A)$ ($\sigma_{es}(A)$) - это область нетеровости (фредгольмовости) оператора A. Пусть

$$(Ax)(t,s) = \int_a^b a(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau, \tag{1}$$

где $a(t,s,\tau)$ - непрерывная в целом и интегрально ограниченная функция, а интеграл понимается в смысле Лебега. Напомним, что измеримая на $[a,b]\times[c,d]\times[a,b]$ функция a называется непрерывной в целом, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $|t-t_0| < \delta$ и $|s-s_0| < \delta$ $||a(t,s,\cdot) - a(t_0,s_0,\cdot)||_{L^1([a,b])} < \varepsilon$, и интегрально ограниченной, если найдется такое число B, что $||a(t,s,\cdot)|_{L^1([a,b])} \leqslant B$. Оператор A непрерывен в пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = [a,b]\times[c,d]$ функций. Через $A(s)(s \in [c,d])$ обозначим ограниченный в $C([a,b])$ оператор

$$A(s)x(t) = \int_a^b a(t,s,\tau)x(\tau)\,d\tau.$$

Теорема. *Если $a(t,s,\tau)$ - непрерывная в целом и интегрально ограниченная фукция, то $\sigma(A) = \sigma_{ew}(A) = \sigma_{es}(A) = \cup_{s\in[c,d]}\sigma(A(s))$.*

Таким образом, в условии теоремы обратимость, нетеровость и фредгольмовость в $C(D)$ оператора $\lambda I - A$ и обратимость в $C([a,b])$ при каждом $s \in [c,d]$ оператора $\lambda I - A(s)$ равносильны.

Отметим, что к частным случаям уравнения $\lambda x = Ax + f$ с оператором (1) приводятся различные прикладные задачи [1].

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S.,Zabrejko P.P. Partial Integral

Operators and Integro-Differential Equations.-New York: Marcel Dekker,2000.-560p.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Квитко А.Н. (Санкт-Петербург)
alkvit46@mail.ru

В работе предложен алгоритм построения управляющей функции, при которой решение нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений переходит из начального состояния в сколь угодно малую окрестность заданного конечного состояния. Получен критерий, грантирующий реализацию полученного алгоритма с учетом ограничений на управление и фазовые координаты.

Объектом исследования является система

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{1}$$

где

$$x = (x^1, \ldots, x^n)^*, \quad x \in R^n;$$

$$u = (u^1, \ldots, u^r)^*, \quad u \in R^r, \quad r \leqslant n, \quad t \in [0,1];$$

$$f \in C^3(R^n \times R^r \times R^1; R^n), \quad f = (f^1, \ldots, f^n)^*, \quad f(0,0,t) \equiv 0,$$

$$rank(B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B) = n,$$

$$A = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0,0,1), \quad i = 1, \ldots, n \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$B = \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(0,0,1), \quad i = 1, \ldots, n \quad j = 1, \ldots, r,$$

$$\|x\| < C_1, \quad \|u\| < C_2.$$

Пусть заданы состояния

$$x(0) = 0, \ u(0) = 0, \ x(1) = x_1; \ x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^n)^*; \ \|x_1\| < C_1.$$

Задача. Найти функции $x(t) \in C^1[0,1)$, $u(t) \in C^1[0,1)$, удовлетворяющее системе (1.1) и условиям

$$x(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad x(t) \to x_1 \text{ при } t \to 1. \tag{2}$$

Указанную пару $x(t)$, $u(t)$ будем называть решением задачи (1), (2).

Литература

1. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М., Наука, 1975.

2. Каллман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М., Мир, 1971.

3. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., Наука, 1967.

ПЕРВАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН С НАЧАЛЬНЫМИ НЕПРАВИЛЬНОСТЯМИ

Кириченко В.Ф., Коломоец А.А. (Саратов)

Исследуемая задача имеет такой вид

$$a_1\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+a_2\frac{\partial W}{\partial t}+\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big[\Big(-\frac{4z^3}{3h^2}\Big)\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x_i\partial x_j}-\Big(1-\frac{4z^2}{h^2}\Big)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial x_i}\Big]\,dz-$$

$$-L(W+W_0,F)=g(x,y,t);\ \frac{1}{Eh}\Delta^2F=-\frac{1}{2}L(W+2W_0,W);\quad (1)$$

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big[\Big(z-\frac{4z^3}{3h^2}\Big)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}-\Big(1-\frac{4z^2}{h^2}\Big)\sigma_{j3}\Big]\,dz=0,\quad j=\overline{1,2};$$

$$\begin{array}{c} W|_\Gamma=\frac{\partial W}{\partial n}|_\Gamma=F\Big|_\Gamma=\frac{\partial F}{\partial n}|_\Gamma=\gamma_1\Big|_\Gamma=\gamma_2|_\Gamma=0;\\ W|_{t=t_0}=\varphi_1(x,y),\ \frac{\partial W}{\partial t}|_{t=t_0}=\varphi_2(x,y);\end{array}\quad (2)$$

$\sigma_{ii}=\frac{E}{1-v^2}\Big[\Big(\Big(z-\frac{4z^3}{3h^2}\Big)\frac{\partial\gamma_i}{\partial x_i}-\frac{4z^3}{3h^2}\frac{\partial^2W}{\partial x_i^2}\Big)+v\Big(\Big(z-\frac{4z^3}{3h^2}\Big)\frac{\partial\gamma_{3-i}}{\partial x_{3-i}}-\frac{4z^3}{3h^2}\frac{\partial^2W}{\partial x_{3-i}^2}\Big)\Big]$,
$x_1=x$, $x_2=y$,
$\sigma_{i3}=\frac{E}{2(1+v)}\Big(1-\frac{4z^2}{h^2}\Big)\Big(\gamma_i+\frac{\partial W}{\partial x_i}\Big)$, $i=\overline{1,2}$; $0<v<1/2$; $a_1,a_2>0$, $E>0$, $T>0$, $h>0$, $t_0\geqslant 0$;
$\sigma_{12}=\frac{E}{2(1+v)}\Big[\Big(z-\frac{4z^3}{3h^2}\Big)\Big(\frac{\partial\gamma_1}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_2}{\partial x}\Big)-\frac{4z^3}{3h^2}\Big(2\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\Big)\Big]$; $(x,y)\in\Omega\subset R^2$, $(x,y,z)\in\Omega\times\Big(-h/2,h/2\Big)$, $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$, $\Gamma=\partial\Omega\times[t_0,T]$, $(x,y,t)\in\Omega\times(t_0,T)$; n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $W_0(x,y)$ – "начальная неправильность"; $W(x,y,t)$, $F(x,y,t)$, $\gamma_i(x,y,t)$ $(i=\overline{1,2})$ – искомые, а $g(x,y,t)$, $\varphi_i(x,y)$ $(i=\overline{1,2})$ – заданные функции.

Теорема. *Пусть $\partial\Omega$ имеет гладкость, достаточную для используемых теорем вложения и* $g\in L^2(\Omega\times(t_0,T))$, $\varphi_1\in H_0^2(\Omega)$,

$\varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$, $W_0 \in H_0^2(\Omega)$. Тогда существует решение $\{\tilde{W}, \tilde{F}, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2\}$ задачи (1), (2), *при этом:*

1) решение может быть найдено методом Бубнова-Галеркина;

2) $\tilde{W}, \tilde{F} \in L^\infty(t_0, T; H_0^2(\Omega))$; $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} \in L^\infty(t_0, T; H_0^1(\Omega))$.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ ОДНОЙ НЕСТАНДАРТНОЙ ПОДАТЛИВОЙ МОДЕЛИ

Кокорева В.В. (Ставрополь)

Рассматривается задача

$$\begin{cases} -(pu')(0) + \int\limits_0^x u(s)dQ(s) = F(x) + \text{const}, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

при физически естественных предположениях: $p(x), F(x)$ — функции ограниченной на $[0,1]$ вариации, причем $\inf p > 0$, и $Q(x)$ возрастающая функция. Эта модель описывает напряженное состояние нерегулярного упругого континуума (например, струны).

Под функцией влияния задачи (1) будем понимать форму принятую рассматриваемым континуумом под воздействием единичной силы приложенной в точке s. Функция влияния позволяет аналогично функции Грина выразить решение в виде

$$u(x) = \int\limits_0^1 G(x,s)dF(s)$$

при любой $F(x)$.

Теорема *Функция влияния задачи* (1) *существует, непрерывна, и, более того, существуют некоторые функции $\varphi(x)$ и $\psi(s)$ такие, что $G(x,s)$ допускает представление*

$$G(x,s) = -\frac{1}{pW} \begin{cases} \varphi(x)\psi(s), & 0 \leqslant x \leqslant s \leqslant 1, \\ \varphi(s)\psi(x), & 0 \leqslant s \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

где $W(x)$ — обычный определитель Вронского системы $\{\varphi(x), \psi(x)\}$.

Отметим, что в качестве $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно взять решения уравнения в (1) при $F(x)$, удовлетворяющие начальным условиям соответственно

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u(1) = 1, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} u(0) = 1, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ РЕКОНСТРУКЦИИ КОЛЬЦЕВЫХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ТОКОВ[1]

Кокурин М.Ю. (Йошкар–Ола)
kokurin@marsu.ru

Исследуется математическая модель эксперимента по реконструкции замкнутого тока в кольцевых сверхпроводниках различной конфигурации. Рассмотрим плоское кольцо с радиусами $0 < r_1 < r_2$, в котором индуцирован СП ток с плотностью $j = j(\rho), r_1 \leqslant \rho \leqslant r_2$. Измеряется вертикальная составляющая магнитного поля тока вдоль радиального отрезка $0 \leqslant \rho \leqslant l_0$, где $0 < l_0 < r_1$. Задача определения $j(\rho)$ сводится к уравнению

$$\frac{1}{c}\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} \frac{\rho j(\rho)(\rho - l\cos\varphi)d\varphi}{(\rho^2 + l^2 - 2l\rho\cos\varphi)^{3/2}}d\rho = H(l), \quad 0 \leqslant l \leqslant l_0. \quad (1)$$

В случае кольца $K = \{(\rho,\varphi,z) : r_1 \leqslant \rho \leqslant r_2, 0 \leqslant \varphi < 2\pi, -a \leqslant z \leqslant a\}$ конечной толщины при измерении магнитного поля на отрезке $0 \leqslant z \leqslant z_0$ оси кольца в предположении однородности тока по толщине задача сводится к уравнению

$$\frac{2\pi}{c}\int_{r_1}^{r_2} \rho^2 j(\rho)\int_{-a}^{a} \frac{dz}{[\rho^2 + (z-h)^2]^{3/2}}d\rho = H(h), \quad 0 \leqslant h \leqslant z_0. \quad (2)$$

Если плотность тока в K имеет вид $j(\rho)q(z)$, где $q = q(z)$ – заданная функция, то для определения $j(\rho)$ получаем уравнение

$$\frac{2\pi}{c}\int_{r_1}^{r_2} \rho^2 j(\rho)\int_{-a}^{a} \frac{q(z)dz}{[\rho^2 + (z-h)^2]^{3/2}}d\rho = H(h), \quad 0 \leqslant h \leqslant z_0. \quad (3)$$

Содержательность постановок рассматриваемых обратных задач обосновывается установлением возможности однозначного определения функции $j(\rho)$ по соответствующим наборам данных $H(l), 0 \leqslant$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ №03–01–00352.

$l \leqslant l_0$, либо $H(h), 0 \leqslant h \leqslant h_0$. Для соответствующих пар пространств решений и правых частей справедлива

Теорема. *Уравнения (1)–(3) имеют не более одного решения.*

Обсуждаются возможные модификации уравнений (1)-(3) и результаты численных экспериментов на базе методов из [1].

Литература

1. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. – М.: Едиториал УРСС, 2002.

ИННОВАЦИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Коломоец А.А., Болдырева Н.А. (Саратов)

Одним из средств повышения эффективности обучения в вузе является активная самостоятельная работа студентов. Она не возможна без хорошего методического обеспечения. Удачным опытом в этом направлении можно считать организацию самостоятельной работы по курсу "Функции комплексной переменной и операционное исчисление" на ряде специальностей СГТУ на базе пособия [1].

Пособие представляет собой единое методическое руководство, включающее в себя теоретические сведения; задачи и упражнения с подробными решениями и пояснениями к этим решениям; задачи и упражнения, предлагаемые для самостоятельной работы; вопросы для самоконтроля; образцы индивидуальных заданий и вопросы к экзамену. Такая структура делает пособие пригодным для самостоятельного овладения предметом при самой минимальной помощи со стороны преподавателя.

Обеспечение каждого студента данными методическими материалами позволяет, во-первых, отказаться от неизбежной диктовки формулировок теорем, доказательств и перейти к более активной форме подачи материала – обсуждение, ответы на вопросы; во-вторых, появляется дополнительное время для разбора задач.

Для усвоения предмета студентам необходимо выполнить определенный набор типовых заданий по каждому разделу. В пособии разобраны такие и более сложные задачи. Для студентов, проявляющих склонность к научно-исследовательской работе, на основе данной в конце пособия литературы преподаватель разрабатывает индивидуальную программу изучения материала, дает темы для рефератов и задания по научно-исследовательской работе.

Технические возможности СГТУ позволяют проводить занятия по математике не только в обычной аудитории, но и в компьютерном классе. Авторы включили в пособие образцы решения задач с помощью системы MathCad, с краткими сведениями об используемых операторах системы. В пособии даны задания для самостоятельного решения с помощью системы MathCad.

Литература

1. Коломоец А.А., Кириченко В.Ф., Болдырева Н.А. Функции комплексной переменной и операционное исчисление. Учеб. пособие. - Саратов: СГТУ, 2004, 120 с.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ СПЛАЙН ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Колпаков В.И.(Саратов)

Постановка задачи. Пусть функция f класса $W^3 L_\infty[\Omega]$ задана δ-приближением $f_\delta \in C[\Omega]$ так, что $\|f - f_\delta\|_{C[\Omega]} \leqslant \delta$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, где

$$W^3 L_\infty = \left\{ d \in C[\Omega] : \left\| \frac{\partial^3 f}{\partial x^r \partial y^s} \right\|_{L[\Omega]} \leqslant M_{rs},\ r+s=3,\ r,s=\overline{0,3} \right\},$$

$\Omega = [a,b] \times [c,d]$. Требуется по $f_\delta \in C[\Omega]$ построить интерполяционный параболический сплайн. Введем на $[a,b]$ сетки узлов интерполяции и узлов сплайна

$$\begin{aligned}
&\Delta_{1,x} = \{a = x_0,\ x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{1,n},\ \overline{x}_n = b\} h = (b-a)/n,\\
&\Delta_{2,x} = \{\overline{x}_i = (x_i + x_i + 1)/2,\ i = \overline{1,n}, \overline{x}_0 = a,\ \overline{x}_{n+1} = b\\
&n \geqslant 2,\ n \in N.
\end{aligned}$$

Аналогично на $[c,d]$ - $\Delta_{1,y}, \Delta_{2,y}$, $l = (c-d)/m$, $m \in N$. Пусть в узлах сетки $\Delta_1 = \Delta_{1,x} \times \Delta_{1,y}$ заданы значения функции $f_\delta(x_i, y_j)$, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,m}$. Интерполяционным параболическим сплайном определенным в ячейке $\Delta_{i,j} = [\bar{x}_i, \bar{x}_i + 1] \times [\bar{y}_j, \bar{y}_j + 1]$ называется функция (см.[1],[2])

$$\begin{aligned}
S_{2,2}(f_\delta, x, y) = \varphi_1(u) S_2(f_\delta, x, y_j) + \varphi_2(u) \tilde{S}_2(m_\delta^{01}, x, y_j) + \\
+ \varphi_3(u) \tilde{S}_2(m_\delta^{01}, x, y_{j+1}).
\end{aligned}$$

Теорема. *Пусть выполнены условия теорем из* [2], *тогда при связи* $h = 2(3\delta/M_{30})^{1/3}$, $l = 2(3\delta/M_{03})^{1/3}$ *справедливы оценки*

$$\sup \left\| \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s} (f - S_{2,2}(f_\delta)) \right\|_{C[\Omega]} \leqslant C_{rs} \delta^{l-(r+s)/3}, \quad r+s \leqslant 2.$$

Литература

1. Завьялов Ю.С., Квасов В.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайнфункций. М.: Наука, 1980. 352 с. 2. Колпаков В.И. Интерполяционный параболический сплайн для функции из класса $W^3L_\infty(M,a,b)$, заданной δ-приближением в $C[a,b]$ // Вестник СГТУ. № 1. Саратов, 2003. С. 43-53.

ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙНА 3-ГО ПОРЯДКА К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ОТ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ С ПОГРЕШНОСТЬЮ В $C[a,b]$

Колпакова Э.В., Колпаков В.И. (Саратов)

Постановка задачи. Вычислить функционал $I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, когда вместо функции $f \in W^4L_\infty(M,a,b) = \{f \in C[a,b] : \|f^{(4)}\| \leqslant M\}$ известно ее δ-приближение $f_\delta \in C[a,b] : \|f_\delta - f\|_C[a,b] \leqslant \delta,\ 0 < \delta \leqslant \delta_0$, с помощью интерполяционного сплайна $S_3(f_\delta,x)$, $x \in [a,b]$ (см. [1]).

В качестве приближенного значения $I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ возьмем

$$I_n(S_3(f_\delta)) = \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_i+1} S_3(f_\delta,x)\,dx =$$
$$= h\sum_{i=0}^{n-1}\left(\tfrac{f_\delta(x_{i+1})+f_\delta(x_i)}{2} - \tfrac{h^2}{24}(m_{i+1,\delta}+m_{i,\delta})\right),$$

где $m_{i,\delta} = S_3''(f_\delta,x_i)$ – моменты, которые определяются из системы линейных алгебраических уравнений (см. [1])

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $f \in W^4L_\infty$, $\frac{b-a}{n} = h$ *для* $\delta = 0$ *и* $h = h^* = 2\left(\frac{3\delta}{M}\right)^{1/4}$ *для* $\delta \neq 0$, $0 < \delta \leqslant \delta_0 = \left(\frac{|b-a|}{4}\right)^4\frac{M}{3}$, *тогда справедливы оценки*

$$|I(f) - I_n(S_3(f_\delta))| \leqslant \left\{\frac{169}{2880}h^4M,\ \delta=0;\ 4\frac{9}{10}\delta,\ \delta\neq 0\right\}.$$

Проведен вычислительный эксперимент для $f_\delta(x) = \exp(x) + \delta\sin(12\pi x)$, $x \in [0,1]$, получены результаты $n_1 = 10$, $\delta_1 = 5,6e-6$, $\varepsilon_1 = 2,95e-9$; $n_3 = 50$, $\delta_3 = 9,06e-6$, $\varepsilon_3 = 2,05e-10$, ε_i – погрешность.

Литература

1. Колпаков В.И. Сглаживающий кубический сплайн // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всероссийской научной конференции. – Екатеринбург, 26.02-2.03.2001 г. – С.37-38.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Корнев В.В. (Саратов)

KornevVV@info.sgu.ru

Пусть A – интегральный оператор $Af = \int\limits_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt$, где $A(x,t)$ $n+1$ раз непрерывно дифференцирума по x и один раз по t, $\left.\frac{\partial^j A(x,t)}{\partial x^j}\right|_{t=x} = \delta_{n-1,j}$ $(j=0,1,\ldots,n)$, $\delta_{n-1,j}$ – символ Кронекера.

Следующая теорема дополняет и усиливает достаточные условия абсолютной сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора A, полученные в [1].

Теорема. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям:*

1) $f(1)=0$;

2) либо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\int\limits_0^{1/n} |f(x)-f(0)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$,

либо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\int\limits_0^{1/n} |f(1-x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{(2)}(\varphi,\frac{1}{n})}{\sqrt{n}} < \infty$, *где $\omega^{(2)}(\varphi,\frac{1}{n})$ – квадратический модуль непрерывности функции $\varphi(x) = f(x) - f(0)(1-x)$ при периодическом продолжении.*

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |\psi_n(x)| < \infty$, *где* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$ *– ряд Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора A.*

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), гранта РФФИ (проект 03-01-00169) и программы "Университеты России" (проект ур.04.01.375).

Литература

1. Корнев В.В. Об абсолютной сходимости рядов Фурье по собственным функциям одного класса интегральных операторов// Современные методы теории функции и смежные проблемы: Материалы конференции.– Воронеж: ВГУ. – С. 122-123.

ВОЗМУЩЕННОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ С ВНЕШНИМИ И ВНУТРЕННИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ[1]

Коробко А.И. (Тамбов)

aib@tsu.tmb.ru

Пусть $\mathbf{C}^n[a,b]$ ($\mathbf{L}^n[a,b]$) пространство непрерывных (суммируемых) функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$ ($\|x\|_L = \int\limits_a^b |x(s)|ds$). Обозначим $comp[\mathbf{C}^n[a,b]]$ — множество непустых компактов пространства $\mathbf{C}^n[a,b]$.

Будем говорить, что множество $\Phi \subset \mathbf{L}^n[a,b]$ выпукло по переключению, если для любых $x_1, x_2 \in \Phi$ и для любого измеримого $U \subset [a,b]$ справедливо включение $\chi(U)x_1 + \chi([a,b] \setminus U)x_2 \in \Phi$, где $\chi(\cdot)$ — характеристическая функция соответствующего множества. Обозначим через $\Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ множество всех непустых замкнутых ограниченных выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$.

Доклад посвящен изучению влияний внешних и внутренних возмущений на множество решений возмущенного включения

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \tag{1}$$

которое рассмотрено в работе [1]. Здесь в (1) многозначные отображения $\Psi : \mathbf{C}^n[a,b] \to comp[\mathbf{C}^n[a,b]]$ и $\Phi : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Pi[\mathbf{L}^n[a,b]]$ непрерывны по Хаусдорфу, а $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ линейный непрерывный интегральный оператор.

В докладе утверждается, что при наличии внутренних возмущений никакая точность вычислений значений отображения $\Phi(\cdot)$ не гарантирует "восстановление" множества $\overline{H(U)}$ (замыкание множества решений включения (1), принадлежащих множеству U) по замыканиям в пространстве непрерывных функций множеств приближенных решений. Это возможно только в одном случае, когда выполняется принцип плотности на множестве U.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 04-01-00324.

Литература

1. Булгаков А.И., Ткач Л.И. Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включение// Матем.сб., 1998. Т.189, №6, с. 3-32.

АЛГОРИТМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ МАТРИЧНО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Корыпаева Ю.В. (Воронеж)

www.vglta.vrn.ru, malena1975@mail.ru

Рассматривается задача оптимального быстродействия для системы, уравнение состояния которой является матрично сингулярно возмущенным:

$$\begin{gathered}(A+\varepsilon B)\frac{dx(t)}{dt} = Cx(t) + Du(t), x(0) = x^0, x(T) = 0,\\ |u(t)| \leqslant 1, J(u) = T \to \min.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in R^m, u(t) \in R, t \in [0;T]$, ε - малый положительный параметр, A, B, C - постоянные матрицы, $A+\varepsilon B$ обратима при достаточно малых ε, причем все B жордановы цепочки матрицы A имеют одинаковую длину p.

При определенных условиях можно совершить линейную замену переменных, приводящую систему (1) к системе

$$\frac{dy}{dt} = E(\varepsilon)y + G(\varepsilon)u, y(0) = y^0, y(T) = 0, \tag{2}$$

где $y = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \xi \in R^{m-n}, \eta \in R^n, y \in R^m, E(\varepsilon) = \begin{pmatrix} E_1(\varepsilon) & 0 \\ 0 & E_2(\varepsilon)/\varepsilon^p \end{pmatrix}$, $G(\varepsilon) = \begin{pmatrix} G_1(\varepsilon) \\ G_2(\varepsilon)/\varepsilon^p \end{pmatrix}$, $E_1(\varepsilon) = C_0 + O(\varepsilon), E_2(\varepsilon) = (-1)^{p-1}(C_1 + O(\varepsilon)), G_1(\varepsilon) = D_0 + O(\varepsilon), G_2(\varepsilon) = (-1)^{p-1}(D_1 + O(\varepsilon))$.

В данной работе предлагается алгоритм, позволяющий для заданного числа N построить асимптотически N-оптимальное управление в исходной задаче. Суть алгоритма заключается в решении двух базовых задач и последующем построении асимптотики точек переключения, которые при выполнении определенных условий и при достаточно малых значениях ε делятся на две группы: точки, близкие к моментам переключения оптимального управления соответствующей вырожденной задачи и точки, лежащие в окрестности конечного момента ([1],[2]).

Литература

1. Collins W.D. Singular perturbations of linear time-optimal control problems // Recent Mathematical Developments in control. L., N. Y.: Acad. Press, 1973.

2. Калинин А.И. Алгоритм асимптотического решения сингулярно возмущенной задачи оптимального быстродействия. ПММ.Том 53, В. 6, 1989.

ПОЧЕМУ НАДО "ВЕРНУТЬСЯ К КИСЕЛЁВУ"?

Костенко И.П. (Краснодар)

kost@kubannet.ru

Призыв "вернуться к Киселёву" раздаётся вот уже 30 лет. Возник он сразу после реформы-70, изгнавшей из школы прекрасные учебники и запустившей процесс прогрессивной деградации образования.

Почему не утихает этот призыв?

Кое-кто объясняет это "ностальгией". Неуместность такого объяснения очевидна, если вспомнить, что первый, кто ещё в 1980 г., по свежим следам реформы, призвал вернуться к опыту и учебникам русской школы, был академик Л. С. Понтрягин. Профессионально проанализировав новые учебники, он убедительно, на примерах объяснил, – почему это надо сделать [1].

Потому что все новые учебники ориентированы на Науку, а точнее, на наукообразие, и полностью игнорируют Ученика, психологию его восприятия, которую умели учитывать старые учебники. Именно новые учебники – главная причина катастрофического падения качества обучения и знаний. Причина эта действует по сей день, не позволяя хоть как-то исправить ситуацию.

Сегодня усваивают математику около 20% учащихся (геометрию – 1%) [2, 3]. В 40-х годах (сразу после войны!) полноценно усваивали все разделы математики 80% школьников, учившихся "по Киселёву" [2]. Это ли не аргумент за его возвращение детям?

В 80-х годах призыв этот был проигнорирован министерством (М. А. Прокофьев) под предлогом, что "надо совершенствовать новые учебники". Сегодня мы видим, что 40 лет "совершенствования" плохих учебников так и не породили хорошего. И не могли породить.

Истинной целью пореформенных управленцев никогда не было создание хорошего учебника. Их целью было сохранение результатов реформы и укрепление власти клана новых авторов. Но даже если бы такая благая цель ставилась, она не могла быть достигнута в современных условиях.

Хороший учебник не "*пишется*" в один-два года по заказу министерства или для конкурса. Он не будет "написан" даже в десять лет. Он *вырабатывается* талантливым педагогом-практиком *вместе с учащимися* в течение всей педагогической жизни (а не профессором математики или академиком за письменным столом).

Педагогический талант редок, – гораздо реже собственно математического (хороших математиков тьма, хороших учебников – единицы). Главное свойство педталанта – способность понять психологию ученика, понять ход его мысли и причины затруднений. Только тогда могут быть найдены верные методические решения. И они должны быть ещё проверены, скорректированы и доведены до результата долгим практическим опытом, – внимательными, педантичными наблюдениями за многочисленными ошибками учащихся и вдумчивым анализом.

Именно так создавал свои замечательные, уникальные учебники А. П. Киселёв. Поэтому так легко было учиться по его книгам. Их высшей целью было *понимание* предмета учащимися. Их заботой была польза Ученику, а не автору. Сегодня цели авторов другие и заботы иные.

Ю. В. Покорный установил, что методическая архитектура учебников Киселёва наиболее согласована с психологическими законами развития юного интеллекта (Пиаже-Выготский), восходящими к Аристотелевой "лестнице форм души" [4]. Вот где тайна чудесной педагогический силы Киселёва!

А. М. Абрамов, один из реформаторов-70 (он, по его признанию, писал "Геометрию Колмогорова") с восхищением говорит о "секретах, хитростях и даже интригах" [5], которые он раскрывал, изучая учебники Киселёва.

Противники же бубнят – "Киселёв устарел". Основной и единственный их аргумент. Но что значит это слово? Не объясняют. "Устарела" теорема Пифагора или что-то ещё из содержания его учебников?

Термин "устарел" – всего лишь лукавый приём, воздействующий на подсознание. Ничто подлинно ценное не устаревает, – оно вечно. И его не удастся "сбросить с парохода современности", как не удалось сбросить "устаревшего" Пушкина РАППовским модернизаторам русской культуры в 20-х годах. Никогда не устареет, не будет забыт и Киселёв.

Сегодня очередные реформаторы выставляют новые ложные цели и аргументы [6, 7]. Они якобы заботятся о здоровье учеников и стремятся "гуманизировать" обучение. Слова, слова ... На самом же деле, вместо того, чтобы сделать математику понятной, они уничтожают её основное содержание. Сначала, в 70-х гг, "подняли теоретический уровень", подорвав психику детей, а теперь "опускают" этот уровень примитивным методом выбрасывания "ненужных" разделов (логарифмы, геометрия и др.) и сокращением учебных часов [6]. Академик В. И. Арнольд вынужден заявить публично, что "заговор ... действительно ... существует" и "подготавливается опасное преступление против ... России" [6].

Подлинной гуманизацией было бы именно возвращение к Киселёву. Он сделал бы математику вновь понятной для детей и любимой. И этому есть прецедент в нашей истории: в начале 30-х годов "устаревший" "дореволюционный" Киселёв, возвращённый "социалистическим" детям, мгновенно поднял качество знаний и оздоровил их психику. И, может быть, помог одержать победу в Великой войне.

Поэтому наши враги и не допустят Киселёва в русскую школу, которую они сегодня стремятся окончательно добить.

Литература

1. Понтрягин Л. С. О математике и качестве её преподавания // Коммунист. 1980. № 14. С. 99-112.

2. Учительская газета. 2001. № 44. С. 14

3. Математика в школе. 2002. № 2. С. 63.

4. Покорный Ю. В., Потапов А. С. Некоторые секреты школьной математики. Воронеж, 2004. С. 59, 30.

5. Учительская газета. 1994. № 6. С. 12.

6. Образование, которое мы можем потерять. М. 2002. С. 39-44.

7. Математика (приложение к газете "Первое сентября"). 1999. № 11. С. 5.

ОБ УПРУГОЙ МОДЕЛИ ТЯЖЕЛОЙ МАЧТЫ[1]

Костенко Т.А., Покорный Ю.В. (Воронеж)

Ориентируя ось Ox вверх по вертикали, рассмотрим на промежутке $[0,1]$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(pu'')'' - Q'(x)u'' = \lambda u'' \tag{1}$$

где Q – неубывающая функция и Q' означает обобщенную от нее производную. Особенности уравнения (1), возникающие, например, в точках разрыва $Q(x)$, естественно порождаются конструктивными особенностями рассматириваемой мачты (вертикального тяжелого стержня), если в этих точках к мачте привязаны тросы-растяжки. Уравнение (1) дополняется естественными краевыми условиями консоли

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(l) = u'''(l) = 0 \tag{2}$$

В (1) $u(x)$ определяет поперечную деформацию упругой линии, параметр λ характеризует усилие, направленное на продольное сжатие стержня.

Спектр задачи (1)–(2) оказывается осцилляционным (в точности до его сдвига вдоль вещественной оси – некоторые его точки – первые при измерении по возрастанию модулей – могут оказаться отрицательными. В терминах коэффициентов $P(x)$ и $Q(x)$ могут быть оценены первые два критических значения λ, причем второе – через первое с указанием зазора между ними.

АБСТРАКТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДРОБНЫЕ ПОРЯДКА БЕССЕЛЯ

Костин А.В., Костин В.А., Писарева С.В. (Воронеж)

Пусть A – генератор полугруппы линейных и ограниченных операторов $U(t)$, действующей в банаховом пространстве E, сильно непрерывной при $t > 0$ и удовлетворяющей оценке

$$\|U(t)\| \leqslant \frac{Me^{-\omega t}}{t^{\beta}}, \qquad (\beta < 1). \tag{1}$$

[1]Работа поддержана грантами Минобразования РФ (КЦ СПбГУ) (проект №Е02-1.0-46), РФФИ (проекты №04-01-00049, 02-01-00307), программы «Университеты России» (проект УР.04.01.004), грантом Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-1643.2003.1

При $\beta = 0$ это полугруппа класса C_0.

Для $f(x)$ $(x \in R^1)$, $f(x) \in E$, определим абстрактные операторы Бесселя соотношением

$$(G_\alpha^\pm f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty U(s) s^{\alpha-1} f(x \pm s) ds. \qquad (2)$$

В случае $U(t) = e^{-t}$ это левый и правый интегралы Бесселя (см. [1]), реализующие отрицательные дробные степени операторов $(I \pm \frac{d}{dx})$– соответственно. Аналогично этому опереторы $G_\alpha^\pm f$ реализуют отрицательные дробные степени порядка α оператора $(I \pm A)$.

Пусть $S_{p,\gamma}^\pm$– обобщенные пространства Степанова векторнозначных функций для которых конечна норма

$$\|f\|_{S_{p,\gamma}^\pm} = \sup_{t \in R^1} \left[\int_0^1 \tau^{\gamma-1} \|f(t \pm s)\|_E^p d\tau \right]^{\frac{1}{p}}, \qquad (p \geqslant 1). \qquad (3)$$

Теорема. Если $\beta < \alpha$, то операторы $G_\alpha^\pm$ непрерывно действуют в пространстве $S_{p,\gamma}^\pm$.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987, 688 с.

2. Костин А.В. Дробные интегралы Бесселя и эволюционные уравнения. Диф. уравнения, 2003, т. 39, N3, с. 421-422.

ЖИЗНЬ И ТВОРЧЕСТВО В. Г. АЛЕКСЕЕВА

Костин В.А., Сапронов Ю.И., Удоденко Н.Н. (Воронеж)

В работе идет речь о Виссарионе Григорьевиче Алексееве - профессоре Юрьевского (Тартусского) и Воронежского университетов, имя и научные труды которого забыты.

Он родился в 1866г. в Новочеркасске, в семье войскового старшины донской артиллерии. Окончив новочеркасскую войсковую гимназию, В.Г. Алексеев в 1884 поступает на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. После окончания университета его оставляют на факультете для подготовки к профессорскому званию. В 1893г. В.Г. Алексеев защитил магистерскую диссертацию [1].

В 1895г. его приглашают на работу в Юрьевский университет в должности экстраординарного профессора кафедры чистой математики. В 1899 В.Г. Алексеев защищает докторскую диссертацию

[2]. В 1901 году им опубликована работа [3],вызвавшая большой интерес у химиков, физиков и математиков. В дальнейшем им был опубликован ряд работ по математике, истории математики, философии, педагогике.

В 1918 г. Юрьевский университет эвакуируют в Воронеж. В 1919 г. В.Г. Алексеев покинул Воронеж и вернулся в Тарту.

В дальнейшем он занимается вопросами философии, педагогики, этики.

Скончался в 1943г. (по другим данным в 1944г.) при неизвестных обстоятельствах.

Литература

1. Алексеев В.Г. Теория числовых характеристик систем кривых линий. М. 1893.-306 с.

2. Алексеев В.Г. Теория рациональных инвариантов бинарных форм в направлении Софуса Ли, Кэли и Аронгольда. Тарту. 1899. - 232 с.

3. Алексеев В.Г. О совпадении методов формальной химии и символической теории инвариантов // Журнал Русского физ.-хим. Об-ва, 1901. Т.33, вып. 4. - с 314-348.

ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В СЖИМАЕМОМ УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Кривоченко А.В. (Старый Оскол)

avk-99@yandex.ru

В работах [1,2] рассмотрена задача об определении напряжённо-деформированного состояния бесконечного пространства, ослабленного сферической полостью, при постоянных давлениях бесконечной длительности, на внутреннем контуре полости и на бесконечности. При этом свойства среды в пластической области описывалось моделью упруго-вязко-пластического тела.

В настоящей работе дано решение аналогичной задачи, при этом нагрузки на внутреннем контуре полости и на бесконечности - динамические, а также учтены ассоциированная и неассоциированная сжимаемость среды. В этом случае функция нагружения и ассоциированный закон пластического течения описываютсяследующим образом [3,4].

$$F = \alpha\sigma_1 + \sqrt{(S_{ij} - c_0\varepsilon^p_{ij} - \eta_0\dot{\varepsilon}^p_{ij})(S_{ij} - c_0\varepsilon^p_{ij} - \eta_0\dot{\varepsilon}^p_{ij})} - K_0$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \xi(\frac{\alpha}{3}\delta_{ij} + \frac{S_{ij} - c_0\varepsilon^p_{ij} - \eta_0\dot{\varepsilon}^p_{ij}}{K_0 - \alpha\sigma_1}) + \psi\dot{\sigma}_1$$

Из анализа полученных численных результатов следует, что динамическое расширение полости, при рассмотренном нагружении, принимает с течением времени постоянное значение. Очевидно, что последнее обусловлено, стабилизационной ролью вязкости в среде. При этом с увеличением скорости дилатансии внутренний радиус полости увеличивается.

Литература

1.Кривоченко, А. В. Деформирование бесконечного пространства, ослабленного сферической полостью / А.В. Кривоченко, А. Н. Спорыхин, А. С. Чеботарев // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике / Б. м., 2001.- С. 268-274.

2. Спорыхин, А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред / А. Н. Спорыхин. - Воронеж : Воронеж. гос. ун-т., 1997. - 360с.

3. Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев. - М. : "Наука", 1978. - 208 с.

4. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. - М. : Физматлит, 2001. - 701 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХСВЯЗНОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Кузнецов А.А., Петрова В.Е. (Воронеж)
aakuznetsov@inbox.ru, Vera.Petrova@math.vsu.ru

Тепловые воздействия вызывают напряжения и деформации в материалах и конструкциях из них. Для вычисления тепловых напряжений необходимо знать распределение тепловых потоков и полей температур. В телах сложной геометрии эти поля неоднородны. Во многих задачах можно предполагать, что температура в теле не зависит от напряжений и деформаций, а обусловлена только заданными тепловыми нагрузками, т.е тепловым потоком или тепловыми источниками-стоками тепла, а также геометрией тела и условиями тепловой проводимости и отдачи тепла на границах тела. Это так называемая несвязанная задача термоупругости. В несвязанной задаче термоупругости задача теплопроводности решается отдельно от упругой задачи. Такой задаче теплопродности и посвящена данная работа.

Рассмотрим тело, состоящее из двух материалов с разными коэффициентами теплопроводности и соединенных по прямолинейной поверхности раздел L. На такой двухфазных материал действует тепловой поток, приложенный на бесконечности или сосредоточенный источник тепла. Тело содержит дефекты в виде прямолинейных трещин-разрезов. Для случая идеального соединения материалов по границе L, за исключением участка, содержащего межфазную трещину, в работах [1-3] построены комплексные потенциалы задачи, получены сингулярные интегральные уравнения, которые решены асимптотически методом малого параметра для случая, когда длина макротрещины значительно больше длины внутренних дефектов. В данной работе полученные сингулярные интегральные уравнения решены численно методом механических квадратур для трещин разных размеров. Проведено сравнение с асимптотическим решением.

Разные виды соединения материалов моделируются соответствующими типами граничных условий. В работе также рассмотрены разные виды тепловых условий на границе L и поверхностях трещин, записаны сингулярные интегральные уравнения соответствующие этим случаям. Для некоторых из них приведено численное решение.

Литература

1. Petrova V., Herrmann K. The influence of microdefects on an interface crack in a bimaterial subjected to a heat flux // Thermal Stresses 2001: Proc. of 4th Int. Congr.on Thermal Stresses, June 8-11, 2001, Osaka, Japan.—P. 253-256.

2. Petrova V., Herrmann K. Thermal crack problems for a bimaterial with an interface crack // International Conference on New Challenges in Mesomechanics, Aalborg University, Denmark, Aug. 26-30, 2002: Proc.—2002.—Vol. 2.— P. 591-597.

3. PetrovaV., Herrmann K. Thermal crack problems for a bimaterial with an interface crack and internal defects subjected to a heat source// International Journal of Fracture. —2004. —V. 128. — P. 49-63.

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ МЕР

Курбыко И.Ф., Левизов С.В. (Владимир)
hm@port33.ru

Изучаются псевдодифференциальные операторы (ПДО) и связанные с ними уравнения в пространстве обобщенных мер Z' [1] на бесконечномерном гильбертовом пространстве H. Символы таких ПДО имеют специальный вид. На основании теоремы [2] с использованием свойств операций дифференцирования и свертки мер устанавливаются достаточные условия существования решения задачи Коши для эволюционных уравнений с ПДО.

Через $A^*(x,D)$: $Z' \to Z'$ и $A^*(D,y)$: $Z' \to Z'$ обозначаются ПДО с символом $a(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x) P_j(y)$, определенные (для всех $\mu \in Z'$ и $f \in Z$) равенствами:

$$\langle A^*(x,D)\mu, f\rangle = \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \langle \mu, F[P_j F^{-1}[Q_j f]]\rangle$$

$$\langle A^*(D,y)\mu, f\rangle = \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \langle \mu, Q_j F[P_j F^{-1}[f]]\rangle.$$

Здесь функции $Q_j(x) = F[m_j](x)$ являются преобразованиями Фурье гладких финитных мер m_j на H; функции $P_j(y)$ непрерывны и ограничены на ограниченных множествах в H для всех $j \in N$; μ : $I \to Z'$ - отображение интервала $I = (t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t)$ в пространство Z'; $t_0 \in R$, $0 < \Delta t < 1$; $\delta \in Z'$, $\delta(f) = f(0)$ для всех $f \in Z'$.

Теорема. Если символы ПДО удовлетворяют условию: для каждой функции $P_j(y)$ $(j \in N)$ существует $0 < k_j < 1$ такое, что $|P_j(y)| \leqslant d \cdot \alpha^{-j} \cdot \|y\|^{k_j}$, где $d > 0$, $\alpha > 1$ (не зависят от j), тогда существует решение задачи Коши для уравнений $\mu'(t) = A^*(x,D)\mu(t)$; $\mu'(t) = A^*(D,y)\mu(t)$ с начальным условием $\mu(t_0) = \delta$.

Литература

1. Курбыко И.Ф., Левизов С.В. Об обратимости бесконечномерных псевдофифференциальных операторов // Современная математика и ее приложения, Т.9 (МК-3 Суздаль), 2003, с.160-168.

2. Курбыко И.Ф., Левизов С.В. Существование решения задачи Коши для одного эволюционного уравнения в локально выпуклом пространстве // Современные методы теории краевых задач. “Понтрягинские чтения - XIV”. Воронеж, ВГУ, 2003, с.72-73.

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Курина Г.А. (Воронеж)

kurina@kma.vsu.ru

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = 1/2\langle y(T), Fy(T)\rangle + 1/2\sum_j = 1^N \langle y(t_j) - y_j, F_j(y(t_j) - y_j)\rangle +$$

$$+1/2\int_0^T \langle u(t), Ru(t)\rangle dt$$

на траекториях системы

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t),$$

$$x(0) = x^0,$$

$$y(t) = Cx(t),$$

где $t \in [0, T]$; $0 < t_1 < ... < t_N < T; T, t_j, j = 1, ..., N$, фиксированы; $x(t) \in X, y(t) \in Y, u(t) \in U$; X, Y, U - конечномерные действительные евклидовы пространства; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в соответствующих пространствах; элементы $x^0 \in X, y_j \in Y, j = 1, ..., n$, заданы; $F, F_j \in L(Y)$, $R \in L(U)$, $A \in L(X)$, $B \in L(U, X), C \in L(X, Y)$, F, F_j, R - симметрические операторы, F, F_j - неотрицательно определённые, R - положительно определённый. Доказано, что задача имеет единственное решение, и оптимальное управление определяется соотношением

$$u(t) = R^{-1}B^*\psi(t),$$

где сопряжённая переменная $\psi(t)$ является решением задачи

$$d\psi(t)/dt = -A^*\psi(t), t \neq t_j,$$

$$\psi(T) = -C^*Fy(T),$$

$$\psi(t_j - 0) - \psi(t_j + 0) = -C^*F_j(y(t_j) - y_j), j = 1, ..., N.$$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ РЕАЛЬНЫХ ТЕЛ

Курохтин В.Т. (Москва)
vkt54@rambler.ru

Предлагается математическая постановка задачи о распространении упругопластических волн сдвига в полубесконечном массивном стержне круглого сечения с учетом возрастания энтропии. Также учитывается рост температуры. Волновой процесс инициируется импульсной нагрузкой, приложенной к торцу стержня. Отмечается, что в динамике упругопластических сред более перспективным кажется использование энергетического критерия Ирвина (а не силового Гриффитса). Поэтому на торце стержня логичнее задавать не распределение напряжения или моментов напряжений, а выделяеьую энергию как функцию времени. Отмечается сходство явлений турбулентности и упругопластического деформирования при больших скоростях деформации. Математическая постановка описанного процесса есть система дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа. В работе приводится алгоритм численного решения этой системы методом характеристик. В процессе счета вычисляется количество энергии, диссипируемой в стержне, и эта величина сравнивается с общим количеством энергии, поступившим извне. Равенство этих величин определяет момент окончания процесса активного пластического деформирования.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ МАРКОВА[1]

Ларин А.В. (Воронеж)

Возможность представления непрерывной на отрезке $[a, b]$ системы Чебышева $\{u_k(t)\}_0^n$ в виде фундаментальной системы решений некоторого дифференциального уравнения чрезвычайно важна в разных раделах анализа.

М. Г. Крейном, М. А. Рутманом (см. [1]) был сформулирован результат об интегральном представлении систем Маркова, оказавшийся в полном объеме, в предположении негладкости исходной

[1] Работа выполнена при поддержке Гранта Президента России на поддержку ведущих научных школ (НШ-1643.2003.1), программы "Университеты России" (проект УР 04.01.015) и гранта РФФИ (проект 04-01-00049)

непрерывной системы $\{u_k(t)\}_0^n$, неверным (см. контрпример Ю. В. Покорного в [3]). Данный результат был исправлен Ю. В. Покорным в [2] с использованием мер нового типа, многозначных в сингулярных точках.

Аналогичный подход может быть использован для доказательства возможности интегрального представления разрывных систем Маркова.

Теорема. *Пусть линейная оболочка $E(\Phi)$ разрывной T-системы $\Phi = \{u_0(t),\ u_1(t),\ \ldots,\ u_n(t)\}$ на интервале (a,b) содержит тождественную единицу. Тогда существует такая система мер $M_n = \{\mu_i\}_{i=1}^n$, что $\mu_1(t) \in E(\Phi)$, и равенство*

$$(Dx)(\xi_0,\ \ldots,\ \xi_n,\ t) = \Delta\begin{pmatrix} \varphi_0 & \cdots & \varphi_n & x \\ \xi_0 & \ldots & \xi_n & t \end{pmatrix} = 0, \qquad (1)$$

где $a < \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n < t < b$, эквивалентно дифференцируемости x по системе $M_n = \{\mu_i\}_{i=1}^n$ и равенству

$$x^{[n]}(t) = \frac{d}{d\mu_n}\frac{d}{d\mu_{n-1}}\cdots\frac{d}{d\mu_1}x(t) = \mathrm{const}, \quad t \in \Omega(x^{[n]}). \qquad (2)$$

Литература

1. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973. — 414 с.

2. Ю. В. Покорный, А. В. Ларин. Об относительных производных, порождаемых дифференцированием вдоль системы Чебышева. — Воронеж: ВГУ, 2001. — 33 с. — Деп. в ВИНИТИ 17.07.01 N 1691-В2001.

3. Ю. В. Покорный. Об интегральном представлении систем Маркова. — ДАН, 1994, том 335, N 1, с. 18-20.

КОНЦЕПЦИЯ ИЗУЧЕНИЯ ЧИСЕЛ В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Ларин С.В. (Красноярск)

Larin_serg@mail.ru

Четыре точки зрения на числа: 1) аксиоматическая точка зрения, 2) геометрическая точка зрения, геометрическая интерпретация чисел, 3) знаковое изображение чисел, 4) математические и бытовые причины появления тех или иных чисел.

Математика и методика ее преподавания. Основные принципы методики преподавания: 1) нельзя обманывать, но можно умалчивать, 2) замена строгих математических выкладок правдоподобными рассуждениями не должна уводить от сути и призвана сформировать правильные представления об изучаемом предмете, 3) необходимо добиваться понимания не только логики рассуждений, но видеть, чувствовать, ощущать математические истины.

Дроби в 5 классе. Анализ школьных учебников [1-3]. Доли, деление отрезка на равные части циркулем и линейкой. Нельзя изучать дроби, не производя практического деления на равные части. Деление окружности на равные части. Умножение долей. Дробь как сумма долей. Запись целого числа в виде дроби. Умножение дробей. Дробь как частное от деления числителя на знаменатель. Основное свойство дроби. Сложение дробей.

Аксиоматизация предложенного изложения. Дроби (отношения) в произвольном поле. Система рациональных чисел как поле, содержащее кольцо целых чисел, и всякий элемент которого представим в виде отношения целых чисел. Рациональные числа как упорядоченные пары целых чисел. Различные арифметики на множестве пар чисел. Непрерывность, Ахиллес и черепаха. Действительные числа в школе. Некоторые замечания к школьным учебникам. Действительные числа как десятичные дроби.

Курс "Числовые системы" в учебном плане математического факультета педагогического университета.

Литература

1. Н.Я.Виленкин, А.С.Чесноков, С.И.Шварцбурд, Математика 5. Изд-во "Свет", Санкт-Петербург, 1995.

2. И.И.Зубарева, А.Г.Мордкович,Математика 5. М.: "Мнемозина", 2002.

3. Г.В.Дорофеев, Л.Г.Петерсон, Математика. 5 класс. Часть 2. М.: "Ювента", 2002. 4. С.В.Ларин, Числовые системы.М.: "Академия", 2001.

ПРИНЦИП МАКИМУМА ПОНТРЯГИНА В ОДНОПРОДУКТОВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В. ЛЕОНТЬЕВА

Леонтьева В.В. (Запорожье, Украина)

victoria@ukros.zssm.zp.ua

В работе предлагается подход к определению оптимального управления в задаче оптимального планирования, в качестве которой рассматривается однопродуктовая динамическая модель В. Леонтьева [1], представляемая в виде

$$\dot{x} = p_1 x(t) + p_2 C(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ — фазовая переменная, характеризующая валовой выпуск продукции в единицу времени t; p_1 и p_2 — коэффициенты, содержащие основные макроэкономические показатели; $C(t)$ — непроизводственное потребление, выступающее в данном случае управляющей функцией процесса. Качество процесса (1) оценивается функционалом

$$I = \int_0^T \left[(p_1 x(t))^2 + (p_2 C(t))^2 \right] dt + p_3 x^2(T). \tag{2}$$

Для отыскания оптимального управления данной модели применяется принцип максимума Понтрягина, согласно которому оптимальным управлением, доставляющим максимум функционалу (2), является

$$\bar{u}(t) = \frac{x_0}{2(k_2-k_1)} \Big((k_1 - p_1)(2k_2 + 2p_1 - 4k_1 - k_0) e^{\sqrt{p_1^2+p_1}t} + \\ + (k_2 - p_1)(k_0 - 2k_1 + 2p_1) e^{-\sqrt{p_1^2+p_1}t} \Big).$$

С учетом полученного оптимального управления $\bar{u}(t)$ определяем оптимальное значение объема валового выпуска продукции

$$\bar{x}(t) = \frac{x_0}{2(k_2-k_1)} \Big((2k_2 + 2p_1 - 4k_1 - k_0) e^{\sqrt{p_1^2+p_1}t} + \\ + (k_0 - 2k_1 + 2p_1) e^{-\sqrt{p_1^2+p_1}t} \Big).$$

Данный подход может быть распространен, без утраты общности, на n-продуктовую экономику [2].

Литература

1. Леонтьев В.В. Исследование структуры американской экономики. – М.: Госстатиздат, 1958. – 640 с.

2. Грищак В.З., Леонтьева В.В. О динамической модели многоотраслевой экономики. // Зб. наук. праць. Вісник ЗДУ. - Запоріжжя, 2003, – N1. – С.32-36.

О ЗАДАЧЕ ГУРСА-ДАРБУ В КЛАССАХ ФУНКЦИЙ С СУММИРУЕМОЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ[1]

Лисаченко И.В., Сумин В.И. (Нижний Новгород)
v_sumin@mail.ru

Рассматривается краевая задача Гурса-Дарбу

$$\begin{array}{l} x''_{t_1 t_2}(t) = g(t, x(t), x'_{t_1}(t), x'_{t_2}(t)), t \in \Pi \equiv [0,1]^2, \\ x(t_1, 0) = \varphi_1(t_1), t_1 \in [0,1]; x(0, t_2) = \varphi_2(t_2), t_2 \in [0,1], \end{array} \quad (1)$$

где $g(t,l) : \Pi \times R^{3k} \to R^k$ вместе с $g'_l(t,l)$ измерима по t $\forall l$ и непрерывна по l для п.в. t, $\varphi_i(t_i) : [0,1] \to R^k$ абсолютно-непрерывны, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$. В [1] получены достаточные *условия сохранения глобальной разрешимости* (УСГР) (1) при возмущении правой части и граничных функций в случае решений с ограниченной смешанной производной. В докладе обсуждаются обобщения результатов [1] в случае, когда глобальное решение (1) естественно искать в классе $W(\Pi)$ функций со смешанной производной из $L_p^k \equiv L_p^k(\Pi)$, $p \in (1,\infty)$. Вывод УСГР опирается на специальные локальные теоремы существования, представляющие и самостоятельный интерес. Приведем пример такой теоремы, ограничившись скалярным случаем $k=1$. Пусть: $\varphi'_1, \varphi'_2 \in L_p[0,1]$; $f(t,l) \equiv g(t, l_1 + \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2), l_2 + \varphi'_1(t_1), l_3 + \varphi'_2(t_2))$; $\mathbf{A}[z] \equiv \{A_1[z], A_2[z], A_3[z]\}$, $A_1[z](t) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} z(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2$, $A_2[z](t) = \int_0^{t_2} z(t_1,\xi)d\xi$, $A_3[z](t) = \int_0^{t_1} z(\xi, t_2)d\xi$; задана функция $N(\cdot) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$; Ψ – класс всех троек $\psi \equiv \{g, \varphi_1, \varphi_2\}$ таких, что формула $F[z](t) \equiv f(t, A[z](t))$ определяет оператор $F[\cdot] : L_p \to L_p$ и $\left\| f'_l(\cdot, A[z](\cdot)) \right\|_{L_p \times L_\infty^2} \leqslant N(M)$ при $\|z\|_{L_p} \leqslant M$; V – система всех $H \subset \Pi$, на каждом из которых сужение $\mathbf{A}[z]\Big|_H$ не зависит от значений $z(t)$ при $t \in \Pi \setminus H$. Для $\psi \in \Psi$, $H \in V$, $M \in \mathbf{R}_+$, $z \in L_p$ положим $\Sigma(\psi, H, M, z) \equiv MN(\|z\|_{L_p} + M)\|\mathbf{A}\|_{L_p(H)\to L_\infty(H)\times L_p^2(H)} + \|f(\cdot, \mathbf{A}[z](\cdot)) - z(\cdot)\|_{L_p(H)}$.

Теорема. *Если $\psi \in \Psi$ и $H \in V$ таковы, что существуют $M \in \mathbf{R}_+$, $z \in L_p$, при которых $\Sigma(\psi, H, M, z) < M$, то (1) имеет единственное в $W(H)$ решение x и $\|x''_{t_1 t_2} - z\|_{L_p(H)} \leqslant \Sigma(\psi, H, M, z)$.*

Литература

1. Сумин В.И. // Украинский матем. журн. 1991. Т.43. № 4. С.555-561.

[1] Работа поддержана грантом РФФИ (проект 04-01-00460).

ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[2]

Лисаченко М.И., Сумин М.И. (Нижний Новгород)
m.sumin@mm.unn.ru

Доклад посвящен обсуждению алгоритма двойственной регуляризации [1], под которой понимается регуляризация неустойчивого к ошибкам исходных данных классического двойственного алгоритма Удзавы, для приближенного решения задачи оптимального управления с сильно выпуклым целевым функционалом

$$I_0(u) \to \min, \ \ (J_1(u), \ldots, J_l(u)) = q, \ \ u \in \mathcal{D}, \quad q \in R^l - \text{параметр}, \ \ (1)$$

где $I_0(u) \equiv \int_0^T (\langle A_0(t)z[u](t), z[u](t)\rangle + \langle B_0(t)u(t), u(t)\rangle\, dt$, $J_j(u) \equiv \int_0^T (\langle c_j(t), z[u](t)\rangle + \langle d_j(t), u(t)\rangle)\, dt + \langle e_j, z[u](T)\rangle + \varphi_j$, $\mathcal{D} \equiv u \in L_2(0,T)$: $u(t) \in U$ п.в. на $(0,T)$, $U \subset R^m$ — выпуклый компакт, $z[u]$ — решение линейной системы

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)u(t), \ \ z(0) = z_0.$$

Под регуляризацией алгоритма Удзавы понимается непосредственное решение на основе градиентного метода регуляризованной по Тихонову двойственной к (1) задачи. Показывается, что при согласованном стремлении к нулю ошибки задания исходных данных δ и параметра регуляризации α имеет место сильная сходимость в метрике $L_2(0,T)$ приближенных решений к решению исходной (невозмущенной) задачи вне зависимости от того разрешима или нет двойственная к (1) задача. При этом множество значений векторного параметра q, для которых указанная двойственная задача разрешима, по крайней мере, плотно во множестве всех тех значений q, для которых разрешима задача (1). Обсуждается программная реализация двойственного алгоритма, приводятся результаты решения ряда тестовых примеров.

Литература

1. Сумин М.И. Регуляризованный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т.44. №11. С.2001-2019.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00460)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРЕМЕННЫХ ПОРЯДКОВ, ГЛАДКИХ ПО ВРЕМЕНИ

Ломовцев Ф.Е. (Минск)
lomovcev@bsu.by

В области $G =]0,T[\times\mathbb{R}^n$ переменных (t,x) изучены уравнения

$$(-1)^{m-1}\frac{\partial^{2m}u(t,x)}{\partial t^{2m}} + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left[b_k(t)(I-\Delta)^{p(t)\left(1-\frac{2k+1}{2m}\right)}\frac{\partial}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \ a_k(t)(I-\Delta)^{p(t)\left(1-\frac{k}{m}-\varepsilon_k\right)}\right]\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k} = f(t,x), \qquad (1)$$

где Δ - оператор Лапласа по $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $a_0(t)\geqslant a_0>0, t\in[0,T]$, $\varepsilon_k>0$ при $k>0$ и $\varepsilon_0=0$; с граничными условиями

$$\partial^i u(0,x)/\partial t^i = \partial^j u(T,x)/\partial t^j = 0, i=\overline{0,m}, j=\overline{0,m-2}, m=1,2,\ldots \qquad (2)$$

С помощью интегральных преобразований Фурье-Планшереля и понятия производной по параметру от неограниченных переменных операторов с переменными областями определения доказана

Теорема. *Если* $p(t)\in C^{(m+1)}[0,T]$, $a_k(t),b_k(t)\in C^{(k)}[0,T]$ *и* $(-1)^k a_k(t),(-1)^k b_k(t)\geqslant 0, k=\overline{0,m-1}$, $p(t)>n/2, \partial p(t)/\partial t\leqslant 0, t\in[0,T]$, *то для любых* $f\in\widehat{\mathcal{F}}^{-(m-1)}(G)$ *сильные решения* $u\in\mathcal{E}^m(G)$ *краевых задач (1), (2) существуют, единственны и*

$$|||u(t,x)|||_m \leqslant c_m\langle\|f(t,x)\|\rangle_{-(m-1)}, c_m>0, m=1,2,...$$

Здесь гильбертовы пространства $\mathcal{E}^m(G)$– пополнения множества всех функций из $C^\infty(G)$, удовлетворяющих условиям (2), по нормам $|||u|||_m = \left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}(|\partial^m u/\partial t^m|^2 + |(I-\Delta)^{p(t)/2}u|^2)\,dxdt\right)^{1/2}$ и банаховы пространства $\widehat{\mathcal{F}}^{-(m-1)}(G)$ – пополнения множества $L_2(G)$ по нормам $\langle\|f\|\rangle_{-(m-1)} = \sup_v\left\{\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} f\overline{v}\,dxdt\right|/\langle\|v\|\rangle_{m-1}\right\}$ по всем $v\in\widehat{\mathcal{E}}^{(m-1)}(G)$, где гильбертовы пространства $\widehat{\mathcal{E}}^{(m-1)}(G)$– пополнения множества всех функций из $C^\infty(G)$, удовлетворяющих условиям (2) для всех $i, j = \overline{0, m-1}$, по нормам

$$\langle\|v\|\rangle_{m-1} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{m-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (T-t)^{-2} \left| (I-\triangle)^{p(t)(m-1-k)/(2m)} \frac{\partial^k v}{\partial t^k} \right|^2 dxdt \right)^{1/2}.$$

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ[1]

Луконина А.С. (Саратов)

Рассмотрим краевую задачу в пространстве вектор-функций размерности два: $w'(x) = \lambda D w(x) + \Phi(x), x \in [0,1]$, с интегральным граничным условием $U(w) = \int_0^1 P(t) w(t)\, dt = 0$, где $w(x) = (w_1(x), w_2(x))^T$, $D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$, $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$, $\varphi_i(x) \in L[0,1]$ $(i = 1,2)$, $P(t) = \frac{1}{t^\alpha (1-t)^\alpha} \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}$, $0 < \alpha < 1$.
На $p_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2)$ накладываются условия:
1) $p_{ij}(t) \in C[0,1] \cap V[0,1]$;
2) $p_{11}(1)p_{22}(0) - p_{21}(1)p_{12}(0) \neq 0$, $p_{11}(0)p_{22}(1) - p_{21}(0)p_{12}(1) \neq 0$.

Обозначим через S_{δ_0} область, получающуюся из полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda d \geqslant 0$ удалением всех нулей функции $a_0 + a_1 e^{-\lambda d} + a_2 e^{-2\lambda d}$, где
$a_0 = p_{11}(1)p_{22}(0) - p_{21}(1)p_{12}(0)$,
$a_1 = (-1)^{\alpha-1}[p_{11}(1)p_{22}(1) - p_{21}(1)p_{12}(1) + p_{11}(0)p_{22}(0) - p_{21}(0)p_{12}(0)]$,
$a_2 = (-1)^{2(\alpha-1)}[p_{11}(0)p_{22}(1) - p_{21}(0)p_{12}(1)]$,
вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса δ_0. Тогда имеет место

Теорема. *В области S_{δ_0} при больших $|\lambda|$ справедливы оценки:*
$\|w(x,\lambda\|_\infty = O(\|\Phi\|_\infty)$,
$\|w(x,\lambda\|_\infty = O(\|\Phi\|_1)$,
$\|w(x,\lambda\|_1 = O(\psi(\lambda)\|\Phi\|_1)$,
где $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_1$ – нормы в пространстве вектор-функций размерности два L_∞ и L_1 соответственно, $\psi(\lambda) = \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda d}(1 - |e^{-\lambda d}|)$;
$\|w(x,\lambda\|_{C[\delta, 1-\delta]} = O(e^{-\lambda d \delta}\|\Phi\|_1)$ *для любого $\delta \in (0, \frac{1}{2})$.*

Для случая $\operatorname{Re}\lambda d \leqslant 0$ можно получить аналогичные оценки.

Эта теорема обобщает некоторые результаты в [1].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1)

Литература

1. Хромов А.П. Об аналоге теоремы Жордана–Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием// Доклады РАЕН, № 4. 2004. С. 80-87

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИСЧЕЗАЮЩИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РИМАНА БЕЗ УСЛОВИЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА И ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ИНДЕКСЕ[1]

Магомедов Г.М., Нурмагомедов А.М. (Махачкала)

Рассматривается линейная краевая задача

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad \Phi(\infty) = 0, \quad t \in \Gamma \qquad (1)$$

в пространствах L_p $(p > 1)$, контур Γ удовлетворяет условию $(ds/|dt|) < \infty$.

Применяемый нами метод позволяет снять почти всякие ограничения на измеримую функцию $G(t) = \alpha(s) + i\beta(s)$.

Теорема. *Пусть* $|G|^{-\frac{2}{p}}$ $(p > 1)$ *- суммируемая функция;* α^{-1} *(или* β^{-1}*) принадлежит некоторому* L_γ $(\gamma > 1)$*;* $\frac{|\beta|}{1+|\alpha|}$ *(или* $\frac{|\alpha|}{1+|\beta|}$*) - ограничена. Тогда при каждом* $g(t) \in L_p(|\alpha|^{-1})$ *задача (1) имеет решение такое, что* $\Phi^\pm(t) \in L_p$.

Для доказательства строим вспомогательную функцию

$$\overline{\alpha}(s) = \begin{cases} |\alpha|^{\frac{3}{2}} \cdot \alpha^{-1} \text{ при } |\alpha| \geqslant 1 \\ sign\,(\alpha(s)) \text{ при } |\alpha| < 1. \end{cases}$$

и делим обе части уравнения (1) на $\overline{\alpha}(s)$.

Вновь полученный коэффициент $G_1 = G \cdot \overline{\alpha}^{-1}(s)$ является суммируемой функцией;

$$\overline{g}(t) = g(t) \cdot \overline{\alpha}^{-1}(s) \in L_p(|\alpha|^{-1}).$$

Поскольку $\overline{\alpha}(s) \in L_p$, то существует функция, аналитическая в области D^+, предельное значение которой на контуре Γ равно $\overline{\alpha}(s)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке МО РФ (проект УР.04.01.046.)

Использованный нами метод априорных оценок применяется также при исследовании нелинейных краевых задач типа

$$\Phi^{\pm}(t) = F(t, \Phi^{\mp}(t)) + g(t)$$

а также при исследовании задач вида $F[t, \Phi^{+}(t), \Phi^{-}(t)] = 0$.

Замечание. *Из приведенного выше следует, что в случае любого, конечного, отрицательного индекса задача (1) однозначно разрешима в L_2 при каждом $g(t) \in L_2$.*

О ПРЕПОДАВАНИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Майорникова Е.В. (Москва)
majornikova@inbox.ru

В последнее время теория вероятностей стала обязательной частью школьного курса математики. Мы предлагаем познакомить учащихся с этим курсом не как с разделом "чистой" математики, а как с симбиозом естественно-научной и математической дисциплин, объяснив, что естественно-научная теория вероятностей имеет дело с *рассуждениями, подходами* и здесь в принципе формальных доказательств не может быть, но нужна теоретико-вероятностная интуиция, а математическая – с *вычислениями и доказательствами,* и она уже не занимается вопросом адекватности построенной модели, но занимается обсчетом модели "как есть".

В нашем курсе базовым является понятие *случайного события* (утверждение об исходах эксперимента, про которое *по окончании* эксперимента можно определенно дать ответ – оно верно или нет).

Примеры вероятностных экспериментов и событий:

1. В рамках данного вероятностного эксперимента "монета подбрасывается 10 раз" примерами случайных событий могут быть следующие утверждения: "при седьмом бросании выпал орел", "орлов выпало больше, чем решек", "комбинация орел-решка-орел ни разу не встретилась", "количество орлов – простое число".

2. В эксперименте "Вася подсмотрел последние три цифры Олиного номера паспорта", случайными событиями являются, например, утверждения: "Сумма этих цифр равна 17", "Из этих трех цифр ровно 2 четные". Но утверждение "В полном номере паспорта имеется хотя бы один ноль"случайным событием *не является*, несмотря на то, что в некоторых случаях Вася может на него точно ответить.

На основании определения случайного события вводятся остальные понятия. Причем в процессе обучения принципиальная возможность проведения строгих доказательств детьми должна быть осознана, но уровень строгости остается привычным для них. Это осознание достигается посредством введения аналогий "событие – множество", "вероятность – функция", так как старшеклассники понимают, что с функциями и множествами можно оперировать формально, а с кубиками и картами, словами "зависит/не зависит", "следует/не следует" – нельзя.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Меджидов З.Г. (Махачкала)
ziya@mail.dgu.ru

В области $\Omega \subset C^n$, $n > 1$, рассмотрим систему

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j} - \overline{a_j u} = f_j, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{1}$$

Предположим, что $a_j \in C^2(\Omega)$, причем $a_i(z) \neq 0$ в каждой точке $z \in \Omega$ при некотором i. Пусть, далее, выполнены условия интегрируемости однородной системы:

$$\partial a = a \wedge b, \quad \overline{\partial} a = a \wedge c, \quad \partial c = a \wedge l, \quad d(a \wedge \overline{a}) = 0, \tag{2}$$

где $a = a_1 dz_1 + ... + a_n dz_n$, b – $(1,0)$–форма, c и l – $(0,1)$–формы.

Тогда ([1]) в Ω определено комплексно-аналитическое слоение W с $T(W) = Ker\, a \cap Ker\, \overline{a}$. Через $\sum$ обозначим множество его слоев. $\sum$ превращается в риманову поверхность при выполнении условия

(U) для любой точки $z_0 \in \Omega$ существует голоморфное отображение $s : \omega \longrightarrow \Omega$ некоторой области $\omega \subset C$ такое, что композиция $\pi s : \omega \longrightarrow \sum$ инъективна и $s(\xi_0) = z_0$ для некоторой точки $\xi_0 \in \omega$; здесь $\pi : \Omega \longrightarrow \sum$ – каноническое отображение.

Для разрешимости (1) (в случае гладких f_j) необходимы условия (где $f = f_1 d\overline{z}_1 + ... + f_n d\overline{z}_n$):

$$a \wedge \partial \overline{f} = 0, \quad \overline{\partial}\partial f - a \wedge \partial f - \partial a \wedge f - \overline{a} \wedge a \wedge \overline{f} + c \wedge \partial \overline{f} = 0. \tag{3}$$

Через $W^s(\Omega, loc)$ обозначим пространство функций в C^n, производные которых порядка $\leqslant s$ принадлежат L^2 на компактных подмножествах из Ω.

Теорема. *Предположим, что риманова поверхность* $\sum$ *паракомпактна, в* Ω *существует сильно выпуклая на слоях* W *функция (по поводу определения см.* [2]*),* f_k, $\overline{\partial}_j f_k$, $\partial_i \overline{\partial}_j f_k \in W^s(\Omega, loc)$, $i, j, k = 1, 2, ..., n$ *выполнены условия* (U), *(2) и (3). Тогда система (1) имеет решение* $u \in W^s(\Omega, loc)$ *в смысле теории распределений.*

Литература

1. Магомедов Г.А., Паламодов В.П. Мат. сб. 1978. Т. 106, № 4. С. 515-543.

2. Меджидов З.Г. СМЖ. 2004. Т. 45, № 4. С. 843-854.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ НА ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, СВЯЗАННЫХ С НЕЕДИНСТВЕННОСТЬЮ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ[1]

Меликян А.А., Ахметжанов А.Р. (Москва)

melik@ipmnet.ru, ahm@inbox.ru

В работе исследуются дифференциальные игры простого преследования на двумерных многообразиях. Условием поимки (захвата) считается совпадение координат игроков.

Известно, что для игр простого преследования на евклидовой плоскости цена игры (время преследования) определяется по простейшей формуле, как отношение расстояния между игроками и разности их скоростей. При этом данный результат является оптимальным во всей плоскости и игроки не могут его улучшить. Если же рассматривать игры на двумерных поверхностях, таких как поверхности вращения, двусторонние плоские фигуры с краем, эллипсоиды, то наряду с данной областью, может существовать вторичная область, где цена игры меньше указанного значения. Это связано с тем, что определенным позициям игроков могут соответствовать две или более различных геодезических линий равной длины. Таким образом, вопрос определения положений игроков с двумя равными геодезическими является важным в изучении поставленной задачи.

Дифференциальные игры преследования на некоторых поверхностях ранее рассматривались в работах авторов. Данная работа продолжает эти исследования, рассматривая дифференциальные игры на эллипсоидах. Рассмотрены и изучены частные случаи –

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 04-01-00610.

эллипсоиды вращения, плоские двусторонние эллипсы. Для каждого из них построены области Г существования двух или более геодезических равной длины. В виду того, что данные поверхности ограничены, вторичная область существует не всегда, например, в случае шара первичная область занимает все пространство. Таким образом, представляет собой интерес вопрос зарождения вторичной области. В указанных случаях построена кривая в области параметров задачи, разделяющая её на две части – одну, где вторичная область непуста, и вторую, где первичные стратегии игроков являются оптимальными во всем пространстве.

К ТЕОРИИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ И МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СИНХРОННЫХ РЕЖИМОВ[1]

Метрикин В.С. (Н. Новгород)

С позиции теории колебаний вибрационные системы , описывающиеся дифференциальными уравнениями с разрывными нелинейностями, как известно [1-3], представляют собой сильно нелинейные системы, а учет ударных взаимодействий элементов в виде гипотезы Ньютона делает естественным в качестве математического аппарата изучения синхронных рабочих режимов использование метода точечных отображений (МТО), разработанный Горьковской школой академика А. А. Андронова[2]. Широкое применение ЭВМ для исследования вибрационных систем позволило решить ряд важных практических задач [1], решение которых задерживалось ввиду необходимости проведения значительных вычислительных работ. Исследования динамики вибрационных систем с разрывными нелинейностями показали, что в фазовом пространстве математических моделей можно выделить области, траектории в которых "затягивают фазовую точку" в так называемый "бесконечно - ударный" процесс [1].

В настоящем докладе приводится математическая модель и предлагается точный аналитический метод изучения синхронных режимов общей многомассовой вибрационной системы, состоящей из произвольного (конечного) числа масс, подверженных внешнему

[1]Работа выполнена при частичной поддержке научной программы Минобразования РФ "Университеты России - фундаментальные исследования" (проект N03.01.179)

воздействию периодическим по времени сигналом. Взаимодействие между собой масс происходит посредством линейных позиционных сил. Одна из масс взаимодействует с неподвижной преградой. Этот процесс взаимодействия приближенно математически описывается согласно гипотезе Ньютона введением эквивалентного коэффициента восстановления скорости .

В работе обсуждаются результаты конкретных расчетов с помощью пакета программ для ПЭВМ при различных значениях параметров. Выбор рабочих значений параметров в области устойчивости происходит после решения минимаксной задачи.

Литература

1. Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. - М.: Наука, 1994.- 285 с.
2. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1972. - 472 с.
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Физматгиз, 1961. - 332 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Мещерякова Т.В. (Воронеж)

В данной работе рассматривается построение и исследование математической модели упругого материала с дефектами типа трещин, разных размеров и произвольным образом расположенных относительно друг друга, под действием растягивающей нагрузки. А именно, исследуется взаимодействие макротрещины и поля микродефектов в упругой полуплоскости, когда растягивающая нагрузка приложена на бесконечности.

Система сингулярных интегральных уравнений для данной задачи приведена в [1]. В этой системе мы отдельно рассматривали уравнение для макротрещины и уравнения для микродефектов. Решение ищется в виде ряда по малому параметру λ, который равен отношению длины микродефекта к длине макротрещины [2]. Построена рекуррентная система уравнений. Для нахождения неизвестных коэффициентов при различных степенях λ применялся метод механических квадратур, который основан на формулах интерполяционного полинома и квадратурных формулах Гаусса для сингулярных интегралов. Особое внимание уделено случаю, когда макротрещина перпендикулярна границе полуплоскости. Составлена программа для численного нахождения горизонтальных и вертикальных смещений на поверхностях разрезов (трещин), а также коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещин.

В представленной задаче учитываются перераспределения напряжений на линии трещин, вследствие действия нагрузки и образования областей закрытия трещин. Получены коэффициенты интенсивности напряжений в вершине макротрещины и микротрещин, в зависимости от их угла наклона по отношению к границе полуплоскости. Также построены графики зависимости КИН макротрещины от расположения микродефектов. Проведен анализ полученных результатов и сравнение с задачей о полуплоскости с одним дефектом.

Литература

1. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук.Думка, 1976.- 444 с.

2. Tamuzs V., Romalis N., Petrova V. Fracture of Solids with Microdefects. New York: NOVA Science Publishers Inc., 2000.-247 p.

КРИТЕРИЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Минюк С.А. (Гродно), Метельский А.В. (Минск)

zhuk@grsu.by, ametelski@bntu.by

Рассмотрим систему управления Σ дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\delta) + A_2\dot{x}(t-\delta) + Bu(t), t \in T = [0, t_1], \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in H^- = [-\delta, 0], \quad (2)$$

где x - n-вектор-столбец решения системы (1) ($n \geqslant 2$); $0 < \delta$ - постоянное запаздывание; t_1 - достаточно большой фиксированный момент времени; A, A_1, A_2, B - постоянные матрицы соответствующих размеров; $\varphi \in C(H^-, R^n)$ - банахово пространство непрерывных n -вектор-функций; $u(t), t \in T$ - суммируемая с квадратом функция; $x(t), t \in T$ - абсолютно непрерывная функция.

Определение. Начальное состояние (2) системы Σ назовем полностью управляемым, если существует допустимое управление $u(t)$,

$t \in T$, что выполняются соотношения:

$$A_1 x(t) + A_2 \dot{x}(t) = 0, t \in [t_1 - \delta, t_1], \ x(t_1) = 0.$$

Если полностью управляемы все начальные состояния (2), то систему Σ назовем полностью управляемой.

Теорема. Система Σ полностью управляема тогда и только тогда, когда выполняются два условия:

$$\operatorname{rank}[\lambda E - A - (A_1 + \lambda A_2)e^{-\lambda\delta}, B] = n \text{ для } \forall \lambda \in C, \tag{3}$$

$$\operatorname{rank}[B, A_2 B, \ldots, A_2^{n-1} B, A_2^n] = \operatorname{rank}[B, A_2 B, \ldots, A_2^{n-1} B], \tag{4}$$

где E – единичная матрица, C – множество комплексных чисел.

Для нильпотентной матрицы A_2 условие (4) всегда выполнено.

Замечание. Условие (4) не является излишним, так как в общем случае не вытекает из (3). В частности, для системы Σ с параметрами

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \delta = 1$$

условие (3) выполняется, но соотношение (4) не выполняется.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ И ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ

Михайлова Н.В. (Минск)

erovenko@bsu.by

Принципиальные вопросы методологического обоснования математики сконцентрированы на фундаментальных дополнительных понятиях теории познания: актуальной и потенциальной бесконечности, непрерывности и дискретности, конечности и бесконечности. Эти понятия основываются на двух дополнительных потоках идей, один из которых чисто математического содержания, а другой — философского, поэтому философско-методологический синтез полярных начал обеспечивает полезность и ценность математической науки.

Конструктивный и интуитивный подход к определению математических понятий не отрицает, за некоторым исключением, универсальной значимости основных логических принципов. Поэтому вычисление и рассуждение неотделимы друг от друга и представляют собой фундаментальную двойственность математического знания.

Развитию математической науки в целом присуща фундаментальная двойственность, состоящая в непрекращающемся обмене двоякого рода: с одной стороны — это новые утверждения и формулы, полученные из аксиом посредством формального вывода, а с другой стороны — это добавление новых аксиом с доказательством их непротиворечивости с помощью содержательного вывода.

Неопределенность методологических установок позволяет утверждать, что вопрос о возможности достоверного обоснования непротиворечивости арифметики не решен окончательно в отрицательном смысле. Фундаментальные вопросы математического познания допускают существование различных, но одинаково справедливых точек зрения. Это связано с тем, ясность аргументации метода и его практическая осуществимость являются дополняющими друг друга аспектами математической деятельности. Если они описывают потенциально возможное, вполне допустим их философско-методологический синтез.

С точки зрения анализа и синтеза, в обосновании математики встречаются ситуации, напоминающие обоснование в квантовой механике. В этой концепции для математиков существенно то, что классическими системами описания достигается определенное понимание неклассической сути исследуемого явления. В соответствии с методологическими выводами концепции дополнительности, только вся система оснований математики в целом может сопоставляться с опытом.

Понятие обоснования должно соответствовать современному пониманию математики как науки. Современную математику можно рассматривать как совокупность некоторых абстрактных структур и средств дедукции опытных наук. Поэтому проблема обоснования математики — это прежде всего обоснование надежности ее доказательств и установление непротиворечивости ее теорий.

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ И НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРА $\varphi(A)$ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СЛУЧАЕ НЕОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА A

Можарова Т.Н. (Орел)

Пусть H — полная нормированная алгебра над полем комплексных чисел. $A : \mathcal{D}(A) \to H$, $\mathcal{D}(A) \subset H$, — замкнутый линейный неограниченный оператор и $\mathcal{D}(A)$ — инвариантно относительно оператора A. Строится подпространство $\mathcal{H}_\alpha^\beta \subset H$:

$$\mathcal{H}_\alpha^\beta = \bigcap_{\varepsilon_p \searrow 0} H_{\alpha+\varepsilon_p}^\beta = \lim_{p\to\infty} \operatorname{proj} H_{\alpha+\varepsilon_p}^\beta,$$

где при фиксированных $\alpha, \beta > 0$ и $\varepsilon_p \searrow 0,\ p \to \infty$,

$$H_{\alpha+\varepsilon_p}^\beta = \{x \in \mathcal{D}(A) : ||A^k(x)|| \leqslant C(x,p)[(\alpha+\varepsilon_p)k]^{\beta k}; \forall k\}$$

— нормированные пространства, топология которых определяется нормами

$$||x||_p = \sup_{(k)} \left\{ \frac{||A^k(x)||}{[(\alpha+\varepsilon_p)k]^{\beta k}} \right\} < \infty,\ \forall x \in H_{\alpha+\varepsilon_p}^\beta,$$

причем $H_{\alpha+\varepsilon_1}^\beta \supset H_{\alpha+\varepsilon_2}^\beta \supset ..., p = 1, 2, ...$

Теорема. *Пусть H — полная нормированная алгебра и $A : \mathcal{D}(A) \to H$, $\mathcal{D}(A) \subset H$, — линейный замкнутый (вообще неограниченный) оператор, $\mathcal{D}(A)$ — инвариантно относительно оператора A. Тогда каждая целая векторнозначная функция*

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k,\ x_k \in H, \forall\ k,\ t \in \mathbb{C},\ \mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} H,$$

порядок роста которой $\rho \leqslant 1/\beta$, а при $\rho = 1/\beta$ тип $\sigma < \beta/\alpha e$, определяет на $\mathcal{H}_\alpha^\beta$ линейный непрерывный оператор

$$\varphi(A)(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} x_k A^k(x),\ x_k \in H,$$

переводящий это пространство в H. (Здесь $\alpha > 0, \beta > 0$ — фиксированные числа.)

ФОРМАЛИЗМ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Некрасова Н.В. (Воронеж)
nekrasovanv@mail.ru

При помощи прямой схемы строится асимптотика решения следующей сингулярно возмущенной задачи

$$P_\varepsilon : J_\varepsilon(u) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k(y(k), \varepsilon z(k), u(k)) \to \min_u, \tag{1}$$

$$y(k+1) = f_k(y(k), \varepsilon z(k), u(k)),$$

$$z(k+1) = h_k(y(k), \varepsilon z(k), u(k)), \tag{2}$$

$$y(0) = y(N), z(0) = z(N), \tag{3}$$

здесь $y(k) \in R^n$, $z(k) \in R^m$ $(k = \overline{0, N})$, $u(k) \in R^r$ $(k = \overline{0, N-1})$, F_k - скалярная функция, f_k - функция со значениями в R^n, h_k-функция со значениями в R^m, число шагов N фиксировано, $\varepsilon > 0$ - малый параметр. Функции F_k, f_k, h_k предполагаются достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми.

Решение ищется в виде рядов $y(k) = \sum\limits_{j \geqslant 0} \varepsilon^j y_j(k)$, $z(k) = \sum\limits_{j \geqslant 0} \varepsilon^j z_j(k)$, $u(k) = \sum\limits_{j \geqslant 0} \varepsilon^j u_j(k)$, которые подставляются в задачу (1)-(3), в результате чего минимизируемый функционал записывается в виде

$$J_\varepsilon(u) = \sum_{j \geqslant 0} \varepsilon^j J_j, \tag{4}$$

а из (2), (3) после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε получаются уравнения и условия периодичности для y_i, z_i.

При некоторых условиях и достаточно мылых ε справедлива следующая теорема.

<u>**Теорема.**</u> Коэффициент J_{2m-1} в разложении (4) известен после решения задач P_i $(i = \overline{0, m-1}, m \geqslant 1)$, из которых находятся y_i, z_i, u_i. Преобразованный коэффициент J_{2m} в разложении (4) является критерием качества в задаче P_m.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ "ХИЩНИК-ЖЕРТВА"

Нидченко С.Н. (Екатеринбург)
nsn001@usla.ru

Рассматривается модель биологического сообщества хищник-жертва [1].

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = N_1(t)(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t-\tau)),$$
$$\frac{dN_2(t)}{dt} = -N_2(t)(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1(t-\tau)).$$

В случае, когда запаздывание отсутствует ($\tau = 0$), она имеет однопараметрическое семейство $(N_1^0(t,\mu), N_2^0(t,\mu))^{\mathrm{T}}$, $t \in R$, $T(\mu)$ — периодических решений [2]. Введение запаздывания качественно изменяет поведение решений системы. Выполнение, при некотором параметре μ_0, условия $T(\mu_0) = \tau$ позволяет сохранить периодическое решение $(N_1^0(t,\mu_0), N_2^0(t,\mu_0))^{\mathrm{T}}$, $t \in R$, в системе с запаздыванием, но вопрос о его устойчивости является нетривиальным и с помощью аналога теоремы Андронова–Витта сводится к исследованию устойчивости однопараметрического семейства линейных систем дифференциального уравнения с запаздыванием и периодическими коэффициентами

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \gamma_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_1^0(t,\mu))x_1(t) - \gamma_1 N_1^0(t,\mu)x_2(t - T(\mu)),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \gamma_2 N_2^0(t,\mu)x_1(t - T(\mu)) - \gamma_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1^0(t,\mu))x_2(t).$$

В критическом случае с помощью оператора монодромии указанная задача сводится [3] к анализу движения по комплексной плоскости собственных чисел краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Литература

1. Kaper J. Predator-Prey models with discrete time lag//Nat. acad. sci. lett. 1979. V. 2, N 7. P.273-275.

2. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существования. М., 1976.

3. Долгий Ю.Ф., Нидченко С.Н. Устойчивость антисимметрических периодических решений дифференциальных уравнений с

запаздыванием. —В кн.: Труды Всероссийской конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", Екатеринбург, 2004, с.159-160.

НОРМИРОВАННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ГРУНСКОГО И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Никитин С.В. (Ставрополь)

Пусть S — класс функций $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$, регулярных и однолистных в единичном круге $|z| < 1$. Логарифмическими коэффициентами функции $f(z) \in S$ называются коэффициенты γ_n разложения

$$\log \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\gamma_n z^n.$$

Положим $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$ и $\log \frac{g(z)-g(\xi)}{z-\xi} \frac{z-\xi}{g(z)g(\xi)} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\omega_{kl}^*}{\sqrt{kl}} z^k \xi^l$, ω_{kl}^* называются нормированными коэффициентами Грунского. $\omega_{kl}^* = \sqrt{kl}\omega_{kl}$ — коэффициенты Грунского.

Из [1],[2] следует, что

$$\sum_{n=1}^{3} |\gamma_n|^2 = \frac{1}{3} + \frac{7}{9}\sin^2 x - \frac{1}{3\sqrt{3}} \times$$

$$\times \sin^2 x \cos x \cos(\alpha + 2\beta) + \frac{\sin^4 x}{4} + \frac{4}{3}\cos^2 x \sin^2 x = \varphi(x, \alpha, \beta).$$

Наибольшее значение $\varphi(z, \alpha, \beta) \approx 1,409$ при $z_1 = 0,372$, $\alpha + 2\beta = \pi$, что улучшает оценку для $\sum_{k=1}^{3} |\gamma_k^2|$ из [1] и [3].

Литература

1. Никитин С.В. Оценки логарифмических коэффициентов однолистных функций посредством коэффициентов Грунского // Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Труды участников. — Ростов-на-Дону. 2004. С. 132-134

2. Garabedian P.R., Ross G.G., Schiffer M. On the Bieberbach conjecture for even n, J. Math. and Mech., 14, N6, (1965), 975–989.

3. Никитин С.В. Экстремум функционала $J_n(f) = \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^2$. Вестник Ставропольского государственного университета. 1997. N11, С. 24–28.

ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ ЧЕРЕЗ ЦИФРОВЫЕ СЕТЕВЫЕ КАНАЛЫ СВЯЗИ

Николаева Е.В., Матвеев А.С. (Санкт-Петербург)
Nikolaeva@mnogo.ru

Работа нацелена на развитие нового актуального раздела теории управления, который рассматривает многокомпонентные сетевые системы и явно учитывает все ограничения на информационный обмен между компонентами. Исследуется фундаментальная задача: нахождение точной нижней границы интенсивности информационного обмена внутри системы, при которой возможна ее стабилизация. Известные решения относятся в основном к идеализированной двухкомпонентной (сенсор-регулятор) схеме и к многосенсорным системам с единым регулятором. Более реалистичные системы с многими сенсорами и регуляторами рассматривались в [1] в случае, когда каждый сенсор соединен с каждым регулятором отдельным каналом связи заданной емкости. Были получены раздельные как необходимые, так и достаточные условия стабилизируемости.

В данной работе установлены единые необходимые и достаточные условия стабилизируемости систем, обобщающих рассмотренные в [1]. Помимо каналов, напрямую соединяющих сенсоы и регуляторы, допускается дополнительный информационный поток через "центральный"процессор. В отличие от [1], каналы несовершенны а система не обязательно управляема каждым регулятором. Критерий стабилизируемости связывает емкости каналов и определители динамических матриц специальных подсистем.

Литература

1. G.N. Nair, R.J. Evans, and P.E. Caines. Stabilizing decentralized linear systems under data rate constraints. In *Proc. of the 43rd IEEE CDC*, pages 3992–3997, Atlantis, Bahamas, 2004.

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЛАГРАНЖА-ЯКОБИ НА ВСЕМ ОТРЕЗКЕ[1]

Новиков В.В. (Саратов)
novikov@engels.san.ru

Пусть $\alpha, \beta > -1$ и $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ - последовательность многочленов Якоби, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $w(x) =$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 04-01-00060.

$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$; $-1 < x_{n,n} < x_{n-1,n} < \ldots < x_{1,n} < 1$ — нули $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания. Обозначим через $L_n{}^{(\alpha,\beta)}(f,x)$ многочлен Лагранжа, интерполирующий функцию f в узлах $\{x_{k,n}\}_{k=1}^{n}$.

Теорема. *Пусть* $\alpha, \beta \in$(-1, 1/2), $q = \max\{\alpha;\beta\}$, $f \in C[-1,1]$ *и*

$$T_n^{(\alpha,\beta)}(f) := \max_{1 \leqslant m \leqslant n-1} \sum_{k=1,\, k \neq m}^{n-1} \frac{|f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})|}{|m-k|^{1/2-q}}.$$

Тогда условие

$$\lim_{n\to\infty} T_n^{(\alpha,\beta)}(f) = 0$$

достаточно для равномерной на всем отрезке [-1,1] *сходимости к* f *интерполяционного процесса* $\{L_n^{(\alpha,\beta)}(f,x)\}$.

В качестве следствий из приведенной теоремы можно получить некоторые известные признаки равномерной сходимости указанного интерполяционного процесса (в частности, из работ [1-3]).

Литература

1. Vertesi P. *Lagrange imterpolation for continuous functions of bounded variation*// Acta Math. Acad. Sci. Hungar .- 1980.-V.35.- P. 23-31.

2. Кельзон А.А. *Об интерполировании непрерывных функций ограниченной p-вариации*// Изв. вузов. Математика.-1978.-№ 5.-С. 131-134.

3. Kvernadze G. *Uniform Convergence of Lagrange Interpolation Based on the Jacobi Nodes*// J. of Approx. Theory.-1996.-V.87.-P.179-193.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

Огарков В.Б., Долгих Е.А. (Воронеж)

Расчёт плоских многозвенных механизмов в курсе теоретической механики достаточно сложен. Имеется возможность существенно упростить расчёты, ели обобщить некоторые формулы и теоремы кинематики плоско-параллельного движения твёрдого тела и вести вычисления по готовым формулам.

Пусть имеется $\overline{AB} = \overline{r}$, совершающий плоско-параллельное движение. Если известны скорости концов отрезка, то можно найти условную скорость вращения отрезка:

$$w = \frac{V_B \sin\beta_{BV} - V_A \cdot \sin\alpha_{AV}}{AB} \quad (1)$$

Полученная формула для величины и направления скорости ускорения точки В [1]:

$$V_B = \sqrt{V_A^2 \cos^2\alpha_{AV} + (V_A \sin\alpha_{AV} + wAB)^2} \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}\beta_{AV} = \frac{V_A \sin^{\alpha} AV + wAB}{V_A \cos\alpha_{AV}} \quad (3)$$

$$w^2 = \frac{W_A \cos\alpha_{AW} - W_B \cos\beta_{BW}}{AB} \quad (4)$$

$$\varepsilon = \frac{W_B \sin\beta_{BV} - W_A \cdot \sin\alpha_{AW}}{AB} \quad (5)$$

$$W_B = \sqrt{(W_A \cos\alpha_{AW} - W^2 AB)^2 + (W_A \sin\alpha_{AW} + \varepsilon AB)^2} \quad (6)$$

Литература

1. В.Б. Огарков. Аналитический способ определения скорости и ускорений точек плоского механизма, Известия вузов, Машиностроение, № 1, М.: 1974, с. 60-65.

ОБ УРАВНЕНИИ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Огарков В.Б., Шацкий В.П., Фурменко А.И. (Воронеж)

В общем случае уравнение движения материальной точки в среде с сопротивлением приводится к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha\frac{du}{dt} + cu = f(t) \quad (1)$$

Здесь: m — масса точки; a — коэффициент сопротивления среды; c — коэффициент восстанавливающей силы; $f(t)$ — заданная вынуждающая сила.

Уравнение (1) может быть приведено к интегральному уравнению:

$$u(t) + \int [a + b(t-\tau)]u(\tau)d\tau = F(t) \quad (2)$$

$$f(t) = u_0 + \nu_0 t + a u_0 t + \int\limits_0^t (t-\tau) f_1(\tau) d\tau \tag{3}$$

Решение уравнения (2) ищется в резольвентой форме:

$$u(t) = F(t) - \int\limits_0^t R(t-\tau) F(\tau) d\tau \tag{4}$$

Для определения резольвентности получено дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + a\frac{dR}{dt} + bR(t) = 0 \tag{5}$$

Уравнение (5) представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, для которого имеются в общем случае три варианта решения в зависимости от значения спектра.

Общее решение уравнения (1) определяется по формуле (4).

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ИМЕЮЩЕГО СВОИМ КОНЕЧНОМЕРНЫМ АНАЛОГОМ УРАВНЕНИЕ С МАТРИЦЕЙ МИНКОВСКОГО-ЛЕОНТЬЕВА

Олемская М.В., Олемской Ю.В. (Санкт-Петербург)
Olemskoy@apmath.spbu.ru

В докладе рассматривается интегральное уравнение:

$$u = Bu + \lambda(u)s,$$

здесь B интегральный оператор, действующий в пространстве $L(0,T)$ $(0 < T < +\infty)$:

$$Bu(x) = \frac{1}{\gamma(x)} \int\limits_x^T \exp\Big(-\int\limits_x^t \frac{1}{\gamma(z)} dz\Big) Au(t) dt,$$

функции $s(x), \frac{1}{\gamma(x)}$ -неотрицательные и измеримые, принадлежащие $L(0,T)$, с нормой неравной нулю, A и A^* ограниченные линейные операторы, действующие в пространствах $L(0,T)$ и $M(0,T)$, соответственно, и оставляющие в них инвариантными конусы неотрицательных функций. Функционал $\lambda(u)$ определяется из условий баланса:

$$\lambda(u) = \frac{1 - \|Bu\|_L}{\|s\|_L}.$$

При выполнении условия:

$$\|A^*(1 - \exp(-\int\limits_0^t \frac{1}{\gamma(z)}dz))\|_M \leqslant 1,$$

рассматриваемое уравнение имеет положительное решение $u \in L(0,T)$, с сответствующим значением функционала $\lambda(u)$, причем случай $\lambda(u) = 0$ не исключается.

Литература

1. Олемской Ю.В. О положительных решениях линейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Вестн. Ленингр. ун-та, 1983,N7, 98-100.

О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ[1]

Ощепкова С.Н. (Белгород)

oshepkova@bsu.edu.ru

Пусть u – решение уравнения

$$\Delta u = 0, \tag{1}$$

где Δ – лапласиан на стратифицированном множестве Ω – связном подмножестве $\mathbb{R}^n$, составленном из конечного числа многогранников (стратов) σ_{ki}, примыкающих друг к другу по типу симплициального комплекса. Более точно, уравнение (1) рассматривается на открытом связном подмножестве $\Omega_0 \subset \Omega$, составленном из стратов и таком, что $\overline{\Omega}_0 = \Omega$. Пусть μ – мера на Ω, определяемая следующим образом

$$\mu(\omega) = \sum \mu_k(\omega \cap \sigma_{ki}),$$

[1]Работа поддежана грантом РФФИ № 04-01-00697 и программой "Университеты России": грант УР 04.01.486

где μ_k – k –мерная мера Лебега, а ω – измеримое подмножество Ω. Можно показать (см. [1]), что для сфер достаточно малого радиуса для решений уравнения (1) имеет место

$$\int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mu = 0. \tag{2}$$

На основе (2) можно доказать следующее утверждение.

Теорема. Решение уравнения (1) не может иметь точек нетривиального экстремума.

Мы говорим, что $X \in \Omega_0$ – точка нетривиального экстремума, если она является точкой экстремума, и ни в какой ее окрестности функция не является постоянной.

Литература

1. Nicaise, Serge; Penkin, Oleg M. Poincare-Perron's method for the Dirichlet problem on stratified sets. J. Math. Anal. Appl. 296 (2004), no. 2, 504–520.

МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Павлова Н.Г. (Москва)

natasharussia@mail.ru

В теории управления линейные системы представляют самостоятельный прикладной интерес, а также важны с точки зрения теории. При исследовании управляемой системы большое значение имеет строение и свойства ее множества достижимости .

Рассматривается линейная система ОДУ:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in [0;T], \tag{1}$$

$$x(0) = 0. \tag{2}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^* \in R^n$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_r)^* \in R^r$. $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ – аналитические матрицы-функции.

Допустимое управление – всякая функция $u(\cdot) \in L_\infty[0;T], u(t) \in K\ \forall t \in [0;T]$. Здесь K - выпуклый конечнопорожденный конус, т.е.

$$K = \left\{ v \in R^r : v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i, \lambda_i \geqslant 0, u_i \in R^r, i = \overline{1,k} \right\}.$$

Здесь u_i – заданные векторы из R^r, причем $u_i \neq 0\ \forall i$.

Множество достижимости D_T в момент времени T:

$$D_T = \{y \in R^n : \exists u(\cdot) \in L_\infty[0;T], u(t) \in K \ \forall t \in [0;T],$$

$$y = x(T), \text{где } x(\cdot)\text{–решение}(1),(2), \text{ соответствующее } u(\cdot)\}.$$

Очевидно, D_T является выпуклым конусом с вершиной в нуле. Для каждого $t \geqslant 0$ определим матрицы:

$$B_1(t) = B(t), B_j(t) = -A(t)B_{j-1}(t) + \frac{dB_{j-1}(t)}{dt}, j \in \{2,3,\ldots,n\}.$$

Теорема. Пусть для любого $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ существует такое $t \in [0;T]$, что

$$rang B_1(t)u_i, \ B_2(t)u_i, \ldots, \ B_n(t)u_i = n. \tag{3}$$

Тогда множество $D_T \setminus \{0\}$ является открытым.

Условие (3) является условием общего положения.

СЖИМАЮЩИЙ ОПЕРАТОР И ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Парфёнов А.И. (Новосибирск)

pai79@sibmail.ru

Пусть $n, m \geqslant 1$ целые, $F = (-\infty, \infty)^{n-1}$, $E = (0,1) \times F$, в E задана конечная неотрицательная борелевская мера μ, и $\max(1, n/m) < p < \infty$. Положим $H = L_{2,\mu}(E)$; Z — подпространство в $W_p^m(E)$, состоящее из всех функций с нулевым полным следом на $\{1\} \times F$; и Z_0 — замыкание множества гладких финитных в E функций в $W_p^m(E)$. При $n = 1$ имеем $E = (0,1)$, а Z — подпространство всех $u \in W_p^m(0,1)$ с $u(1) = u'(1) = \cdots = u^{(m-1)}(1) = 0$. Пусть оператор $R \in L(Z, H)$ сопоставляет непрерывному представителю элемента пространства Z его класс эквивалентности в H. Рассмотрим условие

[*] существуют функция $T : Z \to Z$ и постоянные $N_1 \in (0,1)$, $N_2 > 1$ такие, что для каждого $u \in Z$ имеем $T(u) - u \in Z_0$, $\|RT(u)\|_H \leqslant N_1 \|Ru\|_H$ и $\|T(u)\|_Z \leqslant N_2 \|u\|_Z$.

Теорема 1. Если $n = 1$, то [*] равносильно условию

$$\exists \omega \in (0,1) \ \forall \varepsilon \in (0,1) \quad \mu((0, \omega\varepsilon)) \leqslant \frac{1}{2}\mu((0,\varepsilon)).$$

Пусть $r((a-b,a+b)) = (a-3b/4, a+3b/4)$ для интервалов $(a-b,a+b)$ и $r(I) = r(I_1) \times \cdots \times r(I_{n-1})$ для кубов $I = I_1 \times \cdots \times I_{n-1} \subset F$.
Теорема 2. Если I. $n > 1$; II. $\forall \rho > 0\ \exists \zeta \in (0,1/2)$ такое, что

для всех кубов $Q \subset F$ с ребром $l \leqslant 1$ выполнено условие $\mu((0,\zeta l) \times r(Q)) \leqslant \rho\mu((0,l) \times Q)$;

и III. либо $m = 1$ и $n < p < \infty$, либо $m = n = 2$ и $1 < p < 2$, либо $m = 2$, $n = 3$ и $3/2 < p < 2$, либо мера μ задана медленно меняющейся в E плотностью, то верно [*]$\bullet$

Условие [*] возникло в многомерных индефинитных спектральных задачах, аналогичных рассмотренным автором в [1], [2].

Литература

1. Сиб. мат. журн., **44**, № 4 (2003), 810–819.
2. Мат. труды, **7**, № 1 (2004), 153–188.

НЕКОТОРЫЕ КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ[1]

Пенкин О.М. (Белгород)
penkin@bsu.edu.ru

В докладе обсуждаются некоторые качественные свойства решений эллиптических уравнений на стратифицированных множествах. В частности, для оператора Лапласа – Бельтрами доказывается аналог теоремы о среднем. Приводятся некоторые результате о принципе максимума – слабого и сильного.Приводится аналог неравенства Харнака.

Точное определение эллиптического уравнения на стратифицированных множествах можно найти в приведенной ниже литературе. Здесь же остановимся на кратком его описании. Под стратифицированным множеством Ω мы понимаем связное подмножество $\mathbb{R}^n$, составленное из конечного числа гладких многообразий σ_{ki}, примыкающих друг к другу по типу клеточного комплекса. В Ω выделяется открытое (в индуцированной из $\mathbb{R}^n$ топологии) подмножество Ω_0 связное подмножество, составленное из стратов, на котором и определяется эллиптический оператор. Для этого сначала вводится так называемая – стратифицированная мера и по ней определяется дивергенция $\nabla\vec{F}$ достаточно гладких векторных

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 04-01-00697 и и программы "Университеты России" проект УР 04.01.486

полей. Мы рассматриваем только операторы $\Delta u = \nabla(p\nabla u)$ дивергентного вида.

Литература

1. Gavrilov, Alexey A.; Nicaise, Serge; Penkin, Oleg M. Poincare's inequality on stratified sets and applications. Evolution equations: applications to physics, industry, life sciences and economics (Levico Terme, 2000), 195–213, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 55, Birkhauser, Basel, 2003.

2. Nicaise, Serge; Penkin, Oleg M. Poincare-Perron's method for the Dirichlet problem on stratified sets. J. Math. Anal. Appl. 296 (2004), no. 2, 504–520.

ОБ ОЦЕНКАХ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ МОДЕЛИ КАНАТНОГО МОСТА

Перловская Т.В. (Воронеж)

Рассмотрим систему, состоящую из двух горизонтальных континуумов, расположенных вдоль отрезка $[0, l]$. В точках $0 = \xi_0 \prec \xi_1 \dots \prec \xi_{n-1} \prec \xi_n = l$ оба континуума связаны вертикальными перемычками (отрезками). Нижний континуум составлен из последовательно сочлененных стержней. Сочленения будем считать шарнирными. Верхний континуум и вертикальные перемычки являются упругими тросами. На каждом куске нижнего континуума задается уравнение четвертого порядка, соответствующее деформации упругого стержня, а на каждом куске верхнего континуума и на каждой вертикальной перемычке задается уравнение второго порядка, определяющее деформацию классической струны. Мы предполагаем, что система закреплена в граничных вершинах, в концах каждого стержня – условие шарнира. В точках стыковки ребер решения предполагаются связанными непрерывно. В этих точках присутствуют также естественные условия связи, называемые обычно условиями трансмиссии и порождаемые физическими условиями баланса напряжения.

Краевая задача, возникающая для описанной системы, оказывается невырожденной, т.е. однозначно разрешимой при любой внешней нагрузке f.Решение задачи может быть представлено в виде

$$z(x) = \int\limits_{\Gamma} G(x, s) f(s) ds,$$

где $G(x,s)$ — функция влияния, которую естественно называть функцией Грина.

Оказывается, функция $G(x,s)$ данной задачи удовлетворяет оценкам.

Теорема. Пусть $z_0(x)$ — решение нашей задачи для $f=1$. Тогда для каждого s, не принадлежащего $\partial\Gamma$, существуют числа $\alpha(s)>0$ и $\beta(s)<\infty$ такие, что равномерно по x справедливы неравенства

$$z_0(x)\alpha(s) \leqslant G(x,s) \leqslant z_0(x)\beta(s),$$

причем $\alpha(s), \beta(s)$ суммируемы на Γ.

Полученные оценки позволяют использовать методы М. А. Красносельского для анализа линейных и нелинейных спектральных задач.

Автор благодарен Ю. В. Покорному за постановку задачи и обсуждение результатов.

О ПОВЕДЕНИИ СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ (РЕЗОНАНСА) ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

Плетникова Н.И. (Ижевск)

Рассматривается оператор вида

$$H = -d^2/dx^2 + V_0\theta(x) + \lambda(\cdot,\varphi_0)\varphi_0,$$

где $V_0, \lambda \in \mathbf{R}$, $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\varphi_0(x)$ удовлетворяет оценке $|\varphi_0(x)| \leqslant Ce^{-\alpha|x|}$, $\alpha>0$. Предполагаем, что $V_0<0$ и $\alpha > 2\sqrt{|V_0|}$.

Непрерывный спектр оператора H совпадает с $[V_0;+\infty)$.

Под уровнем E оператора H будем понимать собственное значение или резонанс оператора, а также соответствующее E число $\kappa = \sqrt{E-V_0}$.

Пусть $G_0(x,y,\kappa)$ – ядро резольвенты оператора

$$H_0 = -d^2/dx^2 + V_0\theta(x).$$

Введем обозначение

$$F(\kappa) = \kappa \int\int_{\mathbf{R}^2} G_0(x,y,\kappa)\varphi_0(y)\overline{\varphi_0(x)}\,dy\,dx.$$

Предположим, что $F'(0) \neq 0$ и положим $\lambda_0 = -1/F'(0)$.

Теорема. Пусть $F''(0) \neq 0$ и $\epsilon > 0$ достаточно мало. Тогда существует такая окрестность λ_0, что для любого λ из этой окрестности оператор H имеет единственный уровень $\kappa \in \{|z| < \epsilon\}$, для которого справедлива формула

$$\kappa = \frac{2F'(0)}{F''(0)}(\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0).$$

Замечание. Из явных выражений для $F'(0)$ и $F''(0)$ следует, что $F'(0) \in \mathbf{R}$, а $F''(0) \in i\mathbf{R}$. Следовательно,

а) если $\dfrac{F'(0)}{iF''(0)} > 0$, то κ – резонанс;

б) если $\dfrac{F'(0)}{iF''(0)} < 0$, то κ – собственное значение.

Теорему можно распространить на случай трехмерного оператора в ячейке.

ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Плотникова Ю.А. (Вологда)
japlotnikova@yandex.ru

Уравнение с характеристической линией изменения типа

$$0 = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - \lambda u, \ y > 0, \\ u_{xy} + \lambda u, \ y < 0, \ \lambda > 0, \end{cases} \tag{1}$$

рассматривается на множестве $D = D_- \bigcup D_+$, где D_+ – односвязная область, ограниченная кривой Жордана Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, и отрезком AB; $D_- = \{(x,y)|0 < x < 1, -x < y < 0\}$.

Задача V. *Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:*

1) $u(x,y) \in C(\overline{D}) \bigcap C^2(D_- \bigcup D_+)$;

2) $u(x,y)$ – решение уравнения (1) в областях D_- и D_+;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u\,|_{\Gamma} = \varphi(s), \ s \in [0,l],$$

l – длина кривой Γ, s – длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от точки B,

$$u(x,-x) = f(x), \ x \in [0,1];$$

4) $u(x,y)$ подчиняется условию сопряжения:

$$\lim_{y\to+0} u_y(x,y) = b(x)H_-(x),\ x\in(0,1),$$

где

$$H_-(x) = \lim_{y\to-0}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-x}^{y}(y-t)^{-\rho}(-t)^{\delta}u(x,t)dt,\ 0<\rho<1,\ \rho<\delta,$$

$b(x)$, $\varphi(s)$, $f(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Доказательство единственности решения задачи V проведено с использованием характеристического принципа локального экстремума.

Доказательство существования решения задачи V проведено в случае, когда D_+ ограничена кривой $\Gamma=\Gamma_0: y=\sqrt{x(1-x)}$. Вопрос существования решения задачи V эквивалентно сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма II рода, ядро которого имеет слабую особенность. Доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть: 1) функция $\varphi(x)\in C[0,1]$ и удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha\in[1/2,1]$ в достаточно малой окрестности точек $x=0$ и $x=1$; 2) функции $f(x)\in C[0,1]\bigcap C^1(0,1)$, $f'(x)\in L[0,1]$; 3) $\Gamma=\Gamma_0: y=\sqrt{x(1-x)}$, $x\in[0,1]$; 4) $b(x)\equiv 1$, $\exp(\lambda)\leqslant 2$, $\delta-\rho\leqslant 2$. Тогда существует единственное решение задачи V.*

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И СКОЛЬЗЯЩИЕ РЕЖИМЫ[1]

Покровский А.Н. (Санкт-Петербург)

anpokr@petrodvorets.spb.ru

Пусть $\varphi(x,\varepsilon)=f(x,\varepsilon)/|f(x,\varepsilon)|$, где $x,f\in R^n$, $\varepsilon>0$ и для f выполнены условия В.В.Филиппова. Задача

$$\frac{dx}{ds}=\varphi(x,\varepsilon);\ \frac{dt}{ds}=\frac{1}{|f(x,\varepsilon)|};\ x(0,\varepsilon)=x_0;\ t(0,\varepsilon)=t_0 \qquad (1)$$

имеет решение $x(s,\varepsilon)$, $t(s,\varepsilon)$, которое называется траекторией решения $x(t,\varepsilon)$ задачи

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\varepsilon);\quad x(t_0,\varepsilon)=x_0. \qquad (2)$$

[1]Работа поддержана РФФИ проект 04-01-00048а.

Определение 1. Если $\varphi_0(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(x,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям В.В.Филиппова при всех x, уравнение (2) называется регулярно возмущенным.

Определение 2. Если $\varphi_0(x)$ не уловлетворяет условиям В. В. Филиппова при $x \in B$, $\dim B = k < n$, то уравнение (2) называется сингулярно возмущенным.

При устойчивости особого многообразия B и $\varepsilon \to 0$ в системе (1) реализуется скользящий режим. Вследствие взаимно однозначного отображения решений задач (1) и (2) результаты, известные для (2): теорема А.Н.Тихонова, асимптотика участка срыва, затягивание срыва, и т. д., переносятся на скользящие режимы в системе (1).

При умножении векторной функции $f(x,\varepsilon)$ на скалярную положительную функцию $g(x,\varepsilon)$ правая часть $\varphi(x,\varepsilon)$ в (1) не изменяется. Следовательно, одному скользящему режиму (1) соответствует некоторый класс сингулярно возмущенных уравнений (2).

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО АНАЛОГА МОДЕЛИ ГОЛЬДШТИКА

Потапов Д.К. (Санкт-Петербург)
potapov@apmath.spbu.ru

Рассматривается одномерный аналог математической модели отрывных течений несжимаемой жидкости Гольдштика [1].

Требуется найти функцию $u \in \mathbf{H}^2(a,b)$, удовлетворяющую для почти всех $x \in [a,b]$ уравнению

$$u'' = \begin{cases} \omega, & \text{если } u < \frac{x}{b-a} - \frac{b}{b-a}, \\ 0, & \text{если } u \geqslant \frac{x}{b-a} - \frac{b}{b-a} \end{cases}$$

и граничным условиям $u(a) = u(b) = 0$, где параметр $\omega > 0$.

В зависимости от значений спектрального параметра ω (завихрённости) меняется число решений данной задачи. А именно, число решений равно

$$\begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in \left(0, \frac{8}{(b-a)^2}\right), \\ 2, & \text{если } \omega = \frac{8}{(b-a)^2}, \\ 3, & \text{если } \omega \in \left(\frac{8}{(b-a)^2}, +\infty\right). \end{cases}$$

При $0 < \omega < \frac{8}{(b-a)^2}$ задача имеет единственное решение – нулевое (тривиальное). При $\omega \geqslant \frac{8}{(b-a)^2}$, кроме тривиального, задача имеет ещё два решения

$$u_\pm(x) = \begin{cases} \frac{\omega}{2}\left(x - x_0 + \frac{2}{\omega(b-a)}\right)(x-b), & \text{если } x_0 \leqslant x \leqslant b, \\ x\left(\frac{1}{b-a} - \frac{1}{x_0-a}\right) + 1 + \frac{a}{x_0-a} - \frac{b}{b-a}, & \text{если } a \leqslant x \leqslant x_0, \end{cases}$$

где $x_0 = \frac{a+b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 - \frac{8}{\omega}}$, которые при $\omega = \frac{8}{(b-a)^2}$ совпадают (сливаются в одно).

Таким образом, исследован вопрос о числе решений одномерного аналога модели Гольдштика в зависимости от значений спектрального параметра. Число решений исчерпывается найденными тремя, т. е. нечётно.

Литература

1. *Гольдштик М.А.* Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 147. – № 6. – С. 1310-1313.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ-ДЕРЕВО

Провоторов В.В., Провоторова Е.Н. (Воронеж)

Достаточно хорошо изученная краевая задача на графе-пучке является основой при исследовании задачи Штурма-Лиувилля на графе-дерево [1]. В частности, при построении фундаментальной системы решений задачи Штурма-Лиувилля применяется прием, названный нами методом "склейки".

Рассматривается модельная задача на графе-дерево с пятью ребрами, двумя узлами, двумя двумя ребрами-"вход" и двумя ребрами-"выход": $\gamma_{1,2} = [0, \pi]$, $\gamma_3 = [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, $\gamma_{4,5} = [\frac{2\pi}{3}, \pi]$; уравнения $-y'' + q(x)y = \lambda y$ одинаковы на всех ребрах; в узлах $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ решение $y(x, \lambda)$ непрерывно, производные имеют скачки пропорциональные значениям $y(x, \lambda)$ в этих узлах. Фундаментальная система рещений на графе-пучке узла $\frac{\pi}{3}$ имеет вид

$$\varphi_1(x, \lambda) = \begin{cases} u(x, \lambda), & x \in \gamma_1, \\ u(\frac{\pi}{3}, \lambda) g_1(x, \lambda), & x \in \gamma_2, \\ u(x, \lambda), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

$$\varphi_2(x, \lambda) = \begin{cases} u(\frac{\pi}{3}, \lambda) g_1(x, \lambda), & x \in \gamma_1, \\ u(x, \lambda), & x \in \gamma_2, \\ u(x, \lambda), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

$$\varphi_3(x,\lambda)=\begin{cases} v(x,\lambda), & x\in\gamma_1,\\ v(\frac{\pi}{3},\lambda)g_1(x,\lambda), & x\in\gamma_2,\\ v(x,\lambda), & x\in\gamma_3,\end{cases}$$

на графе-пучке узла $\frac{2\pi}{3}$:

$$\psi_1(x,\lambda)=\begin{cases} u(x,\lambda), & x\in\gamma_1,\\ u(\frac{2\pi}{3},\lambda)g_2(x,\lambda), & x\in\gamma_2,\\ u(x,\lambda), & x\in\gamma_3,\end{cases}$$

$$\psi_2(x,\lambda)=\begin{cases} v(x,\lambda), & x\in\gamma_1,\\ v(x,\lambda), & x\in\gamma_2,\\ v(\frac{2\pi}{3},\lambda)g_2(x,\lambda), & x\in\gamma_3,\end{cases}$$

$$\psi_3(x,\lambda)=\begin{cases} u(x,\lambda), & x\in\gamma_1,\\ u(\frac{2\pi}{3},\lambda)g_2(x,\lambda), & x\in\gamma_2,\\ u(x,\lambda), & x\in\gamma_3,\end{cases}$$

(здесь $u(x,\lambda), v(x,\lambda)$ — фундаментальная система решений уравнения $-y''+q(x)y = \lambda y$ на $[0,\pi]$, функции $g_k(x,\lambda)\,(k=1,2)$: $g_1(\frac{\pi}{3},\lambda)=g_2(\frac{2\pi}{3},\lambda)=1$, $g_1'(\frac{\pi}{3},\lambda)=g_2'(\frac{2\pi}{3},\lambda)=0$ также удовлетворяют этому уравнению).

Суть метода "склейки" состоит в реализации системы соотношений $\varphi_k(x,\lambda)=\psi_k(x,\lambda)$, $k=1,2,3$ на ребре γ_3 в результате чего получается фундаментальная система решений на графе-дерево, состоящая из четырех функций.

Литература

1. Ю.В.Покорный и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / М.: Физматлит, 2004. - 272с.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ОДНОМЕРНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТИ[1]

Прядиев В.Л. (Воронеж), Коровина О.В. (Борисоглебск)
pryad@mail.ru, olesya_korovina@mail.ru

Решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи для волнового уравнения на конечной и ограниченной одномерной пространственной

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 04-01-0049), программы "Университеты России" (проект ур.04.01.015) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (N НШ-1643.2003.1).

сети Г при краевых условиях 1-го рода может быть представлено (если $u_t(x,t)=0$) в виде: $u(x,t)=\int\limits_{\Gamma} g(x,t;s)\cdot(-\varphi''(s))\,ds$, где $\varphi(x)=u(x,0)$, а g – некоторая функция, не зависящая от φ (см. [1]). В [1] же показано, что g описывается с помощью конечного числа таких операций, как сложение, умножение на число и аддитивный сдвиг независимого аргумента, через решение некоторой ситемы (обозначим её (A)) линейных функциональных уравнений с постоянными коэффициентами и постоянными запаздываниями. Это сводит вопрос об описании $u(x,t)$ *в конечном виде*[2], через $\varphi(x)$, к описанию в конечном виде решений системы (A). Оказывается, последнее возможно и в случае несоизмеримых ветвей Г. Например, если Г имеет 3 ветви, 1 узел и 3 граничных точки, а длины ветвей α_i, $i=\overline{1,3}$, таковы, что α_i/α_j иррациональны при $i\neq j$, то (A) имеет вид:

$$3v_i(t+2\alpha_i)=-3v_{i+3}(t+\alpha_i)=-v_i(t)+2\sum_{j\neq i}v_j(t),\qquad i=\overline{1,3},\qquad (\star)$$

где $v_i:[0;+\infty)\to C(\Gamma)$. Далее, ввиду симметрии ($\star$) относительно $i=\overline{1,3}$, ограничимся описанием v_1. Образ v_1 при одностороннем преобразовании Лапласа имеет вид:

$$\widehat{v_1}=\frac{(-a_2a_3+a_2+a_3+1)w_1+2a_1(a_3+1)w_2+2a_1(a_2+1)w_3}{3-(3a_1a_2a_3+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1-a_1-a_2-a_3)},\ (*)$$

где $a_i(p)=e^{-2\alpha_i p}$, $w_i(p)=\int\limits_0^{2\alpha_i}e^{-pt}v_i(t)\,dt$. Полученное в [1] описание функций v_i через функцию Грина краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения на Г позволяет установить, что

$$w_i(p)=-p^{-1}e^{-2\alpha_i p}+p^{-2}\left(\beta_{i1}e^{-2\alpha_i p}+\beta_{i2}e^{-\beta_{i3}p}+\beta_{i4}\right),$$

где $\beta_{ij}:\Gamma\to\mathbf{R}$ кусочно-линейны и определяются начальными условиями для ($\star$), причём $\beta_{i3}\geqslant 0$. Применяя далее, как и в [2, § 4.7], теорему смещения, получаем оригинал v_1 в конечном виде.

---

[2]Под описанием в конечном виде понимается описание с помощью конечного числа арифметических операций, элементарных функций, квадратур, а также аддитивных сдвигов, умножения на -1 и взятия целой части независимого аргумента.

Литература

[1] Прядиев В. Л. Ядро интегрального оператора, обращающего одну начально-краевую задачу для волнового уравнения на одномерной пространственной сети // Сб. тр. матем. ф-та ВГУ, вып. 9 (нов. сер.). – Воронеж, 2005. С. 78-92.

[2] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОНТИНУАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ[1]

Псху А.В. (Нальчик)

pskhy@mail333.com

Рассмотрим уравнение диффузии континуального порядка

$$u_{xx}(x,y) - D_{0y}^{[\alpha,\beta]}u(x,y) = f(x,y), \quad 0 < \beta \leqslant 1, \tag{1}$$

где $D_{(0y)}^{[\alpha,\beta]}u = \int_\alpha^\beta D_{0y}^t u dt$ – производная континуального порядка [1, с.33], D_{0y}^t – производная Римана-Луивилля порядка t [1, с.9].

Фундаментальное решение уравнения (1) имеет вид [2]

$$\Gamma(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty w_{\alpha,\beta}(y,t^2)\cos(xt)dt,$$

где $w_{\alpha,\beta}(y,\lambda)$ – решение задачи [3]:

$$D_{0y}^t w_{\alpha,\beta}(y,\lambda) + \lambda w_{\alpha,\beta}(y,\lambda) = 0, \quad \lim_{y\to 0} D_{0y}^{[\alpha-1,\beta-1]} w_{\alpha,\beta}(y,\lambda) = 1.$$

Показано, что для некоторого положительного k справедливо соотношение

$$\lim_{(x/y)\to\infty} \Gamma(x,y) exp(y\cdot k\rho_0(x/y)) = 0, \quad x \geqslant x_0 > 0, \tag{2}$$

где $\rho_0(x/y) = \rho(\beta^2x^2/(4y^2), 2-\beta)$, а $\rho = \rho(t,\varepsilon)$ для неотрицательных t и ε определяется из соотношения $\rho^\varepsilon \ln\rho = t$.

Соотношение (2) позволяет доказать единственность решения задачи Коши для уравнения (1) в классе функций быстрого роста.

[1] Работа выполнена при поддержке "Фонда содействия отечественной науке".

Литература

1. Нахушев А.М. Дробного исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. Псху А.В. Уравнение диффузии континуального порядка // Доклады Адыгейской (Черкесской) Международной академии наук. 2004. Т.7, № 1. С. 79-83.

3. Псху А.В. Задача Коши для дифференциального уравнения континуального порядка // Доклады Адыгейской (Черкесской) Международной академии наук. 2005. Т.7, № 2. С. 41-45.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ФОНЕ ДВУМЕРНЫХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО АДИАБАТИЧЕСКОГО ГАЗА

Раев К.Т., Раев А.К. (Кыргызстан, г. Ош)

raev_k@rambler.ru

В работе рассматривается одноатомный идеальный газ и физические свойства среды задаются функционалом интегрального вида

$$L=\int\limits_0^t\int\limits_V\int\int\frac{1}{2}\rho_0(r)\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2-\frac{3}{2}p_0(r)\left|\frac{\partial R}{\partial r}\right|^{-\frac{2}{3}}dxdydzdt, \qquad (1)$$

где $r=(x,y,z)\in R^3$ - декартовы координаты элемента среды в начальном состоянии, $R(t,r)$ - декартовы координаты элемента среды в момент временипt, $\rho_0(r)$ - плотность в точке r в опорном состоянии, $p_0(r)$ - давление в точке r в опорном состоянии, $\frac{\partial R}{\partial r}$ - матрица частных производных, $\left|\frac{\partial R}{\partial r}\right|=\frac{D(X,Y,Z)}{D(x,y,z)}$ - определитель матрицы частных производных, $\frac{\partial R}{\partial t}$ - скорость в точке R(t, r).

Пусть начальное состояние газа является равновесным состоянием с постоянными давлением $p_0(r)=p_0$ и плотностью $\rho_0(r)=\rho_0$. Рассмотрим двумерное вращательное движение среды, когда каждая точка совершает круговое движение с центром в начале координат и постоянной угловой скоростью.

Переходя к полярным координатам интегральное действие (1) запишем в виде [1]

$$L=\int\limits_0^t\int\limits_V\int\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2+P^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2\right]-\frac{3}{2}\left(\frac{P}{\rho}\frac{D(P,\Phi)}{D(\rho,\varphi)}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}\rho\, d\rho\, d\varphi\, dt, \qquad (2)$$

где (ρ, φ) — цилиндрические координаты начального равновесного состояния газа, $(P(\rho, \varphi, t), \Phi(\rho, \varphi, t))$ — цилиндрические координаты положения точки с начальной координатой (ρ, φ) в момент времени t.

Для исследования решений уравнений Эйлера, соответствующие интегральному действию (2), применяем метод теории возмущений, и будем искать решения близкие к стационарному решению в следующем виде

$$\begin{cases} P(\rho,\varphi,t) &= P_0(\rho,\varphi,t) + \epsilon P_1(\rho,\varphi,t) + O(\epsilon^2), \\ \Phi(\rho,\varphi,t) &= \Phi_0(\rho,\varphi,t) + \epsilon \Phi_1(\rho,\varphi,t) + O(\epsilon^2). \end{cases} \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), собирая члены при одинаковых степенях ϵ, из плотности лагранжиана относительно начального состояния выделив квадратичную плотность лагранжиана, выписываем уравнения Эйлера

$$\left(P_1\Phi_{0t}^2 + 2P_0\Phi0t\Phi1t\right)\rho + \frac{q_1}{P_1}\left[\frac{D(P_0,\Phi_1)}{D(\rho,\varphi)} + \frac{D(P_1,\Phi_0)}{D(\rho,\varphi)}\right] - \frac{d_0}{P_0}\frac{D(P_0,\Phi_0)}{D(\rho,\varphi)} -$$

$$- \left[\frac{D(q_0,\Phi_1)}{D(\rho,\varphi)} + \frac{D(q_1,\Phi_0)}{D(\rho,\varphi)}\right] + \frac{D(d_0,\Phi_0)}{D(\rho,\varphi)} - \rho P_{1tt} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{D(q_0,P_1)}{D(\rho,\varphi)} + \frac{D(q_1,P_0)}{D(\rho,\varphi)} - \frac{D(d_0,P_0)}{D(\rho,\varphi)} - \rho\frac{\partial}{\partial t}(2P_0P_1\Phi_{0t} + P_0^2\Phi_{1t}) = 0, \tag{5}$$

где $q_0 = \left(\frac{P_0}{\rho}\frac{D(P_0,\Phi_0)}{D(\rho,\varphi)}\right)^{-\frac{5}{3}} P_0, q_1 = \left(\frac{P_0}{\rho}\frac{D(P_0,\Phi_0)}{D(\rho,\varphi)}\right)^{-\frac{5}{3}} P_1,$

$d_0 = \frac{5}{3}\left(\frac{P_0}{\rho}\frac{D(P_0,\Phi_0)}{D(\rho,\varphi)}\right)^{-\frac{8}{3}}\left[\frac{P_0}{\rho}\left(\frac{D(P_0,\Phi_1)}{D(\rho,\varphi)} + \frac{D(P_1,\Phi_0)}{D(\rho,\varphi)}\right) + \frac{P_1}{\rho}\frac{D(P_0,\Phi_0)}{D(\rho,\varphi)}\right] P_0$

Решение уравнений (4), (5) ищем в виде

$$\begin{cases} P(\rho,\varphi,t) &= P_0(\rho) + \epsilon P_1(\rho,t) + O(\epsilon^2), \\ \Phi(\rho,\varphi,t) &= \Phi_0(\rho,\varphi,t) + \epsilon \Phi_1(-\rho,\varphi) + O(\epsilon^2). \end{cases} \tag{6}$$

Уравнение (5) выполняется автоматически, а уравнение (4) имеет вид

$$\left(2P_0 w\frac{c(\rho) - 2P_0P_1w}{P_0^2} + P_1w^2\right)\rho +$$

$$+ \left(\frac{q_1}{P_1}P_{1\rho} - \frac{d_0}{P_0}P_{0\rho} - q_{1\rho} + d_{0\rho}\right) - \rho P_{1tt} = 0.$$

Литература

1. *Винокуров В. А., Раев К. Т.* Двумерный вихрь в идеальном адиабатическом газе. // Изв. АН Кирг. ССР, сер. физ.-техн. и математические науки, –Фрунзе.-1987,-№ 1,–С. 24-28.

КОЭФФИЦИЕНТ АСИММЕТРИИ И ЭКСЦЕСС НЕКОТОРЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Раев К.Т., Раева М.Т. (Кыргызстан, г. Ош)

В практической жизни часто приходится сталкиваться с различными величинами. Значения многих из встречающихся величин могут быть заранее известны. Значение других величин можно непосредственно найти из опыта или с помощью вычислений. В результате повторения некоторых опытов можно всегда получать одно и то же значение определенной величины, а в результате других значение величины изменяется, причем результат каждого отдельного опыта невозможно предугадать заранее. Величины, которые могут принять в результате опыта любое из возможных значений, неизвестное заранее - какое, заслуживают особого внимания и являются предметом дальнейшего изучения.

Известно, что закон ряд распределения случайной величины дает исчерпывающую информацию о ней. Однако такой закон распределения бывает трудно обозримым, не всегда удобным для анализа. Для решения многих практических задач совсем необязательно знать все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности, а достаточно указать отдельные числовые параметры, которые позволяют в удобной компактной форме отразить существенные особенности случайной величины. Эти характеристики случайной величины, являющиеся не функциями, а числами, называют числовыми характеристиками случайной величины. Их назначение - в сжатой форме выразить наиболее важные черты распределения.

Одним из наиболее часто встречающихся распределений является нормальное распределение. При изучении законов распределений, отличных от нормального, возникает необходимость количественно оценить это различие. С этой целью вводятся специальные числовые характеристики, в частности, коэффициент асимметрии и эксцесс. Как оценить коэффициент асимметрии? Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Коэффициент асимметрии случайной величины X, распределенной по закону Пуассона равен

$$A = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

а эксцеес равен

$$E = \frac{1}{\lambda}.$$

Теорема 2. Коэффициент асимметрии случайной величины, распределенной по равномерному закону A=0 равен нулю, эксцесс E=-1,2.

Литература

1. *Колмогоров А. Н.* Курс теории вероятностей.–М.: Наука,-1976.

О ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С НЕПУСТЫМ СПЕКТРОМ

Ратыни А.К. (Иваново)
ratyni@isuct.ru

Рассматривается краевая задача (далее "Задача")

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(X)u_{x_i} + c(X)u - u_t = -\lambda u + f(X) \ (X \in Q),$$

$$u(X) - \beta(X)u(\sigma X) = \psi(X) \ (X \in P).$$

Здесь и ниже: $x = (x_1, ..., x_n)$ - точка $R^n, X = (x,t)$ - точка R^{n+1}; D –ограниченная область R^n с границей S, $\bar{D} = D \cup S$, $Q = \{X \in R^{n+1} : x \in D, t \in (0,T]\}$ $(T = const > 0)$, $D_0 = \{X \in R^{n+1} : x \in D, t = 0\}, \Gamma = \{X \in R^{n+1} : x \in S, t \in [0,T]\}$, $P = D_0 \cup \Gamma$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:* $S \in C^2$; $a_{ij}, b_i, c \in C_\alpha(\bar{Q})$; *матрица* (a_{ij}) *положительна определена в* $\bar{Q}$; $\lambda-$ *числовой параметр;* $\beta \in C(P)$; $\sigma-$ *однозначное непрерывное отображение* P *в* Q.*Тогда существует такое число* c_0, *что при* $\lambda \leqslant c_0$ *задача однозначно разрешима в* $C_{2+\alpha}(Q) \cap C(\bar{Q})$ *для любых* $f \in C_\alpha(\bar{Q})$, $\psi \in C(P)$. *Если, кроме перечисленных условий, выполнены неравенства* $\beta(X) \geqslant 0$ *на* P, $\beta(X) \not\equiv 0$ *на* D_0, *то задача при* $f \equiv 0$, $\psi \equiv 0$ *имеет вещественное собственное число, которому отвечает неотрицательная в* Q *собственная функция задачи* .

Заметим, что эта теорема при произвольном σ не является следствием результатов статьи автора "О нелокальных краевых задачах для эллиптических и параболических уравнений", опубликованной в сборнике "Краевые задачи". Пермь, ППИ.-1990.

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рогозин А.В. (Омск)

Пусть E – метрическое пространство с метрикой ρ , B – шар в E, $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим в фазовом пространстве E динамическую систему

$$x_{n+1} = \varphi(x_n, n), n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

с положением равновесия $z_0 : \varphi(z_0, n) = z_0$. Будем предполагать: а) $\varphi(x, n)$ почти периодична; б) при каждом n $\varphi(x, n)$ локально равномерно непрерывна: это свойство имеет место на каждом шаре $B \subset E$. Будем называть функцию $v(x) : E \to \mathbb{R}$ положительно определенной относительно положения равновесия z_0 и писать $v(x) > 0$, если она локально равномерно непрерывна, $v(z_0) = 0$ и отделена снизу от нуля на дополнении каждой крестности точки z_0. Построим по функции $v(x) > 0$ и числу $\Delta > 0$ последовательность множеств: $M_0(\Delta) = \{x \in E \,|\, v\,(x) \leqslant \Delta\}$, $M_n(\Delta) = \varphi\left(M_{n-1}(\Delta), n\right), n = 1, 2, ...$ и пусть

$$v_n(\Delta) = \sup_{x \in M_n(\Delta)} v(x) \tag{2}$$

ТЕОРЕМА. Пусть при указанных условиях, существует функция $v(x) > 0$ и число $\Delta_0 > 0$ такие, что

1° разностная производная функции $v(x)$ вдоль траекторий системы (1) неположительна: $\dot{v}(x, n) = v(\varphi(x, n)) - v(x) \leqslant 0$;

2° при каждом $\Delta \in (0, \Delta_0]$ последовательность (2) содержит хотя бы два различных числа.

Тогда положение равновесия z_0 асимптотически устойчиво равномерно по начальному условию.

Следствие. Для равномерной по начальному условию асимптотической устойчивости решения $x_n = 0$ разностного уравнения $x_{n+1} = A_n x_n, (n = 0, 1, 2, ...)$ в гильбертовом пространстве H над полем $\mathbb{C}$ с почти периодическим оператором A_n достаточно выполнение условий:

$$A_n^* A_n \leqslant I\,(n \geqslant 0); A_{n_0}^* A_{n_0} < I$$

хотя бы при одном $n_0 \geqslant 0$.

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Рыхлов В.С. (Саратов)

RykhlovVS@info.sgu.ru

Пусть $L(\lambda)$ есть пучок $\ell(y,\lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk}\lambda^s y^{(k)}(x)$, $U_j(y,\lambda) \equiv U_{j0}(y,\lambda) + U_{j1}(y,\lambda) := \sum_{s+k\leqslant\sigma_j} \lambda^s(\alpha_{jsk}y^{(k)}(0) + \beta_{jsk}y^{(k)}(1)) = 0$, $j=\overline{1,n}$, где $p_{sk}, \alpha_{jsk}, \beta_{jsk} \in \mathbf{C}$, $\sigma_j \leqslant n-1$. Пусть $\sigma = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n$. Предположим корни $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ уравнения $\sum_{s+k=n} p_{sk}\omega^k = 0$ попарно различны и отличны от нуля. Положим $y_k(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_k x)$, $k=\overline{1,n}$. Обозначим $V_k(\lambda) = (U_{10}(y_k,\lambda),\ldots,U_{n0}(y_k,\lambda))^T$, $W_k(\lambda) = e^{-\lambda\omega_k}(U_{11}(y_k,\lambda),\ldots,U_{n1}(y_k,\lambda))^T$. Для $\Gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda),\ldots,\gamma_n(\lambda))^T$ пусть $g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))$ есть решения уравнения $\ell(y,\lambda)=0$, введенные в [1]. Положим $\chi_{J_k} = \sum_{\alpha\in J_k}\omega_\alpha$, где J_k, $k=1,2,\ldots,N$, – произвольный набор из k различных натуральных чисел от 1 до n, $\chi_{J_0}=0$. Обозначив $[\eta]_\sigma = \eta_0 + \frac{\eta_1}{\lambda} + \ldots + \frac{\eta_\sigma}{\lambda^\sigma}$, х.о. пучка $L(\lambda)$ можно записать $\Delta(\lambda) = \det\left(U_j(y_k,\lambda)\right)_{j,k=1}^n = \lambda^\sigma \sum_{J_k}\left[P^{J_k}\right]_\sigma e^{\lambda\chi_{J_k}}$. Через M_Δ обозначим выпуклую оболочку тех точек χ_{J_k}, для которых $\left[P^{J_k}\right]_\sigma \not\equiv 0$. Многоугольник M_Δ назовем характеристическим многоугольником (х.м.) функции $\Delta(\lambda)$. Аналогично введем х.м. $M_{g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}$ функции $g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))$ при любом фиксированном $x\in[0,1]$. Назовем х.м. вектора $\Gamma(\lambda)$ (обозначаем $M(\Gamma)$) выпуклую оболочку всех $M_{g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}$ при $x\in[0,1]$. Будем говорить, что $\Gamma(\lambda)$ удовлетворяет условию (α), если M_Δ имеет не менее двух точек касания с $M(\Gamma)$, причем перпендикуляры, проведенные из некоторой фиксированной внутреней точки к сторонам $M(\Gamma)$, на которых лежат точки касания (если точка касания – вершина, то таких перпендикуляров два), разбивают комплексную плоскость на секторы раствора $< \pi$.

Теорема. *Если* $V_{i_s}(\lambda) \in (\alpha)$, $s=\overline{1,k}$, $W_{j_t}(\lambda)\in(\alpha)$, $t=\overline{1,l}$, $k+l\geqslant n$ *и для всех* $\lambda\in\mathbf{C}$ $\operatorname{rank}(V_{i_1}(\lambda)\ldots V_{i_k}(\lambda)W_{j_1}(\lambda)\ldots W_{j_l}(\lambda)) = n$, *то система с.п.ф. пучка* $L_0(\lambda)$ *n-кратно полна в* $L_2[0,1]$.

Литература

1. Rykhlov V.S. Spectral and Evolutional Problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. –

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), гранта РФФИ (проект 03-01-00169) и программы "Университеты России" (проект ур.04.01.375).

Simferopol: Simferopol State University. – 1997. – Vol. 7. – P. 70–73.

ОБ УСЛОВИЯХ СИЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА В ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ НА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТИ

Рябцева Н.Н. (Белгород)
science@bupk.ru

Исследуется задача о сильном минимуме функционала внешне классической формы

$$\Phi(u) = \int\limits_{\Gamma} F(x, u, u')dx \qquad (1)$$

в классе непрерывных в целом на Г функциях, достаточно гладких на каждом ребре. Здесь Г - пространственная сеть из $\mathbb{R}^n$. Предполагается закрепление концов. Терминологию и обозначения используем из [1].

Необходимым условием экстремума (1) является аналог уравнения Эйлера $F_u - \frac{d}{dx}F(u') = 0$, и в каждой внутренней вершине Г выполняется $\sum\limits_{i \in \Gamma(a)} (F_{u'})_i = 0$.

Необходимым условием минимума является также аналог $F_{u'u'}(x, u_0(x), u_0'(x)) \geqslant 0$ классического неравенства Лежандра.

Это условие оказывается достаточным и для неосцилляции "уравнения Эйлера". В докладе излагается условие сильного экстремума описанной задачи, в связи с чем обсуждается построение аналогов поля экстремалей, а также построения аналога функции $p(x, u)$ наклона. Здесь приходится преодолевать трудности даже на уровне постановки понятия, поскольку функция $p(x, u)$ наклона оказывается определенной не на обычной плоскости, а на произведении $\Gamma \times \mathbb{R}$. На этом пути построен аналог классической функции Вейерштрасса и изучена возможность построения аналога теоремы Гильберта.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.

КРИТЕРИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Сабитов К.Б. (Стерлитамак)

Sabitov@bashedu.sgpi.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv sgnt \cdot |t|^m u_{xx} + u_{tt} - b^2 sgnt \cdot |t|^m u = 0\ , \qquad (1)$$

где $m = const > 0$, $b = const \geqslant 0$, в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, α, β – заданные положительные числа.

Задача Дирихле. *Найти в области D функцию $u(x,t)$ удовлетворяющую условиям: $u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-)$; $Lu(x,t) \equiv 0$, $\ (x,t) \in D_+ \cup D_-$; $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $\ -\alpha \leqslant t \leqslant \beta$; $u(x,\beta) = f(x)$, $u(x,-\alpha) = g(x)$, $\ 0 \leqslant x \leqslant 1$, где f и g – заданные функции, причем $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.*

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,t)$ задачи Дирихле, удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{x \to 0+0} u_x(x,t)\ \sin \pi k x = \lim_{x \to 1-0} u_x(x,t)\ \sin \pi k x = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

то оно единственно только тогда, когда

$$\Delta_k(\alpha,\beta) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) K_{\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q) - \frac{\pi}{2} I_{\frac{1}{2q}}(p_k \beta^q) Y_{\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) \neq 0$$

при всех $k \in N$, где $2q = m + 2$, $p_k^2 = b^2 + (\pi k)^2$.

Теорема 2. *Пусть $f(x), g(x) \in C^2[0,1]$ и на сегменте [0,1] имеют кусочно-непрерывную производную третьего порядка и $f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0$, $g(0) = g(1) = g''(0) = g''(1) = 0$. Тогда задача Дирихле разрешима только тогда, когда $\Delta_k(\alpha,\beta) \neq 0$ при всех $k \in N$.*

Построенное решение задачи Дирихле принадлежит классу $C^2(\overline{D})$ и является всюду в D решением уравнения (1). Следовательно, линия вырождения $t = 0$ как особая линия устраняется.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Сабитова Ю.К. (Стерлитамак)
Sabitov@bashedu.sgpi.ru

Рассмотрим уравнение

$$Lu(x,y) = y^m u_{xx} - u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $m = const > 0$, в полуплоскости $Q = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, y > 0\}$.

Задача. *Найти в области* Q *функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{Q}) \cap C^1(\mathrm{Q} \cup \{x=0, y>0\} \cup \{x=1, y>0\}) \cap C^2(\mathrm{Q}), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, (x,t) \in \mathrm{Q}, \tag{3}$$

$$u_x(0,y) = 0, u(0,y) = u(1,y), y \geqslant 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) = \tau(x), u_y(x,0) = \nu(x), 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{5}$$

Теорема. Если $\nu(x) \in C^{1+\alpha}[0,1], \tau \in C^{2+\alpha}[0,1]$, $\tau(1) = \tau(0)$, $\tau'(0) = 0$, $\nu(1) = \nu(0), \nu'(0) = 0$, то существует единственное решение задачи (2)—(5) и оно представимо в виде суммы ряда

$$u(x,y) = u_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)\cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)x\sin(2\pi nx), \tag{6}$$

где функции $u_0(y), u_n(y), v_n(y)$ — соответствующие коэффициенты ряда (6) по системе функций $\{2(1-x), 4(1-x)\cos(2\pi nx), 4\sin(2\pi nx)\}$.

Отметим, что аналогичная задача в случае, когда уравнение (1) является эллиптическим, была изучена в работе [1].

Литература

1. Моисеев Е.И. //Дифференц уравнения. 1999. Т.35, №8. С. 1094—1100.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Савушкин А.Ю. (Волгоград)
sandro@vags.ru

В задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской в двойном силовом поле, определяемом физическими константами p, r, рассматривается случай зависимости первых интегралов H, G, K с уравнением $(p^2h - 2g)^2 - r^4k = 0$ (М.П. Харламов, 2002). Соответствующее критическое интегральное многообразие N является множеством критических точек функции $F = (p^2H - 2G)^2 - r^4K$, лежащих на уровне $F = 0$. Индуцированная система на N является почти всюду гамильтоновой с двумя степенями свободы. Найдено преобразование, разделяющее переменные, с помощью которого эта система явно проинтегрирована в эллиптических функциях. Для всех значений двух почти всюду независимых на N первых интегралов H и $M = (p^2H - 2G)/r^4$ указан топологический тип интегральных многообразий и критических интегральных поверхностей. Построены графы А.Т. Фоменко для изоэнергетических уровней Q^3_h системы на N. Специфика данного случая состоит в том, что, во-первых, критическое множество N не является в целом гладким многообразием – оно стратифицировано на многообразия размерности от 1 до 4, в зависимости от ранга матрицы вторых производных функции F в точках фазового пространства. Во-вторых, и в области гладкости имеется тощее подмножество, в точках которого вырождается индуцированная симплектическая структура. Поэтому в этой задаче обнаруживается явление, при котором одномерный граф Фоменко заканчивается не минимальной (максимальной) окружностью, а некоторой негладкой поверхностью, являющейся образом двумерного тора при гладком отображении. Несмотря на существование явных формул, описывающих это отображение, соответствующая топология до конца не изучена. Оказывается также, что не все уровни Q^3_h связны. Построена бифуркационная диаграмма независимых интегралов H и M. Гладкость N нарушается на множестве точек, где принимаемые значения пары (h, m) лежат либо на прямой $m = 0$, либо на бифуркационной кривой $2p^2m^2 + 2hm + 1 = 0$. Таким образом, для всех допустимых значений h многообразие Q^3_h может иметь общие точки с множеством особенностей фазового пространства.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ С ГИСТЕРЕЗИСНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Семенов М.Е., Рудченко Т.В., Кутепова Л.В. (Воронеж)

В работе рассматривается система операторно-дифференциальных уравнений:

$$\dot{Z} = U - P, \ Z(0) = 0, \tag{1}$$

$$\dot{V} = P - k_1 V, \ V(0) = 0, \tag{2}$$

$$P(t) = Z(t) \int\limits_{\alpha<\beta} \omega(\alpha.\beta, t) d\alpha d\beta, \tag{3}$$

$$\omega(\alpha, \beta, t) = \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)]c(t). \tag{4}$$

Эта система описывает динамику изменений количества товара у производителя и потребителя, если принять следующие обозначения: $Z(t)$– количество товара у производителя, $V(t)$ – количество товара у потребителя, $U(t)$ – темп производства, $P(t)$ – темп продаж (количество продаж в единицу времени), k_1 – коэффициент потребления, k_2 – коэффициент затрат на хранение единицы товара, $c(t)$ – цена единицы товара. Уравнения (3), (4) описывают динамику преобразователя Прейзаха [1] – покупательскую способность в условиях "гистерезисного" спроса. Доход производителя $J(T)$ с учетом введенных обозначений определяется равенством

$$J(T) = \int\limits_0^T (c(t)P(t) - U(t) - k_1 Z(t)) dt. \tag{5}$$

В работе получены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность функций $U(t)$ и $c(t)$, максимизирующих функционал (5).

Литература

1. М.А. Красносельский, А.В. Покровский. Системы с гистерезисом. // М. Наука, 1985. 327 с.

О ФОРМУЛАХ СЛОЖЕНИЯ

Семенов Ю.М. (Чебоксары)

SemJuM@chuvsu.ru

Пусть C — управляемая система, с t-семейством множеств достижимости

$$K_U(C,t) = A(t)\int_0^t B(s)\Omega ds,$$

определенным относительно некоторого класса управлений U. Если для всех пар значений (t_1, t_2), принадлежащих первому квадранту плоскости $\mathbb{R}^2$ множества $K_U(C,t_1)$ $K_U(C,t_2)$ $K_U(C,t_1+t_2)$ связаны некоторым соотношением $\mathbf{P}$, то говорят, что остов системы C удовлетворяет формуле сложения $\mathbf{P}$ в классе управлений U. Наиболее известна формула сложения для линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами

$$K(C,t_1+t_2) = K(C,t_1) + e^{\alpha t_1}K(C,t_2).$$

Эта формула имеет место, например, в классе кусочно-постоянных управлений.

Рассмотрим управляемую систему $C = (V,\alpha,\zeta,\Omega)$ класса $\mathfrak{C}'$, множество достижимости которой задается формулой

$$K(C,t) = e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha s}e^{\zeta s}\Omega ds.$$

Для системы C класса $\mathfrak{C}'$ имеет место формула сложения

$$K(C,t_1+t_2) = K(\tilde{C},t_1) + e^{\alpha t_1}K(C,t_2), \tag{1}$$

где $\tilde{C} = (V,\alpha,\zeta,e^{\zeta t_2}\Omega)$.

Пусть $\omega = (t_1,...,t_r)$ – некоторое разбиение полуинтервала $[0,t)$. Тогда в классе кусочно-постоянных управлений, соответствующих разбиению ω, применив формулу (1) получаем, что

$$K_\omega(C,t) = S(t_1)e^{\zeta(t_2+\ldots+t_r)}\Omega + e^{\alpha t_1}S(t_2)e^{\zeta(t_3+\ldots+t_r)}\Omega + \ldots$$
$$\ldots + e^{\alpha(t_1+\ldots+t_{r-1})}S(t_r)\Omega. \tag{2}$$

Здесь

$$S(t) = \int_0^t e^{\alpha(t-s)}e^{\zeta s}ds.$$

Формула (2) оказывается полезной при исследовании остовов систем класса $\mathfrak{C}'$.

О ДОПУСТИМОМ УПРАВЛЕНИИ СПЕКТРОМ ОПЕРАТОРА МОНОДРОМИИ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Сивков Д.А. (Ижевск)
dimasiv@udm.ru

Пусть H — некоторое сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим уравнение

$$\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial u}{\partial t}+a(t)Du=0, \tag{1}$$

где $u(t)$ для каждого $t\in R$ является элементом H, $\alpha,\beta\in C$, $\alpha\neq 0$, $a(t)$ — непрерывная ω-периодическая по времени t функция, D — линейный оператор из H в H, имеющий компактную резольвенту $R(\lambda)$ и полную в H ортонормированную систему собственных функций $\{\psi_n\}$.

Уравнение (1) может быть представлено в виде нормальной системы:

$$\begin{cases} \dot{u}(t)=w(t), \\ \dot{w}(t)=-\frac{\beta}{\alpha}w(t)-\frac{1}{\alpha}a(t)Du(t). \end{cases} \tag{2}$$

Следующая теорема дополняет результаты работы [2].

Теорема. *Пусть $\Omega=\{\rho_{k_1},\dots,\rho_{k_l}\}$ — заданное подмножество спектра $\sigma(X(\omega))$, возмущение $u(t)=-F(t)SF^{-1}(t)x(t)$ для системы (2) переводит Ω в заданное множество Θ, где вид S определен теоремой 1 работы [1] для оператора $Q=\frac{1}{\omega}\ln X(\omega)$, и $F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\frac{\lambda_n}{\alpha}\int_0^t(a(s)-\mu)\,ds & 0\end{pmatrix}(\cdot,\psi_n)\psi_n$. Тогда возмущение $\tilde{u}(t)=F(t)\tilde{S}F^{-1}(t)$, где $\tilde{S}$ такое, что $\operatorname{rank}\tilde{S}=\operatorname{rank}S$, $\|S-\tilde{S}\|<\min_{\lambda\in\Omega}\|R(\lambda;Q-S)\|^{-1}$, переводит Ω в $\tilde{\Theta}$, вид $\tilde{\Theta}$ может быть получен.*

Литература

1. **Исламов Г.Г.** Свойства одноранговых возмущений // Изв. вузов. Математика. 1989. №4. С. 29-35.

2. **Сивков Д.А.** Управление спектром периодических систем возмущениями минимального ранга. // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2005. Вып. 3(33). С. 3-94.

ОБ ОЦЕНКАХ СМЕШАННЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИЙ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ РЯДОМ ФУРЬЕ[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)
dvr@vstu.ru

Пусть $1 < p < \infty; 0 < \theta \leqslant \min(p,2); \max(p,2) \leqslant \tau < \infty; k_i, \beta_i > 0; \lambda_{n_i}(s) = n_i^{k_i s}(\int\limits_{1/n_i}^{2\pi} \alpha_i(t_i)dt_i + n_i^{\beta_i s}\int\limits_0^{1/n_i} \alpha_i(t_i)t_i^{\beta_i s}dt_i);$

$\lambda^*_{n_i}(s) = \int\limits_{1/n_i}^{2\pi} \alpha_i(t_i)dt_i (n_i = 1,2,\ldots, i = 1,2); \lambda^s_{n_1 n_2} =< \lambda_{n_1}(s)\cdot\lambda_{n_2}(s) >$ (равно $\lambda_{n_1}(s)\cdot\lambda_{n_2}(s)$, где произведение $\alpha_1(t_1)\cdot\alpha_2(t_2)$ заменяется на $\alpha(t_1,t_2)$); $\lambda^{*_1 s}_{n_1 n_2} =< \lambda^*_{n_1}(s)\cdot\lambda_{n_2}(s) >$ (аналогично $\lambda^{*_2 s}_{n_i n_2}(s), \lambda^{*_{1,2} s}_{n_i n_2}(s)$); $\lambda(\delta_1,\delta_2,s) = \lambda_{1/\delta_1, 1/\delta_2}(s)$;
$\omega^\tau_{k_1+2\beta_1, k_2+2\beta_2}(f;t_1,t_2)_p dt_1 dt_2 = d^\tau_\omega(t_1,t_2); \sigma(\lambda(s),f)$- преобр-й ряд функции $f(x_1,x_2)$ с помощью последовательности $\lambda(s) = \{\lambda_{n_1 n_2}(s)\}; \psi(x_1,x_2)$- функция, имеющая своим рядом Фурье $\sigma(\lambda(s),f); A(\delta_1,\delta_2,\tau,f) = \{\int\limits_0^{\delta_1}\int\limits_0^{\delta_2} t_1^{-1}t_2^{-1}\lambda^\tau(t_1,t_2,\tau)$
$d^\tau_\omega(t_1,t_2) + \delta_1^{\tau\beta_1}\int\limits_{\delta_1}^{2\pi}\int\limits_0^{\delta_2} t_1^{-\tau(k_1+\beta_1)-1}t_2^{-1}\lambda^{*_1\tau}(t_1,t_2,\tau)d^\tau_\omega(t_1,t_2) + \delta_2^{\tau\beta_2}$
$\int\limits_0^{\delta_1}\int\limits_{\delta_2}^{2\pi} t_2^{-\tau(k_2+\beta_2)-1}t_1^{-1}\lambda^{*_2\tau}(t_1,t_2,\tau)d^\tau_\omega(t_1,t_2) + \delta_1^{-\tau\beta_1}\delta_2^{-\tau\beta_2}$
$\int\limits_{\delta_1}^{2\pi}\int\limits_{\delta_2}^{2\pi} t_1^{-\tau(k_1+\beta_1)-1}t_2^{-\tau(k_2+\beta_2)-1}\lambda^{*_{1,2}\tau}(t_1,t_2)d^\tau_\omega(t_1,t_2)\}^{1/\tau}.$

Утверждение . Справедливы следующие оценки
$\omega_{\beta_1,\beta_2}(\psi;\delta_1,\delta_2)_p \ll A(\delta_1,\delta_2,\tau,f); \omega_{\beta_1,\beta_2}(\psi;\delta_1,\delta_2)_p \gg A(\delta_1,\delta_2,\theta,f); \omega_{\beta_1,\beta_2}(\psi;\delta_1,\delta_2)_2 \asymp A(\delta_1,\delta_2,2,f).$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03 - 01 - 00080).

ОБ ОЦЕНКАХ СМЕШАННЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИЙ С КВАЗИМОНОТОННЫМИ И ЛАКУНАРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ[1]

Симонова И.Э., Симонов Б.В. (Волгоград)
dvr@vstu.ru

Пусть $1 < p < \infty; 0 < \theta \leqslant \min(p,2); \max(p,2) \leqslant \tau < \infty; k_i, \beta_i > 0; \lambda_{n_i}(s) = n_i^{k_i s}(\int\limits_{1/n_i}^{2\pi} \alpha_i(t_i)dt_i + n_i^{\beta_i s} \int\limits_0^{1/n_i} \alpha_i(t_i)t_i^{\beta_i s}dt_i)$;

$\lambda^*_{n_i}(s) = \int\limits_{1/n_i}^{2\pi} \alpha_i(t_i)dt_i (n_i = 1, 2, \ldots, i = 1, 2); \lambda^s_{n_1 n_2} =< \lambda_{n_1}(s) \cdot \lambda_{n_2}(s) >$ (равно $\lambda_{n_1}(s) \cdot \lambda_{n_2}(s)$, где произведение $\alpha_1(t_1) \cdot \alpha_2(t_2)$ заменяется на $\alpha(t_1, t_2)$); $\lambda^{*1s}_{n_1 n_2} =< \lambda^*_{n_1}(s) \cdot \lambda_{n_2}(s) >$ (аналогично $\lambda^{*2s}_{n_i n_2}(s), \lambda^{*1,2s}_{n_i n_2}(s)$); $\lambda(\delta_1, \delta_2, s) = \lambda_{1/\delta_1, 1/\delta_2}(s); \omega^\tau_{k_1+2\beta_1, k_2+2\beta_2}(f; t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 = d^\tau_\omega(t_1, t_2)$; $\sigma(\lambda(s), f)$- преобр-й ряд функции $f(x_1, x_2)$ с помощью послед-ти $\lambda(s) = \{\lambda_{n_1 n_2}(s)\}; \psi(x_1, x_2)$- функция, имеющая своим рядом Фурье $\sigma(\lambda(s), f); A(\delta_1, \delta_2, \tau, f) = \{\int\limits_0^{\delta_1}\int\limits_0^{\delta_2} t_1^{-1} t_2^{-1} \lambda^\tau(t_1, t_2, \tau) d^\tau_\omega(t_1, t_2)$

$+ \delta_1^{\tau\beta_1} \int\limits_{\delta_1}^{2\pi}\int\limits_0^{\delta_2} t_1^{-\tau(k_1+\beta_1)-1} t_2^{-1} \lambda^{*1\tau}(t_1, t_2, \tau) d^\tau_\omega(t_1, t_2) + \delta_2^{\tau\beta_2}$

$\int\limits_0^{\delta_1}\int\limits_{\delta_2}^{2\pi} t_2^{-\tau(k_2+\beta_2)-1} t_1^{-1} \lambda^{*2\tau}(t_1, t_2, \tau) d^\tau_\omega(t_1, t_2) + \delta_1^{-\tau\beta_1}\delta_2^{-\tau\beta_2}$

$\int\limits_{\delta_1}^{2\pi}\int\limits_{\delta_2}^{2\pi} t_1^{-\tau(k_1+\beta_1)-1} t_2^{-\tau(k_2+\beta_2)-1} \lambda^{*1,2\tau}(t_1, t_2) d^\tau_\omega(t_1, t_2)\}^{1/\tau}; QM(\bigwedge)$ — класс функций, последовательности коэффициентов Фурье которых квазимонотонны (лакунарны).

Утверждение . Если $f \in QM \bigcap L^0_p$, то $\omega_{\beta_1, \beta_2}(\psi; \delta_1, \delta_2)_p \asymp A(\delta_1, \delta_2, p, f)$.
Если $f \in \bigwedge \bigcap L^0_p$, то $\omega_{\beta_1, \beta_2}(\psi; \delta_1, \delta_2)_p \asymp A(\delta_1, \delta_2, 2, f)$.

Замечание. Приведенное выше утверждение для функции двух переменных распространяется на случай n переменных при $n > 2$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03 - 01 - 00080).

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ВАРИАЦИОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Сирота Е.А. (Воронеж)

Рассматривается задача Коши для линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Ay + a\frac{\delta}{\delta v(t)}y + b(v,t), \tag{1}$$

$$y(v(\cdot),t_0) = y_0(v(\cdot)), \tag{2}$$

где
Y – банахово пространство, $V(T)$ – банахово пространство функций $v : V(T) \to R$ с нормой $\|v\|_T$, отрезок $[t_0, t_0+T]$ будем обозначать просто T, $y : V(T) \times T \to Y$, $\frac{\delta y}{\delta v(t)}$ – вариационная производная, A – линейный ограниченный оператор, a – число, b : $V(T) \times T \to Y$ задано, $y_0 : V(T) \to Y$ – задано.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:
1)$V(T) = L_1(T)$;
2) A – линейный ограниченный оператор,
3) существует непрерывная по s вариационная производная $\frac{\delta b(v(\cdot)+a\chi(s,t,\cdot),s)}{\delta v(\tau)}$, где $\chi(t_0,t,s)$ – характеристическая функция отрезка с концами t_0, t.
4) $Ab(v(\cdot) + a\chi(s,t,\cdot),s)$ непрерывно по s,
5) существует $\frac{\delta y_0(v(\cdot)+a\chi(t_0,t,\cdot))}{\delta v(s)}$.
Тогда

$$y(v(\cdot),t) = e^{A(t-t_0)}y(v(\cdot)+a\chi(t_0,t,\cdot))+\int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}b(v(\cdot)+a\chi(s,t,\cdot),s)ds \tag{3}$$

является решением (1–2).

Литература

1. Задорожний В.Г. Дифференциальные уравнения с вариационными производными / В.Г. Задорожний. - Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 2000. - 368 с.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Степанов А.В. (Санкт-Петербург)
stepanov17@yandex.ru

Рассмаривается система управления, описываемая разностными уравнениями вида:

$$x_{k+1} = Mx_k + p\varphi_k + qf(\sigma_k),\ k \geqslant k_0,\ x_k \in \mathbb{E}^n,\ \sigma_k = \gamma' \cdot x_k, \qquad (1)$$

последовательность φ_k — почти периодическая, нелинейная функция f может, например, описывать пространственное запаздывание управляющих механизмов: $f(\sigma_k) = m_1$, если $\sigma_k < l_2$, и $f(\sigma_k) = m_2$, если $\sigma_k > l_1$, $\|\gamma\| \neq 0$, $l_1 < l_2$, $m_1 < m_2$.

Следуя [1], решение x_k системы (1) назовем грубым, если для последовательности σ_k, соответствующей этому решению, существуют натуральный номер K и вещественное положительное число δ такие, что

$$|\sigma_k - l_i| > \delta,\ \forall k \geqslant K,\ i = 1, 2.$$

Обобщим один из результатов [1]:

Теорема: Пусть собственные числа матрицы M расположены внутри круга единичного радиуса, тогда любое грубое решение системы (1) сходится при $k \to \infty$ к асимптотически устойчивому почти периодическому решению этой системы.

Если последовательность φ_k — периодическая, то предельное решение, указанное в формулировке теоремы, будет периодическим.

По аналогии с [1], можно показать, что число различных асимптотически устойчивых решений системы (1) конечно.

Сформулированное утверждение может быть распространено на ряд кусочно-постоянных нелинейных характеристик $f(\sigma)$, а также на случай нескольких управляющих воздействий $f_i(\sigma)$.

Литература

1. Косякин А.А. Устойчивость и колебания цифровых автоматических систем. I // Автоматика и телемеханика, №3, 1970, с. 81-88.

О РАСЩЕПЛЕНИИ КРАТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ[1]

Степин С.А., Титов В.А. (Москова)

Рассматривается деформация $T(\varepsilon) = J + A(\varepsilon)$ жордановой клетки J порядка нильпотентности n. Собственные значения оператора $T(\varepsilon)$ при малых ε группируются в циклы $\{\lambda_k^{(j)}\}_{k=1}^{p_j}$, $\sum p_j = n$, так, что справедливы разложения Пюизо

$$\lambda_k^{(j)}(\varepsilon) = \mu_1^{(j)} \omega_j^k \varepsilon^{1/p_j} + \mu_2^{(j)} \omega_j^{2k} \varepsilon^{2/p_j} + \dots\,, \quad \omega_j = e^{2\pi i/p_j}.$$

Известно, что при условии $F'(0) \neq 0$, где $F(\varepsilon) = \det T(\varepsilon)$, имеется один цикл длины n. В случае, когда $F'(0) = 0$, $F''(0) \neq 0$, в работе получена аналитическая классификация типов ветвлений функций $\lambda_k^{(j)}(\varepsilon)$ и явно вычислены первые ненулевые коэффициенты $\mu_1^{(j)}$ или $\mu_2^{(j)}$.

Для матрицы оператора $A'(0)$, записанного в жордановом базисе клетки J, через α_l, $l = 0, 1, 2, \dots$, обозначим сумму элементов, стоящих на поддиагоналях, занумерованных в таком порядке, что $\alpha_0 = (-1)^{n+1} F'(0)$.

Утверждение. *При условиях $F'(0) = 0$, $F''(0) \neq 0$, собственные значения оператора $T(\varepsilon)$*

(i) *объединяются в два цикла длин q и $n - q$, если $\alpha_l = 0$, $0 \leqslant l < q < n/2$, и $\alpha_q \neq 0$;*

(ii) *в случае $\alpha_l = 0$, $0 \leqslant l < n/2$, образуют один цикл при нечетном n, а при четном n объединяются в два цикла одинаковой длины, если $\alpha_{n/2}^2 \neq 2F''(0)$;*

(iii) *при четном n могут образовывать либо один либо два цикла одинаковой длины, если $\alpha_l = 0$, $0 \leqslant l < n/2$, и $\alpha_{n/2}^2 = 2F''(0)$.*

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Стратилатова Е.Н. (Омск)

Распространение тепла в бесконечном неоднородном стержне в рамках гиперболического закона теплопроводности моделируется

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

задачей Коши

$$\begin{cases} c(x)\rho(x)\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \ \tau\frac{\partial q}{\partial t} + k(x)\frac{\partial T}{\partial x} + q = 0, \\ (x,t) \in \mathbb{R}^2; \ T(x,0), \ q(x,0) \text{ заданы.} \end{cases} \tag{1}$$

Здесь T, q – температура и тепловой поток, ρ, c, k – плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность, τ – период релаксации. Все данные предполагаются гладкими. После перехода к римановым инвариантам по формулам $T = (u_1+u_2)/2$, $q = (kc\rho/\tau)^{1/2}(u_1 - u_2)/2$ задача (1) принимает вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + A(x)\frac{\partial}{\partial x} + B(x)\right] u = 0, \ u(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

где $A = \operatorname{diag}(a,-a)$, $B = \frac{1}{2\tau}\begin{pmatrix} 1+b & -1-b \\ -1+b & 1-b \end{pmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $a = \sqrt{\frac{k}{\tau c\rho}}$, $b = \frac{(\sqrt{\tau k c\rho})'}{c\rho}$. Ниже строится решение задачи (2).

2. Проведем через точку $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ характеристики $l_1(x,t)$, $l_2(x,t)$ с положительным и отрицательным наклоном до пересечения с прямой $t = 0$ в точках с абсциссами y_1, y_2.

ТЕОРЕМА. Решение задачи Коши (2) дается формулой

$$u(x,t) = \begin{bmatrix} U_1(x,y_1)\psi_1(y_1) \\ U_2(x,y_2)\psi_2(y_2) \end{bmatrix} + \frac{1}{4\tau}\int_{y_1}^{y_2} V(x,t,y)\psi(y)\,dy,$$

$$U_k = \exp\left\{-\frac{1}{2\tau}\int_y^x \frac{1 \pm b(s)}{\pm a(s)}\,ds\right\},$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ A_1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 & h_2 \\ h_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_k f = \frac{\mp 1}{2\tau a(y)}\int_y^{s_k}[1 \mp b(s)]U_k f\,ds,$$

$$h_k = \frac{1 \mp b(s_k)}{4\tau a(y)}U_{3-k}(x,s_k)U_k(s_k,y),$$

где s_1, s_2 — абсциссы точек пересечения $l_1(x,t)$, $l_2(x,t)$ с $l_2(y,0)$, $l_1(y,0)$ соответственно. Ряд для V сходится равномерно на каждом компакте в $\mathbb{R}^3$.

ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ С ПРИБЛИЖЕННО ИЗВЕСТНЫМИ ИСХОДНЫМИ ДАННЫМИ[1]

Сумин М.И., Трушина Е.В. (Нижний Новгород)

m.sumin@mm.unn.ru

Потребности многочисленных приложений неизбежно приводят к необходимости изучения задач оптимального управления в ситуациях, когда их исходные данные известны лишь приближенно. Однако, в этом случае само понятие классического оптимального управления в значительной степени "теряет смысл", т.к. в "возмущенной" задаче его может и не существовать, а в случае его существования не вполне понятно какое "отношение" оно имеет к исходному оптимальному управлению невозмущенной задачи. Ситуация кардинально меняется, если в качестве "искомого" элемента теории рассматривать минимизирующие последовательности допустимых управлений, в роли которых выступают так называемые минимизирующие приближенные решения в смысле Дж.Варги. В докладе рассматривается задача оптимального управления

$$I_0(u) \to \inf,\ I_1(u) \in M,\ u \in D, \tag{1}$$

где $D \equiv\ u \in L^m_\infty(0,T) : u(t) \in U$ п.в. на $(0,T)$, $U \subset R^m$ — компакт, $I_0(u) \equiv \varphi_0(x[u](T))$, $I_1(u) \equiv (\varphi_1(x[u](T)),\dots,\varphi_k(x[u](T)))$, $M \subset R^k$ — выпуклое замкнутое множество, $x[u]$ - решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t),\ \ x(0) = x_0,\ \ t \in [0,T].$$

Исходные данные задачи (1) (функциональные матрицы A, B, функции φ_i, $i = 0,\dots,k$, целевое множество M) удовлетворяют традиционным для теории оптимального управления условиям и считаются известными приближенно. В ситуации приближенно известных данных обсуждаются: 1) необходимые условия для минимизирующих последовательностей; 2) условия согласования ошибки исходных данных с множителями Лагранжа, с точностью выполнения ограничений задачи и необходимых условий, достаточные для того, чтобы данная последовательность допустимых управлений была минимизирующей; 3) регуляризирующие свойства принципа максимума Понтрягина и минимизирующих последовательностей. Рассматриваются иллюстративные примеры.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00460).

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПО ПОРЯДКУ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ

Танана В.П., Худышкина Е.В. (Челябинск)
tanana@csu.ac.ru, helena@csu.ac.ru

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0, h(t)],\, t \geqslant 0$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x),\, u(0,t) = 0,\, u(x_0,t) = f(t),\, 0 < x_0 < 1.$$

Условие задачи $u'_x(h(t),t)$ подлежит определению. Решая вспомогательную задачу на отрезке $[0, x_0]$, находим граничное условие $u'_x(0,t) = g(t)$. Полученную задачу сводим с помощью синус и косинус преобразований к операторному уравнению

$$A\widehat{z}(\lambda) = 2\left(e^{\mu\sqrt{\lambda}} + e^{-\mu\sqrt{\lambda}}\right)^{-1}\widehat{z}(\lambda) = \widehat{f}_\delta(\lambda),$$

правую часть которого мы считаем заданной приближённо с точностью δ. Это уравнение решается методом проекционной регуляризации с параметром, выбранным по невязке.

Построено оптимальное по порядку решение на классе равномерной регуляризации

$$M_r = \{u_0 \in W_2^1[0,\infty) : u_0(0) = u'_0(0) = 0,\, \|u_0\| \leqslant r,\, u''_0 \in L_1[0,a]\}$$

и получена точная по порядку оценка погрешности [1] данного метода

$$\|u_\delta - u_0\| \leqslant k \ln^{-2}(ar/\delta).$$

Литература

1. Танана В.П. О новом подходе к оценке погрешности методов решения некорректно поставленных задач. //Сиб. журн. индустриальной матем. 2002. Т. 5, № 4. С. 150-163

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ДЛЯ КИНЕМАТИЧЕСКИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

Тихомиров Д.В. (Москва)

dmitrytv@mtu-net.ru

Сегодня актуальной темой в математической физике является синтез различных подходов к исследованию нелинейных уравнений, описывающих модели сложных физических систем. Использование подхода, основанного Э.Г. Позняком и А.Г. Поповым [1] и базирующегося на представлении гауссовой кривизны для уравнений (G-представление, G-класс), дает новые возможности исследования и решения нелинейных уравнений дифференциально-геометрически-ми методами. В тоже время широкое развитие получил метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) [2], в основе которого лежит понятие кинематической интегрируемости и представление нулевой кривизны (гамильтонова постановка задачи).

С момента основания дифференциально-геометрического подхода была отмечена взаимосвязь между представлениями гауссовой и нулевой кривизны. В развитие рассматриваемых подходов следующей теоремой устанавливается критерий кинематической интегрируемости уравнений и предлагается классификация нелинейных уравнений в зависимости от знака гауссовой кривизны G-представления $K \equiv Const$.

Теорема. (критерий кинематической интегрируемости)

Для того, чтобы уравнение $f[u(x,t)] = 0$ принадлежало классу кинематически интегрируемых уравнений с матричными операторами $U, V \in su(1,1)(U, V \in su(2))$ необходимо и достаточно, чтобы уравнение $f[u(x,t)] = 0$ принадлежало $G\{K \equiv Const < 0\}$- классу ($G\{K \equiv Const > 0\}$-классу).

Литература

1. Э.Г. Позняк, А.Г. Попов Геометрия Лобачевского и уравнения математической физики. // Доклады АН, 1993, Т.332,N4,с.418-421

2. Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фадеев Гамильтонов подход в теории солитонов. // М.: Наука, 1986

УСТОЙЧИВАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Тырсин А.Н. (Челябинск)
at2001@yandex.ru

В [1] предложен робастный метод аппроксимации данных линейной моделью

$$y_i = a_0 + a_1 x_{i1} + \ldots + a_m x_{im} + \epsilon_i, \ (i = 1, \ldots, n),$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ – вектор случайных ошибок, распределение которых отлично от нормального закона. Рассмотрена задача

$$(\hat{a}_0, \ldots, \hat{a}_m) = \arg\min \sum_{i=1}^{n} g\left(|y_i - a_0 - a_1 x_{i1} - \ldots - a_m x_{im}|\right), \quad (1)$$

где $g(x)$ – некоторая монотонно возрастающая, всюду дважды непрерывно-дифференцируемая на положительной полуоси функция, причем $g(0) = 0$, $g''(x) < 0$ (т.е. $g(x)$ – вогнута).

Установлено, что задачу (1) можно обобщить на случай нелинейных регрессионных моделей вида

$$y_i = a_0 + f(\mathrm{x}_i; a_1, \ldots, a_m) + \epsilon_i,$$

где $\mathrm{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{im})$; f – некоторая всюду дифференцируемая в области определения функция m переменных $a_1, \ldots, a_m$.

Теорема. Пусть имеем задачу

$$(\hat{a}_0, \ldots, \hat{a}_m) = \arg\min \sum_{i=1}^{n} g\left(|y_i - f(\mathrm{x}_i; a_1, \ldots, a_m) - a_0|\right), \quad (2)$$

Все локальные минимумы задачи (2) являются решениями систем уравнений

$$a_0 + f(\mathrm{x}_{i1}; a_1, \ldots, a_m) = y_{i1},$$

$$\ldots$$

$$a_0 + f(\mathrm{x}_{i,m+1}; a_1, \ldots, a_m) = y_{i,m+1},$$

где $i_1, \ldots, i_{m+1} \in \{1, \ldots, n\}, \forall k \neq l \; i_k \neq i_l$.

Литература

1. Тырсин А.Н. Робастный метод построения линейных регресси-онных моделей// Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Воронеж. зимней матем. школы. – Воронеж: ВГУ, 2005. – С. 232–233.

ОБ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Тюрин В.М. (Липецк)
tuvm@stu.lipetsk.ru

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор (выражение)

$$P = \sum A_\alpha(x) D^\alpha (|\alpha| \leqslant m)$$

с частными производными $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$, у которого коэффициенты $A\alpha \in C^m(R^n, EndX)$, где X - конечномерное пространство, m - чётное число. Обозначим $P_m = \sum A_\alpha D^\alpha$- главную часть оператора $P, |\alpha| = m$. Предполагается, что старшие коэффициенты $A_\alpha(|\alpha| = m)$ есть постоянные операторы. Далее, $L^2 = L^2(R^n, X)$ - пространство Лебега, $H^m = H^m(R^n, X)$ - пространство Соболева.

Оператор $P : H^m \to L^2$ назовем эллиптическим, если существует число $\lambda_0 \in R$ такое, что оператор $P_m - \lambda : H^m \to L^2$ имеет непрерывный обратный при $\lambda \in R, \lambda < \lambda_0$, удовлетворяющий оценкам

$$\|(P_m - \lambda)^{-1} u\|_0 \leqslant c_1(\lambda)\|u\|_0, c_1(\lambda) \cdot |\lambda| \leqslant M,$$

$$\|(P_m - \lambda)^{-1} u\|_m \leqslant c_2(\lambda)\|u\|_0, c_1 2\lambda) \leqslant M,$$

где $M > 0$ не зависит от u и λ, $\|\cdot\|_m$ - норма в H^m, $\|\cdot\|_0$ - норма в L^2.

Двойственный (формально сопряженный) оператор P_* определяется формулой

$$P_* u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha^*(x) u(x)) \; (u \in H^m),$$

$A_\alpha^*(x)$ -сопряженный оператор к оператору $A_\alpha(x)$.

Теорема. Если оператор $P : H^m \to L^2$ эллиптичен, то двойственный оператор $P_* : D(P_*, L^2) \to L^2$ совпадает с сопряженным оператором $P^* : D^(P^*, L^2) \to L^2$.

Приводятся примеры и приложения сформулированной теоремы.

ОБ ОДНОМ ВОЗМУЩЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ КОМПАКТНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Ускова Н.Б. (Воронеж)

Пусть A — нормальный компактный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, спектр которого $\sigma(A)$ представим в виде $\sigma(A) = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} \sigma_n$, $\sigma_n \bigcap \sigma_m = \varnothing$, $n \neq m$ и σ_n, $n \geqslant 1$ — конечные подмножества. Обозначим через r_n расстояние от σ_n до множества $\sigma(A) \setminus \sigma_n$ и P_n — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_n. Каждому оператору X из банаховой алгебры $\operatorname{End} H$ ограниченных линейных операторов, действующих в H ставится в соответствие матрица $X = (X_{ij})$, $X_{ij} = P_i X P_j$. Обозначим через R^{-1} ограниченный нормальный оператор, определенный формулой $R^{-1} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} r_i P_i$. Возмутим оператор A оператором B из $\operatorname{End} H$, таким что $RB \in \sigma_2(H)$, т. е. $B = R^{-1}B_0$, $B_0 \in \sigma_2(H)$, $\|\cdot\|_2$ — норма оператора в $\sigma_2(H)$. Обозначим также $P_{(n)} = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i$, $P^{(n)} = I - P_{(n)}$, $\Delta_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \sigma_i$.

Теорема. Пусть выполнено условие $4\|B_0\|_2 < 1$. Тогда возмущенный оператор $A - B$ подобен оператору $\widetilde{A} = A - \sum\limits_{i=1}^{\infty} P_i X P_i$, имеющему матрицу диагонального вида, где X — решение нелинейного операторного уравнения метода подобных операторов, причем $X = R^{-1}X_0$, $X_0 \in \sigma_2(H)$. Оператор U преобразования оператора $A - B$ в оператор $\widetilde{A}$ такой, что $U - I \in \sigma_2(H)$. Более того, имеет место формула

$$\sum_{\lambda_j(A)\in\Delta_n} (\lambda_j(A-B) - \lambda_j(A)) + \operatorname{tr} P_{(n)} X P_{(n)} =$$

$$= O\left(\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} r_i^p} \; \|P_{(n)} B_0 P^{(n)}\|_q \cdot \|P^{(n)} B_0 P_{(n)}\|_l \right),$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{l} = 1$.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 04–01–00141

О МЕТОДИКЕ ИЗУЧЕНИЯ РАЗДЕЛА "ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА" В ОБЩЕМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Фомин В.И. (Тамбов)

Для большинства специальностей втузов в федеральный компонент по математике включен раздел "Элементы функционального анализа"(ЭФА) без детализации его содержания, при этом, количество учебных часов на изучение общего курса математики (ОКМ) остается прежним. В такой ситуации приходится ужимать изложение традиционных тем. Однако такая "экономия времени"не должна вредить реализации принципа научности в обучении, а именно, обеспечению высокого научного уровня изложения учебного материала и выработке у студентов учебно-исследовательских навыков и умений. В итоге у преподавателя остается мизерное количество часов на изложение новых разделов и возникает вопрос: какой именно материал изучать в эти часы.

Предлагается:

– включать в раздел ЭФА те понятия и факты ФА, которые можно использовать при изложении других разделов ОКМ;

– вести изложение ЭФА параллельно и в увязке с изучением других разделов ОКМ.

Такой подход позволит:

– охватить основополагающие понятия и теоремы ФА;

– показать практическую приложимость основных результатов ФА в различных областях математики и, тем самым, сформировать у студентов представление о ФА как о мощном и достаточно универсальном аппарате изучения математических дисциплин;

– изложить на языке ФА некоторые вопросы традиционных тем ОКМ в более компактной и современной форме.

Все это будет способствовать превращению ФА в традиционный раздел ОКМ.

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ С ВЕСОМ

Фролова Е.В. (Липецк)

lsn@lipetsk.ru

В заметке рассматривается уравнение Вольтерра с частными интегралами $x = Kx + f$, где оператор K определяется равенством

$$(Kx)(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau + \int_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma$$

$$+ \int_a^t \int_c^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma\,d\tau.$$

Частным случаем оператора K является оператор Харди-Литтльвуда с частными интегралами, который не действует в соответствующем пространстве непрерывных функций, однако легко подобрать пространство с весом, в котором он действует.

Через $C_h(D)$ обозначим множество измеримых на $D = [a,b] \times [c,d]$ функций x таких, что hx – непрерывная на D функция, с нормой $\|x\|_{C_h(D)} = \|hx\|_{C(D)}$.

Пусть $\Omega \in \{[a,b],[c,d],D\}$ и $\omega \in \{\tau,\sigma,(\tau,\sigma)\}$. Измеримая на $D\times\Omega$ функция $u(t,s,\omega)$ называется непрерывной в целом, если $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что $\|u(t_1,s_1,\cdot) - u(t_2,s_2,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} < \epsilon$ при $|t_1 - t_2| < \delta$, $|s_1 - s_2| < \delta$, и интегрально ограниченной, если $\|u(t,s,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant U < \infty$.

Теорема. Пусть $l(t,s,\tau) = l_1(t,s,\tau)h(\tau,s)$, $m(t,s,\sigma) = m_1(t,s,\sigma)h(t,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma) = n_1(t,s,\tau,\sigma)h(\tau,\sigma)$, где l_1,m_1,n_1 – непрерывные в целом и интегрально ограниченные функции, а h – непрерывная функция, которая обращается в нуль не более чем на счетном множестве из D. Тогда оператор K действует из $C_h(D)$ в $C(D)$, а уравнение $x = Kx + f$ однозначно разрешимо в $C_h(D)$ и его решение допускает представление в виде

$$x(t,s) = f(t,s) + \int_a^t r_l(t,s,\tau)f(\tau,s)\,d\tau + \int_c^s r_m(t,s,\sigma)f(t,\sigma)\,d\sigma$$

$$+ \int_a^t \int_c^s r(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)\,d\sigma\,d\tau,$$

где r_l, r_m, r — непрерывные в целом и интегрально ограниченные резольвентные ядра оператора K.

ГРУБЫЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ НЕПРИВОДИМЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Харламов М.П. (Волгоград)
mharlamov@vags.ru

Вращение твердого тела с неподвижной точкой в несимметричном потенциальном поле описывается гамильтоновой системой на симплектическом многообразии $M^6 = SO(3) \times \mathbf{R}^3$. Вполне интегрируемая система имеет три независимых почти всюду первых интеграла F_i $(i = 1, 2, 3)$, причем гамильтониан $F_1 = H$ имеет компактный характер. Введем отображение момента $J_h = F_2 \times F_3 : E_h \to \mathbf{R}^2$ где $E_h = \{H = h\} \subset M^6$. Пусть $\Sigma_h \subset \mathbf{R}^2$ – бифуркационные диаграммы J_h, а $\Delta_h = J_h(M^6)$ – области существования движений (множества допустимых значений интегралов). В практических примерах исследование последних оказывается задачей, аналитически гораздо более сложной, чем получение уравнений бифуркационных диаграмм.

Регулярный изоэнергетический уровень E_h есть гладкое пятимерное многообразие, расслоенное на торы Лиувилля (связные компоненты множеств $J_h^{-1}(c)$, $c \in \mathbf{R}^2$), почти все из которых трехмерны. Объявим все точки каждой связной компоненты эквивалентными. Фактор-пространство $B_h = E_h / \sim$ в индуцированной топологии есть двумерный клеточный комплекс. Его нульмерный остов B_h^0 соответствует особым периодическим решениям, одномерный B_h^1 – критическим двумерным торам. Их объединение образует граф, отвечающий за некоторое двумерное слоение Лиувилля в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы, который может исследоваться методом меченых молекул (А.Т. Фоменко, А.В. Болсинов). Методы лиувиллевой классификации явлений, отвечающих двумерным граням B_h^2, пока еще не разрабатывались. Поэтому в чистом виде комплекс B_h является грубым топологическим инвариантом динамической системы на E_h.

Инварианты B_h можно построить, заметив, что существует естественное расслоение $B_h \to \Delta_h$, каждый слой которого есть конечное множество с числом элементов, равным количеству связных компонент в составе $J^{-1}(h, c)$, $c \in \Delta_h$. Основой построения служит тот факт, что $B_h^0 \cup B_h^1$ проектируется в бифуркационную диаграмму Σ_h.

В качестве примера рассмотрена задача о движении тяжелого магнита в постоянных гравитационном и магнитном полях.

О ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЯЕМОСТИ И ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Хартовский В.Е. (Гродно)
hartows@mail.ru

Рассмотрим системы наблюдения Σ и управления Σ_1:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\psi(t,\theta)}{\partial t}=\sum_{i=1}^{s}S_i\frac{\partial^2\psi(t,\theta)}{\partial\theta_i^2}+S\psi(t,\theta)+\sum_{i=1}^{m}R_i\psi(t-i\omega,\theta),\\
(t,\theta)\in[0,+\infty)\times\Omega,\psi(t,\theta)=\varphi(t,\theta),(t,\theta)\in H\times\Omega,\\
H=[-h,0],\ h=m\omega,\psi(t,\theta)=0,\ (t,\theta)\in[0,+\infty)\times\partial\Omega,\\
y(t,\theta)=F\psi(t,\theta)+\sum_{i=1}^{m}F_i\psi(t-i\omega,\theta),(t,\theta)\in[0,t_1]\times\Omega,
\end{gathered}\tag{Σ}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\psi(t,\theta)}{\partial t}=\sum_{i=1}^{s}S_i'\frac{\partial^2\psi(t,\theta)}{\partial\theta_i^2}+S'\psi(t,\theta)+\sum_{i=1}^{m}R_i'\psi(t-i\omega,\theta)+\\
+F'u(t,\theta)+\sum_{i=1}^{m}F_i'u(t-i\omega,\theta),(t,\theta)\in[0,+\infty)\times\Omega,\\
\psi(t,\theta)=\eta(t,\theta),(t,\theta)\in H\times\Omega,\\
\psi(t,\theta)=0,(t,\theta)\in[0,+\infty)\times\partial\Omega,
\end{gathered}\tag{Σ_1}$$

где ψ — n- вектор решения уравнения; y — величина, доступная наблюдению; $u\in L_2([0,t_1-h],L_2(\Omega,R^r))$ — управляющее воздействие ($u\equiv 0$ если $t<0\vee t>t_1-h$); S_i,S,R_i,F,F_i — постоянные матрицы соответствующих размеров; ω=const>0, $t_1>0$ — фиксированный момент времени; $\Omega=\{\theta=(\theta_1,...,\theta_s)\in R^s\ :\ 0\leqslant\theta_i\leqslant\leqslant d_i, i=\overline{1,s}\}$; $\varphi,\eta\in C(H,L_2(\Omega,R^n))$. Здесь C — пространство непрерывных функций, L_2 — пространство суммируемых с квадратом функций. Символ штрих обозначает операцию транспонирования вектора или матрицы.

Для указанных систем Σ и Σ_1 формулируются двойственные задачи конструктивной идентифицируемости и полной управляемости соответственно. Строится непрерывный оператор восстановления текущего состояния системы наблюдения Σ по измерениям выходного сигнала y в задаче конструктивной идентифицируемости. Для системы Σ_1 предлагается процедура построения успокаивающего управления.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С РАЗРЫВНЫМИ ЯДРАМИ[1]

Хромов А.П. (Саратов)
KhromovAP@info.sgu.ru

Пусть ядро $A(x,t)$ оператора $Af = \int\limits_0^1 A(x,t)f(t)\,dt$ при некотором натуральном n принимает постоянные значения в каждом из четырех треугольников, получающихся при делении любого квадрата $\Pi_{ij} = \left\{(x,t)\middle| \frac{i-1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{i}{n},\ \frac{j-1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{j}{n}\right\}$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ диагоналями.

Теорема 1. *Если $y = (E-\lambda A)^{-1}Af$, где E –единичный оператор, λ – спектральный параметр, то*

$$v'(x) = \lambda Bv(x) + B\Phi(x), \quad P_0 v(0) + P_1 v\left(\frac{1}{2n}\right) = 0,$$

где B, P_0, P_1 – постоянные матрицы $4n \times 4n$, $v(x) = (v_1^T(x), v_2^T(x))^T$, $v_1(x) = z(x)$, $v_2(x) = z(\frac{1}{2n} - x)$, $z(x) = (z_1(x),\ldots,z_{2n}(x))^T$, $z_k(x) = y\left(\frac{k-1}{2n} + x\right)$; $\Phi(x)$ определяется также как и $v(x)$ с той лишь разницей, что $y(x)$ заменяется на $f(x)$, T – знак транспонирования.

Теорема 2. *Пусть собственные значения ω_k $(k = 1,\ldots,4n)$ матрицы B различны, причем $|\omega_k| = d$, где d не зависит от k. Пусть далее выполняется оценка*

$$(\det\Delta(\lambda))^{-1} = O\left(e^{\frac{1}{2n}\lambda\sum'\omega_j}\right), \tag{1}$$

где $\Delta(\lambda) = \det(P_0\Gamma Y(0,\lambda) + P_1\Gamma Y(\frac{1}{2n}))$, $\Gamma^{-1}B\Gamma = diag(\omega_1,\ldots,\omega_{4n})$, $\sum'\omega_j$ означает, что $\mathrm{Re} > \omega_j \geqslant 0$ и оценка (1) выполняется вне нулей $\Delta(\lambda)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса. Тогда для любой $f(x) \in L[0,1]$

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\frac{k-1}{2n}+\varepsilon \leqslant x \leqslant \frac{k}{2n}+\varepsilon} - \left|S_r(f,x) - \sigma_{rd}\left(\varphi_k, x - \frac{k-1}{2n}\right)\right| = 0,$$

где $\varphi_k(x) = f\left(\frac{k-1}{2n} + x\right)$, $S_r(f,x)$ – частная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A для тех

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), гранта РФФИ (проект 03-01-00169) и программы "Университеты России" (проект ур.04.01.375).

характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$, $\sigma_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора: y', $y(0) = y\left(\frac{1}{2n}\right)$ для тех собственных значений λ_k^0, для которых $|\lambda_k^0| < r$.

О ПОЛИНОМАХ И КВАНТОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРАХ КРАВЧУКА

Хучраева Т.С., Захарова Т.И., Степанов В.В. (Саратов)
agm@sgau.saratov.ru

В 1929г. М.Кравчук, исходя из конкретной весовой функции $\sigma(x) = \begin{pmatrix} N \\ x \end{pmatrix} p^x g^{N-x}$, $x = 0, 1, ..., N$, где N — натуральное число, $0 \leqslant p \leqslant 1$, $p + g = 1$, $\begin{pmatrix} N \\ x \end{pmatrix} = \frac{N!}{x!(N-x)!}$, построил систему ортогональных полиномов дискретной переменной, получивших впоследствии название – полиномы Кравчука [3]. Авторы исследовали [1] частные случаи системы полиномов Кравчука $K_n^{(p)}(x, N)$, каждая из которых содержит $(N+1)$ взаимно ортогональных с весом $\sigma(x)$ полиномов, образуя двухпараметрическое (N, p) семейство.

Одним из многих примеров использования полиномов Кравчука дискретной переменной является решение задачи о радиационном возбуждении многоуровневых квантовых систем[2]. Решение ищется в виде $a_n(t) = \sum\limits_{x=0}^{N} \sigma(x) K_0^{(p)}(x) K_n^{(p)}(x) \exp|it(rx + \Delta)|$, подставляя в дифференциальное уравнение динамики процесса возбуждения в бесстолкновительных условиях

$$-i\frac{da_n(t)}{dt} = f_{n+1}e^{-i\alpha_{n+1}t}a_{n+1}(t) + f_n e^{i\alpha_n t}a_{n-1}(t),$$

(здесь $a_n(t)$- амплитуда вероятности обнаружить квантовую систему на уровне энергии E_n в момент времени t при эквидистантно расположенных уровнях энергии, для которых $\alpha_n = \varepsilon$, а дифуравнение имеет вид $-i\frac{da_n(t)}{dt} = f_{n+1}a_{n+1}(t) - n\varepsilon a_n(t) + f_n a_{n-1}(t)$) и приравнивая соответствующие коэффициенты, получим решение, описывающее динамику многоуровневой системы, которую "породили" полиномы Кравчука:

$$a_n(t) = \left[\binom{N}{n} (pg)^n \right]^{1/2} \left(pe^{irt} + g\right)^{N-n} \left(e^{irt} - 1\right) e^{it\Delta},$$

$$\varepsilon = r(p-g), \quad r = (pgN)^{-1/2} = \left(\varepsilon^2 + \frac{4}{N}\right)^{1/2},$$

$$\Delta_n = -rpN = -\frac{N}{2}\left[\varepsilon + \left(\varepsilon^2 + 4/N\right)^{1/2}\right].$$

Такую систему назвали квантовым осциллятором Кравчука [3].

Литература

1. Воронин В.Н., Урюпина Н.А., Хучраева Т.С. Связь многочленов Кравчука с другими ортогональными многочленами // Материалы 10-й Международной конференции им.акад.М.Кравчука. Киев, 2004, с.332-333.

2. Савва В.А., Зеленков В.И. Динамика многоуровневых систем и ортогональные полиномы дискретной переменной. Препринт №666 Института физики АН Беларуси. Минск, 1992. 27с.

3. Развиток математичних ідей М.Кравчука /Редактори Н.Вирченко, І.Качановський, В.Гайдей, Р.Андрушків. Киев – Нью-Йорк: 2004. -780с.

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРА ГРИНА К КВАДРАТИЧНЫМ ВАРИАЦИОННЫМ ЗАДАЧАМ

Цалюк В.З. (Краснодар)

vts@math.kubsu.ru

В соболевском пространстве $\mathbf{H}^2$ функций $[a, b] \to \mathbb{R}$ рассматривается вариационная задача

$$\mathcal{I}(x) \to \inf, \quad \ell^1 x = \alpha^1, \ldots, \ell^N x = \alpha^N,$$

где $\mathcal{I}$ — квадратичный функционал, ℓ^k — линейно независимые линейные функционалы. Ее можно преобразовать в экстремальную задачу в пространстве $\mathbf{L}_2$ применением W-подстановки $x = \mathbf{W}z + Y\alpha$, где $\mathbf{W}$ — оператор Грина краевой задачи $\ddot{x} = z$, $x(a) = x(b) = 0$, а $(Y\alpha)(t) = \alpha^1 y_1(t) + \alpha^2 y_2(t)$, где подходящим образом подобранные функции $y_i(t)$ составляют фундаментальную систему решений уравнения $\ddot{x} = 0$.

А пространство $\mathbf{L}_2$, оказывается, хорошо приспособлено для исследования и решения квадратичных экстремальных задач с линейными ограничениями. Разумеется, эта общая идея распространяется на задачи с производными не только второго порядка.

Используя W-метод, мы получаем критерии существования единственной точки минимума в полученной экстремальной задаче, а следовательно, и в исходной вариационной задаче. Предлагаются подходы к численному решению задач.

В докладе применение W-метода демонстрируется на нескольких задачах:

• определение формы горизонтальной упругой балки с многими точками опоры под действием вертикальнорй нагрузки. Балка может быть неоднородной, свойства материала и сечение могут меняться разрывно вдоль ее длины;

• нахождение критического значения параметра $k > 0$ в задаче о „гармоническом осцилляторе"

$$\int_0^1 \dot{x}^2 - kx^2\,dt \to \inf, \quad x(0) = x(1) = 0,$$

при котором задача теряет разрешимость;

• задача о критической силе сжатия вертикальной стойки. Стойка может иметь дополнительные точки опоры. Свойства ее сечения могут изменяться вдоль стойки разрывным образом;

• задачи с отклоняющимся аргументом и с сингулярностью.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Чадаев В.А. (Грозный)

niipma@mail333.com

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$D_{0x}^{\alpha} y(t) = f(x, y(x), D_{0x}^{\beta} y(t)), \tag{1}$$

где D_{0x}^{α} – оператор дробного дифференцирования порядка $0 < \alpha \leqslant 1$ с началом в точке 0 и с концом в точке $x \in]0, l[[1], [2] \beta < \alpha$.

Задача Коши. Найти решения (1), удовлетворяющее условию:

$$\lim_{x \to 0} x^{1-\alpha} y(x) = y_0.$$

Обозначим через D множество точек (x, y, z) из области G, лежащей в R^3:

$$D = \{(x, y, z) \in G : 0 \leqslant x \leqslant l, |x^{1-\alpha} y(x) - y_0| \leqslant a, |x^{1-\alpha+\beta} z(x) - z_0| \leqslant b\},$$

$a > lM/\Gamma(\alpha+1), b > lM/\Gamma(\alpha-\beta+1), z_0 = y_0\Gamma(\alpha)/\Gamma(\alpha-\beta), l, M$ – постоянные, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера.

Доказана

Теорема. Пусть $f(x, y, z)$ – вещественнозначная, непрерывная в области G функция, удовлетворяющая условию Липшица по y и z:

$$|f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| \leqslant N(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)$$

и ограничению

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant l} |f(x, y, z)| = M < \infty.$$

Тогда решение задачи Коши в области $D \subset G$ существует, непрерывно и единственно.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕРАВНОМЕРНОЙ НАГРУЗКИ

Чеботарев А.С. (Воронеж)

xeba@amm.vsu.ru

Работа посвящена исследованию устойчивости деформируемых тел на основании трехмерных уравнений. В рамках второго подхода, заключающегося в применении линеаризированных уравнений при малых докритических деформациях, исследуется потеря устойчивости при сжатии полосы неравномерной нагрузкою. Принимается, что материал обладает упруговязкопластическими свойствами с трансляционным упрочнением и с учетом сжимаемости [1]. Найдено неоднородное докритическое состояние. В предположении, что вся полоса перешла в пластическое состояние, получены точные трехмерные линеаризированные уравнения устойчивости, относительно возмущений перемещений вида $L_{ij}u_j = 0$. Следуя [2] решение уравнений устойчивости проводится операторным методом. Однако неоднородное докритическое состояние не позволяет использовать решение, предложенное в [3]. Тем не менее в ходе исследования была предложена альтернативная форма потери устойчивости и задача в финале сводится к численному решению нелинейного уравнения получаемому из граничных условий. Таким образом получены зависимости критического параметра P (максимальное значение нагрузки) от геометрических размеров тела и физико-механических свойств материала. Исследования в данной области будут продолжены.

Литература

1. К теории устойчивости сжимаемых упруговязкопластических сред. - Прикладные задачи механики сплошных сред., Сборник статей, Воронеж, Изд-во. ВГУ, 1999

2. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. - Киев: Вища школа, 1980. – 512 с

3. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. - Киев: Наукова думка, 1971. – 275 с

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ КРУЧЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ ДЛЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СРЕДЫ

Чеботарев А.С., Щеглова Ю.Д. (Воронеж)

xeba@amm.vsu.ru, juju@pisem.net

Работа посвящена исследованию устойчивости деформируемых тел на основании трехмерных уравнений. В рамках второго подхода, заключающегося в применении линеаризированных уравнений при малых докритических деформациях исследуется потеря устойчивости при кручении цилиндрического тела с поперечным сечением в форме кольца. Принимается, что материал обладает упругопластическими свойствами с трансляционным упрочнением (модель Ишлинского-Прагера) [1], [2]. Найдено неоднородное докритическое состояние [3].

В предположении, что вся область кольца перешла в пластическое состояние получены точные трехмерные линеаризированные уравнения устойчивости, относительно возмущений перемещений вида $L_{ij}u_j = 0$. Следуя [4] решение уравнений устойчивости проводится операторным методом. Однако неоднородное докритическое состояние не позволяет использовать решение предложенное в [5]. Тем не менее в ходе исследования была предложена альтернативная форма потери устойчивости и задача в финале сводится к численному решению нелинейного уравнения получаемому из граничных условий. Таким образом получены зависимости критического параметра ω (крутка) от геометрических размеров тела и физико-механических свойств материала. Исследования в данной области будут продолжены

Литература

1. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матем. журн. 1964. - Т. 6, № 3. - С. 314-325.

2. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеально пластических тел. - М.: ИЛ, 1956. - 398 с.

3. Спорыхин А.Н., Щеглова Ю.Д. Метод возмущений в задачах упругопластического кручения стержней// Изв. РАН. Механика твердого тела. - 2000. - № 5. - С. 54-64.

4. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. - Киев: Вища школа, 1980. – 512 с

5. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. - Киев: Наукова думка, 1971. – 275 с

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЛЕММЫ М.А.КРАСНОСЕЛЬСКОГО[1]

Чернов А.В. (Нижний Новгород)
v_sumin@mm.unn.ru

В свое время в [1] (см. также [2], лемма 17.2) была доказана

Лемма 1. Пусть $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ – измеримое по Лебегу ограниченное множество, функция $f(t,\xi) : \Pi \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $\xi \in \mathbf{R}$, а скалярные функции $a(t)$, $b(t)$ измеримы на Π, $a(t) \leqslant b(t)$ п.в. $t \in \Pi$. Тогда существует измеримая функция $\theta(t)$, принимающая значения из $[a(t);b(t)]$ п.в. $t \in \Pi$ и такая, что $\max_{\xi} \in [a(t);b(t)] f(t,\xi) = f(t,\theta(t))$ п.в. $t \in \Pi$. Лемма 1 используется в теории операторов, действующих в пространствах суммируемых функций (в частности, при исследовании свойств оператора внутренней суперпозиции, см.[2]), в теории оптимального управления и в теории функций. Ее доказательство существенным образом опирается на вполне упорядоченность пространства $\mathbf{R}$. Поскольку уже пространство $\mathbf{R}^2$ не является вполне упорядоченным, то распространить это доказательство на случай вектор-функций

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 01-01-00979.

$a(t), b(t) \in \mathbf{R}^l$, $l > 1$, не представляется возможным. Оказывается, тем не менее, что справедливо следующее обобщение леммы 1 (множество П то же):

Лемма 2. Пусть $S(\Pi)$ – пространство измеримых п.в. конечных функций на П, $l \in \mathbf{N}$, $a(.), b(.) \in S^l(\Pi)$ – измеримые на П l-векторфункции, $a(t) \leqslant b(t)$ п.в. $t \in \Pi$ ($\forall a, b \in \mathbf{R}^l$: $a \leqslant b \Leftrightarrow a_j \leqslant b_j$, $j = \overline{1, l}$; $[a;b] = [a_1;b_1] \times \ldots \times [a_l;b_l]$), а функция $\Phi(t,y) : \Pi \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $y \in \mathbf{R}^l$. Тогда $\varphi(t) \equiv \max\limits_{y} \in [a(t);b(t)]\Phi(t,y)$ измерима на П, и $\exists \theta_m(.) \subset \Big\{ y \in S^l(\Pi) : y(t) \in [a(t);b(t)] \Big\}$ такая, что $\Phi(t, \theta_m(t)) \nearrow \varphi(t)$ п.в. $t \in \Pi$.

Литература

1. Красносельский М.А., Ладыженский Л.А. Условия полной непрерывности оператора П.С.Урысона. Тр. Моск. матем. о-ва, 3. 1954.

2. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.:Наука. 1966. - 500 с.

О ЗНАКОРЕГУЛЯРНОСТИ ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ НЕСТАНДАРТНОЙ УПРУГОЙ МОДЕЛИ

Чмелева Г.А. (Ставрополь)

Рассматривается дифференциальная система, состоящая из пяти дифференциальных уравнений, каждое из которых задано на своем отрезке, и набора связывающих эти уравнения условий стыковки решений (условия трансмиссии). Отрезки (одномерные континуумы), на которых заданы дифференциальные уравнения, образуют граф, лежащий в вертикальной плоскости и образующий конфигурацию положенной на бок буквы Н. В натуральном физическом объекте верхние два отрезка и вертикальный отрезок соответствуют упругим тросам. На этих трех отрезках при естественной их параметризации уравнения деформации имеют вид аналогичный деформации струны

$$-v'' = f.$$

Деформация нижней пары континуумов, если ее обозначить через $u(x)$, подчиняется уравнению (вне точки стыка)

$$(EJu'')'' = f.$$

Под функцией влияния $G(x,s)$ данной системы мы понимаем ее отклонений (как функции точки $x \in \Gamma$) под воздействием единичного внешнего усилия, сосредоточенного в точке $x = s$.

Оказывается, функция влияния данной задачи удовлетворяет оценкам, обеспечивающие фокусирование соответствующего интегрального оператора, что позволяет, аналогично случаю классического одномерного континуума, дать априорную оценку зазора между ведущей собственной частотой и остальными точками спектра соответствующей задачи об упругих колебаниях.

Для случая, когда все упругие фрагменты рассматриваемой системы являются струнами, аналогичный факт ранее был установлен в [1].

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.

ВОЗМУЩЕНИЕ РЕЗОНАНСОВ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НА НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛЕНКИ

Чубурин Ю.П. (Ижевск)
chuburin@otf.pti.udm.ru

Рассматривается оператор Шредингера $H(k_{||}) = -\Delta + V(x)$ с вещественным экспоненциально убывающим по $|x_3|$ потенциалом, определенный на блоховских по переменным x_1, x_2 функциях из $L^2(\Omega)$, где $\Omega = [0,1)^2 \times \mathbf{R}$, $k_{||}$ – квазиимпульс. (Это семейство операторов возникает при разложении оператора Шредингера с периодическим по x_1, x_2 потенциалом в соответствующем прямом интеграле пространств). Уравнение $H(k_{||})\psi = E\psi$ заменим, полагая $\varphi = \sqrt{|V|}\psi$, уравнением в $L^2(\Omega)$

$$\varphi(x) = -\int_\Omega \sqrt{|V(x)|} G_0(x-y, k_{||}, E)\sqrt{V(y)}\varphi(y)dy, \qquad (1)$$

где G_0 – ядро резольвенты оператора $H_0(k_{||}) = -\Delta$. Под уровнем (собственным значением или резонансом) оператора $H(k_{||})$ понимаем E на римановой поверхности функции G_0, для которого существует ненулевое решение этого уравнения. Через φ^* обозначим решение сопряженного уравнения. В следующей теореме E находится в окрестности точки ветвления $(k_{||} + 2\pi n_{||})^2$ функции G_0. Положим $k_3 = \sqrt{E - (k_{||} + 2\pi n_{||})^2}, k_3^{(0)} = \sqrt{E_0 - (k_{||} + 2\pi n_{||})^2}$.

ТЕОРЕМА .*Пусть функция W вещественна и $W/V \in L^\infty(\Omega)$. Предположим, что E_0 является уровнем кратности 1 оператора $H(k_{||})$, φ_0 – соответствующее решение уравнения (1) с $E = E_0$. Тогда для всех достаточно малых ϵ существует уровень E оператора $H(k_{||}) + \epsilon W(x)$ кратности 1 аналитически зависящий от ϵ, причем* $E = E_0 - 2\epsilon c_0 k_3^{(0)}(\varphi_0, \varphi_0^*) + o(\epsilon)$, где

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i||\varphi_0^*||^2||\varphi_0||^2} \int_{|k_3 - k_3^{(0)}|=\epsilon} (\varphi_0, \sqrt{|V|}R(k)\sqrt{V}\varphi_0^*)dk_3.$$

Собственное значение, лежащее на непрерывном спектре, при возмущении превращается в общем положении в резонанс. Получены формулы для возмущений (любого порядка) кратных уровней и соответствующих (обобщенных) собственных функций, в том числе в $\mathbf{R}^3$ для экспоненциально убывающего при $|x| \to \infty$ потенциала. Для $E \in \mathbf{R}$ формулы совпадают с обычными.

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЭКСПОНИЦИАЛЬНО МАЛЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Шалаумов В.А. (Кемерово)

shalaumov@ic.kemsu.ru

Пусть $y = y(x, \varepsilon)$ - классическое решение задачи Дирихле

$$L^\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \varepsilon^\alpha B(x)\frac{du}{dx} + C(x)y = 0$$

$$y(a, \varepsilon) = \gamma, y(b, \varepsilon) = \delta, a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

достаточно гладкие коэффициенты такие, что $B(x) \geqslant B_0 > 0$, $C(x) \leqslant C_0 < 0, \alpha \geqslant 0$ (если $\alpha = 0$, то условие на $C(x)$ можно опустить). Рассмотрим следующую последовательность представлений решения (случай $\gamma \neq 0, \delta = 0$) :

$y = exp\{-p_0(x,\varepsilon)\}\varphi_0(x,\varepsilon) \equiv exp\{-p_0\}\varphi_0, p_0(a,\varepsilon) = 0, p_0(x,\varepsilon) > 0$ при

$x \in (a,b], \varphi_0(a,\varepsilon) = \gamma; \varphi_0 = R_0 + exp\{-p_1\}\varphi_1, p_1(b,\varepsilon) = 0, p_1(x,\varepsilon) > 0$ при

$x \in [a,b), \varphi_1(b,\varepsilon) = -R_0(b,\varepsilon); \varphi_{2k+1} = R_{2k+1} + exp\{-p_{2k+2}\}\varphi_{2k+2}$,

$p_{2k+2}(a,\varepsilon) = 0, p_{2k+2}(x,\varepsilon) > 0$ при $x \in (a,b]$, (2)

$\varphi_{2k+2}(a,\varepsilon) = -R_{2k+1}(a,\varepsilon), k = 0,1,2,...;$
$\varphi_{2k} = R_{2k} + exp\{-p_{2k+1}\}\varphi_{2k+1},$
$p_{2k+1}(b,\varepsilon) = 0, p_{2k+1}(x,\varepsilon) > 0$ при $x \in [a,b),$
$\varphi_{2k+1}(b,\varepsilon) = -R_{2k}(b,\varepsilon)$ $k = 1,2,...$

При специальном выборе p_0, p_1, p_2 - все φ_{2k} удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению, также совпадают уравнения на φ_{2k+1} и, при этом, $p_{2k+1} \equiv p_1, p_{2k} \equiv p_2$ (случай $\gamma = 0, \delta \neq 0$ отличается лишь перестановкой a и b (2).

ТЕОРЕМА. Решение (1) представимо в виде

$$y = exp\{-p_0\}\sum_{k=0}^{\infty}[(R_{2k} + R_{2k+1}exp\{-p_1\})exp\{-k(p_1+p_2)] \qquad (3)$$

где $R_k = R_k(x,\varepsilon)$ - однозначно определенные асимптотические ряды по некоторым асимптотическим последовательностям $\{\beta_i(\varepsilon,\alpha)\}$ $i = 1,2,...$ при $\varepsilon \to 0$

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОЙ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ 5-ГО ПОРЯДКА[1]

Шалтыко Д.Г. (Саратов)
ShaltykoDG@info.sgu.ru

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ краевую задачу, порожденную дифференциальным уравнением

$$l[y] = y^{(5)} - \lambda y = 0$$

и распадающимися краевыми условиями

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'(\alpha) = y(1) = 0 \qquad (0 < \alpha < 1)$$

В [1] было приведено необходимое условие для сходимости рядов Фурье по собственным функциям задачи (1)-(2). Сформулируем теперь достаточное условие.

Теорема. *Пусть* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *причем выполняются условия:*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), гранта РФФИ (проект 03-01-00169) и программы "Университеты России" (проект ур.04.01.375).

а) $f_1(x)$, $f_2(x)$ аналитичны в D_β (D_β – четырехугольник в комплексной области, описанный в [1]), $0 < \beta < \alpha$;

б) $f_1, l[f_1], l^2[f_1], \dots, f_2, l[f_2], l^2[f_2], \dots$ удовлетворяют краевым условиям в 0;

в) $\frac{d^i}{dx^i} l^j[f_1] = O\left(\left(\frac{1+\epsilon}{(\beta-\epsilon-x)\cos\frac{\pi}{5}}\right)^{5j+i}(5j+i)!\right)$, $x \in [0, \beta-\epsilon]$;

г) $\frac{d^i}{dx^i} l^j[f_2] = O\left(\left(\frac{1+\epsilon}{(\beta-\epsilon-x)\cos\frac{2\pi}{5}}\right)^{5j+i}(5j+i)!\right)$, $x \in [0, \beta-\epsilon]$;

Тогда $f(x)$ разлагается на $[0, \beta_1]$ ($0 < \beta_1 < \beta$) в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям задачи (1)-(2).

Литература

1. Шалтыко Д.Г. О сходимости спектральных разложений одной краевой задачи 5-го порядка.// Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докладов 12-й Сарат. зимней школы. – Саратов, 2004. – С.199-200.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ГОЛОМОРФНЫХ В ПОЛИДИСКЕ ФУНКЦИЙ

Шамоян Р.Ф. (Брянск)

rsham@mail.ru

В докладе приводятся описания сопряженных классов некоторых квазинормированных подпространств класса $H(D^n)$ — всех аналитических в поликруге $D^n = \{z : (z_1, \dots, z_n) : |z_i| < 1,\ i = 1, \dots, n\}$ функций.

Доказательства полученных утверждений получаются развитием подхода впервые предложенного автором в работе [1]. При $\min(p, q) \leqslant 1$ даются описания функционалов в классах с квазинормами вида

$$\|f\|^p_{M^{pq}_{\beta,t}} = \int_0^1 \dots \int_0^1 \left(\int_{|z_1| \leqslant r_1} \dots \int_{|z_n| < r_n} |f(z)|^q (1-|z|)^t \, dm_{2n}(z) \right)^{p/q} (1-r)^\beta r dr;$$

$$\|f\|^p_{N^{pq}_{\beta,t}} = \int_{T^n} \int_{I^n} \left(\int_0^{r_1} \dots \int_0^{r_n} |f(z)|^q (1-|z|)^t \, d|z| \right)^{p/q} (1-|z|)^\beta \, dm_{2n}(z)$$

где

$$p,q\in(0,\infty)\,,\ I^n=[0,1]^n\,,\ T^n=\{z:|z_j|=1,\,j=1,\dots,n\}\,,$$

$$(1-|z|)^\gamma=\prod_{k=1}^{n}(1-|z_k|)^\gamma\,,\gamma\in R$$

$dm_{2n}(z)$ и $dm_{2n}(\xi)$ — нормированные меры Лебега в полидиске и на остове $T^n,\beta,t>-1$

Рассматриваются также варианты квазинорм в которых I^n заменено на отрезок $[0,1]$.

Отметим, что часть полученных утверждений распространяет некоторые известные ранее результаты из статьи [2].

Литература

1. Р. Ф. Шамоян, О представлении линейных непрерывных функционалов в пространствах аналитических функций типа Харди –Соболева в поликруге . Украин. Мат .Жур. 671-686. 2003. т55

2 P Ahern M Jevtic, Duality and Multipliers of mixed norm spaces, Mich. Math .Journal 1983 ,30, 53-64 .

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ ПОД ГИДРОСТАТИЧЕСКИМ ДАВЛЕНИЕМ С УЧЕТОМ МИКРОСТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА

Шашкина С.А. (Воронеж)

Рассматривается плоская задача напряжённо-деформированного состояния упругого материала с учётом характерного размера h его микроструктуры. Полагается, что на круговом вырезе радиуса a напряжения отсутствуют: $\sigma_r=\sigma_{r\theta}=0$, а на бесконечности материал находится под действием равномерного гидростатического давления $\sigma_r=\sigma_\theta=-P$ [1].

В качестве малого параметра выбирается величина $\delta=\frac{h^2}{a^2}$. С учётом величины порядка тензор малых деформаций складывается из тензора Коши и тензора микродеформаций: $\varepsilon_{ij}=\varepsilon^c_{ij}+(\delta 6)\varepsilon^\delta_{ij}$, где $\varepsilon^c_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$, $\varepsilon^\delta_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,jj^2}+u_{j,ii^2})$.[2]

Для упругого материала закон Гука, уравнение равновесия вместе с выражением для тензора деформаций приводят к системе уравнений типа Ламе в перемещениях, которая содержит производные четвёртого порядка от перемещений по геометрическим координатам. Система уравнений в перемещениях является сингулярно возмущенной. Её решения можно представлять в виде двух рядов - внешнего и внутреннего разложений.

Для рассматриваемой плоской задачи внешнее разложение в нулевом приближении имеет точное решение: $u_r^0 = \frac{A}{r}$ [1]. Главная часть микродеформаций $\varepsilon_{ij}^{\delta}$ определяется внешним полем перемещений, и может быть найдена простым дифференцированием. Знание тензора микродеформаций позволяет определить тензор микронапряжений. При этом оказывается, что микронапряжения есть напряжения гидростатического сжатия, которые являются периодическими функциями по θ с периодом $T = \frac{\pi}{2}$: $\sigma_{rr} = (-6\frac{A}{r^4})(2\lambda + \mu)\cos 4\theta$. Представленное решение позволяет сделать вывод о том, что на глубине $\delta = \frac{h^2}{a^2}$ от свободной границы имеют место радиальные напряжения, возмущающие основное напряжённое состояние на величину порядка δ.

Литература

1. Амензаде Ю.А. "Теория упругости", Баку, 1968г., 250с.

2. Вервейко Н.Д., Воронков А.А., Характеристики деформирования материалов с учетом характерных размеров микроструктуры. "Совр. проблемы механики и прикл. математики"Ч.1, Т.1, Изд. ВГУ, Воронеж, 2004г., с. 116-119

ДОПУСТИМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ И БИФУРКАЦИОННЫЕ ДИАГРАММЫ ОБОБЩЕННОГО ВОЛЧКА КОВАЛЕВСКОЙ

Шведов Е.Г. (Волгоград)

eshvedov@vags.ru

Задача построения топологических инвариантов неприводимой интегрируемой гамильтоновой системы с тремя степенями свободы, описывающей движение волчка Ковалевской в двух силовых полях требует нахождения бифуркационных диаграмм $\Sigma_h \subset \mathbf{R}^2$ отображений момента J_h, определенных на пятимерных изоэнергетических уровнях $E_h = \{H = h\} \subset SO(3) \times \mathbf{R}^3$. Известны уравнения (М.П. Харламов, 2004), описывающие для всех h некоторое "одномерное" подмножество Σ'_h такое, что $\Sigma_h = \Sigma'_h \cap \Delta_h$, где $\Delta_h = J_h(E_h)$ – область допустимых значений первых интегралов.

Волчок Ковалевской в двух силовых полях имеет один свободный параметр $\lambda \in [0,1]$ – отношение напряженностей силовых полей. Проведена классификация множеств $\Sigma'_h(\lambda)$ в плоскости параметров (h, λ). Показано, что существует 19 параметрически устойчивых типов и 30 разделяющих.

Для нахождения фактической допустимой области Δ_h изучаются вспомогательные бифуркационные диаграммы отображений момента, порожденных парами первых интегралов. Пусть K – первый интеграл Ковалевской – Богоявленского (1984), а G – интеграл Реймана – Семенова-Тян-Шанского (1988). Обозначим

$$
\begin{aligned}
&k_0(h) = \begin{cases} (h+2\lambda)^2, \ -(1+\lambda) \leqslant h \leqslant -2\lambda \\ 0, \ h \geqslant -2\lambda \end{cases}; \\
&k_1(h) = (h+2)^2; \\
&g_0(h) = \begin{cases} \lambda^2 h - \lambda(1-\lambda^2), \ -(1+\lambda) \leqslant h \leqslant -2\lambda \\ g_*(h), \ h \geqslant -2\lambda \end{cases}; \\
&g_1(h) = h + (1-\lambda^2),
\end{aligned}
$$

где $g_*(h)$ – наименьшее значение G на пересечении E_h с многообразием $K = 0$, заданное известным неявным уравнением (Д.Б. Зотьев, 2000). Доказано, что неравенства

$$k_0(h) \leqslant k \leqslant k_1(h), \quad g_0(h) \leqslant g \leqslant g_1(h), \quad h \geqslant -(1+\lambda)$$

полностью определяют интервал изменения значений k, g на изоэнергетическом многообразии, с учетом того, что в данной задаче все E_h компактны и связны (М.П. Харламов, Д.Б. Зотьев, 2005).

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Шевякова О.П. (Нальчик)
niipma@mail333.com

В области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < a, \ 0 < y < b\}$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\Big(a_0 D_{0x}^{\alpha} + \sum_{j=1}^{n} a_j D_{0x}^{\alpha_j} + A D_{0y}^{\beta} + B D_{ax}^{\gamma}\Big) u(x,y) = f(x,y) \ , \qquad (1)$$

где $0 < \alpha, \beta \leqslant 1$, $\alpha \cdot \beta < 1$, $|\gamma| < 1, |\alpha_j| < 1$, $j = \overline{1,n}$, $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \, > \cdots > \alpha_n$; A, B, a_j, $j = \overline{0,n}$,– постоянные величины, $a_0 A > 0$; D_{ct}^{μ}– оператор дробного интегродифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка μ [1, с. 9] .

Сформулируем следующую краевую задачу: *найти решение* $u =$
$= u(x, y)$ *уравнения* (1) *в области* Ω такое, что $x^{1-\alpha}y^{1-\beta}u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\beta-1}u(x,y) = \psi(x)\ ,\ \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}u(x,y) = \varphi(y)\ , \qquad (2)$$

где $\varphi(y)$, $\psi(x)$ *– заданные функции.*

Теорема. *Пусть* $a_0 B \geqslant 0$, $a_0 a_j \geqslant 0, j = \overline{1,n}$, *тогда существует не более одного решения* $u = u(x,y)$ *задачи* (1)–(2).

Доказательство проводится опираясь на свойство положительности операторов дробного интегрирования и дифференцирования [1, с. 45-46].

Сформулированная теорема справедлива и в случае, когда $A =$ $= A(x,y)$, $a_j = a_j(x,y)$, $j = \overline{0,n}$, если функция $A(x,y)$ непрерывна, положительна и при фиксированном x является невозрастающей на сегменте $[0,b]$ как функция переменной y, а функции $a_j(x,y)$ непрерывны, положительны и при фиксированном y являются невозрастающими на $[0,a]$ как функции переменной x [2].

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит. 2003. – 272 с.

2. Нахушев А.М. Еще раз об одном свойстве оператора Римана–Лиувилля // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2001. Т. 5, т 2. С. 42-43.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ВЫРОЖДЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

Широкова А.Ю. (Стерлитамак)

Рассмотрим уравнение

$$L(u) = K(x,y)u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0, \qquad (1)$$

где $K(x,y) = \frac{1}{2}[x^m(1+\operatorname{sgn} y) + x^n(1-\operatorname{sgn} y)]$, $m, n = \text{const} < 2$, в области D, ограниченной нормальной кривой Γ_0 ($y = b\sqrt{1-x^{2-m}}$, $b = \frac{2}{m-2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y \geqslant 0$), отрезком $[0,b]$ оси Oy и характеристиками уравнения (1) $OC : \frac{2}{2-n}x^{\frac{2}{2-n}} + y = 0$, $AC : \frac{2}{2-n}2^{\frac{2}{2-n}} + y = \frac{2}{2-n}$, пересекающимися в точке $C(2^{\frac{2}{2-n}}, \frac{1}{n-2})$.

Задача Трикоми. *Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:*

1) $u(x,y) \in C(\overline{D_+} \cup \overline{D_-}) \cap C^1(D_+ \cup D_- \cup J) \cap C^2(D_+ \cup D_-)$;

2) $L(u) \equiv 0$ *в* $D_+ \cup D_-$;

3) $u(x, b\sqrt{1-x^{2-m}}) = \varphi(y)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

4) $u(x,0) = \varphi_0(y)$, $0 \leqslant y \leqslant b$;

5) $u(x, \frac{2}{2-n}x^{\frac{2}{2-n}}) = \psi(y)$, $0 \leqslant x \leqslant 2^{\frac{2}{2-n}}$;

6) $\tau_-(x) = x^{n/2}\tau_+(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ (2)

$\nu_-(x) = \nu_+(x)$, $0 < x < 1$

где φ, φ_0, ψ *– заданные функции,* $\tau_\pm(x) = u(x, 0 \pm 0)$, $\nu_\pm(x) = u_y(x, 0 \pm 0)$.

Лемма. *Если $u(x,y)$- непрерывное в $\overline{D_-}$ решение уравнения (1), обращающееся в нуль на характеристике OC и функция $\tau_-(x)$ представима в виде (2). Если функция $\tau_+(x) = x^{-n/2}\tau_-(x)$ достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения на отрезке $[0,1]$ в точке $\xi \in (0,1)$, то* $\nu_-(\xi) > 0(< 0)$.

Теорема. *Если существует решение задачи Трикоми, то оно единственно.*

Данная задача решена Сабитовым К.Б. в [1] для случая $n = m < 2$.

Литература

1. *Сабитов К.Б.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа с вырождением второго рода на границе области. – Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Куйбышев, 1979.

ОБ ОДНОМ ЭЛЕКТИВНОМ КУРСЕ В ПРОФИЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Шотаев Г.Н. (Владикавказ)
shotaevg@rambler.ru

Реформы Российского школьного образования, вне зависимости от отдельных успешных шагов, постепенно и уверенно уводят его от «физико-математической» традиции. Чтобы сохранить необходимый контингент школьников, интересующихся математикой и естественными науками и провести качественную предпрофильную подготовку, надо максимально эффективно использовать возможности профильного обучения.

Современное математическое образование одним из своих основных компонентов содержит элементы математического моделирования, основам которого можно обучать уже в старших классах школы.

Цель курса — познакомить школьников с методами математического моделирования, а также соответствующим математическим инструментарием, не выходящим далеко за пределы программы средней школы. Курс демонстрирует универсальный характер математики, как инструмента для решения разнообразнейших задач из различных сфер человеческой деятельности, таких как организационное управление, экономика, экология, техника, тайнопись (криптография) и т. д.

Содержание учебного курса предполагает ознакомление школьников с основными этапами математического моделирования. В ходе изучения курса школьник выработает навыки записывать в математических терминах качественные и количественные представления изучаемой практической задачи, исследовать математические задачи, к которым приводят модели, интерпретировать полученные решения в терминах исходной модели. Курс способствует также освоению научной методологии, системного мышления, междисциплинарного подхода. Он ориентирует школьника на проникновение в суть явлений, на постижение глубинных причин процессов, происходящих в природе и обществе, нацеливает на поиск истины и скрытого порядка в окружающем хаосе, воспитывает объективное и строгое отношение к себе и к окружающим. Курс прививает навыки моделирования и прогнозирования последствий любых действий, поэтому способствует выработке рациональной и ответственной мотивации поступков

СЛАБАЯ ИЗОМОРФНОСТЬ СЕМЕЙСТВ ОБОБЩЁННЫХ СТЕПЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Шубарин М.А. (Ростов-на-Дону)
mas@math.rsu.ru

На множестве произвольных семейств обобщённых степенных пространств $(p_{\overline{X},e})$ вводится отношение типа "изоморфности". Определения этих классов интерполяционного свойства основано на свойствах непрерывных и ограниченных операторов, диагональных относительно фиксированного общего абсолютного базиса $e = (e_n)$ паре пространств Фреше $\overline{X} = [X_0, X_1]$.

Пусть даны пары пространств Кёте $\overline{X} = [K(A^{(0)}), K(A^{(1)})]$, $\overline{Y} = [K(B^{(0)}), K(B^{(1)})]$ такие, что $K(A^{(0)}) \supset K(A^{(1)})$, $K(B^{(0)}) \supset K(B^{(1)})$

и общие абсолютные базисы $f = (f_n)$ и $h = (h_n)$ соответственно в $\overline{X}$ и $\overline{Y}$.

Будем говорить, что семейства пространств $(p_{\overline{X},f})$ и $(p_{\overline{Y},h})$ слабо изоморфны (и писать $(p_{\overline{X},f}) \overset{\text{сл}}{\cong} (p_{\overline{Y},h})$), если любое пространство из $(p_{\overline{X},f})$ (соответственно из $(p_{\overline{Y},h})$) изоморфно подходящему пространству из $(p_{\overline{Y},h})$ (соотвественно из $(p_{\overline{X},f})$).

Построенные в работах Захарюты В. П. [1] линейные топологические инварианты позволяют (при дополнительных ограничениях) сформулировать необходимые (в некоторых случаях совпадающие с достаточными) условия слабой изоморфности для упомянутых в заголовке семейств пространств.

Теорема 1. Пусть $\overline{X} = [\Phi_{h^{(0)}}(a), \Phi_{h^{(1)}}(a)]$, $\overline{Y} = [\Phi_{g^{(0)}}(b), \Phi_{g^{(1)}}(b)]$. Если $(p_{\overline{X},e}) \overset{\text{сл}}{\cong} (p_{\overline{Y},e})$, то $a_n \asymp b_n$.

Теорема 2. Пусть $\overline{X} = [E_0(a), E_\infty(a)]$, $\overline{Y} = [E_0(b), E_\infty(b)]$. Следующие условия эквивалентны: $(p_{\overline{X},e}) \overset{\text{сл}}{\cong} (p_{\overline{Y},e})$ и $\overline{X} \overset{\text{кд}}{\cong} \overline{Y}$.

Теорема 3. Пусть $\overline{X} := [E(\lambda', a), E(\lambda'', a)]$, $\overline{Y} := [E(\mu', b), E(\mu'', b)]$. Если $(p_{\overline{X},e}) \overset{\text{сл}}{\cong} (p_{\overline{Y},e})$, то существует возрастающая функция $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\forall A \exists B \forall \varepsilon \forall \delta \forall t |\{n : \delta < \lambda_n < \varepsilon, t/A < A_n < At\}| \leqslant$$
$$|\{n : \min(\mu'_n, \mu''_n) < \varphi(\varepsilon), \max(\mu'_n, \mu''_n) > \varphi^{-1}(\delta), t/B < b_n < Bt\}|.$$

Литература

Zachariuta V. P. Linear topological invariants and their application to generalized power spaces // Turkish J. Math.- v. 20, №2.- 1996.

О ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ И ФОРМАХ САМОПОДГОТОВКИ КУРСАНТОВ ВОЕННОЙ АКАДЕМИИ РБ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Шунина Г.А. (Минск)
Tanilia@mail.ru

В настоящее время прослеживается тенденция перехода от массовых армий к более мобильным профессиональным армиям. Идет переход на качественно новые виды и системы вооружений. Это выдвигает повышенные требования к системе военного образования: отказ от репродуктивно-иллюстративного метода и внедрение современных перспективных методов обучения.

Одной из форм образования является самообразование, а в условиях Военной Академии самоподготовка, то есть ежедневно планируемые часы на самостоятельную учебу курсантов. Кроме выполнения внеаудиторных заданий, необходимость эффективной самоподготовки диктуется еще и тем, что курсанты вынуждены пропускать занятия по объективным причинам из-за караульно-гарнизонной службы, болезни и т. д. в аудиторное время.

Одной из основных задач курсантов в часы самоподготовки является проработка прочитанного лекционного материала и подготовка к практическим занятиям по высшей математике. Используя индивидуальный подход к руководству самоподготовки, нужно вырабатывать у курсантов навыки самостоятельного умственного труда для приобретения математических знаний. Необходимо формировать у них отношение к учебе, как к непрерывному процессу творческого самостоятельного приобретения знаний, а не к механическому заучиванию.

Самоподготовка курсантов включает следующие формы учебы:

1. Работа по предложенному плану.
2. Самостоятельная работа с литературой по заданной теме.
3. Выполнение реферативного задания по данному образцу.
4. Расчетно-графические задания.
5. Исследовательские задания творческого характера.
6. Самостоятельная учеба по индивидуальному плану.

Важную роль в организации эффективной самоподготовки играет методическое обеспечение. С этой целью на кафедре высшей математики ВА РБ ведется работа по созданию учебно-методического комплекса на основе информационных технологий.

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ТРИКОМИ

Шустрова Н.В. (Стерлитамак)

Рассмотрим уравнение Лаврентьева-Бицадзе с комплексным параметром

$$Lu = u_{xx} + sgny \cdot u_{yy} + \lambda u = 0 \tag{1}$$

в области D, которая в полуплоскости $y > 0$ ограничена дугой окружности единичного радиуса Γ $(r = 1,\ 0 < \varphi \leqslant \varphi_0,\ 0 < \varphi_0 \leqslant \pi)$, отрезком AK $(\varphi = \varphi_0,\ 0 \leqslant r \leqslant 1)$, а в полуплоскости $y < 0$ ограничена отрезком $AC(y = -kx,\ 0 < k \leqslant 1)$ и характеристикой $CB(x - y = 1)$ уравнения (1). Обозначим $D_+ = D \cap \{y > 0\}$; $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Обобщенная задача Трикоми. Найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям: $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-)$, $Lu(x,y) = 0, (x,y) \in D_+ \cup D_-$, $u(x,y) = 0, (x,y) \in AC \cup AK$, $u|_\Gamma = f(\varphi)$.

Теорема. *Если* λ *не является корнем уравнения* $J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}) = 0$, $f(\varphi) \in C^\alpha[0,\varphi_0]$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $f(\varphi_0) = 0$, μ_n *- корни уравнения* $\operatorname{tg}\mu\varphi_0 = 1-2\left(1+\left(\frac{1-k_0}{1+k_0}\right)^\mu\right)^{-1}$, f_n *- коэффициенты разложения по системе синусов* $\sin\left(\mu_n\varphi + \operatorname{arctg}\left(1-\left(\frac{1-k_0}{1+k_0}\right)^{\mu_n}\right)\left(1+\left(\frac{1-k_0}{1+k_0}\right)^{\mu_n}\right)^{-1}\right)$, *то существует решение задачи Трикоми и оно имеет вид*

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda} r)}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})} \sin\left(\mu_n\varphi + \operatorname{arctg}\frac{1-\left(\frac{1-k_0}{1+k_0}\right)^{\mu_n}}{1+\left(\frac{1-k_0}{1+k_0}\right)^{\mu_n}}\right),$$

$$(x,y) \in D_+,$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)})}{\sqrt{2\left(1+\left(\frac{1-k_0}{1+k_0}\right)^{2\mu_n}\right)} J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})} \left(\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1-k_0}{1+k_0}\right)^{\mu_n}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\mu_n/2}\right), (x,y) \in D_-.$$

Эта задача была решена в работе [1] при $\lambda = 0$.

Литература

1. *Моисеев Е. И.* Применение метода разделения переменных для решения уравнений смешанного типа// Дифференц. уравнения. 1990. Т.26. №7. С.1160 - 1172.

ИТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ БОЛЬШИХ РАЗРЕЖЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Эксаревская М.Е. (Воронеж)

exa@kvm.vsu.ru

Эта работа связана с итерационным решением больших разреженных симметричных положительно (неотрицательно) определенных линейных систем

$$Ax = b \tag{1}$$

возникающих из конечно разностной дискретизации эллиптических ДУЧП второго порядка для двух переменных. В таких случаях широко используется метод сопряженных градиентов [1] и возрастающее внимание уделяется предобуславливателям, основанным на MILU факторизации A, вычисленной по отношению к рекурсивному красно-черному упорядочиванию неизвестных [2,3].

В работе показано, что предобуславливатели для неполной факторизации, основанные на рекурсивном красно-черном упорядочивании, являются эффективными для дискретных эллиптических ДУЧП второго порядка с изотропными коэффициентами. Однако, они страдают от некоторой слабости в присутствии анизотропии или растягивании сетки. Здесь мы предлагаем скомбинировать эти упорядочивания с техникой предобуславливания блочной неполной факторизации и ввести два улучшения стандартных блочных алгоритмов ILU [3]. Для рассмотрения с точки зрения реализации последние расширены для случая, когда блочные элементы - обобщенные трехдиагональные матрицы, скажем, матрицы, которые имеют по большей мере один ненулевой элемент на строку в их строго верхней треугольной части. С другой стороны, чтобы улучшить исполнение, вводится блочный метод, который называется улучшенная модифицированная блочная ILU.

Численные эксперименты показывают, что результирующий предобуславливатель, чья базовая точечно ориентированная версия уже была найдена устойчивой по отношению к скачкам в коэффициентах ДУЧП [3], является эффективным и устойчивым по отношению как к прерывистости, так и к анизотропии тоже в коэффициентах ДУЧП.

Литература

1. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. – М. : Мир. – 1991. – 367 с.

2. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. – М. : Наука – 1995. – 286 с.

3. O. Axelsson, Iterative Solution Methods, University Press, Cambridge, 1996.

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ДЕРЕВЕ[1]

Юрко В.А. (Саратов)
yurkova@info.sgu.ru

Рассмотрим компактное связное дерево T в $\mathbf{R}^m$ с корнем v_0, множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и множеством ребер $E = \{e_1, \dots, e_r\}$. Пусть $\Gamma := \{v_0, \dots, v_p\}$ – множество граничных вершин. Предположим, что длина каждого ребра равна 1. Функция Y на T может быть представлена как вектор $Y(x) = [y_j(x)]_{j=\overline{1,r}}$, $x \in [0,1]$, где функция $y_j(x)$ определена на ребре e_j. Пусть $q = [q_j]_{j=\overline{1,r}}$ – интегрируемая комплексно-значная функция на T, которая называется потенциалом. Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля на T:

$$-y_j''(x)+q_j(x)y_j(x) = \lambda y_j(x),\ x \in [0,1],\ j = \overline{1,r},\ q_j(x) \in L(0,1), \quad (1)$$

где λ — спектральный параметр, функции $y_j(x)$, $y_j'(x)$ абсолютно непрерывны на $[0,1]$ и удовлетворяют так называемым стандартным условиям склейки в каждой внутренней вершине (непрерывность и условие Кирхгофа). Пусть $\Psi_k(x,\lambda) = [\psi_{kj}(x,\lambda)]_{j=\overline{1,r}}$, $k = \overline{1,p}$ – решения уравнения (1) при граничных условиях $\Psi_{k\,|v_j} = \delta_{kj}$, $j = \overline{0,p}$, где δ_{kj} – символ Кронекера. Обозначим $M_k(\lambda) := \Psi'_{k\,|v_j}$, $k = \overline{1,p}$. Вектор $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=\overline{1,p}}$ называется вектором Вейля для (1). Исследуется обратная задача восстановления потенциала q на T по вектору Вейля M.

Теорема. *Задание вектора Вейля M однозначно определяет потенциал q на T.*

Метод доказательства является развитием метода спектральных отображений, изложеннего в [1], и дает также конструктивную процедуру решения обратной задачи. Получено также решение обратной задачи восстановления q по системе $p+1$ спектров и по дискретным спектральным данным.

Литература

1. Yurko V.A., Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-posed Problems Series. VSP, Utrecht, 2002.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Университеты России ур.04.01.376 и гранта РФФИ 04-01-00007.

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ЗАДАЧИ ТЕРМОКОНВЕКЦИИ ВЯЗКОУПРУГОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Якупов М.М. (Челябинск)
yakupov@busin.chel.su

Система уравнений

$$\begin{array}{rcl} (1-æ\nabla^2)v_t & = & \nu\nabla^2 v-(v\cdot\nabla)v-\nabla p+g\gamma S+f, \\ 0 & = & \nabla\cdot v, \\ S_t & = & \sigma\nabla^2 S - v\cdot\nabla S + v\cdot\gamma \end{array} \qquad (1)$$

является гибридом системы уравнений Осколкова [1] и уравнения теплопроводности. Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ $(n=2,3)$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega\times\mathbf{R}_+$ для системы (1) поставим задачу Коши-Дирихле

$$\begin{array}{l} v(x,0)=v_0(x),\quad S(x,0)=S_0(x),\quad x\in\Omega; \\ v(x,t)=0,\quad S(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+. \end{array} \qquad (2)$$

Фазовое пространство задачи (1), (2) изучалось ранее [2]. Пользуясь подходом [3] и методами [4], удается получить более точный результат.

Теорема. *Фазовым пространством задачи (1),(2) служит простое банахово C^∞-многообразие.*

Литература

1. Осколков А.П. Некоторые модельные нестационарные системы в теории неньютоновых жидкостей // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 127. С. 32–57.

2. Свиридюк Г.А. Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости // Изв. ВУЗ. Матем. 1990. №2. С. 65–70.

3. Свиридюк Г.А. Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. ВУЗ. Матем. 1994. №1. С. 62–70.

4. Свиридюк Г.А., Якупов М.М. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова // Дифференц. уравн. 1996. Т. 32, №11. С. 1531–1543.

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЦЫ ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ВНУТРЕННИХ ДЕФЕКТОВ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАКРОТРЕЩИНЫ В УСЛОВИЯХ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

Мещерякова Т.В. (Воронеж)

В данной работе рассматривается задача о взаимодействии макротрещины с микротрещинами, произвольно расположенными относительно друг друга и относительно макротрещины, в упругом полупространстве в условиях продольного сдвига. Система сингулярных интегральных уравнений задачи приведена в работе [1]. Применяя метод малого параметра, который равен отношению длины микродефекта к макротрещине [2], получена рекуррентная система уравнений. Первое уравнение полученной системы - это уравнение для одной трещины в полупространстве, остальные уравнения учитывают наличие микродефектов в рассматриваемом теле.

Далее, применив еще раз метод малого параметра, теперь малый параметр равен отношению длины трещины к расстоянию от ее центра до границы полупространства (то есть считаем, что дефект удален от границы полупространства на расстояние, хотя бы на порядок большее, чем его длина.), находим разрывы смещений на линиях трещин. Получены коэффициенты интенсивности напряжений в вершине макротрещины и микротрещин, исследовано изменение значения КИН макротрещины, в зависимости от угла наклона ее по отношению к границе полупространства при наличии микродефектов. Также построены графики зависимости коэффициентов интенсивности напряжений макротрещины от расположения микродефектов. Проведен анализ полученных результатов.

Литература

1. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. Думка, 1976. – 444 с.

2. Tamuzs V., Romalis N., Petrova V. Fracture of Solids with Microdefects. New York: NOVA Science Publishers Inc., 2000.-247 p.

Предметный указатель

Материалы
Воронежской весенней математической школы
"ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ –XVI"

Современные методы теории краевых задач

Верстка и подготовка оригинал-макета
Шабров С.А.

ЛР ИД № 03482 от 08.12.00
Подписано в печать 15.04.05. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Уч.-изд.л. 12. Тираж 250.

ИММиФ
394000, Воронеж, ул. К. Маркса 67Б