



**Михаил Дмитриевич Миллионщиков.**

**(16.01.1913-27.05.1973)**



Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
Российская академия наук

Международная научная конференция,  
посвященная 100-летию со дня рождения  
академика М.Д. Миллионщикова

## **ТУРБУЛЕНТНОСТЬ и ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ**

Москва, 26-28 ноября 2013 г.  
Сборник тезисов

\*\*\*

International Conference  
dedicated to the centenary of  
Mikhail D. Millionshchikov

## **TURBULENCE & WAVE PROCESSES**

Moscow, November 26-28, 2013  
Abstracts

МОСКВА  
ООО «Интуит.ру»  
2013

УДК 544.272  
ББК 22.253я434  
Т86

Составители сборника:

*Д.В. Георгиевский, М.Г. Голицына, М.А. Лебедев, Д.В. Миллионщиков,  
А.С. Петросян, Т.С. Ратью, Е.В. Троицкий*

**Международная научная конференция «Турбулентность и волновые процессы», посвященная 100-летию со дня рождения академика М.Д. Миллионщикова, 26-28 ноября 2013 г. Сборник тезисов, М.: ООО «Интуит.ру», 2013. - 192 стр.  
ISBN - 978-5-9556-0157-1**

**International Conference “Turbulence and Wave Processes” dedicated to the centenary of Mikhail D. Millionshchikov, November 26-28, 2013. Abstracts. Moscow: INTUIT.RU Ltd., 2013. - 192 p.  
ISBN - 978-5-9556-0157-1**

©Авторы, 2013  
©Московский государственный университет, 2013  
©Российская академия наук, 2013

## Программный комитет конференции:

- академик В.А. Садовничий (сопредседатель, Ректор МГУ им. М.В. Ломоносова),
- академик В.Е. Фортов (сопредседатель, Президент РАН),
- профессор Г.И. Баренблатт (Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН, University of California at Berkeley (USA)),
- академик Г.С. Голицын (Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН),
- академик В.Е. Захаров (University of Arizona (USA), Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Новосибирский государственный университет),
- профессор В.П. Карликов (механико-математический факультет и НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова),
- академик В.В. Козлов (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова),
- академик А.Н. Лагарьков (Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН),
- академик А.И. Леонтьев (НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова),
- член-корреспондент РАН И.И. Липатов (ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского),
- академик В.Е. Накоряков (Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН),
- академик Р.И. Нигматулин (Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова),
- академик Н.Н. Пономарев-Степной (Российская академия наук),
- профессор Т.С. Ратью (Институт математических исследований сложных систем МГУ им. М.В. Ломоносова, EPFL (Lausanne, Switzerland)),
- академик Ю.А. Рыжов (НИУ Московский авиационный институт),

- член-корреспондент РАН Э.Е. Сон (Объединенный институт высоких температур РАН, ГУ Московский физико-технический институт).

### **Организационный комитет конференции:**

- Ю.М. Окунев (сопредседатель, НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова),
- В.Н. Чубариков (сопредседатель, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова),
- Д.В. Георгиевский (заместитель председателя, механико-математический факультет и НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова),
- Н.В. Денисова (механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова),
- В.А. Князев (НИЦ “Курчатовский институт”),
- М.А. Лебедев (Российский Пагуошский комитет при Президиуме РАН, Москва),
- Д.В. Миллионщиков (ответственный секретарь, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова),
- М.И. Монастырский (ГНЦ РФ ИТЭФ),
- А.С. Петросян (Институт космических исследований РАН),
- Г.А. Чечкин (механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова).

Конференция организована

- Московским государственным университетом им. М.В. Ломоносова (лаборатория Бернулли Института математических исследований сложных систем совместно с лабораторией геометрических методов математической физики им. Н.Н. Боголюбова механико-математического факультета МГУ)
- Российской академией наук (Объединенный институт высоких температур РАН),

при участии Государственного университета МФТИ и некоммерческого партнерства «Агентство научных и деловых коммуникаций».

Конференция поддержана грантами Правительства РФ: договор 11.G34.310054 и договор 11.G34.31.0005, МГУ им. М.В. Ломоносова, Президиумом РАН, ОИВТ РАН и грантом РФФИ 13-01-06097-г.

К 100-летию со дня рождения  
академика  
Михаила Дмитриевича Миллионщикова  
(16.01.1913-27.05.1973)

## **Плодотворность и творческое многообразие как модель турбулентности. Гипотеза Миллионщикова**

Академик М.Д. Миллионщиков — выдающийся ученый в области аэрогидродинамики, прикладной физики и ядерной энергетики, организатор науки, государственный и общественный деятель. Он внес большой вклад в развитие таких областей науки и техники, как теория турбулентности, теория фильтрации, прикладная газовая динамика, разделение изотопов, высокотемпературное реакторостроение, прямое преобразование энергии. В историю науки он вошел как автор гипотезы Миллионщикова, которая и поныне цитируется учеными во всем мире: она активно применяется в задачах, связанных, прежде всего, с турбулентностью в геофизике.

При всем многообразии областей, которыми занимался Михаил Дмитриевич, тема турбулентности была самой любимой, она прошла от аспирантуры до последних дней его жизни. Для специалистов в области турбулентности не покажется странным утверждение, что вся деятельность Михаила Дмитриевича была прекрасной моделью турбулентности. Энергия, творческая самоорганизация, ясная формулировка проблематики исследования – это ли не черты структуры турбулентных потоков?

Свои известные теоретические исследования по однородной изотропной турбулентности, важнейший результат которых вошел в науку как гипотеза Миллионщикова, Михаил Дмитриевич выполнил в конце 1930-х годов, работая над диссертацией в аспирантуре при Московском авиационном институте под руководством Андрея Николаевича Колмогорова. В 1939 году была опубликована первая работа Михаила Дмитриевича по теории изотропной турбулентности. В ней изучался заключительный период вырождения, когда процессами перераспределения энергии по спектру пульсаций можно пренебречь по сравнению с процессами диссипации. М.Д. Миллионщиков нашел решение уравнения Кармана-Хуарта и установил закон изменения во времени корреляционных функций полей скорости и температуры. Результаты, полученные им для асимптотического поведения корреляционных функций на заключительной стадии вырождения однородной и изотропной турбулентности, оказались наиболее удобными для экспериментальной проверки.

Для проверки результатов М.Д. Миллионщикова в 1948 году Дж.К. Бэтчелор и А.А. Таунсенд предприняли специальные измерения в усло-

виях, позволяющих получить турбулентность с высокой степенью вырождения. Экспериментальные результаты совпали с теоретическими. Ныне считается, что приложимость теории, предложенной Михаилом Дмитриевичем, к анализу заключительного периода вырождения однородной и изотропной турбулентности, не вызывает сомнений. Результаты этих исследований были использованы для решения более общей задачи об изотропной турбулентности, когда инерционными членами в уравнениях гидродинамики пренебрегать нельзя. Нужно было преодолеть главную проблему – незамкнутость уравнений Кармана-Хоуарта.

Гипотеза М.Д.Миллионщикова по своему характеру резко отличалась от предложенных ранее. Во-первых, она не модельная и касается общих свойств изотропной турбулентности. Во-вторых, методологически она находится в полном согласии с принципами теоретической физики, допуская строгое обоснование в предельном случае заключительной стадии вырождения турбулентности. В-третьих, как всякое предположение общего характера, имеет многочисленные применения и позволяет исследовать их разнообразные следствия.

Собственно гипотезой Миллионщикова называют следующее утверждение: «Корреляционные функции четвертого порядка поля скорости связаны со вторыми моментами соотношениями, справедливыми в случае нормального распределения вероятностей». Приложения гипотезы Миллионщикова чрезвычайно обширны. Она использовалась для вычисления корреляционных функций давления и скорости, корреляционных функций поля ускорений – там, где приходится иметь дело с моментами четвертого порядка. Но прежде всего, эта гипотеза была применена самим автором для замыкания уравнения Кармана-Хоуарта.

Метод, предложенный М.Д. Миллионщиковым, оказался мощным инструментом исследования характеристик турбулентности, широко применяемым в теоретических и прикладных работах. Исследования по теории однородной и изотропной турбулентности принесли признание и широкую известность их автору.

В этих работах в полной мере отразился творческий стиль Михаила Дмитриевича, который прослеживается во всех его последующих трудах: безупречность теоретического анализа, безусловный приоритет экспериментального знания и ясная формулировка проблематики исследования. Характерно его замечание во время дискуссии на одной из конференций: «Я описываю природу!». Он считал, . . . «что всякая естественная наука, в том числе физика, является наукой, в основе которой лежит эксперимент. Нет физики экспериментальной и физики теоретической. Есть единая физика, в которой теории развиваются на основе обобщений экспериментальных закономерностей. Альфвен как-то сказал: «Единственная неэкспериментальная наука – теология, все остальные науки – экспери-

ментальные». Я говорю обо всем этом потому, что теория турбулентности – это часть современной физики, а, следовательно, должна развиваться так, как развивается современная физика. Между тем, учение о турбулентности оказывается иногда под влиянием недооценки значения экспериментальных данных и общих закономерностей, получаемых из эксперимента. . . ».

В 1969-1972 годах публикуются работы Михаила Дмитриевича по вопросам турбулентных течений в пограничном слое и трубах. Для многих они были неожиданными и вызвали живое обсуждение: казалось странным, что один из первопроходцев статистической теории турбулентности обратился к методам, которые принято считать полуэмпирическими. Михаил Дмитриевич знал об этих разговорах, и в публичных выступлениях часто возвращался к разъяснению своей позиции.

Нередко теоретические обобщения и модели имеют частный характер, избыточны произвольными параметрами, смысл которых остается туманным. Спустя 30 лет после публикации своих первых работ по турбулентности, Михаил Дмитриевич вновь дал блестящий образец того, как нужно анализировать опытные данные и делать предположения общего характера. Вызревало большое исследование, постепенно складывалась иерархия массива опытных данных, и во главу его выходил универсальный логарифмический профиль скорости. Должен был существовать какой-то физический принцип, еще не найденный, который управляет формированием такого профиля. . . Но это был прерванный полет.

Наука – это открытая книга. Неуемная жажда поиска – это главный завет, переданный нам Михаилом Дмитриевичем Миллионщиковым.

*В.А. Князев*

---

## Академик из нашей школы

А.А. Дородницын

В середине 20-х годов в Грозном я учился в школе в одном классе с братьями Миллионщиковыми и от них узнал, что их младший братишка, как и я, увлекается химией и электротехникой. Так вот на базе химико-электротехнических интересов и возникло наше «сотрудничество».

В то время в Грозном почти не было многоквартирных домов. Семейство Миллионщиковых жило в маленьком домике в рабочем поселке. Возле домика был маленький двор, а в нем – сарайчик для хранения каменного угля. (Дома в Грозном отапливались каменным углем, дрова были слишком дороги). В этом сарайчике Михаил Дмитриевич (тогда это был просто Миша, а то и Мишка) и устроил «химическую лабораторию».

Наши химические интересы были направлены главным образом на изготовление взрывчатых веществ и сильно горючих смесей. Любимым взрывчатым веществом был йодистый азот. Достаточно слегка ударить по нему ногтем пальца, как он уже взрывается. Сейчас мне трудно даже оценить, сколько литров нашатырного спирта и бутылочек йодной настойки мы закупили в аптеках для получения этой взрывчатки. На эти покупки мы тратили все те небольшие деньги, которые нам удавалось зарабатывать.

Хорошо помню такую сценку. Однажды приходит ко мне Миша с сияющим и очень гордым видом: ему удалось составить такую горючую смесь, что, когда он ее поджег, вспыхнуло высокое пламя и опалило ему брови. Слава Богу, глаз не повредило, хотя ресницы тоже слегка были осмолены. Признаюсь, я сильно позавидовал Мише. Не тому, конечно, что опалил себе брови, а тому, что «изобрел» столь эффективную горючую смесь. Но в долгу у него я оставался недолго. В магазинчике химреактивов (был такой в Грозном) купил порошок магния, смешал его с марганцево-кислым калием и стал поджигать. Сначала осторожно: положил на смесь бумажку и поджег ее. Бумажка сгорела, а смесь не среагировала. Несколько раз повторял эту процедуру с тем же результатом. Наконец я разозлился, зажег спичку и, держа ее в руке, сунул в смесь. И тут вспыхнуло яркое пламя с фиолетовым оттенком. Температура вспышки оказалась такой высокой, что я до мяса обжег пальцы руки.

Не подумайте, однако, что у взрослых мы имели репутацию ученых мальчиков. Пожалуй, наоборот. Учителя русского языка считали нас ма-

локультурными, поскольку мы совершенно не интересовались так называемой художественной литературой и далеко не всегда прочитывали даже из того, что требовалось школьными программами. В мире так много интересного, реально существующего, зачем же тратить время на чтение каких-то придуманных историй? И еще одна деталь. Я никогда не видел, чтобы Миша Миллионщиков «пинал» ногами мяч. Чума-мода на футбол докатилась и до нашего города. В то время в Грозном ходил вариант старинной русской поговорки: «В семье не без футболиста». К семейству Миллионщиковых эта поговорка не относилась.

После окончания школы я, а через два года и Миша, поступили в Грозненский нефтяной техникум (горный факультет). На наше счастье техникум был переименован впоследствии в институт, хотя учебная программа от этого переименования несколько не изменилась. Зато – мы вышли инженерами, то есть формально получили высшее (!) образование и могли занимать посты, требующие инженерного звания.

Вспоминая детские годы Михаила Дмитриевича и его продвижение в науке, я прихожу к выводу, что настоящий ученый начинает образовываться уже в детские годы. Ведь кажется совершенно невероятным, что человек, имевший фактически лишь среднетехническое образование (притом весьма узко специализированное – бурение нефтяных скважин), в своей дальнейшей работе прошел все научные ступени от кандидата наук до академика, получив фундаментальные результаты в весьма различных областях: в теории турбулентности, в газовой динамике, в атомной физике. Проблемы эти ни в малейшей мере не затрагивались в учебных курсах техникума-института, в котором Михаил Дмитриевич учился. Возможно лишь одно объяснение: уже с детских лет все его увлечения определялись интеллектуальными интересами, жаждой познания тайн природы. С детских лет он привык искать ответы на возникшие вопросы самостоятельно, не прибегая к чьей-либо помощи.

В зоологии есть понятие «импринтинг». Перевести можно так – «впечатывание». Это те свойства, которое животное приобретает в первые дни жизни и которые потом остаются на всю жизнь. Но если они не были приобретены в эти первые дни, то потом они не приобретаются. Так и свойства, необходимые человеку, чтобы он смог стать настоящим ученым, должны «впечатываться» с малых лет.

Опубликовано: Вестник РАН. 1993. Т. 63. № 1. С. 44-45.

---

## Совместно работая

А.Е. Шейндлин

Мне довелось за долгие годы работы в Академии наук, а также в ряде энергетических организаций нашей страны, познакомиться со многими выдающимися специалистами. Одним из них, несомненно, был академик М.Д. Миллионщиков, с которым обстоятельства свели меня для многого совместного, что нам пришлось делать в 1960-е и последующие годы.

Еще до непосредственной встречи с Михаилом Дмитриевичем я слышал о нем как об одном из талантливейших молодых ученых плеяды С.А. Христиановича, М.В. Келдыша и других, работавших весьма успешно в знаменитых научных учреждениях.

В начале 1960-х годов в связи с реформой структуры Академии наук ее президентом стал академик М.В. Келдыш, а первым вице-президентом — М.Д. Миллионщиков. В этот же период времени был решен вопрос об образовании в Академии наук Отделения физико-технических проблем энергетики и, естественно, необходимо было определить лидера Отделения — академика-секретаря. Хотя это было необычно (я имею в виду совмещение должности вице-президента и академика-секретаря), все же было принято решение о том, что становление Отделения физико-технических проблем энергетики лучше всего осуществлять с руководящим участием такого влиятельного, опытного, знающего человека, каким был М.Д. Миллионщиков. Он и стал первым академиком-секретарем Отделения, в котором я имею честь состоять практически с первых лет его существования.

Возглавляя головной институт Отделения — Институт высоких температур, я, естественно, должен был установить самые тесные связи со своим руководством — академиком-секретарем — и решать многие вопросы, выходящие за рамки Отделения, с высшим руководством Академии наук: как с президентом, так и, конечно, с первым вице-президентом, то есть опять же с М.Д. Миллионщиковым.

В те же годы под моим непосредственным руководством в Институте высоких температур были начаты масштабные работы по проведению фундаментальных и прикладных исследований в области магнетогидродинамического (МГД) преобразования энергии. М.Д. Миллионщиков, соответственно, в Институте атомной энергии развертывал широкие работы в этой же области, но с акцентом в сторону использования возможностей МГД-преобразования энергии в интересах атомной техники. Под руководством Михаила Дмитриевича эти работы вел замечательный наш

российский ученый Е.П. Велихов. Тогда Евгений Павлович был совсем молодым человеком, и, тем не менее, Миллионщиков счел возможным доверить ему не только организацию широких исследований, но и создание для этого мощного, главным образом, экспериментального научного центра вблизи Москвы, в районе Красной Пахры. Теперь в результате этой деятельности Миллионщикова и Велихова успешно работает огромный научный центр. . .

Итак, мое знакомство с М.Д. Миллионщиковым развивалось и в области наших научных интересов со всей сопутствующей проблематикой и во многом носило соревновательный характер. Вместе с Михаилом Дмитриевичем я посещал очень интересные международные конференции, которые систематически проводились в те годы в ряде развитых стран, прежде всего таких, как США, Англия, Франция и других.

Проблема создания принципиально новых энергетических установок, использующих принцип магнитогидродинамического преобразования энергии, стала предметом, может быть, даже одним из основных предметов интереса Научного совета по комплексной проблеме «Методы прямого преобразования тепловой энергии в электрическую», который сначала возглавлял академик А.П. Александров, а с 1970 г. председателем Совета был М.Д. Миллионщиков. Этот Совет занимался проблематикой исследования в области возобновляемых нетрадиционных источников энергии, и в его рамках была организована Секция МГД-преобразования энергии, руководителем которой стал Михаил Дмитриевич. Я активно участвовал в работе этой секции, поскольку ее основная деятельность, как уже говорилось, тесно была связана с двумя научными коллективами, работающими в области МГД-преобразования энергии: Центром на Красной Пахре, где руководящую роль играл Е.П. Велихов, и моим Институтом высоких температур.

М.Д. Миллионщиков, как и во всех, по-видимому, случаях, очень ответственно отнесся к своим обязанностям по общему руководству исследованиями в области МГД-преобразования энергии, проводившимися по всей стране и, детально вникая в существо соответствующей научной проблематики, далеко не формально осуществлял руководство всеми работами.

Не могу не вспомнить о ряде, казалось бы, частных, которые замечательным образом характеризуют Михаила Дмитриевича. Как это часто бывает, многие из нас не всегда способны объективно оценивать свою роль и свои возможности в чрезвычайно перспективной области проводимых нами исследований. Сталкивались интересы, определяемые подчас и не совсем принципиальными соображениями. М.Д. Миллионщиков, несмотря на то, что он был непосредственным руководителем группы исследователей, работающих вокруг Института атомной энергии

им. И.В. Курчатова, то есть родного и опекаемого им коллектива, всегда, что меня порой даже удивляло, находил в себе силы, позволявшие ему быть объективным даже в тех случаях, когда эта объективность противоречила интересам его ближайших сотрудников. Он был удивительно честным, искренним и доступным в общении человеком. Если говорить о человеческих качествах Михаила Дмитриевича, то его отличало и даже в какой-то степени портило ему жизнь необычайное чувство собственного достоинства. Он был ранимым, и это особенно отчетливо проявлялось, если он встречался с явной беспринципностью.

Я очень высоко оцениваю работу М.В. Келдыша как президента Академии наук. Под его руководством было сделано много полезного и нужного в нашей Академии, но человек он был очень непростой и, как мне представляется, работать рядом с ним подчас было нелегко. М.Д. Миллионщиков, я случайным образом был несколько раз этому свидетель, очень болезненно воспринимал порой неоправданно резкие контакты с М.В. Келдышем, причем часто безосновательно относил многое в свой адрес.

Две ремарки, относящиеся к воспоминаниям о поездках вместе с Михаилом Дмитриевичем. Первая — в Австрию, в Зальцбург, на 3-й Международный симпозиум по производству электроэнергии с помощью магнитогидродинамических генераторов, и вторая — на подобного же рода конференцию, которая проходила в Стэнфордском университете в США. В нашей совместной поездке в Австрию мы провели с Михаилом Дмитриевичем бок о бок несколько дней: пару дней в Вене, где жили рядышком в общежитии советского посольства, а затем по дороге в Зальцбург, когда мы поехали к месту проведения симпозиума и на автомобиле пересекли всю Австрию, ознакомившись с этой замечательной страной, так сказать изнутри. Вот здесь я и осознал всю свойственную М.Д. Миллионщикову деликатность, уважительность к окружающим его людям, несмотря на то, что имели место совершенно разные иерархические уровни — Михаила Дмитриевича, с одной стороны, и его коллег — с другой. М.Д. Миллионщиков имел почти все мыслимые регалии — научные и общественные, которые были в нашей стране. Мы же, участники симпозиума, были относительно рядовыми людьми.

Вторая наша поездка с Михаилом Дмитриевичем была в США, на конференцию, проходившую в Стэнфордском университете. Из Сан-Франциско мы на автомобиле добрались до городка Пало-Альто, расположенного около Стэнфорда. Вспоминаю, как после окончания одной из сессий конференции, Михаил Дмитриевич предложил пройтись до отеля: нам показалось, что путь этот будет недолгим. Мы двинулись в путь, нас обгоняли автомобили, которые часто приостанавливались, и находившиеся в них люди спрашивали, не надо ли нас подвезти. Дело в том, что иду-

щих пешком там вообще не было, и, вероятно, наше пешее путешествие казалось всем удивительным. Тем не менее мы добрались до бензоколонки с небольшим универсамом, находившейся в полпути от университета до Пало-Альто.

Мы остановились около универсама, чтобы передохнуть и, естественно, продолжали свою беседу. Услышав русскую речь, некая довольно представительная дама, вышедшая с покупками из магазина, подошла к нам и заговорила по-русски. По-видимому, это была женщина, приехавшая в США со второй волной эмиграции. Немножко побеседовав с нами, она предложила подвезти нас в Пало-Альто, благо она едет туда же. Однако это предложение было сделано с иронией — не побоимся ли мы поехать вместе с ней. Рассмеявшись, мы уселись в ее машину, а она добродушно посмеиваясь, продолжала иронизировать по поводу порядков в нашей стране, сказав, в частности, следующее: «Если бы я могла побеседовать с кем-либо из руководителей вашей страны, я бы сказала ему все, что думаю о том, что у вас происходит». Михаил Дмитриевич ответил ей: «Вы можете сделать это прямо сейчас. Я являюсь председателем парламента России». Забавно было смотреть на растерявшуюся даму и веселые озорные искорки в глазах Михаила Дмитриевича. Дама была совершенно растеряна, но все мы тем не менее рассмеялись. Это было очень забавно. Вместе с тем в этом, на первый взгляд, мелком факте ощущалась необыкновенная гордость за свою страну и мера всей ответственности, которую мы чувствовали за происходящее.

Я позволю себе остановиться на еще двух замечательных чертах характера Михаила Дмитриевича.

Работая в одной области — в области МГД-преобразования энергии — мы неизбежно конкурировали, порой вступая в споры не только с коллективом Михаила Дмитриевича, но и с ним самим. Иногда в этих спорах я, может быть, переходил черту допустимого, и Михаил Дмитриевич обижался на меня, как я теперь понимаю, но уже буквально на следующий день я мог видеть, что ничто не менялось в его добрых отношениях и с моими сотрудниками, как мне кажется, и со мной тоже.

Не могу не сказать еще об одном. На меня всегда производило огромное впечатление совершенно исключительное отношение Михаила Дмитриевича к своей семье и особенно к жене — Людмиле Михайловне. Часто оказываясь с Михаилом Дмитриевичем наедине в не совсем деловой обстановке, (как правило, это происходило во время наших совместных командировок), я слышал от него удивительно теплые слова в адрес своих близких, в особенности своей жены, — это были слова любящего человека, и это было очень приятно.

---

## О Михаиле Дмитриевиче Миллионщикове Н.Н. Пономарёв-Степной

Конец 1950-х — начало 1960-х годов : Институт атомной энергии активно развивает работы по различным направлениям использования атомной энергии. Реализуются проекты атомных подводных лодок и атомных ледоколов, сооружается первый ВВЭР на Ново-Воронежской атомной станции, разрабатываются ядерные ракетные двигатели, делаются первые шаги по ядерной энергетике для космических аппаратов, изучаются термоэлектрические, термоэмиссионные и магнитогидродинамические методы прямого преобразования энергии, ведутся проработки высокотемпературных газоохлаждаемых реакторов различного назначения. Анатолий Петрович Александров, назначенный директором Института атомной энергии после кончины Игоря Васильевича Курчатова, значительную часть времени уделяет атомному флоту, нарождающейся атомной энергетике. Он почувствовал, что созревающие новые научные направления высокотемпературной атомной энергетике должен возглавить человек, имеющий авторитет как в научном, так и в «средмашевском» сообществе, имеющий соответствующую научную подготовку, опыт и понимание того, как от научных идей, от фундаментальных исследований переходить к созданию конкретных изделий и промышленных образцов.

Набором этих качеств обладал Михаил Дмитриевич Миллионщиков. Он пришел в Институт атомной энергии по приглашению И.В. Курчатова в 1949 году. Имея блестящую подготовку в области теории турбулентности, прикладной гидродинамики, он быстро включился в решение задач, стоявших перед отделением молекулярной физики, и внес значительный вклад в теорию центрифужного метода разделения изотопов, оказав существенное влияние на постановку исследований и опытно-конструкторских работ на обогатительных предприятиях атомной отрасли. Мне вспоминается, с каким удовольствием Михаил Дмитриевич рассказывал о периоде работ по обогащению урана. Вспоминал он начало работ по центрифугам, когда в трудных научных и технических обсуждениях решался вопрос о повороте обогатительной промышленности к новому, существенно более эффективному производству изотопов. В это время его научный багаж — газодинамика — пригодился наиболее полно. С удовольствием он рассказывал и о длительных командировках во главе приемочной комиссии на комбинаты, где приходилось решать не только научно технические вопросы, но и административные проблемы.

В это время, когда работы по обогащению находились на подъеме, Анатолий Петрович Александров предложил М.Д. Миллионщикову заняться проблемами прямого преобразования энергии с использованием магнитогидродинамических, термоэлектрических и термоэмиссионных генераторов с прицелом на использование этих преобразователей в сочетании с высокотемпературными газоохлаждаемыми ядерными реакторами на земле или в космосе. Работы по этим направлениям развивались на московской площадке в секторе № 6 и в лаборатории на Красной Пахре, которая впоследствии была включена в состав Института. На этой объединенной базе было создано Отделение высокотемпературных установок во главе с М.Д. Миллионщиковым. Опыт работы Михаила Дмитриевича в Институте механики АН СССР и ЦАГИ, а также в Приемной комиссии министерства, знания системы Министерства среднего машиностроения, его руководителей и предприятий оказались важными и полезными для руководства этим направлением работ.

Изначально исследования по МГД-генераторам в лаборатории на Пахре рассматривались применительно к использованию в сочетании с ядерными реакторами. В этом случае из-за относительно низких температур, которые может обеспечить реактор при длительной работе, необходимо было решить сложную задачу: обеспечить требуемую для работы МГД-генератора электропроводность плазмы. Руководя этим направлением в Курчатовском институте, М.Д. Миллионщиков оказался в щекотливом положении как координатор работ по МГД преобразователям в Академии наук, так как в стране развивалось направление создания МГД-генераторов для электростанций на органическом топливе. Этими работами непосредственно руководили академики В.А. Кириллин и А.Е. Шейндлин. Вспоминается заседание комиссии Академии наук по рассмотрению состояния работ по МГД-генератору в Институте высоких температур, на котором М.Д. Миллионщиков очень деликатно, но твердо и объективно излагал свою позицию.

Во второй декаде апреля 1961 года на научно-техническом совещании в Средмаше было рассказано о разработанных в Сухумском физико-техническом институте высокотемпературных кремний-германиевых термоэлектрических преобразователях. Было решено проработать их использование для создания космической энергетической установки в сочетании с ядерным реактором. Десант в Сухуми во главе с Михаилом Дмитриевичем был высажен уже в первой декаде мая. Работа закипела, в нее включились десятки организаций Средмаша, а в августе 1964 года в Курчатовском институте был выведен на мощность первый в мире реактор-преобразователь «Ромашка» с непосредственным термоэлектрическим преобразованием тепловой энергии в электрическую.

Несмотря на большую загрузку в Академии, Михаил Дмитриевич ак-

тивно работает в институте, в отделении высокотемпературных установок в Москве и на Пахре. На одном из общих собраний отделения Михаил Дмитриевич посетовал мне: «Что-то не так, никто не критикует — это настораживает!». Вспоминается и другой случай. На Ученом совете института поставлен доклад Михаила Дмитриевича об исследованиях по высокотемпературным установкам. Мы в отделении волнуемся, готовим иллюстрационные материалы, нам кажется, что перегруженность Михаила Дмитриевича затруднит изложение всех наших достижений и проблем. Михаил Дмитриевич быстро проглядел иллюстрации и ошарашил меня: «Поедем ко мне домой, пообедаем, расслабимся — и на Ученый совет». Думаю: «Как же так, ведь необходимо еще многое обсудить, уточнить цифры. Ну и ну, провалим отчет». МД спокоен, хорошо пообедали, приняли душ, на Ученом совете МД очень ясно и доходчиво рассказал о наших работах. Академики Исаак Константинович Кикоин, Лев Андреевич Арцимович, Анатолий Петрович Александров были очень довольны докладом и результатом обсуждения.

Хорошо известна общественная деятельность Михаила Дмитриевича. Он был одним из лидеров Пагуошского движения ученых, зародившегося по инициативе выдающихся ученых мира в конце 1950-х гг. Многие годы М.Д. Миллионщиков возглавлял Советский Пагуошский комитет, уделял ему большое внимание. . .

Я вспоминаю случай, когда Михаил Дмитриевич пригласил меня с собой в поездку в Абхазию, на курорт Пицунду, где он планировал провести международную годовую конференцию Пагуошского движения. Осмотрели курорт, и по местному обычаю нас пригласили в гости в дом старейшего жителя поселка. Собралось более сотни именитых гостей. Михаил Дмитриевич - самый уважаемый. Хозяин пригласил его выбрать вино, которое будет подано к столу. В подвале десяток бочек. «Какое вино будем пить?» И здесь мне довелось наблюдать непосредственность Михаила Дмитриевича. Он несколько растерялся, смутился и ответил: «Не хлопчите, любое». Но пришлось пробовать разные вина до тех пор, пока Михаил Дмитриевич не сказал: «Это!». Вскрыли бочку, началось застолье, много красивых тостов за каждого присутствующего, многочисленные «алаверды». Как мы потом оттуда уехали?! Нет слов описать это! Нас спасло то, что я показал хозяину билеты на самолет. Ведь абхазский закон гласит: «Пока вся бочка не будет выпита, гости не уходят!» А бочка была литров 200—300! Михаил Дмитриевич сетовал мне неоднократно: «Если мне налили вино в бокал, я не могу отказаться и должен выпить до конца».

. . . Такой же случай был в Крыму, когда Михаил Дмитриевич посетил Институт виноградарств и виноделия Магарач и после дегустации вин оставил запись в книге для почетных гостей: «Посещал Магарач —

как? Выползал на карач-ках!». По мотивам этой поездки жена Михаила Дмитриевича создала замечательное стихотворение о мадере. . .

Михаил Дмитриевич все возложенные на него задачи делал с полной отдачей. Нагрузка большая, иногда на листочке бумаги он перечислял свои должности: вице-президент Академии наук, заместитель директора и руководитель отделения Курчатовского института, заведующий кафедрой МИФИ, главный редактор журнала «Атомная энергия», Председатель Верховного совета РСФСР, председатель ученых советов. . . Задумавшись, подводил итог: «Ничего не поделаешь, — ученому необходимо четыре направления работы: исследования, научно-организационная и общественная работа, преподавание, научный журнал».

Михаил Дмитриевич не мог смириться с тем, что перегрузка общественными и научно-организационными задачами не оставляет времени на собственные исследования, и в конце 1960-х годов он с энтузиазмом молодого исследователя вернулся к теории турбулентности. Вспоминается, как Михаил Дмитриевич на заседаниях, сидя в президиумах, увлеченно на листочках выводил формулы, писал статьи в журналы. Вспоминаю его блестящие доклады о влиянии шероховатости теплоотдающей стенки на гидравлическое сопротивление и интенсификацию съема энергии. В качестве иллюстрации спектра шероховатости Михаил Дмитриевич приводил сделанные им с самолета снимки небоскребов Нью-Йорка.

Ноябрь 2008 г.

---

## Вечера у Миллионщиковых

В.П. Маслов

Я горсточку слов, словно горстку монет,  
Несу на ладонях под солнечный свет.  
О, как угадаю, фальшивы иль нет?  
Я прежде слыхала такие слова,  
Но были они, как чужая молва,  
Как прошлого года сухая трава.  
А эти звенят и пылают в горсти,  
И темную ночь освещают в пути,  
И жгут мне ладони, и шепчут: «Впусти».  
А сердце навстречу из клетки летит.  
Такие же точно упрямо твердит,  
И жжет о них крылья, и с ними горит.  
Пылают слова, словно стая планет.  
Плывут, отражая немеркнувший свет.  
О, как угадаю, он вечен иль нет?!

Л.М. Миллионщикова

В развитии русской культуры очень большую роль играли, как известно, салоны: в доме какой-нибудь дамы, где по четвергам или, скажем, по средам постоянно собирались гости, интеллигенция, культурные деятели. Такие салоны, между прочим, существовали не только в России, но и во Франции, например салоны мадам де Помпадур, мадам Рекамье и др. Правда, во Франции эти салоны больше играли дипломатическую роль, там решались какие-нибудь светские дела и плелись интриги. У нас же салоны были в основном очагами культуры.

Прежде всего, мне вспоминается салон «Зеленая лампа», целое сообщество, в которое входил В.А. Жуковский и которое в какой-то степени находилось под влиянием его творчества: многие члены этого салона носили имена героев его баллад. Пушкин, как мы все знаем, входил туда под именем «Эолова арфа», поскольку у него всегда бурчало в животе. Входила туда еще и молодежная группа.

Не менее знаменитыми были салоны Хитрово-Фикельмонд, которые собирали поэтов, писателей, музыкантов и весь цвет общества. Были еще приемы при дворе: у великих князей, у вдовствующей императрицы — но

это были официальные приемы — встречи высокопоставленных чиновников. Литературные же неофициальные салоны определяли очень многое в русской культуре: в них развивалась культурная жизнь страны.

Что касается начала XX века, то известна «Башня» Вячеслава Иванова, где собирались поэты, кажется, тоже в четверг. Там встречались исключительно поэты и читали друг другу стихи. Были такие сборища и в Петербурге, где встречались композиторы, музыканты, художники. Подобным постоянным культурным центром была дача Волошина в Коктебеле, куда съезжались самые разные представители русской интеллигенции: там можно было найти и поэтов, и художников, и драматургов.

После революции устраивать такие салоны стало затруднительно, так как интеллигенция не имела уже таких больших помещений для сбора гостей. Говорят, в постхрущевские времена, после расселения коммуналок, люди стали собираться на кухнях отдельных квартир. Но это было, конечно, не то.

Я могу сказать, что такая традиция возродилась у Миллионщиковых в их огромном коттедже на Пехотной улице. Происхождение этих коттеджей следующее.

В те времена очень большое значение для нашей страны имело создание атомной бомбы, чтобы мы могли себя чувствовать на равных с американцами в холодной войне, вспыхнувшей после настоящей, горячей войны с фашистской Германией. И крупнейшие ученые нашей страны самоотверженно участвовали в работе над ее созданием. Ведь тогда была реальная угроза, что холодная война перерастет в горячее столкновение с американцами. Если бы не атомная бомба, которую они создали, то вполне возможно, Европа, где во многих странах коммунисты после войны пользовались большим влиянием (и в Италии, и во Франции коммунисты почти были у власти), была бы полностью захвачена советскими войсками. И прийти к власти коммунистам в этих странах было также легко, как и в странах Восточной Европы. И то, что была сброшена атомная бомба на Хиросиму и Нагасаки, было предупреждением нам. И мы тогда поняли, что определенную границу мы переступить не можем. Наши власти понимали, что должны создать атомную бомбу и что-то противопоставить такому превосходству. Применить атомное оружие против нас американцы еще, естественно, не могли, но сам факт существования такого оружия делал слишком большой перекоп в смысле силы и влияния в их пользу. Поэтому в сталинские времена атомщикам предоставлялись очень большие привилегии: так же, как и в Америке, те, кто занимался атомной бомбой, имели такие же льготы, как и члены правительства. Насколько я помню, они могли бесплатно летать на самолете. Престиж именно физиков был чрезвычайно высок. Если сейчас престиж ученого в Америке значительно упал даже по сравнению с

престижем ученого в Западной Европе, то в те поры, когда атомщики создали бомбу, их престиж в Америке был очень высок. Американцы понимали, что из побежденной Германии нужно было вывозить не станки и другие материальные ценности, а ученых, которых просто вылавливали и переправляли в Америку. В результате им удалось создать атомную бомбу, а мы смогли победить Германию до того, как она создала свое атомное оружие.

У нас в стране, как я уже сказал, атомщики также пользовались многими привилегиями. Им, в частности, были выданы коттеджи с небольшими участками на Пехотной улице вблизи Курчатовского института. Из этих коттеджей видна труба, по-моему, это труба какого-то крематория, из которой валит дым. Вблизи атомного института, наверное, и уровень радиации был выше, но, тем не менее, это были роскошные двухэтажные коттеджи по 150-200 кв. метров на каждом этаже, с огромным подвальным помещением. В таких коттеджах можно было устраивать многолюдные вечера, продолжающие традиции русской культуры.

Я когда-то бывал в коттедже у академика А.И. Алиханова, не на Пехотной улице, а на территории Института теоретической и экспериментальной физики, где мы встречали Новый год в очень большой молодежной компании. Но там не устраивались постоянные вечера. А вот постоянные интересные встречи в гостеприимном доме, мне кажется, были только у Миллионщиковых.

И как в прежние времена, когда, говоря о салоне, всегда упоминали имя не хозяина, а хозяйки дома, здесь тоже можно сказать, что это была заслуга не МД, хотя он и был, конечно, звездой, я об этом скажу, но Людмилы Михайловны Миллионщиковой, которая в большой степени тяготела к искусству. Она была замечательным живописцем, ее картины выставлялись, кстати, в Курчатовском институте была одна из ее выставок, которая прошла с очень большим успехом. Не надо думать, что эта выставка была организована, так сказать, по знакомству. Отнюдь нет. Дело в том, что Курчатовский институт именно из-за того, что атомщики были так нужны, был в известной мере независим, он позволял себе то, что другие институты позволить себе не могли. Например, первые выступления Солженицына проходили именно в Курчатовском. Я там слушал Солженицына, когда он потрясающе читал свои произведения и отвечал на вопросы, и, слушая его выступления, я тогда уже понимал, как заблуждаются наши власти, считая, что Солженицын в какой-то степени им близок. Особенно резко он выступал против писателей, которые возглавляли официальные писательские организации. Позже Солженицыну запретили выступать где-либо, но в Курчатовском институте он выступал.

Я вспоминаю еще один вечер: у Пономарева-Степного, куда меня по-

звали с собой Миллионщиковы. Это как раз был прием, как я описывал выше, «на кухне». Маленькая квартирка была битком набита гостями. Там выступал один из запрещенных поэтов-новаторов, что было достаточно смело в те поры. Он выступал резко оппозиционно, и мне, как любителю поэзии, некоторые его произведения понравились, как вообще были интересны те новые направления в поэзии, в известной степени шокирующие общество, которые появились в тот момент. Я помню, что поэт обыгрывал фразу «Осторожно, двери закрываются».

Это были не футуристы и даже не последователи футуристов, это был некий новый стиль, эпатазирующий публику. Я очень хорошо запоминаю стихи и могу привести некоторые строки, не того поэта, который выступал у Пономарева-Степного, а другого, но того же жанра: «Мама, мама, что такое, как клубничное варенье? Тише, дети, это папа влип в трамвайное крушенье». Или: «Внизу убили человека! Внизу убили человека? Внизу убили человека. Внизу убили человека. . . », то есть четверостишие состояло из повторяющейся с разными интонациями одной строчки. Это новаторство не получило развития и не оставило, к сожалению, следов в современной поэзии.

Что касается дома Миллионщиковых, то этот дом был чрезвычайно чопорный, и такой несколько вольный стиль, который был принят, например, в среде богемы, в нем был совершенно не уместен. Я помню, как МД был шокирован словом «проститутка», которое было кем-то произнесено. Поэтому, конечно, такие поэты и вообще богема не могли присутствовать в салоне Миллионщиковых. Но, тем не менее, у них собирались совсем разные поэты, начиная от Андрея Вознесенского и кончая Егором Исаевым. Ведь сама Людмила Михайловна была замечательным поэтом, издавшим несколько сборников стихов.

Кроме ученых у них бывали и очень интересные художники, например Владимир Федорович Штраних. Это был совершенно очаровательный салон, в котором вместе собирались люди разных профессий. Из актеров я помню только Наталью Фатееву, которая была в те поры связана с научным миром, поскольку ее муж Борис Борисович Егоров, сын знаменитого хирурга академика Егорова, сам врач и космонавт, был тесно связан с научными кругами.

На вечерах совершенно профессионально разыгрывались шарады. У Миллионщиковых был целый набор специальных костюмов. Сам МД обладал исключительным даром импровизатора. Он блестяще играл и был чрезвычайно находчив, умел произносить неожиданные и экстравагантные речи. В шарадах принимали участие знаменитые ученые: Александр Михайлович Прохоров, Николай Геннадьевич Басов и другие. Активно участвовала и молодежь. У Миллионщиковых вообще царилась смесь поколений, поскольку дети Володя и Таня принимали в этом самое активное

участие.

Я бы сказал, что в некотором отношении этот салон был старомоден, и в этом была его прелесть. Например, «Лолиту» Набокова МД просто не мог выносить, он считал это произведение аморальным.

Тем не менее в нем, повторяю, возрождались традиции русской культуры, которые в какой-то период были уничтожены настолько, что люди, занимавшиеся литературой, не знали таких поэтов, как Марина Цветаева. Могу сказать, что даже Фазиль Искандер не знал тогда Хлебникова. А, скажем, Юрий Нагибин в своей статье о Хлебникове написал такую ерунду, что я ему позвонил и сказал о его ошибках, а он извинялся, что по существу Хлебникова не знал. Он написал, что у Хлебникова не было революционных поэм, тогда как самые знаменитые его поэмы как раз революционные. И в салоне у Миллионщиковых эти имена, так сказать, возрождались. Самым культовым поэтом был Заболоцкий. Его «Столбцы», может быть, за которые его и посадили, после чего он уже не писал таких эпатирующих общество стихов, в этом доме ценились очень высоко. Цитаты из разговора Агафонова с Корнеевым Заболоцкого постоянно произносились, весь разговор как бы присутствовал на приемах: «Среди посуды я различаю прекрасный чайник англичан», — такая, например, фраза или: «предмет, достойный лучших мест, стоит наполненный отравой, где Агафонов кашу ест». Эти строки и цитаты из других стихотворений Заболоцкого прямо витали в воздухе, как в наше время все знают такие крылатые фразы из «Мастера и Маргариты» Булгакова, как «тапереча, когда эту надоедалу сплавил, мы откроем дамский магазин». А раньше, в мои школьные годы, наизусть знали произведения Ильфа и Петрова, связанные с сатирическими оппозиционными настроениями в нашей стране того времени.

Так что этот салон был замечательно интересным, и связь ученых с литературным миром осуществлялась в нем как, пожалуй, нигде больше.

Я уже говорил, что МД был блестящим импровизатором, у которого речь лилась, как ручей, он говорил совершенно свободно, на любую тему, в силу своей широкой образованности он мог произнести целый спич. МД занимал некоторые номенклатурные должности, он был спикером Верховного Совета РСФСР. Я помню такой эпизод. Где-то он должен был выступать, и его заставили предварительно написать, а затем прочитать доклад. Его это страшно тяготило, он говорил, что выступит с «живой» речью. Но нет, это не полагалось. Потом, когда МД прочитал свою речь по бумажке, оказалось, что Косыгин выступал без бумажки. МД был страшно недоволен, что его заставили читать текст, когда можно было этого не делать.

Прекрасным артистическим талантом обладал также сын МД — Володя. Он очень хорошо имитировал голоса. И однажды, когда в гости

пришел Ираклий Андроников, Володя поздоровался с ним его голосом. И я помню, как Ираклий был фраппирован, он как-то даже отпрянул: сам всех передразнивая, он не привык, чтобы ему подражали.

Вообще играли всегда самозабвенно, весело и очень профессионально. Как раз профессиональные актеры не умеют так блестяще импровизировать, и, например, упомянутой Наталье Фатеевой это как-то плохо удавалось, ей, видимо, роль нужно было заранее учить. Но МД, как я уже говорил, был замечательный импровизатор.

Стихи на вечерах обычно читала Людмила Михайловна. Что касается МД, то я помню, что он всегда повторял одну фразу из Маршака: «Чего потребует дочка, должно быть исполнено — точка».

Иногда летом устраивали экскурсии за город. Брели раскладные столики и стулья и на нескольких машинах отправлялись куда-нибудь в лес. МД сам вел машину. Весь раут происходил, как пикник.

Гостеприимство этой семьи было совершенно удивительным. Я всегда поражался, какая у них была вкусная пища, подавали рябчиков. Потом мне Володя и Таня сказали: «Приходи почаще, когда ты приходишь, у нас готовят рябчиков».

Конечно, мне очень запомнился этот хлебосольный дом, который вмещал в себя столько талантливых людей, дом с таким особым ароматом: мы были в Москве, но казалось, что находимся за городом, так как вокруг росли деревья. И несколько старомодный стиль, продолжение традиций интеллигенции 20-х годов производили совершенно замечательное впечатление. Конечно, это было связано с моей молодостью, и поэтому для меня это имеет особый колорит. И эти воспоминания мне особенно приятны. Но тогда я испытывал ощущения счастья, находясь в этой семье, в этой обстановке погружения в искусство, отрешения от внешних забот, тревог. Эта атмосфера, существовавшая в доме, естественным образом вдохновляла Людмилу Михайловну на творчество: писать картины и писать стихи.

Добрый ангелом этой семьи была Валентина Петровна Островская, которая до того как стать помощником МД работала в одном из отделов Академии наук. Позже она стала добрым гением уже всей Академии: как Валентина Петровна связана с Академией, так и академия была связана с Валентиной Петровной. Я считаю, что в этом большая заслуга принадлежит МД, поскольку, насколько я знаю, именно он ее нашел. Она была не только помощницей, но и другом, членом всего этого сообщества, о котором я говорил, и так же была проникнута духом этого комьюните.

Если Людмила Михайловна была человеком очень уравновешенным, спокойным и как бы созерцающим этот мир, как бы наблюдателем, то МД был человеком очень возбудимым и очень остро реагирующим на все. Он не выносил ни малейшего хамства, вспыхивал и, как говорит-

ся, заводился с полуоборота. Так близко к сердцу он принимал и дела. Он рассказывал мне, что когда А.П. Александров сказал ему, что МД хотят выдвинуть в академики, он настолько это переживал, что у него поднялось давление. Он волновался, как к этому отнесутся в институте. Конечно, на выборах он прошел блестяще. Но для него это было совершенно неожиданно, это не было тем случаем, когда человек сам подает заявление и как-то сам активно действует, чтобы пройти в члены Академии. МД не только сам не принимал никакого участия, он был просто огорошен и как бы внутренне сопротивлялся этому, так как это его слишком возбуждало. У него и так все было хорошо в смысле науки, все шло гладко. И тут — такие решения, причем его карьера стремительно развивалась и дальше: став академиком, он получил пост вице-президента Академии наук. Это накладывало целый ряд дополнительных забот, которые, я думаю, и привели его к ранней смерти, настолько он не мог равнодушно относиться ни к чему, все воспринимал с колоссальным надрывом, отдаваясь работе со всей душой.

Насколько я себе представляю, с президентом Академии Мстиславом Всеволодовичем Келдышем у него были самые хорошие отношения. Келдыш приезжал к нему, правда, нечасто, но он всегда был желанным гостем. Я не сказал бы, что между ними была дружба, но отношения были самые теплые. В дела, касающиеся лично М.В. Келдыша, МД никогда не вмешивался. В частности, когда я жаловался на то, что несправедливо поступают с учеными, моими друзьями из института Келдыша, то МД мне говорил, что это не его область, это полностью в руках Мстислава Всеволодовича.

МД мне говорил, что мне помог, когда решался вопрос о моей поездке на конгресс в Ниццу. Я был приглашен на этот конгресс как часовой пленарный докладчик и как докладчик на секции. Он мне говорил, что у меня были трудности, якобы меня вычеркнули из списков в университете. Ему удалось меня восстановить, и поэтому состоялась моя поездка на конгресс, которая сыграла для меня очень большую роль. Тогда происходили странные вещи. Например, мой товарищ, профессор В.В. Грушин, который оформлялся на конгресс вместе со мной, был исключен из списков участников, когда уже садились в самолет. Садимся в самолет, а фамилии «Грушин» в списке нет. Мы забежали, пытались выяснить, почему в списке нет Грушина. Только что проходили ЦК, другие комиссии — Грушин везде был и вдруг исчез из списков. Так он и не поехал. А потом я спросил у МД, что случилось с Грушиным, он сказал, что это тоже университет в последний момент задержал Грушина, а почему — неизвестно.

Что касается научной деятельности МД, он тогда очень увлекался турбулентностью в трубах, написал книгу на эту тему и подарил мне ее

с такой надписью: «Виктору Маслову с благодарностью за то, что он все понял».

Мы с ним обсуждали разные интересовавшие его вопросы, в частности, связанные с академической деятельностью. Он, как я уже говорил, очень высоко ценил Н.Н. Пономарева-Степного и Е.П. Велихова. Из других ученых я могу назвать О.М. Белоцерковского, за которого он переживал и волновался, когда тот проходил в Академию, и Г.И. Баренблатта, работы которого он высоко ставил.

Мне хочется закончить эти воспоминания, как я и начал, стихотворением Людмилы Михайловны:

Взмыло дуло над булыжной мостовой.  
Ствол с нарезкою, с той самой — винтовой.  
Что вчера еще привычна и метка,  
С утра до ночи без устали рука  
Наводила по металлу, а сейчас  
Смертной тьмою метит дуло прямо в глаз.  
Желваками над булыжной мостовой  
Ходят мускулы, как камни под рукой.

---

## Михаил Дмитриевич Миллионщиков — блеск и трагедия

Г.И. Баренблатт

Мне не пришлось ознакомиться с большинством статей настоящего сборника. Однако я не сомневаюсь, что сборник даст полное освещение личности Михаила Дмитриевича (МД), его роли как организатора науки, ученого, плодотворно работавшего в важнейшей области энергетики, политического деятеля. У МД была великолепная репутация, — за что бы он ни брался, он добивался успеха. Маленький пример для иллюстрации. МД был в дополнение ко всем своим обязанностям Председателем Верховного Совета РСФСР. Казалось бы, что это представительская должность, но и здесь он проявлял себя талантливо. После одной из сессий, в гардеробе известный кинорежиссер Сергей Герасимов, тоже депутат, сказал ему: «Просто не понимаю как Вам это удаётся: Вы и располагаете выступления так, что слушать (и сопоставлять!) интересно, и всегда кончаете идеально вовремя!».

Создается полное впечатление блеска!

Мои отношения с МД были особыми, и эта особенность объяснялась тем, что мы оба были прямыми учениками-гидродинамиками Андрея Николаевича Колмогорова, он — старшим, я — младшим по возрасту. Отношения между нами, несмотря на разницу в возрасте (и положении), были доверительными. Например, как-то в беседе с глазу на глаз он сказал мне со вздохом: «Знаете, Нина Смирнова была в молодости — глаз не отвести. Сейчас ее сын кончил Нефтяной институт, и она попросила его устроить. Возьмите его к себе и сделайте его человеком!». Сейчас профессор А.М. Кудин — видный специалист по прикладной механике и разным ее приложениям. Среди его интересов — турбулентные течения воды с полимерными добавками (с этого начал), турбулентность в океане и многое другое. Он заведует лабораторией в Институте геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского РАН.

Может быть, именно из-за этой доверительности МД позволял себе в беседах со мной приоткрывать другую сторону медали своей жизни. А эта другая сторона была трагической. МД был искренним ученым, он занимался наукой, потому что она его интересовала. Он не ожидал новых наград, он уже и так имел все возможные для советского ученого награды. Но МД интересовала труднейшая область — турбулентность, он увлеченно ею занимался, находя в своих занятиях наукой отдых и успокоение. Возвращаясь поздно вечером домой после изнурительного дня

административной работы, МД садился за свои вычисления. Я-то знал это не понаслышке: он часто звонил мне поздно ночью посоветоваться. Как-то перед докладом на семинаре Андрея Николаевича он позвонил мне далеко за полночь: ему показалось, что у него ошибка. Попросил проверить. Проверил, позвонил ему — всё верно. Я услышал вздох счастливого человека.

Вопросы внешнего престижа были для МД несущественны. Я вспомнил стихотворение Л.А. Люстерника, — замечательного математика, и к тому же одаренного поэта, посвященное другу его молодости М.А. Лаврентьеву:

О, ты, научный бюрократ,  
Ласкает ЗИМ твой жадный зад!

Как-то мы назначили встречу с МД на улице. Смотрю, он подъезжает не на положенном ему по чину ЗИМе, а на «простой» «Волге». Я спросил: «Это как?». Ответ был очень в стиле МД: «Мне надоело ездить не на машине, а на престиже, который вечно в ремонте».

МД был добросовестным и тщательным исследователем. Для проверки его теории ему были нужны экспериментальные данные. Здесь уместно напомнить очень важные слова Андрея Николаевича о начале его работы в области турбулентности. Он сформулировал общий стиль, которого он всегда придерживался сам, и которому мы, его ученики, стараемся следовать: «Вскоре мне стало ясно, что трудно надеяться на создание замкнутой в себе теории (турбулентных течений жидкости и газов. — Г.Б.). За отсутствием такой теории придется опираться на гипотезы, полученные из обработки экспериментальных данных». Когда МД нужны были экспериментальные данные для проверки его теории, он не останавливался ни перед чем, чтобы их добыть и самому проверить все числа. Пример: отчет о работе Головича, выполненной в Швейцарии, о турбулентных течениях в шероховатых трубах не был подробно опубликован. МД добыл этот отчет с помощью... советского представителя в Швейцарии З.В. Мироновой и тщательно его изучил и использовал.

Мечтой МД было получить поле для самостоятельной деятельности. Он как-то прямо сказал мне: «Я мечтаю, когда Анатолий Петрович (Александров, директор Института атомной энергии им. И.В. Курчатова. — Прим. Г.Б.) выйдет в отставку, стать директором Курчатовского института». Беда в том, что этого не случилось. В течение десяти последних лет жизни МД был в подчинении у человека, которого я здесь назову Диктатором Науки (ДН). Тот, кто знает, — поймет, но я не хочу называть его по имени: его сестра была одной из самых замечательных женщин-математиков своего времени, ее сыновья — великолепные ученые, которыми справедливо гордится Россия. ДН давно оставил занятия

наукой, и его раздражали люди в его окружении, которые по призванию искренне занимались научным творчеством и делали это талантливо.

Для подтверждения приведу пример. Я.Б. Зельдович — одно из самых замечательных имен в советской науке — имел неосторожность, уйдя с практической работы, перейти в институт, в котором директорствовал ДН. Я предупредил его, что зря он это делает. Так вот, и его, награжденного тремя Золотыми звездами, академика, ДН унижал, получая от этого злобное удовлетворение. Прямо-таки художник Чертков из гоголевского «Портрета». Характерный случай: Яков Борисович попросил принять на имеющуюся у него вакансию младшего научного сотрудника Сашу Шнирельмана, только что окончившего аспирантуру МГУ (кстати, сына знаменитого астрофизика И. Шкловского). Саша активно слушал мои лекции, я его дважды экзаменовал и уже тогда мог иметь суждение о его способностях. Сейчас профессор А.И. Шнирельман — известный математик. Реакция ДН была: «А мы посмотрим, так ли уж он таувантлив (так. — Прим. ГБ.), как его представляет Яков Борисович!». Посмотрел, отказал. Мы с ЯБ были близкими друзьями, он приехал ко мне, его руки тряслись. Я сказал ему: «Вас интересуют общие воздыхания или устройство Шнирельмана на работу, где он будет иметь возможность работать с Вами? Я берусь это сделать за несколько минут». ЯБ посмотрел на меня озадаченно. Но я не преувеличивал свои возможности. Я много работал в нефтяной науке и был достаточно известен среди нефтяников. (Впоследствии за эти мои работы меня выбрали в Национальную инженерную академию наук США именно как инженера-нефтяника). Я позвонил директору центрального ВНИИнефть и попросил взять талантливого человека. Поручился, что 10 процентов своего времени он будет заниматься нефтяными задачами, но за эти 10 процентов он сделает более, чем достаточно. «В чем проблема, Григорий Исаакович, пусть приезжает!». Саша приехал, его взяли, он успешно работал, вскоре его произвели в старшие научные сотрудники. Что при этом чувствовал ЯБ. — понятно. Я только сказал ему: «Бегите оттуда!». Он ушел не оглядываясь, как только представилась достойная возможность.

Но это всё был частный случай, а у Михаила Дмитриевича такие унижения были постоянными. Никто не знает природы рака, но я убежден, что эти каждодневные мучения тоже внесли свой вклад в раннюю смерть МД (как и его коллеги по вице-президентству Б.П. Константинова, умершего еще раньше от сердечной недостаточности).

Об одном цикле работ МД хочу упомянуть особо. Он предложил модель турбулентных сдвиговых течений, в которой существенную роль играли организованные структуры — «колеса», как их называл МД. Помню, как после одного из докладов МД позади меня шел ДН с двумя подхалимами. «Ха-ха», — сказал один из них, льстиво заглядывая в глаза ДН,

ища и находя поддержку. Я тогда оглянулся и увидел эту отвратительную сцену. «Почему же этих «колес» никто не видел?».

Увидели. Год спустя после смерти МД появилась быстро ставшая знаменитой статья Г. Брауна и А. Рошко, после которой «когерентные структуры», — те самые «колеса», стали одним из главных объектов исследований в турбулентности.

Но Андрей Николаевич Колмогоров умел, мог и хотел защищать своих учеников. Помню один из турбулентных семинаров Андрея Николаевича, на котором МД докладывал новое специальное решение в задаче однородной изотропной турбулентности. Комментарий другого из упомянутых выше (на самом деле первого по вредности!) подхалима ДН, был, что если в этом решении один из параметров положить равным нулю, а другой — равным бесконечности, то получится решение, давно им полученное. Андрей Николаевич заметил, покачивая ногой: «К сожалению, Вы правы!» — «А почему, к сожалению?» — «А потому, что Ваше решение абсолютно бессмысленно!» — «А почему именно оно бессмысленно?». Андрей Николаевич дал объяснение: «Но это нигде не опубликовано!». И тут последовал перл вполне в духе Андрея Николаевича: «Видите ли, неопубликованные вещи делятся на два класса. Одни не опубликованы, потому что их не знает никто. Другие, — потому, что они известны всем. Ваш случай относится ко второму классу. Однако Вы такая знаменитость, спутники запускаете (это была ирония: в то время ходила легенда, что это лицо имеет руководящие отношения к запуску спутников. Несостоятельность этой легенды была секретом Полишинеля в научных и технических кругах. — Прим. ГБ.), поэтому следует напечатать этот результат в одном экземпляре специально для Вас!»

Отмечу попутно, что именно Андрей Николаевич назвал гипотезу квазинормальности в теории турбулентности гипотезой Миллионщикова. Отношение МД к нашему великому учителю было просто трогательным. В молодости, будучи его аспирантом, он оборудовал водопровод в их с П.С. Александровым знаменитом загородном доме в Комаровке. Когда Андрею Николаевичу исполнилось 60 лет, МД пробил «наверху» присвоение ему звания Героя Социалистического Труда, преодолев (он мне это прямо говорил) немалое сопротивление. В празднование 60-летия Андрея Николаевича МД и его незабываемая преданная помощница Валентина Петровна Островская внесли огромный вклад. Это празднование стало выдающимся событием, вехой в научной жизни.

В мою бытность Тейлоровским профессором гидромеханики в Кембриджском университете я слышал от коллег, что лорд Р. Батлер — министр в правительстве У. Черчилля в годы войны, впоследствии вице-премьер, а затем мастер Тринити-колледжа в Кембридже, был лучшим несостоявшимся премьер-министром в истории Англии. Я полагаю, что

Михаил Дмитриевич Миллионщиков был лучшим несостоявшимся президентом Академии наук за все время ее существования.

\*\*\*

Пусть это введение будет завершено стихотворением Людмилы Михайловны Миллионщиковой (Мухиной) из сборника, посвященного памяти мужа.

## ТАЛАНТ

Ты воля и неволя,  
Ярмо и добрый дар,  
Непаханое поле,  
Нетушенный пожар.

Всю жизнь вести ретиво  
Крутую борозду,  
Чтоб встать над нею нивой  
У солнца на виду.

Труд вечен и упорен,  
И все ж бывает так,  
Что сам себя под корень  
Из поля, как сорняк.

Но вновь, не унывая,  
Склоняйся и паши —  
Торопит зерен стая  
По закромам души.

А ты горишь пожаром,  
И надобно уметь  
С твоим бесценным даром,  
Сгорая, не сгореть.

## Тезисы докладов



---

# Turbulent Flows at Very Large Reynolds Numbers: the Lessons of Investigation

G.I. Barenblatt, A.J. Chorin, V.M. Prostokishin

*Shirshov Institute of Oceanology, RAS, Russia,*

*University of California, Berkeley, USA,*

*Lawrence Berkeley National Laboratory, USA,*

*National Research Nuclear University "MEPhI", Russia*

`gibar@math.berkeley.edu`

Turbulence was the first and the last love of Mikhail Dmitrievich in science. We deeply regret that we are unable to deliver our work to him and to listen his opinion and comments.

Turbulent flows at very large Reynolds numbers ( $\ln Re \gg 1$ ) are generally considered as happy province of the turbulence realm. According to common opinion, two basic results already obtained there, "the von Kármán-Prandtl universal logarithmic law" and Kolmogorov-Obukhov "law of  $2/3$  ( $-5/3$ )" will enter, basically untouched to the future closed in itself theory of turbulence which our mentor, Andrey Nikolaevich Kolmogorov dreamed about. Both these laws are based on the assumption that the flow in its basic region is viscosity independent.

In our lecture the validity of this assumption leading to the universal logarithmic law is discussed in detail. It is shown that it does not correspond to experiment. The universal logarithmic law is founded to be not quite correct, and an alternative law is proposed for the velocity distribution in the shear flows, as well as for the drag law corresponding to it, which are in an instructive agreement with the experiment. Some possible corrections to the Kolmogorov-Obukhov law are also discussed.

---

## On wave propagation in shallow water and in hyperelastic media

Lorenzo Brandolese

*Institut Camille Jordan, Université Lyon 1, 21, avenue Claude Bernard  
69622 Villeurbanne Cedex FRANCE*

`brandolese@math.univ-lyon1.fr`

We unify a few of the best known results on wave breaking for the Camassa–Holm equation (by R. Camassa, A. Constantin, J. Escher, L. Holm, J. Hyman and others) in a single theorem: a sufficient condition for the breakdown is that  $u'_0 + |u_0|$  is strictly negative in at least one point

$x_0 \in \mathbb{R}$ . Such blowup criterion looks more natural than the previous ones, as the condition on the initial data is purely local in the space variable. Our method relies on the introduction of two families of Lyapunov functions. Contrary to McKean's necessary and sufficient condition for blowup, our approach applies to other equations that are not integrable: we illustrate this fact by establishing new local-in-space blowup criteria for an equation modeling nonlinear dispersive waves in elastic rods.

## References

- [1] L. Brandolese, *Local-in-space criteria for blowup in shallow water and dispersive rod equations*, Comm. Math. Phys., to appear
- [2] L. Brandolese, *Breakdown for the Camassa–Holm equation using decay criteria and persistence in weighted spaces*, Intern. Math. Res. Not. (2012)
- [3] L. Brandolese and F. Cortez, *On permanent and breaking waves in hyperelastic rods and rings*. Preprint (2013).

---

## Pugwash

**Francesco Calogero**

*Physics Department, University of Rome "La Sapienza" Istituto  
Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma*

`francesco.calogero@roma1.infn.it`

A terse description will be provided of the origin and history of the Pugwash Conferences on Science and World Affairs, an international organization of scientists and other eminent personalities that began in 1957 and played a significant role in bringing about various important arms control developments (especially involving weapons of mass destruction: nuclear, chemical, biological) and the end of the Cold War. Current activities of Pugwash will also be outlined.

Academician Millionshchikov was an active participant in International Pugwash activities from 1964 to 1973, also serving as Chairman of the Soviet Pugwash Group and as Member of the Pugwash Council and Executive Committee.

I was involved in International Pugwash activities from 1965, served as Secretary General from 1989 to 1997 and in that capacity accepted in Oslo (10 December 1995), on behalf of Pugwash, the Nobel Peace Prize jointly

awarded to Joseph Rotblat and to Pugwash for their efforts to diminish the part played by nuclear arms in international politics and in the longer run to eliminate such arms.

---

## **Isochronous systems are not rare**

**Francesco Calogero**

*Physics Department, University of Rome "La Sapienza", 00185 Rome  
(Italy), Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma*

`francesco.calogero@roma1.infn.it`

A survey will be given of isochronous systems, i. e. systems that oscillate with a fixed period (for largely arbitrary initial data). It will be shown how to manufacture many such models—mainly many-body problems whose time evolution is characterized by Newtonian equations of motion. In particular a technique will be described to modify fairly general models describing a time evolution, so that the modified systems are isochronous (with period  $T$ ) yet mimic closely (or even exactly) the behavior of the unmodified system for a time interval  $\tilde{T}$  much smaller (or just smaller) than  $T$ . These findings are also valid in a quantal context.

As a particularly remarkable example (joint work with F. Leyvraz), it will be shown how—given the (autonomous) Hamiltonian  $H$  describing the most general (standard) nonrelativistic many-body problem (arbitrary number  $N$  of particles, arbitrary masses, arbitrary dimensions of ambient space, forces depending arbitrarily from all the particle coordinates)—it is possible to construct another (also autonomous) Hamiltonian  $\tilde{H}$  (in fact, an infinity of such Hamiltonians) featuring two additional arbitrary positive parameters  $T$  and  $\tilde{T}$  with  $T > \tilde{T}$ , and having the following two properties.

(i) The new Hamiltonian  $\tilde{H}$  yields, over the (arbitrarily long!) time interval  $\tilde{T}$ , a dynamical evolution very similar (or even identical) to that yielded by  $H$ .

(ii) The Hamiltonian  $\tilde{H}$  is isochronous: all its solutions (for arbitrary initial data) are completely periodic with period  $T$ . These findings are also valid in a quantal context.

This finding raises (interesting?) questions about the difference among nonintegrable and integrable dynamics (all isochronous systems are integrable, indeed more than superintegrable), about the definition of chaotic behavior (including the apparent need to invent some such notion for a finite time interval), about the validity (say, for  $N \approx 10^{24}$ ) of statistical mechanics and of the second principle of thermodynamics, about cosmology (say, for  $N \approx 10^{85}$ ). It also demonstrates the impossibility to ascertain

which dynamical theory is the correct one, out of an infinity of different theories predicting the same (almost, or even exactly, the same) evolution over an arbitrarily long (but finite) time interval, but being qualitatively different (isochronous versus chaotic, integrable versus nonintegrable).

---

## Coexistence of “strong” and “weak” wave turbulence

Claude Cambon

*ILMFA, Ecole Centrale de Lyon, France*

`claude.cambon@ec-lyon.fr`

The quasi-normal approximation, with zero fourth-order cumulants for the multipoint statistics, was introduced very early by Millionshchikov [1]. Such an assumption is well justified in wave turbulence theory, when the fluctuating velocity is modulated by dispersive waves, so that the nonlinearity is weak: this yields an “intrinsic” (or exact ?) closure, as shown by, e.g. [2]. In fact, both the two-time decomposition in terms of “slow” amplitudes and “rapid” phases of the wavemodes and the random phase approximation give asymptotically a mathematical / physical support to the QNM (Quasi-normal Markovian) ingredient in classical wave turbulence theory [3, 4, 5]. On the other hand, this QNM ingredient is present in theories and models for the “strong” nonlinearity reflected by the spectral energy transfer in the absence of waves. Despite the lack of a rigorous asymptotic justification, correct predictions are possible, using a model of nonzero fourth-order cumulants, to mimic nonlinear damping of third-order cumulants. One of the simplest models is Orszag’s EDQNM (Eddy Damped Quasi-Normal Markovian) approximation [6]. Its relationship to Kraichnan’s theoretical approach will not be discussed for the sake of brevity. It has been shown that the ED (Eddy Damping) vanishes when EDQNM reaches the asymptotic limit of wave turbulence theory, especially when three-wave resonance is permitted by the dispersion relation [7].

Given that in many flow configurations, the linear eigenmode decomposition contains both wave and non-propagating (sometime called “vortex”) modes, we propose to model the nonlinear spectral transfer by a generalised EDQNM approach, in which the semi-empirical ED ingredient is only important for vortex-vortex interactions involving the non-propagating mode, whereas classical wave-turbulence theory can be applied both to wave-wave interactions and to wave-vortex interactions. Instances of such flows, in which *strong turbulence and weak wave turbulence coexist*, include weakly compressible turbulence at low Mach number — solenoidal mode versus acoustic waves — and rotating stably-stratified turbulence in deep water

— potential vorticity mode versus inertia-gravity internal waves (see [8] and references therein.)

Two examples will be emphasized. Firstly, the turbulence in an unbounded stably-stratified fluid is addressed: we identify the *toroidal cascade* as the strong cascade, explaining the layering, whereas interactions of internal wave with itself and with toroidal velocity yield a secondary cascade. Three-dimensional inertial wave-turbulence is then illustrated by an unbounded rapidly rotating fluid at low Rossby number. When the flow is bounded in the axial direction, the non-propagating two-dimensional mode is affected by its own (inverse) cascade, and interactions with the inertial wave-turbulence cascade are carefully investigated, with recent new results [9].

## References

- [1] M. Millionshchikov, *C. R. Acad. Sci. URSS* (in French) **32**, 615 (1941)
- [2] D. J. Benney & A. C. Newell, Random wave closure, *Stud. Appl. Maths* **48**, 29–53 (1969)
- [3] V. E. Zakharov, V. S. L’vov & G. Falkowich, *Kolmogorov Spectra of turbulence I. Wave Turbulence*. Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer Verlag (1991)
- [4] A. C. Newell & B. Rumpf, Wave turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **43**, 59–78 (2011)
- [5] S. Nazarenko, *Wave Turbulence*, Springer (2011)
- [6] S. A. Orszag, Analytical theories of turbulence, *J. Fluid Mech* **41**, 363–386 (1970) (see also his lecture notes to “Ecole de Physique des Houches”, 1974)
- [7] F. Bellet, F. S. Godeferd, J. F. Scott & C. Cambon, Wave-turbulence in rapidly rotating flows, *J. Fluid Mech.* **562**, 83–121 (2006)
- [8] P. Sagaut & C. Cambon, *Homogeneous turbulence dynamics*, Cambridge University Press, New York (2008)
- [9] J. F. Scott, Wave turbulence in a rotating channel, *J. Fluid Mech.*, to appear (2013)

---

# Helicity decay in homogeneous turbulence

O.G. Chkhetiani, A.O. Levshin

*A.M.Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, 119017 Moscow, Pызhevsky 3,  
Space Research Institute, Russian Academy of Sciences, 117997, Moscow,  
Profsoyuznaya 84/32*

lgg@ifaran.ru

On the basis of the Karman-Howarth equation for two-point correlation of velocity and vorticity [1] we consider helicity decay in homogeneous turbulence, taking into account the integral invariants of the form

$$I_m^h = \int_0^\infty r^m \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle dr$$

( $\omega = \text{rot} \mathbf{u}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ).

Helical analogues for integral Loitsyansky ( $m = 4$ ) and Birkhoff-Saffmen ( $m = 2$ ) as well as relevant integral in the case of  $m = 3$  conserve during the decay. Helicity decays the self-similar power law.

The results on the decay of the helicity are given in the comparative table.

Invariant	Energy	Helicity
$I_2 (I_2^h)$	$t^{-6/5}$	$t^{-3/2}$
$I_3 (I_3^h)$	$t^{-4/3}$	$t^{-8/5}$
$I_4 (I_4^h)$	$t^{-10/7}$	$t^{-5/3}$

Helical analogue of integral Loitsyansky

$$\Lambda_h = \int_0^\infty r^4 C(r) dr \quad (1)$$

is associated with the angular momentum  $\mathbf{H}$  and linear momentum  $\mathbf{L}$  of a turbulent fluid

$$\Lambda_h \sim \frac{\langle \mathbf{H}\mathbf{L} \rangle}{V}.$$

Here  $\langle [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \times \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r})] \rangle = 2C(r) \mathbf{r}$ .

## References

- [1] Chkhetiani O. G. On the third moments in helical turbulence //JETP Letters. – 1996. – V. 63.(10). – P. 808-812.

# Equivalent measures and stochastic equations for determination of the turbulent velocity fields and correlation moments of the second order

Artur V. Dmitrenko

Equivalent measures and stochastic equations for determination of the turbulent velocity fields and correlation moments of the second order

Dimitrenko Artur V.

National Research Nuclear University «MEPhI»

Moscow State University of Railway Engineering, (MIIT)

E-mail : AVDmitrenko@MEPHI.RU, AMMSV@YANDEX.RU

In article [1], based on the definition of measures equivalency between deterministic and random process, the system of stochastic equations of energy, mass and momentum for the areas space-time: 1) the beginning of the generation; 2) generation; 3) diffusion and 4) the dissipation of the turbulent fields were defined. Also analytical expressions for the first and second critical Reynolds numbers and critical point, using the system of equations for the region of the beginning of the generation, were derived. It is known [2-11], that the beginning of the formation of a developed turbulent flow occurs at the first critical Reynolds number, in critical point. Using the system of equations for the region of the generation of the turbulence, the analytical expressions for determination of velocity profiles and correlation moments of the second order depending on the function originally existed excitations in the system (the initial turbulence) are presented.

**1. Assessment of the value of the integral energy generation of turbulence.**

According to [1] considered the physical process is represented as a nonequilibrium thermodynamic system with  $i$  - subsets, which is characterized by the values of energy

$\bigcup_i^{i=n} (E_i)_{st}$ , momentum  $\bigcup_i^{i=n} (MU_i)_{st}$  and mass  $\bigcup_i^{i=n} (M)_{st}$ . Here  $U_i$  is the speed.  $\bigcup_i^{i=n} (E_i)_{st}$  -the

energy stochastic field (index  $g_{st}$ );  $\bigcup_i^{i=n} (E_i)_{col_{st}}$  -the part of the energy field, its determi-

nistic component (index  $col_{st}$ ), having the stochastic component measures null;  $\bigcup_i^{i=n} (E_i)_{st}$

-part of the energy field, in fact stochastic component of the field (index  $st$ ). Similarly, identify the components of the momentum and mass ( $\rho$ -density). In [1], the system of

the equations for the pair  $(N,M)=(1,1)$ , for the «correlator»  $D_{N,M}(r_c; m_{ci}; \tau_c) = D_{1,1}(r_c; m_{ci}; \tau_c)$ , in the region 2) (the generation of turbulence)  $r_{c1}(x_c + \Delta x_0 + \Delta x_1, \tau_c + \Delta \tau_0 + \Delta \tau_1) - r_{c0}$  was defined as

$$\left( \frac{d(\rho)_{col,st}}{d\tau} \right)_{1,1} = - \left( \frac{d(\rho)_{st}}{d\tau} \right) \quad (1)$$

$$\left\{ \left( \frac{d(\rho \vec{U})_{col,st}}{d\tau} \right)_{1,1} = - \left( \frac{d(\rho \vec{U})_{st}}{d\tau} \right) \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{div}(\tau_{i,j})_{col,st} &= \frac{d(\rho \vec{U})_{st}}{d\tau} \\ \left( \frac{d(E)_{col,st}}{d\tau} \right)_{1,1} &= - \left( \frac{d(E)_{st}}{d\tau} \right) \\ \text{div}(u_j \tau_{i,j})_{col,st} &= \frac{d(E)_{st}}{d\tau} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$\rho, \vec{U}, u_i, u_j, \tau_{i,j}, \mu, \tau$  -density, velocity vector, the velocity component in the direction  $x_i, x_j$  ( $i, j=1,2,3$ ), stress tensor, the dynamic viscosity and time, respectively. Further L-linear

of the perturbation - scale turbulence.  $L_y$  on  $x_2=y$ , or  $L_x$ ,  $x_1=x$ ,  $x_1$  and  $x_2$  coordinates along and normal to the wall. In result of the decision of systems (1)-(3) the amount of the initial energy of the chaotic state during energy transfer from deterministic at the critical point increases in times  $|\text{Re}_{st}-1/\text{Re}_{st}|$ . The energy is concentrated in the critical-some point and may have spectra of species Delta function or continuous spectrum.

**2. The value of correlation of the second order.** The turbulent kinetic energy  $q$  in the critical point is determined as

$$q = \left( \left[ \sqrt{E_{st}/\rho} \right]_0 \right)^2 \left( \text{Re}_{st} - \frac{1}{\text{Re}_{st}} \right) = (E_{st}/\rho)_0 \left( \text{Re}_{st} - \frac{1}{\text{Re}_{st}} \right)$$

Here an index of 0 corresponds to the initial turbulence. This depends on the data [12-14] gives a satisfactory fit

$$\frac{q}{(u^*)^2} = 0,144 * \left( \frac{\left[ \sqrt{E_{st}/\rho} \right]_0}{U_m} \right)^2 \text{Re}_{st} \left( \text{Re}_{st,0} - \frac{1}{\text{Re}_{st,0}} \right) \approx 1,52$$

**3. Profiles of speed turbulent flow in a pipe and plate.** As is known, experimental study of the averaged characteristics in the field of developed turbulence showed that the velocity profiles are affine equivalence. For example, the classical incompressible isothermal flow of liquid or gas in a tube of radius R (diameter (d) and speed the axis  $U_0$ , and the flow in the boundary layer ( $\delta_{TC} = \delta$ - thickness of the boundary layer,  $\nu = \mu/\rho$ ) and obey the equations respectively:  $(u_1/U) = (x_2/R)^{1/n}$ ,  $(u_1/U) = (x_2/\delta_{TC})^{1/n}$ . In

according on (1)-(3), the dependence for «n» can be obtained as  $\frac{1}{4n^2} (B)^{\frac{1}{2n}} = B |\text{Re}_{st} - \text{Re}_{st}^{-1}|$

or,  $x^2(B)^x = B |\text{Re}_{st} - \text{Re}_{st}^{-1}| = BA = \text{constant}$ ,  $x=1/2n$ , here  $\left( \frac{1}{8} \frac{E_{st}}{\rho U_0^2} \left( \frac{R}{L} \right) \right)^{4/3} = B \cdot \text{Re}_{st}$ - turbulent

Reynolds number on the parameters the initial turbulence. For the flow over along the flat plate ( $U_0$ -speed on the border of the boundary layer) were obtained :

$$\frac{1}{n^2} \left[ \left( \frac{1}{2} \frac{E_{st}}{\rho U_0^2} \left( \frac{\delta}{L} \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{st}}{\rho U_0^2} \left( \frac{\delta}{L} \right) \right)^2 |\text{Re}_{st} - \text{Re}_{st}^{-1}| \text{ or } x^2(B)^x = 0.25B |\text{Re}_{st} - \text{Re}_{st}^{-1}| = BC = \text{constant},$$

$x=1/n$ . Then we obtain the values of the exponent  $n = 6 \div 10$ , relevant  $\text{Re}_{st} = 11 \div 23$ ,

consistent with the results in [12-14].

#### REFERENCES

1. A.V. Dmitrenko, Doklady Physics, 2013, Vol. 58, No. 6, pp. 228–235.
2. A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk **26** (1), 6 (1940). [in Russian]
3. L. D. Landau, Dokl. Akad. Nauk **44** (8), 339 (1944). [in Russian]
4. E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963).
5. D. Ruelle and F. Takens, Commun. Math. Phys. **20**, 167 (1971).
7. Yu. L. Klimontovich, Usp. Fiz. Nauk **158** B1, 59 (1989). [in Russian]
8. V. I. Arnol'd, *Theory of Catastrophes* (Nauka, Moscow, 1990) [in Russian].
9. G. Haller, *Chaos Near Resonance* (Springer, Berlin, 1999).
10. S. A. Orzag and L. C. Kells, J. Fluid Mech. **96** (1), 159 (1980)
11. A.V. Dmitrenko, Doklady Physics, 2007, Vol. 52, No. 7, pp. 384–387.
12. Millionshchikov M.D. Turbulent flow in the boundary layer and in the pipes. M: Nauka, 1969. [in Russian].
13. G. Shlikhting, *Theory of Boundary Layer* (Nauka, Moscow, 1969. [in Russian].
14. A.S. Monin, A.M. Yaglom, *Statistical Hydrodynamics* M: Nauka, 1969. Vol. 1. [in Russian].

---

# First integrals of ordinary difference equations: Beyond Lagrangian methods

V. Dorodnitsyn

*Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of  
Science, Miusskaya Pl. 4, Moscow, 125047, Russia*

dorod2007@gmail.com

A new method for finding first integrals of discrete equations is presented. It can be used for discrete equations which do not possess a variational (Lagrangian or Hamiltonian) formulation. The method is based on a newly established identity which links symmetries of the underlying discrete equations, solutions of the discrete adjoint equation and first integrals. The method was applied to invariant discretizations of a second order and a third order ODE. The set of independent first integrals allows to find the general solution of the discrete scheme. The method is compared to a direct method of constructing first integrals.

---

# Acoustic turbulence of second sound waves in superfluid helium

V. Efimov.

*Institute of Solid State Physics RAS,  
Chernogolovka, Moscow district, 142432 Russia*

victor\_efimov@yahoo.co.uk, victor\_efimov@yahoo.co.uk

In a report we'd like to review a wide set of our experimental investigations of second sound waves in superfluid helium.

Superfluid helium is the unique medium for modelling turbulence processes by different nature. Extremely low helium viscosity in normal and superfluid state allows to study kinetic turbulence — formation of vortex system after moving bodies. In helium it is possible to observe quantum vortexes at zero temperature and absence of thermal excitation in medium [1]. Experimental investigation of heat fluxes in helium gas and fluid allowed to observe convectional turbulence in very wide dynamical range (11 decades in Rayleigh number), the largest dynamical range observed in any single run in physics on one apparatus [2]. Experiments with heat waves in superfluid helium get a unique possibility to study acoustic turbulence with control changing of nonlinear velocity coefficient [3].

The temperature wave or second sound is a contraflow of normal and superfluid component in superfluid helium. These waves have linear dispersion ratio  $\omega_k = v_{20} * k$  and extremely interesting dependence of nonlinear

coefficient of sound velocity  $v_2 = v_{20} * (1 + \alpha * \delta T)$ , where  $\delta T$  is amplitude of the wave. Under the saturated vapor pressure, in the region of roton second sound,  $T > 0.9K$ , the nonlinearity coefficient is big positive ( $\alpha > 0$ ) for temperatures  $T < T_\alpha = 1.88K$  (like the nonlinearity coefficient of conventional sound waves in ordinary media); but it is negative in the range  $T_\alpha < T < T_\lambda$  (up to infinite at  $T_\lambda$ ) [4]. At  $T = T_\alpha$  the nonlinearity coefficient passes through zero. So, it is possible to check all acoustic turbulence phenomena with different values (and sign) of nonlinear coefficient by simple changing of temperature of liquid helium.

In our experiments we studied the behaviour of second sound waves in high quality quartz cylinder resonator. The amplitude of low intensity harmonic heat wave in resonance circumstance increases. It leads to distort shape of the wave by nonlinear effect and formation of discrete multiple harmonics.

Based on measurements of nonlinear second sound waves in a high-quality resonator, we observed formation of a steady-state wave-energy cascade in He II involving a flux of energy through the spectral range towards high frequencies [5], time dependences of frequency cascade formation and decay. These measurements defined a time of nonlinear energy transmission along the frequency spectrum for acoustic turbulence.

We found that under some circumstances, wave energy in the acoustic system can also flow in the reverse direction — formation a cascade of subharmonics [6]. The nature of inverse cascade is three-wave decay of pumping wave. Very long time of formation of inverse cascade allowed observing redistribution of energy fluxes between direct and inverse cascades.

## References

- [1] R. Donnelly, Quantized Vortices in Helium II,
- [2] J.J.Niemela, et al, "Turbulent Convection at High Rayleigh Numbers", Nature 404: 837-841 (2000)
- [3] M.Yu.Brazhnikov, et al, Turbulence of second sound waves in superfluid He II, Fiz.Nizk.Temp., 30, 6, 590-595, 2004
- [4] A.J.Dessler and W.M.Fairbank, Amplitude dependence of the velocity of second sound, Phys. Rev. 104, 6 (1956)
- [5] G.V. Kolmakov, et al, Formation of a Direct Kolmogorov-Like Cascade of Second-Sound Waves in He II, Phys. Rev. Lett., 97, 155301, 2006

- [6] A.N. Ganshin, et al, Observation of giant low-frequency waves in developed acoustic turbulence in superfluid helium, Phys. Rev. Lett. 101, 065303 (2008)

---

## Laminar and turbulent regimes of Taylor-Green vortex decay

T.G. Elizarova, I.A. Shirokov

*Keldysh Institute for Applied Mathematics Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia,*

*Moscow State University, Moscow, Russia*

telizar@mail.ru, ivanshirokov@inbox.ru

We report results of numerical modeling of the classical Taylor-Green vortex decay problem basing on smoothed, or quasi- gas dynamic (QGD) equation system for viscous compressible gas flow. It is shown that QGD equations provide a uniform numerical simulation of both laminar and turbulent evolution of the vortex.

The background, finite-difference approximations and various applications of the QGD system are presented in monographs [1]-[3] and in the later papers. QGD equations can be obtained by averaging gas dynamics equations over a small time interval, that results in additional smoothing or regularization. The additional strongly non-linear terms that appear due to averaging are the second-order space derivatives in factor of a small parameter  $\tau$  that has the dimension of a time. The  $\tau$ -terms bring an additional entropy production and so they have a dissipative character. The influence of additional terms is inessential for the stationary flows, but for strongly nonstationary flows their contribution becomes important.

In calculations parameter  $\tau$  is defined as  $\tau = \alpha h/c$ , where  $h$  is the mesh size,  $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$  is the speed of sound,  $0 < \alpha < 1$  is a numerical coefficient to be tuned, and  $h/c$  is the time required for a perturbation to travel across a grid cell. In this way  $\tau$ -terms reproduce a non-trivial kind of subgrid-type dissipation. Similar to sub-grid dissipation in LES models, they smooth, or average the fluctuations of flow parameters on a time-space scale depending on discretization. The sub-grid dissipation in QGD equations differs from the turbulent Smagorinsky viscosity, as the  $\tau$ -terms have different mathematical structure and properties. Additional terms appear not only in the momentum and energy equations, but also in the continuity equation. This latter property models the turbulent mass-diffusion, which is inherent to turbulent mixing. In the boundary layer the  $\tau$ -terms vanish.

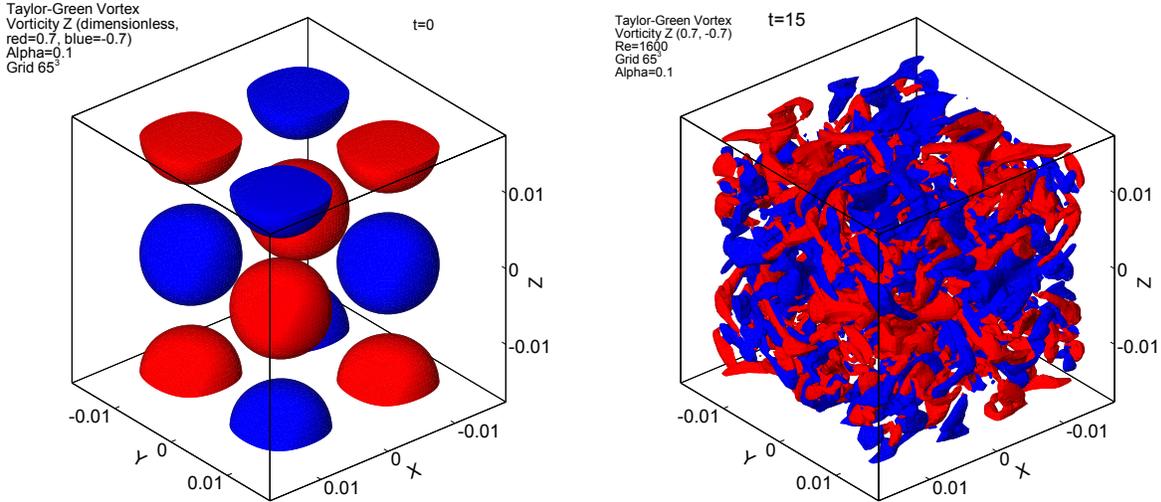


Figure 1: Time-evolution of iso-surfaces of z-component of the dimensionless vorticity. Computational grid is  $65^3$ .

These features of the QGD equations open nice perspectives for the simulation of turbulent flows together with laminar-turbulent transition. The first encouraging results were obtained for laminar-turbulent transition in a separated flow over a backward-facing step and in a vicinity of a hypersonic vehicle.

Fig. 1 shows the vorticity contours in simulation of the Taylor-Green vortex flow decay for Reynolds numbers  $Re = 1600$  for time  $t=0$  and  $t=15$ . Here Mach number is equal to 0.1, working gas is nitrogen in normal conditions.

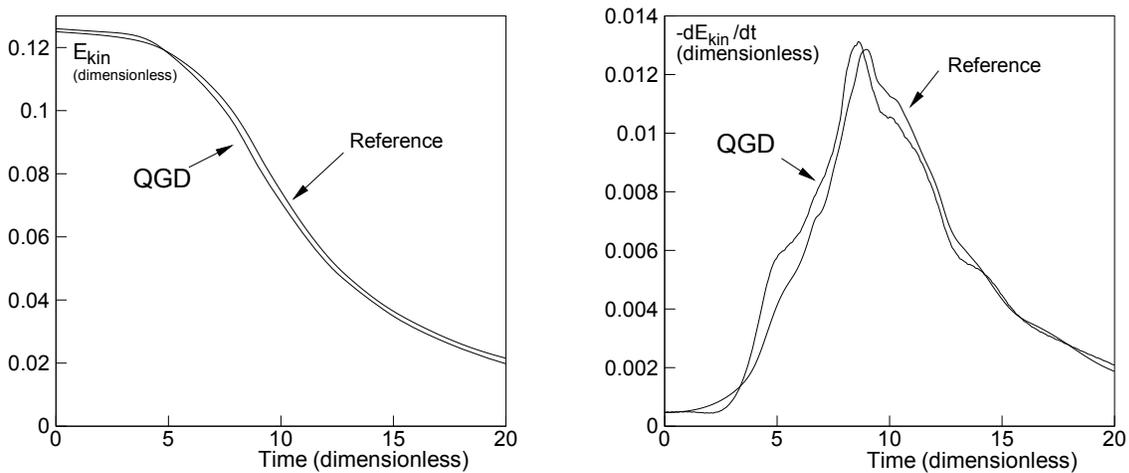


Figure 2: Time-evolution of the decaying kinetical energy (left) and the rate of dissipation (right). Computational grid is  $129^3$ .

In Fig. 2 the comparison of the kinetic energy ( $E_{kin}$ ) dissipation rate

with the reference data from [4] are demonstrated. Good agreement with the reference is clearly seen. Laminar flow calculation for  $Re=100$  and  $280$  will be also presented. Additional computational results can be found in [5].

## References

- [1] B.N.Chetverushkin. Kinetic Schemes and Quasi-Gas Dynamic System of Equations. CIMNE, Barcelona, 2008.
- [2] T.G. Elizarova. Quasi-Gas Dynamic Equations. Springer, Dordrecht, 2009.
- [3] Yu.V.Sheretov. Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging. RKhD, Moscow-Izhevsk, 2009 (in Russian)
- [4] <http://www.as.dlr.de>
- [5] <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-63>

---

## Turbulence theory in 21 century: a synthesis of Kolmogorov and Landau?

Gregory Falkovich

*WIS, Israel and IITP, Moscow Russia*

`gregory.falkovich@weizmann.ac.il`

I will briefly review developments of the last 15–20 years in turbulence theory with an emphasis on fundamental aspects like self-similarities, symmetries, their breakdown and emergence. The take-home lesson is that there is more to turbulence than cascade. Then I will discuss the unsolved problem of turbulence interaction with a mean flow.

## References

- [1] G. Falkovich, K. Gawędzki and M. Vergassola, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 913 (2001).
- [2] Falkovich G Symmetries of the turbulent state. *J Phys A: Math Theor* 42, 123001 (2009)

---

## Turbulence in the Lobachevsky plane

Krzysztof Gawedzky

*ENS of Lyon, Lyon, France*

I will discuss the joint work with Gregory Falkovich exploring the behavior of stochastically forced Navier-Stokes equation in the background of two-dimensional hyperbolic geometry.

---

## Size distribution of litospheric plates

G.S. Golitsyn

*A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, RAS, Moscow 119017,  
Russia*

`gsg@ifaran.ru`

P.Bird [1] presented the cumulative area,  $S$ , distributions of  $N = 52$  plates. After exclusion of 6 continental plates and of three smallest ones he approximated the rest of the plates by power law with exponent  $n = -0.33$ . The dimensional arguments and hypotheses of Kolmogorov–Obukhov type for turbulence have been already applied to statistical description of granular motions within the fractured solid bodies. The same kind of arguments in this case for the cumulative size distribution of the plates produce the power law with exponent  $-\frac{1}{3}$ . The examples of real home experiments with size distributions of stochastic polygon areas distributions and of areas of polygonal sizes of broken eggshells are qualitatively supporting our conclusions. Moreover, the numerical prefactor at the Bird’s law is found close to 5 supporting the saying by Albert Einstein that in the valid dimensional by derived expressions the numerical coefficients should be of order one, as quoted by P. Bridgman [2].

## References

- [1] P. Bird, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. 2003, V. 4, No. 3.
- [2] P. Bridgman, *Dimensional Analysis*, Yale Univ. Press, 1921 and 1932.

---

# Nonlinear random waves and turbulent flows in hereditary media

Sergey N. Gurbatov , Oleg V. Rudenko

*N.I.Lobachevsky Nizhny Novgorod State University,  
23, Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia*

*M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia, Leninskie  
Gory, Moscow, Russia*

`gurb@rf.unn.ru`

Several models for simplified description of turbulent motions are known. Among them, the Burgers model of turbulence (or "Burgulence" [1]) is of particular interest because of its universality. The well known Burgers equation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (2)$$

describes a variety of nonlinear wave phenomena arising in the theory of wave propagation, acoustics, plasma physics and so on (see, e.g., [2, 2, 4, 5]).

This equation was originally introduced by J.M.Burgers as a model of hydrodynamical turbulence. It shares a number of properties with the Navier–Stokes equation: the same type of nonlinearity, of invariance groups and of energy-dissipation relation, the existence of a multidimensional version [6]. However, Burgers equation is known to be integrable and therefore lacks the property of sensitive dependence on the initial conditions. Nevertheless, the differences between the Burgers and Navier-Stokes equations are as interesting as the similarities and this is also true for the multi-dimensional Burgers equation. Nonlinear noise signal propagation in soft biological tissues is governing by integro-differential equations. Physical properties of a medium are defined by the kernel  $K(s)$ . In the limiting cases on "short" or "long" memory the equation transforms to the Riemann-Hopf or Burgers equations. We will here use the integro-differential equations in the form similar to the classical Burgers equation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty K(s) v(x-s, t) ds \quad (3)$$

The goal of the present report is the investigation of the evolution of random nonlinear waves in complex media with dissipation and weak dispersion, describing by the integro-differential equation, when the dissipation play leading role. The behavior of waves in such media is similar to the

behavior of the waves describing by the Burgers equation. In the limiting case of vanishing viscosity the continuous wave transforms to the sequence of sawtooth waves. For the complex media with dissipation and weak dispersion the shocks have a finite width, and the structure of the shocks will be determined by the kernel  $K(s)$  of the integro-differential equation.

We will consider here the influence of nonlinearity and weak dispersion on the decay of broadband noise in two limiting cases: at the initial stage, when the number of the shocks is relatively small, and at the late stage, when the wave is a sequence of sawtooth waves with the random positions of the shocks. It is well-known for the periodic waves at large Reynolds number due to the increasing width of the shock, the nonlinear stage of evolution replaced by the linear stage of decay. For the broadband noise the nontrivial behavior may exist: even for small initial number the linear stage of decay may be change to the nonlinear stage of evolution. In the late stage the high-frequency asymptotic of noise will be determined by the kernel  $K(s)$  of integro-differential equation and fluctuations in the width of discontinuities.

We have benefited from discussion with A. Saichev, I. Demin. The work is supported by the Mega-grant of Russian Government 11.G34.31.066 and by President Grants for leading scientific school. It is supported also by RFBR.

## References

- [1] U.Frish, J.Bec. Burgulence. *New trends in Turbulence*. Les Houches 2000, pp.341-383. Springer EDP-Sciences, 2001;
- [2] O.V. Rudenko and S.I. Soluyan *Theoretical foundations of nonlinear acoustics* (New York,Plenum, 1977).
- [3] S.N. Gurbatov, A.N. Malakhov, and A.I. Saichev *Nonlinear Random Waves and Turbulence in Nondispersive Media: Waves, Rays, Particles* (Manchester University Press,1991).
- [4] W.A. Woyczynski, *Burgers–KPZ Turbulence. Gottingen Lectures* (Springer-Verlag, Berlin,1998).
- [5] S.N. Gurbatov, O.V.Rudenko, and A.I. Saichev *Waves and Structures in Nonlinear Nondispersive Media. General Theory and Applications to Nonlinear Acoustics*. (Springer-Verlag and HEP, Berlin, Heidelberg, Germany, 2012).
- [6] U. Frisch U. *Turbulence: the Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge University Press,1995).

---

# Dynamical Models of Agglomeration and Growth Processes

**Richard Kerner**

*Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée, Université Pierre et Marie Curie, CNRS URA 7600, Tour 23-13, 5-e étage, Boite Courrier 121, 4, Place Jussieu, 75005 Paris, France*

`richard.kerner@upmc.fr`

We present a unifying view on dynamical agglomeration processes, coming from different domains of physics, chemistry and biology, such as the formation of fullerenes and tubular structures made of carbon atoms, quasicrystals, the glass transition in oxide and non-oxide glasses, and viral capsid formation.

In all these processes, some of which may present quite complicate patterns, a simple and powerful method consists in the use of non-linear differential equations of a generalized Volterra type, and the stochastic matrix formulation.

In all the aforementioned cases, one has to identify first the recurrent stable configurations which under appropriate condition may agglomerate and form larger clusters. Dividing the process into elementary steps consisting of forming doublets, then triplets, and then even bigger clusters, we can find the variation of the statistical distribution of elementary building blocks by renormalizing the probabilities after each step, and thus follow the variation of those probabilities, and form first or second order differential equations ruling the process.

The probabilities of each elementary agglomeration process contain purely statistical factors, depending on the geometry and topology of building blocks, as well as Boltzmann factors imposed by the energy barriers characterizing each of the particular elementary agglomeration steps. This method is suitable for the description of finite agglomeration, which is the case of the fullerene synthesis in a hot electric arc around graphite electrodes, or in the case of viral capsids made of coat proteins with pentagonal and hexagonal symmetry;

In the case of agglomeration leading to infinite structures, like glasses or quasi-crystals, another method is used, that of a stochastic matrix. As usual, one starts with defining the complete set of configurations that may arise on the surface of forming clusters. Successive addition of elementary blocks leads then to changes in statistical distribution on growing surfaces. A flow diagram describes all such local transformations, and the action of thus obtained matrix on a set of probabilities can serve again for the establishment of Volterra-type system, whose stationary solutions define

the glass transition or at least the asymptotic behavior of the bulk matter that is formed.

Application to the glass transition temperature and the classification of capsid viruses will be also presented.

## References

- [1] R. Kerner, D.M. dos Santos, Phys. Rev. B, 37, 3881-4000, (1988).
- [2] R. Kerner, Journal of Non-crystalline Solids, 135, 155-170, (1991).
- [3] K.H. Bennemann, R. Kerner and K.A. Penson, Europhysics Letters, 19 (5), 363-368, (1992).
- [4] R. Kerner, Journal of Computational Material Science, North-Holland, 2, 500-508, (1994).
- [5] R. Kerner, Journal of Non-Crystalline Solids,....
- [6] R. Kerner, Models of Agglomeration and Glass Transition, Imperial College Press, London 2007
- [7] R. Kerner, J.C. Phillips, Solid State Communications, 117, p. 47-56 (2000)
- [8] R. Kerner, Mathematical Modelling of Natural Phenomena, Vol. 6, No. 6, pp. 136-158 (2011)

---

## Kinematic dynamo in large-scale chaotic flows

I. V. Kolokolov

*Landau Institute for Theoretical Physics, Kosygina 2, Moscow, 119334,  
Russia*

igor.kolokolov@gmail.ru

Kinematic dynamo theory is presented for turbulent conductive fluids. We describe how inhomogeneous magnetic fluctuations are generated below the viscous scale of turbulence where the spatial smoothness of the velocity permits a systematic analysis of the Lagrangian path dynamics. We find analytically the moments and multi-point correlation functions of the magnetic field at small yet finite magnetic diffusivity. We show that the field is concentrated in long narrow strips and describe anomalous scalings and angular singularities of the multi-point correlation functions which are

manifestations of field's intermittency. We study also anisotropic flows with strong regular shear component. We show that dynamo effect takes place for two-dimensional flows (with the magnetic field being essentially three dimensional). The talk is based on the following publications:

## References

- [1] M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, M. Vergassola, *Small-scale turbulent dynamo*, Phys. Rev. Lett. 83, 4065 (1999),
- [2] V.R. Kogan, I.V. Kolokolov and V.V. Lebedev, *Kinematic magnetic dynamo in a random flow with strong average shear*, J. Phys. A: Math. Theor. 43, 182001,(2010)
- [3] I.V. Kolokolov, V.V. Lebedev, G.A.Sizov, *Magnetic field correlations in a random flow with strong steady shear*, ZhETF, 140, 387,(2011) .

---

## Helicity of atmospheric turbulence

**B.M. Koprov, V.M. Koprov, M.V. Kurgansky, O.G. Chkhetiani**

*A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, 119017 Moscow, Pyzhevsky 3,  
Space Research Institute, Russian Academy of Sciences, 117997, Moscow,  
Profsoyuznaya 84/32*

lgg@ifaran.ru

One manifestation of the violation of mirror symmetry in natural systems is the presence of helical features in the correlation properties of turbulent flows. The flow helicity is defined as the scalar product of the vectors of velocity and vorticity. Along with the energy, the helicity is a quadratic invariant of a perfect fluid motion [1]. Nonzero values of the helicity are widely observed both in the laboratory setups and natural geophysical/astrophysical flows. A typical example of the helical flow is the Ekman layer spiral, characterized by the rotation with height of the direction of the wind velocity, due to the joint action of the surface friction and Earth's rotation [2].

It can be assumed that the turbulence in the atmospheric boundary layer (ABL) is helical, which property was firstly inferred from field experiments conducted in 2004, 2007 in the A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences Academy of Sciences [3]. In particular, the spectra slopes for helicity were obtained close to -5 /

3. Spectra-based integral estimates of the helicity bulk density gave values 0.02-0.03 m/s<sup>2</sup>, which are close by an order magnitude to the helicity values for mesoscale rolls within ABL [4].

Helicity measurements are associated with those of vorticity. Hot-wire, optical and acoustic laboratory techniques for measuring vorticity components are hardly applicable under real conditions of atmospheric turbulence. The first measurements of turbulent helicity were carried out with the acoustic “circulation meter”, earlier developed in the Institute of Atmospheric Physics, USSR Academy of Sciences [5]. Technical features of that method did not allow simultaneous measurements of all three vorticity components. It was necessary to measure vorticity with one- or two-component “circulation meter” synchronously with the acoustic anemometry of velocity. To minimize the inevitable errors and discrepancies accompanying such a procedure, a novel measuring method was proposed and implemented during the 2012 Tsimlyansk field campaign. It allowed simultaneous measurements of all terms entering the vorticity flux tensor  $\langle u_i \omega_j \rangle$ , including its diagonal terms, whose sum gives exactly the helicity. The measuring setup was a rectangular tetrahedron, elevated at the height  $z_0=5$  m with the edge length  $l=5$  m and four three-component acoustic anemometers mounted in the tetrahedron vertices.

The obtained helicity values are primarily determined by the horizontal components of vorticity, due to the vertical shear of wind velocity. They appear to be close to those previously obtained and have a mean value of  $-0.03 \text{ m}\cdot\text{sec}^{-2}$ .

The data on the spectral distribution of helicity and its characteristic values for different stratification regimes can be used to determine the parameters of ABL-models, taking into account the helicity contribution [6].

## References

- [1] Moffat H.K. The degree of knottedness of tangled vortex lines. // J. Fluid Mech. 1969. V.35. P.117–129.
- [2] Kurgansky M.V. Relationship between helicity and potential vorticity in a compressible rotating fluid. // Izvestiya, Atmos. Ocean Phys., 1989. V. 25(12). P. 979–981.
- [3] Koprov B.M., Koprov V.M., Ponomarev V.M., Chkhetiani O.G. Experimental Studies of Turbulent Helicity and Its Spectrum in the Atmospheric Boundary Layer // Doklady Physics. 2005. V.50(8). P. 419–422.

- [4] Etling D. Some aspects of helicity in atmospheric flows. // Beitr. Phys. Atmosph. 1985. V.58. P.88–100.
- [5] Bovsheverov V.M., Gurvich A.S., Kochetkov A.N., Lomadze S.A. Measurements of the frequency spectrum of small-scale velocity circulation in a turbulent flow. // Izvestiya, Atmos. Ocean Phys. 1971. V. 7(4). P. 245–248.
- [6] Ponomarev V.M., Chkhetiani O.G. Semiempirical Model of the Atmospheric Boundary Layer with Parametrization of Turbulent Helicity Effect // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. 2005. V. 41(4). P. 418–432.

---

## **The Vlasov kinetic equation, dynamics of continuum and turbulence**

**V. V. Kozlov**

*Steklov Mathematical Institute of RAS, Gubkina str. 8, 119991, Moscow, Russia*

`kozlov@pran.ru`

We consider a continuum of interacting particles whose evolution is governed by the Vlasov kinetic equation. An infinite sequence of equations of motion for this medium (in the Eulerian description) is derived and its general properties are explored. An important example is a collisionless gas, which exhibits irreversible behavior. Though individual particles interact via a potential, the dynamics of the continuum bears dissipative features. Applicability of the Vlasov equations to the modeling of small-scale turbulence is discussed.

---

## **The development of two- and three-dimensional multimode perturbation under the influence of the gravitational instability**

**P. Kuchugov, N. Zmitrenko, V. Rozanov**

*Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS, Lebedev Physical Institute of the RAS*

`pkuchugov@gmail.com, zmitrenko@imamod.ru, rozanov@sci.lebedev.ru`

The numerical simulation is one of the most frequently used methods for investigation of physical processes to date, as the experiment setup is either

difficult and expensive, or not possible, and the analytical approaches need the base for further development.

One of the well-known problems for which investigation are used the numerical methods is the Rayleigh–Taylor instability (onwards RTI) and the results of the impact of its development in a variety of applications. Currently the most significant applications are the objectives of laser thermonuclear fusion, where compression symmetry plays a crucial role, and the development of perturbations can cause of ignition failure. It is also necessary to note the continuing interest in the RTI applied to astrophysical problems, for example, when studying the explosion and further expansion of supernovas.

One of the most contentious issues in studying of the dynamics of perturbations under the influence of RTI is the question of the impact of the initial conditions at the later stage of the mixing process and the existence of restrictions on the realization of self-similar  $\alpha$ -mode ( $L = \alpha A g t^2$ ,  $\alpha = \text{const}$ ). This paper presents the analysis of the numerical calculations of 2D and 3D multimode random density perturbations. Modeling was carried out using the parallel version of the NUT on a hybrid cluster of the Keldysh institute of applied mathematics. Authors investigate the various integral and statistical characteristics of the process, compare them with the development of 2D and 3D single-mode solitary perturbations, and make conclusions about the similarities and differences in the behavior of various types of perturbations. So, 3D random density perturbations show almost the same growth rate of the mixing zone width depending on time compared to 2D, but have a different distribution of kinetic energy by the scales, while the single-mode solitary perturbation in 3D geometry destructs considerably later than in 2D. This fact leads to adjustments of the authors' evolutionary approach [1, 2] for the case of a wider spectral range of initial perturbations and the definition of new important physical mechanisms that need to be taken into account when building models to describe the mixing process.

## References

- [1] N.V. Zmitrenko, N.G. Proncheva and V.B. Rozanov // Preprint No.65 LPI, 1997
- [2] P. Kuchugov, N. Zmitrenko, V. Rozanov et al. // J. of Russian Laser Research. 2012. V. 33 (6).

---

# Modelling of coherent structures in turbulent convection

F. Kupka

*Faculty of Mathematics, University of Vienna, Oskar-Morgenstern-Platz  
1, A-1090 Wien, Austria*

Friedrich.Kupka@univie.ac.at

The modelling of turbulent convection in astrophysical and in geophysical flows has posed a long-standing challenge, since traditional concepts such as turbulent diffusion, mixing length, and downgradient models are only of limited applicability and remain highly disputed. Even today and also within the framework of large eddy simulations the numerical modelling of turbulent convection can only partially compensate for the lack of a general theory. The Reynolds stress technique has remained the most systematic theoretical approach to construct predictive models for this purpose. The most advanced Reynolds stress models ([1], [2], [3]) close the hierarchy of moment equations at fourth order using among others the eddy-damped, quasi-normal approximation for the highest order correlations, though some simplifications are usually introduced to reduce the complexity of the models in applications ([4], [5]). A different strategy was proposed by [8], [6], and [7]. Guided by mass flux models they suggested a new approach how to compute third and fourth order moments of the hydrodynamical equations for a flow with distinct, coherent structures as they are found in turbulent convection. - In this talk an overview on these developments will be given including comparisons with data from astrophysical and geophysical problems. Particular attention will be paid to the influence of boundary conditions in large eddy simulations on their ability to successfully predict the hydrodynamical quantities of interest in solar models.

## References

- [1] V.M. Canuto, *Astrophys. Jour.* 482, 827 (1997)
- [2] V.M. Canuto, M.S. Dubovikov, *Astrophys. Jour.* 493, 834 (1998)
- [3] V.M. Canuto, *Astrophys. Jour.* 524, 311 (1999)
- [4] V.M. Canuto, *Astron. & Astrophys.* 528, A76 (2011)
- [5] V.M. Canuto, *Astron. & Astrophys.* 528, A80 (2011)

- [6] V.M. Gryanik, J. Hartmann, J. Atmos. Sci. 59, 2729 (2002)
- [7] V.M. Gryanik, J. Hartmann, S. Raasch, M. Schröter, J. Atmos. Sci. 62, 2632 (2005)
- [8] D.V. Mironov, V.M. Gryanik, V.N. Lykossov, S. Zilitinkevich, J. Atmos. Sci. 56, 3478 (1999)

## **Breaking phenomena in incompressible fluids as a route to the Kolmogorov and Kraichnan spectra**

**E.A. Kuznetsov**

*P.N. Lebedev Physical Institute, 53 Leninsky ave., 119991 Moscow, Russia*

*L.D. Landau Institute for Theoretical Physics, 2 Kosygin str., 119991 Moscow, Russia;*

*Novosibirsk State University, 2 Pirogov str., 630090 Novosibirsk, Russia*

`kuznetso@itp.ac.ru`

In this talk we demonstrate that breaking phenomena in incompressible fluids can be considered as a route to the Kolmogorov spectrum [1] and the Kraichnan spectrum [2] for three- and two-dimensional developed hydrodynamic turbulence respectively.

For two-dimensional turbulence we study the appearance of sharp vorticity gradients and their influence on the turbulent spectra [3,4]. We have developed the analog of the vortex line representation [5] as a transformation to the curvilinear system of coordinates moving together with the di-vorticity lines. Compressibility of this mapping can be considered as the main reason for the formation of the sharp vorticity gradients at high Reynolds numbers. In the case of strong anisotropy the sharp vorticity gradients can generate spectra which fall off as  $k^{-3}$  at large  $k$  resembling the Kraichnan spectrum for the enstrophy cascade. For weak anisotropy the spectrum due to the sharp gradients coincides with the Saffman spectrum [5]:  $E(k) \sim k^{-4}$ . We have compared the analytical predictions with direct numerical solutions of the two-dimensional Euler equation for decaying turbulence. We observe that the di-vorticity is reaching very high values and is distributed locally in space along piecewise straight lines. Thus, indicating strong anisotropy and accordingly we find a spectrum close to the  $k^{-3}$ -spectrum [3,4]. In the numerical experiments [7] for the 8192 x 8192 grid points we observe the spectra with strong angular dependence which can be interpreted as a set of jets with their both weak and strong overlapping. The structure functions of second and third orders show a good

correspondence to the Kraichnan direct cascade picture with the constant enstrophy flux. Powers  $\zeta_n$  for higher structure functions grow weaker the linear dependence relative to  $n$  demonstrating the intermittency property.

Recent numerical experiments in the framework of the Euler equations for two colliding Lamb vortex dipoles Orlandi and Co. [8] testify to favor of the collapse appearance when the vorticity becomes infinite in a finite time according to the law  $(t_0 - t)^{-1}$ , the collapse region vanishes like  $(t_0 - t)^{1/2}$ , and the velocity component parallel to the vorticity blows up proportionally to  $(t_0 - t)^{-1/2}$ . During the collapse the region of the maximal vorticity represents the pancake-like structure. In this paper it is shown that all these self-similarities can be obtained from the analysis of the singularity while breaking of vortex lines. In the collapse instant the vorticity  $\Omega$  gets the singularity of the Kolmogorov type:  $\Omega \sim x^{-2/3}$  where  $x$  coincides with the direction of the breaking [9].

Acknowledgements. This work was supported by the grant of the Government of the Russian Federation (contract No. 11.G34.31.0035 dated November 25, 2010 between the Russian Ministry of Education and Sciences, NSU, and leading scientist), by the RFBR (grant No. 12-01-00943), by the program "Fundamental problems of nonlinear dynamics" of the RAS Presidium, and by the grant No. Nsh 6170.2012.2 for state support of leading scientific schools of the RF.

## References

- [1] A.N. Kolmogorov, DAN USSR **30**, 9 (1941).
- [2] R.H.Kraichnan, Phys. Fluids **11**, 1417 (1967).
- [3] E.A. Kuznetsov, JETP Letters **80**, 83-89 (2004).
- [4] E.A. Kuznetsov, V. Naulin, A.H. Nielsen, and J.J. Rasmussen, Phys Fluids **19**, 105110-20 (2007); Theor. Comput. Fluid Dyn., **24**(1-4), 253-258 (2010).
- [5] E.A. Kuznetsov, V.P. Ruban, JETP Letters **67**, 1076-1081 (1998); Phys. Rev. E **61**, 831-841 (2000); E.A. Kuznetsov, JETP Letters **76**, 346-350 (2002).
- [6] P.G. Saffman, Stud. Appl. Maths **50**, 377 (1971).
- [7] A.N. Kudryavtsev, E.A. Kuznetsov, and E.V. Sereshchenko, JETP Letters **96**, 783-789 (2012).
- [8] P. Orlandi, S. Pirozzoli and G. F. Carnevale, J. Fluid Mech. **690**, 288-320 (2012).

- [9] E.A. Kuznetsov, Collapse and Kolmogorov spectra, Proceedings of scientific school "Nonlinear waves - 2012", Eds. A.G. Litvak and V.I. Nekorkin, Institute for Applied Physics, Nizhnii Novgorod, 26 pages (2013) (in press).

---

## Capillary turbulence on the surface of cryogenic liquids

L.V. Abdurakhimov, M.Yu. Brazhnikov, I.A. Remizov, A.A. Levchenko

*Institute of Solid State Physics RAS,  
Chernogolovka, Moscow district., 142432 Russia*

The theory of weak turbulence [1] describes numerous system of weakly interacting waves: ripples on water and gravity waves on the surface of oceans, Rossby waves in the atmosphere of planets and oceanic Rossby waves, Langmuir waves in plasma and spin waves in magnetics. The remarkable properties of liquid hydrogen — the high nonlinearity of capillary waves on the surface and its relatively low viscosity, and the possibility to excite waves on the charged surface by electrical force — reveal a unique opportunity for experimental studies of weak wave turbulence. The use of liquid hydrogen for experiments on wave turbulence has already allowed us to study phenomena predicted by the theory, e.g. Kolmogorov-Zakharov steady state spectra of capillary turbulence in a wide range of frequencies, as well to observe new ones which have been explained successfully in the framework of the weak turbulence approximation: quasiadiabatic decay of capillary turbulence and suppression of high-frequency turbulent oscillations by additional low-frequency driving force [2].

Superfluid helium is unique liquid for studying turbulence phenomena in the system of capillary waves due to its extreme low viscosity and density. The properties of superfluid helium allows us to investigate wave turbulence in the kinetic and in the discrete regimes where an influence of the discreteness in the wave spectra caused by finite size of the experimental cell on the turbulent distribution plays the important role. It is well known that for capillary waves the main processes of the nonlinear interaction are three wave processes of decay and merging that satisfy the conservation laws of frequency and wave-vector. In an ideal discrete system conservation laws cannot be satisfied for capillary waves [3]. Fortunately the situation can be changed if broadening of resonance modes due to viscosity or due to nonlinear interaction is taken into account.

The measurements were carried out at temperature  $T=1.7\text{K}$ . Helium gas was condensed into the copper cup of inner diameter 35 mm and of depth 4 mm or in the quadratic cup with side of 42 mm. The surface of the liquid was charged with positive ions created by a radioactive plate. By applying a low-frequency AC voltage in addition to DC voltage, waves were excited on the surface. Oscillations of the surface were detected by a laser beam reflected from the liquid, Fig. 3. In these measurements two types of low-frequency driving force were used: in the discrete regime the surface of liquid helium was driven by a sinusoidal force, in the kinetic regime a driving by a noisy force was used..

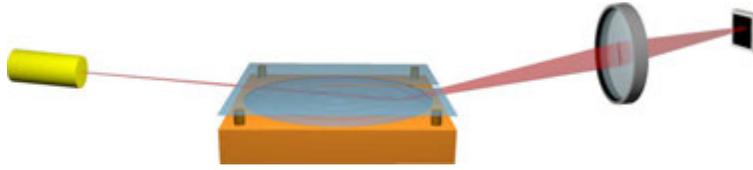


Figure 3: The scheme of registration of oscillations on the surface of superfluid helium.

In the kinetic regime (broadband excitation) the frequency dependence of turbulent cascade in the inertial interval and the position of high frequency edge are described well in the frames of the theory of wave turbulence [1]. At high frequencies in the dissipative domain very fast decreasing turbulent cascade was observed. This fall off could be described well by “quasi-Plank” function in wide frequency range [4].

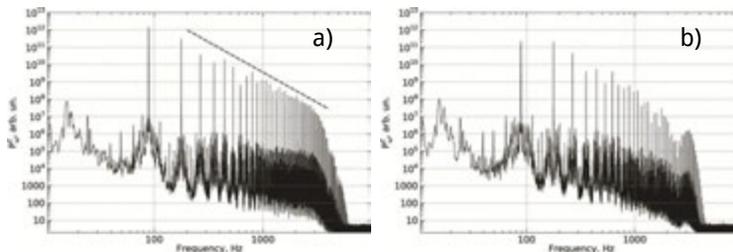


Figure 4: Turbulent cascade on the surface of liquid helium at  $T=1.7\text{K}$  in quadratic experimental cell. Pumping at frequency 90 Hz. a) High level of excitation. b) Moderate level of excitation, local maximum is seen.

In the case of discrete regime at moderate level of excitation by harmonic force we observed a wave energy accumulation at high frequencies — a local maximum in the turbulent spectrum. The position of this maximum depends on the frequency and amplitude of the driving force Fig. 4.

Qualitative model of this phenomenon takes into account discreteness of the spectrum of surface oscillations in the cylindrical resonator. Bottle neck on the turbulent cascade is due to a detuning effect of nonlinear harmonic frequencies and eigenfrequencies of surface oscillations in the cell [5].

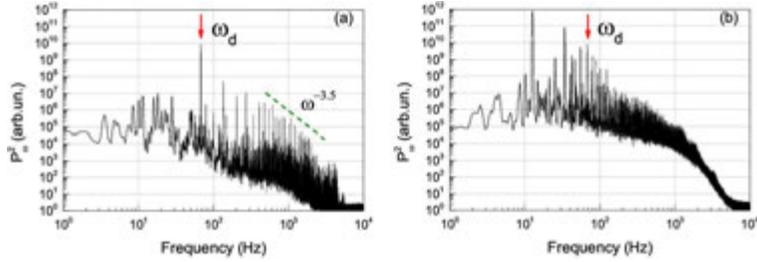


Figure 5: Formation of low-frequency waves on the surface of superfluid helium with increasing the driving force in three times.

In the cylindrical cell at moderate pumping Fig. 5a) the direct cascade is formed in the high-frequency domain  $\omega > \omega_d$ , in agreement with previous observations [2]. At very high frequencies cascade is terminated by bulk viscous damping. The low frequency oscillations at  $\omega < \omega_d$  are mainly caused by mechanical vibrations of the experimental setup. With increasing the driving voltage in three times the turbulent spectra drastically changed: the heights of the low-frequency peaks increased in a few orders of magnitude Fig. 5b). Estimation energy distribution over frequency range shows, that at moderate level of excitation almost all energy is in inertial interval. In the case of high level excitation when the inverse cascade is registered 90% energy lays in frequency range lower frequency of excitation.

This work was partially supported by RFBR project #13-02-00329.

## References

- [1] V. E. Zakharov, et al., Kolmogorov spectra of turbulence I, Springer, Berlin, 1992
- [2] M. Yu. Brazhnikov, et al., JETP Lett. **82**, 642 (2005)
- [3] A. N. Pushkarev, and V. E. Zakharov, Physica D **135**, 98 (2000)
- [4] G. E. Falkovich, I. V. Ryzhenkova, JETP **98**, 1931 (1990).
- [5] L. V. Abdurakhimov, et al., JETP Lett. **95**, 670 (2012)

---

# Turbulent vortex dynamo in the tropical atmosphere of the Earth

G.V. Levina, M.T. Montgomery

*Space Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow,  
Russia*

*Naval Postgraduate School, Monterey, California, USA*

levina@icmm.ru

In the theory of turbulence there exists a fundamental hypothesis about a small-scale helical turbulence that under certain conditions may provide an energy transfer from small to large scales and evoke a large-scale instability governing the structure formation. The specific properties of small-scale helical turbulence resulted in large-scale structure generation were first discovered in magnetohydrodynamics. This phenomenon, known as the alpha-effect, allows us to explain the growth of large-scale magnetic fields in electrically-conducting media and forms the basis of the MHD-dynamo theory [1].

The formal similarity of equations describing the magnetic field in a moving electrically-conducting medium and vorticity field in non-conducting fluids gave an impetus to a search for analogs to this phenomenon in general hydrodynamics.

Thirty years ago, the first theoretical example of large-scale helical instability in general (non-MHD) hydrodynamics was proposed by Moiseev et al. [4] and, by analogy, coined the hydrodynamic alpha-effect. In paper [3] that followed right away, a hypothetical scenario for intensification and sustaining of large-scale vortex disturbances in the atmosphere due to energy transfer from small-scale helical convective turbulence – the so called turbulent vortex dynamo – was proposed as a possible illustration for self-organization of turbulence with the broken mirror symmetry. The theoretical estimates obtained by substituting the specific atmospheric parameters in model solutions [3] were tested to describe tropical cyclone formation in the Earth's atmosphere [3] as well as, a few years later, by Fortov and co-authors [4, 5] to explain the size and structure of large-scale long-lived vortex disturbances in Jovian atmosphere after the collision of comet Shoemaker-Levy 9 with Jupiter in July 1994. The theory showed a very good agreement with the characteristics of observed phenomena in the atmospheres of both planets. Summary of those results was given in a review work [6].

It is worth to note that there exists an essential difference between the two dynamo models. The MHD-dynamo effect is based on interplay of two different physical fields, namely, magnetic and velocity fields whilst the

turbulent vortex dynamo operates only based on the velocity field alone. This difference made it very difficult for a long time to realize how the vortex dynamo might work in real conditions of the Earth's atmosphere. First of all, by what means a positive feedback [6] between the solenoidal components of the vector velocity field may be generated.

Let us explain it in more detail bearing in mind tropical cyclone (TC) formation. A developed TC is an intense atmospheric vortex, in which the main component of velocity lies in a horizontal plane. The powerful tangential circulation is superimposed on a weaker transverse circulation formed by the radial and vertical velocity components (in the cylindrical coordinates). Meanwhile, the transverse circulation is of crucial importance for the existence of such vortical system as a whole and ensures an energy supply from the ocean and linkage of air streamlines, i.e. the helical structure of the flow. In the rotating Earth's atmosphere, a link is evident between the transverse and tangential circulation: it is provided by the action of the Coriolis force on the horizontal velocity. However, until very recently [7], it was completely unclear how the second link might be formed between the tangential and transverse circulation that is needed to close the feedback loop for the vortex dynamo effect.

Only recently has it become possible to test the hypothesis on the turbulent vortex dynamo with a physically consistent data set.

Only recently have studies been conducted to examine reasonably high horizontal resolution ( $\sim 1-3$  km of horizontal scale and less) numerical simulations of TC formation. Near-cloud-resolving simulations [8, 9] brought an important discovery about vortical nature of atmospheric moist convection in the tropical zone and allowed to identify rotating cumulus clouds which were coined Vortical Hot Towers (VHTs) [8]. Montgomery et al. [9] offered a new scenario of hurricane formation based on self-organization of convective processes in an otherwise favorable tropical environment. Although helical features of these simulated flows were not taken into consideration within the framework of paper [9], self-organization of vortical convection was observed similar to "helical" scenario [6], namely, as an enlargement of vortex structures from the size of individual rotating cumulus clouds in the model, their induced concentration of absolute angular momentum on the system scale circulation, and their merging with each other to yield newly forming larger vortices and an intensifying circulation on the system scale.

The first attempt to interpret the self-organization process discovered in [9] as a manifestation of fundamental properties of moist-convective atmospheric turbulence with the broken mirror symmetry – helical self-organization in a rotating inhomogeneous atmosphere – was undertaken in paper [10]. Using the data of numerical simulation [9], helical characteristics of the velocity field were calculated and analyzed. It was found

that the TC formation is accompanied by the generation of non-zero and increasing integral helicity that implies a new topology of the flow when it is characterized by linked vortex lines [11]. This gave the first example of non-zero integral helicity generation found in a real natural system – the tropical atmosphere of the Earth. With such a break of the mirror symmetry, following the theory of turbulence [12], energy transfer to dissipation scales may be suppressed and large-scale vortex instability is possible.

In this paper, we emphasize the role of VHTs that make it a reality – the turbulent vortex dynamo in the tropical atmosphere.

We use our research approach [7, 10] based on near-cloud-resolving numerical simulation and developed to quantitatively analyze helical self-organization of moist convective atmospheric turbulence. We highlight a key process of vertical vorticity generation from horizontal components and its amplification by VHTs, which is found to be a pathway for generation of a velocity field with linked vortex lines of horizontal and vertical vorticity on local and system scales, i.e. helicity generation, during the whole evolution of tropical cyclone. Moreover, VHTs link the primary tangential and secondary transverse circulation on system scales providing the closure of positive feedback loop between the circulations. As soon as such linkage occurs, the nascent large vortex becomes energy self-sustaining.

The feedback is sustained by convective instability and vortical convection in the central region of the circulation. The existence of such rising warm flows suggests a release of potential energy that is converted into kinetic energy of developing large-scale helical vortex. It is shown that with adequate moisture fluxes from the underlying sea surface to maintain a degree of convective instability in the cumulus zone, the active feedback provides energy exchange between the primary and secondary circulation and their further mutual intensification, i.e. a self-sustaining amplification process of the system-scale circulation.

Based on the obtained results, we suggest new criteria and numerical diagnosis for tropical cyclogenesis.

## References

- [1] Krause F., Rädler K.-H., *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*. Akademie-Verlag, Berlin, 1980.
- [2] Moiseev S.S., Sagdeev R.Z., Tur A.V., Khomenko G.A., Yanovsky V.V., *A theory of large-scale structure origination in hydrodynamic turbulence*. Z. Eksp. Teor. Fiz., 85, 1979–1987, 1983 (in Russian). Engl. transl. Sov. Phys. JETP, 58, 1149–1157, 1983a.

- [3] Moiseev S.S., Sagdeev R.Z., Tur A.V., Khomenko G.A., Shukurov A.M., *Physical mechanism of amplification of vortex disturbances in the atmosphere*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 273, 549–553, 1983 (in Russian). Engl. transl. Sov. Phys. Dokl., 28, 925–928, 1983b.
- [4] Fortov V.E., Ivanov M.F., Ivlev A.V., Gnedin Yu.N., Klumov B.A., *Collision of comet Shoemaker-Levy 9 with Jupiter: what did we see*. Usp. Fiz. Nauk, 166, 391–422, 1996 (in Russian). Engl. transl. Phys. Usp., 39, 363–392, 1996.
- [5] Ivanov M.F., Galburt V.A., Fortov, V.E., *On possible mechanism of large-scale disturbances formation in Jovian atmosphere initiated by a fall of comet Shoemaker-Levy 9 fragments*. Z. Eksp. Teor. Fiz. Letters, 63, 773–777, 1996 (in Russian). Engl. transl. Letters to JETP, 63, 813–817, 1996.
- [6] Levina G.V., Moiseev S.S., Rutkevich P.B., *Hydrodynamic alpha-effect in a convective system*, in: Nonlinear Instability, Chaos and Turbulence, vol. 2, Adv. Fluid Mech. Series, Debnath, L. and Riahi, D. N. (Eds.): WITPress, Southampton, Boston, 111–162, 2000.
- [7] Levina G.V., *Helical organization of tropical cyclones*. Preprint NI13001-TOD. Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences. Cambridge, UK, 2013. <http://www.newton.ac.uk/preprints2013.html>
- [8] Hendricks E.A., Montgomery M.T., Davis C.A. *The role of "vortical" hot towers in the formation of tropical cyclone Diana (1984)*. J. Atmos. Sci., 61, 1209–1232, 2004.
- [9] Montgomery M.T., Nicholls M.E., Cram T.A., Saunders A.B., *A vortical hot tower route to tropical cyclogenesis*. J. Atmos. Sci., 63, 355–386, 2006.
- [10] Levina G.V., Montgomery M.T. *A first examination of the helical nature of tropical cyclogenesis*, Doklady Earth Sciences, 434, Part 1, 1285–1289, 2010.
- [11] Moffatt H.K. *The degree of knottedness of tangled vortex lines*, J. Fluid Mech., 35, 117–129, 1969.
- [12] Frisch U., *Turbulence: the legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.

---

# Hydrodynamic and wave turbulence in superfluids

Victor S. L'vov

*Weizmann Institute of Science, Israel*

Because superfluid eddies can only be formed from quantized vortex lines, one might expect that turbulence in superfluids to be very different from its classical counterparts. But that is not necessarily so: Basic ideas, experiments and physical models of superfluid turbulence will be discussed in my talk.

In the Introductory part I will shortly remind basic ideas in turbulence of classical fluids, mentioning contributions by Euler, Navier and Stokes, Reynolds, Richardson, Kolmogorov, Millionschikov and others. Then I overview discovery of superfluidity in He-4 and He-3 and peculiarities of superfluid dynamics and turbulence.

In the body of my talk I will concentrate on the energy distribution between scales in superfluid turbulence. There are three different regimes: the quasi-classical interval of scales (much above the mean intervortex distance), the quantum regime, dominated by Kelvin waves (at scales below the intervortex distance) and the crossover scale with the bottleneck energy accumulation.

Perspectives of studies of superfluid turbulence will be discussed in the Conclusion.

---

## On the geometry of integrable systems of hydrodynamic type

Franco Magri

*U. of Milano-Bicocca*

Through the exam of a few selected examples ( KdV, KP and its dispersionless limit, the Whitham equations of genus one) I wish to point out a structural property which is shared by some well-known classes of integrable equations of hydrodynamic type, which can be regarded as responsible for their integrability. This property is of interest also outside the field of equations of hydrodynamic type, for instance in Topological Field Theory and in the Theory of Singularity. These connections, however, will not be discussed in the talk, if not for a short hint on the relation with WDVV equations.

---

# Applications of Millionschikov's zero-fourth-order cumulant hypothesis to the theory of homogeneous turbulence

C. Mamaloukas, H.P. Mazumdar

*Department of Statistics Athens University of Economics and Business  
Indian Statistical Institute Calcutta - 700035*

mamkris@aueb.gr, hpmi2003@yahoo.com

Exploiting Millionschikov's quasi-normality hypothesis as titled above, various features of homogeneous and isotropic turbulence have been analyzed in some details. Since publication of the original hypothesis of M.D. Millionschikov in 1941, innumerable number of scientific papers have been published in the fields of homogeneous turbulence e.g., general type of hydrodynamic and magneto-hydrodynamic fields, fluctuating pressure and temperature fields etc. Besides, effects of breaking reflexional mirror symmetry (helicity) on the correlation functions of homogeneous and isotropic turbulence and on the acceleration correlation functions have been discussed using Millionschikov's hypothesis. Refinements of Millionschikov's hypothesis are to be addressed well to describe the convective boundary layer turbulence and convection for free deep water of the ocean. Mirabel (1969) modified the Millionschikov's hypothesis and calculated the spectrum of turbulence with initial nonzero third-order moments of spectral form, using a vortex model. In order to find a deterministic set of equations Millionschikov proposed his quasi normality hypothesis for turbulence which states that all fourth order moments are related to second order moments as a joint normal distribution. In the light of the above formulation of Millionschikov's hypothesis we would point out further the treatment of first author (2013) on the final period decay of isotropic turbulence using the points-merging technique employed here.

## References

- [1] Antonia R.A. et.al., (1982), *Boundary Layer Meteorology*, Vol. 22, pp. 421-430.
- [2] Batchelor G.K. and Proudman I., (1956), *Phil. Trans. Roy. Soc.* 248A, 167.
- [3] Canuto V.M., (1992), *Turbulent Convection with Overshooting: Reynolds Stress Approach*, *Astrophys. J.*, vol 392, pp. 218-232.

- [4] Chow W. L., (1940), Über Systeme von Linearen Partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, J. Math. Ann., pp. 98-105.
- [5] Davidson P.A., (2005), Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers, Oxford University, Oxford, England.
- [6] Ghosh K.M., (1972), Some Consequences of Millionschikov's Hypothesis in the Early-Period Decay Process of Turbulence, Indian Journal of Pure and Appl. Math., Vol. 3, No.1, 157.
- [7] Gryanik V.M. et.al., (2005), A Refinement of the Millionschikov Quasi-Normality Hypothesis for Convective Boundary Layer Turbulence, J. Atmos. Sci., 62, pp. 2632-2638.
- [8] Heisenberg, (1948), On the Theory of Statistical and Isotropic Turbulence, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences Vol. 195, No. 1042, pp. 402-406
- [9] Hinze J.O., (1959), Turbulence, McGraw-Hill, New York.
- [10] Losch Martin, (2004), On the Validity of the Millionschikov Quasi-Normality Hypothesis for Open-Ocean Deep Convection, Geophysical Research Letters, Vol. 31, L23301, 4 pp., doi:10.1029/2004GL021412.
- [11] Mamaloukas C., (2013), A New Look at the Final Period Decay of Homogeneous Isotropic Turbulence, International Mathematical Forum, Vol. 8, no. 10, 495-499.
- [12] Mazumdar H.P., (1976), On the Decay Process of Turbulence at Large Reynolds and Peclet Numbers, App. Sci. Res., Vol. 32, 571.
- [13] Mazumdar H. P., (1979), On the Pressure Fluctuations Associated with a General Type of Turbulence, Appl. Sci. Res. Vol 35, No 5-6, pp 367-371.
- [14] Mazumdar H.P., (1984), On the Fluctuations of Total Pressure Associated with General Type of Hydromagnetic Turbulence. Archeves of Mechanics, Vol. 36, pp. 233-240.
- [15] Mazumdar H.P. and Mandal B.C., (2009), On Persen Theory of Two Dimensional Turbulent Boundary Layer, Int. J. of Appl. Mech. And Engineering, Vol. 14, No. 4, pp. 1009-1028.
- [16] Mazumdar H.P., (2010), On Incompressible Hydromagnetic Turbulence, (Research monograph), Calcutta Mathematical Society.

- [17] Mazumdar, H. P. and Mamaloukas, C., (2012), On Millionschikov's Zero-Fourth Cumulant Hypothesis Applied to Turbulence, Athens: ATINER'S Conference Paper Series, No: MAT2012-0103.
- [18] Millionschikov M., (1941), On the Theory of Homogeneous Isotropic Turbulence, Dokl . Akad. Nauk SSSR, 32, 615-618.
- [19] Mirabel A. P., (1969), Application of Millionschikov's Hypothesis to the Problem of Isotropic Turbulence Degeneration, Izv. AN SSSR. Mekhanika Zhidkosti i Gaza, Vol. 4, No. 5, pp. 171-175.
- [20] Monin A.S. and Yaglom A.M., (1975), Statistical Fluid Mechanics, Vol. II, MIT Press, Cambridge, MA.
- [21] Ogura Y., (1963), A Consequence of the Zero-Fourth-Cumulant Approximation in the Decay of Isotropic Turbulence, Journal of Fluid Mechanics, vol. 16, pp 33-40.
- [22] Panchev S., (1971), Random Functions and Turbulence (Pergamon Press. Oxford), p. 444.
- [23] Proudman I., Reid W.H., (1954), On the Theory of a Normally Distributed and Homogeneous Turbulent Velocity Field., Phil. Trans. R. Soc. 247A, 163-189.

---

## The universal nature of the Reynolds number in local and nonlocal phenomena

P. Miškinis

*Vilnius Gediminas Technical University, Saulėtekio Ave. 11, LT-10223,  
Vilnius, Lithuania*

paulius.miskinis@vgtu.lt

In the case when the properties of a system in a certain point of configuration or phase space depend not only on the properties of this system at this point, but also on the properties of at least one point of the environment, we deal with the nonlocal phenomena. From the mathematical point of view, such phenomena are usually described by integro-differential equations. Over the last few years more attention has been given to a special part of theory of integro-differential equations, the so-called fractional calculus. This approach is applied not only in the theory of fractals, but also for description of electrical, biological and diffusion phenomena. The

latter topic, as follows from the growing number of publications, receives the bulk of attention.

Of greatest interest are, of course, nonlocal generalizations of natural phenomena that preserve some of their local characteristics. In this contribution, a nonlocal generalization of the one-dimensional Burgers equation, which is described by the fractional derivatives, is suggested. The explicit form of a particular analytical solution, existence of the travelling wave solution, interaction of nonlocal perturbations, asymptotic behavior of solutions as well as the symmetries and conservation laws of the equation are considered. Its relation with the Burgers equation of integer order and the universal nature of the Reynolds number both in local and nonlocal phenomena are shown.

---

## Maximum entropy states of quasi-geostrophic point vortices under periodic boundary conditions

Takeshi Miyazaki, Hironori Miyamoto, Satoshi Funakoshi

*Univ. Electro-Communications, Tokyo, Japan*

miyazaki@mce.uec.ac.jp

Geophysical flows are subject to strong influence of the buoyancy and the Coriolis force. Both effects suppress vertical fluid motion, and geophysical flows are considered to be two-dimensional at the lowest order of approximation. The statistical mechanics of two-dimensional point vortices has been a long lasting problem, starting from Onsager (1949)[1]. Joyce and Montgomery (1973)[2] and Montgomery and Joyce (1974)[3] derived the mean field equation (so called the sinh-Poisson equation) for a system of point vortices of mixed sign, based on an empirical maximum entropy theory. There are also many numerical works on two-dimensional decaying turbulence, in which the relaxation process towards a maximum entropy state is investigated. In actual geophysical flows, the fluid motion is almost confined within a horizontal plane, but different flow patterns are realized on different horizontal planes. The ‘quasi-geostrophic approximation’ incorporates this three-dimensionality. The numerical simulations, of decaying quasi-geostrophic turbulence indicate that the vorticity field develops coherent vortex structures, and that their interactions dominate the dynamics of the turbulence. Therefore the investigation of the statistical mechanics of quasi-geostrophic point vortices will be of importance in understanding fundamental aspects of the geophysical turbulence. Actually, statistical investigation of the non-dissipative point vortex system may provide two basic aspects of geophysical turbulence. Firstly, the potential vorticity distribution inside the elemental vortex structure that appears

spontaneously in the geostrophic turbulence can be investigated. Secondly, the final state of the geostrophic turbulence can be determined under the constraints of energy conservation.

As for the first subject, the statistical properties of quasi-geostrophic point vortices in an infinite domain, were studied numerically by Hoshi and Miyazaki (2008)[4] and Miyazaki *et al.* (2012)[5]. Axisymmetric equilibrium states are formed starting from any initial distributions. When the energy is low, the radial vorticity distribution of the center region becomes flatter. In contrast, if the energy is high, the radial vorticity distribution of the center region becomes sharper with tighter concentration near the axis of symmetry. The most probable distributions were also determined theoretically, based on the maximum entropy theory. The numerically found equilibrium state is actually the maximum entropy state, under the constraints of the fixed vertical distribution, the angular momentum and the energy.

As for the second subject, we investigate the statistical mechanics of quasi-geostrophic point vortices of mixed sign under periodic boundary conditions, numerically and theoretically. Direct numerical simulations under periodic boundary conditions are performed using a fast special-purpose computer for molecular dynamics (GRAPE-DR). Clustering of point vortices of like sign is observed and two-dimensional equilibrium states are formed. It is shown that they are the solutions of the two-dimensional mean field equation, i.e., the sinh-Poisson equation (Funakoshi and Miyazaki (2012)[6]). The reason why only two-dimensional equilibrium states are formed in the numerical simulations is discussed from the point of the Shannon entropy. We derive a new mean field equation with three-dimensional Laplace operator, based on the maximum entropy theory. This equation is a natural extension of the sinh-Poisson equation derived for two-dimensional point vortices. We solve the mean field equation using an efficient iteration procedure proposed by Turkington and Whittaker (1996)[7]. We obtain several three-dimensional solutions, whose solution-branches can be traced in the higher energy region, where the direct numerical simulations are performed. Two-dimensional equilibrium states have the largest entropy at any energy level, which seems to be the reason why they are formed in the numerical simulations. The stability of the equilibrium states is also investigated by direct numerical simulations of the continuous quasi-geostrophic equation.

## References

- [1] L. Onsager, *Nuovo Cimento, Suppl.* **6**, 279 (1949).

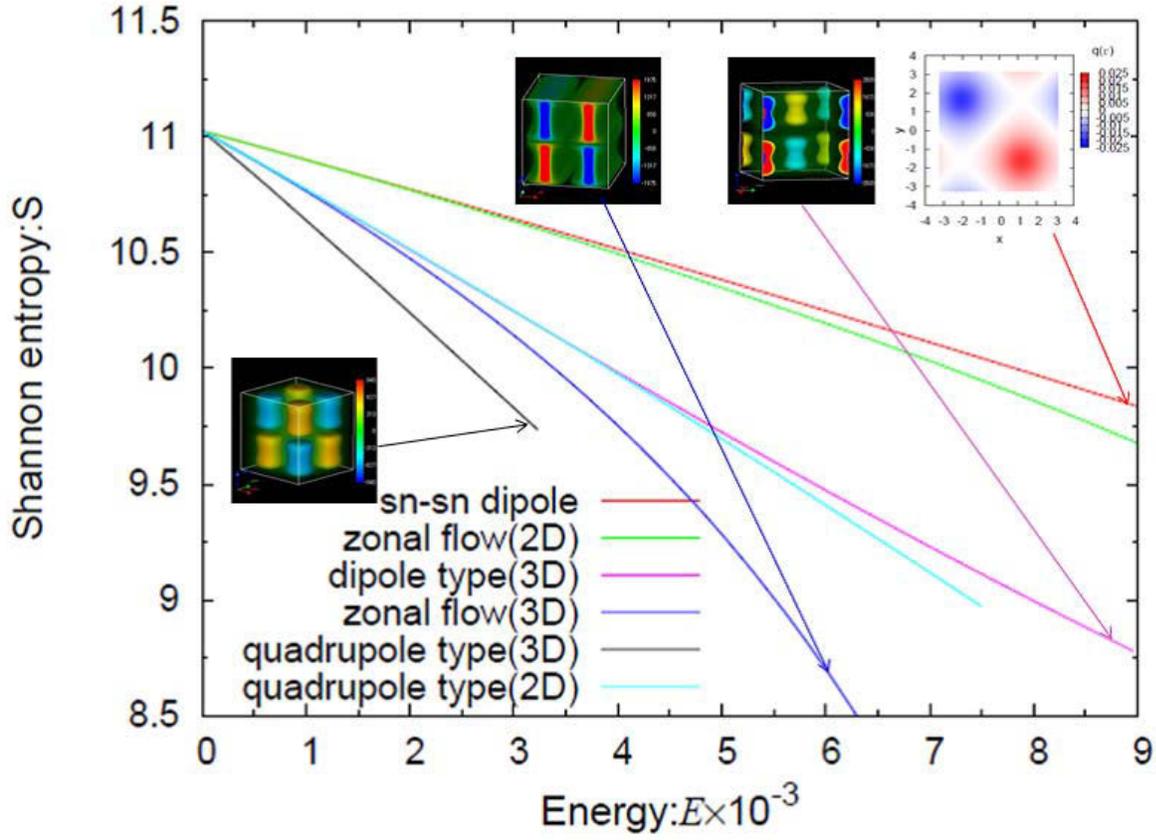


Figure 6: Bifurcation diagram on the E-S plane.

- [2] G. Joyce and D. Montgomery, J. Plasma Phys. **10**, 107 (1973).
- [3] D. Montgomery and G. Joyce, Phys. Fluids, **17**, 1139 (1974).
- [4] S. Hoshi and T. Miyazaki, Fluid Dyn. Res. **40**, 662 (2008).
- [5] T. Miyazaki, T. Sato, and N. Takahashi, Phys. Fluids, **24**, 056601 (2012).
- [6] S. Funakoshi, T. Sato, and T. Miyazaki, Fluid Dyn. Res. **44**, 031407 (2012).
- [7] B. Turkington and N. Whitaker, SIAM J. Sci. Comput. (USA) **17**, 1414 (1996).

---

# The Role of Helicity in Turbulent Flow

Keith Moffatt

*Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics University  
of Cambridge, UK*

`h.k.moffatt@damp.cam.ac.uk`

Helicity is, like energy, a quadratic invariant of the Euler equations, and may therefore be expected to constrain the turbulent cascade of energy from large to small scales. Indeed, in local structures where helicity is maximal, nonlinearity is totally depleted so that such structures tend to persist in coherent manner. Some basic properties of helicity will be reviewed in this lecture, with particular reference to its bearing on dynamo generation of magnetic fields in conducting fluids, and on the existence of Euler flows of arbitrarily complex topology. Recent work on reconnection of vortices will also be described, and it will be demonstrated that helicity (again like energy) is not in general conserved during such reconnection processes.

---

## Topological invariants in magnetohydrodynamics and DNA supercoiling

M. Monastyrsky, P. Sasorov

*Institute for Theoretical and Experimental Physics, Moscow 117218,  
Russia*

*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow 125047, Russia*

We discuss the structure of topological invariants in two different media. The first example relates to the problem of reconnection in magnetohydrodynamics and the second one with the supercoiling of DNA. Despite apparently different systems, the behavior of magnetic spread lines and supercoiling process in DNA has some common based on the existence of Hopf's type topological invariants.

**Topological invariants in Magnetohydrodynamics.** In this section we study the topological structure of magnetic field lines within the framework of almost ideal magnetohydrodynamics (MHD). For the smooth flows and the magnetic viscosity  $\nu = 0$ , all topological invariants are conserved. In this case all topological invariants admit a representation by the higher orders

linking coefficients introduced in [1]. These invariants may be considered as a generalization of the well known Hopf invariant. However in the case of  $\nu \neq 0$  the fluid flow may leads to formation of weak singularities that can be described as a magnetic field reconnection. This process take a small time as compared with so called diffusion time  $\tau_d \propto 1/\nu$ . These reconnections can be determined by the cut-and-glue procedure, see the definition in Ref. [1].

The question is what kind of topological invariants conserved under the reconnections procedure?

We derived in Ref. [1] that if the two different magnetic field tubes  $T_1$  and  $T_2$  reconnected in a resulting tube  $T'$  then the first order linking coefficients  $\hat{k}_1$ , introduced there, obey the following formulae:

$$\hat{k}_1(T', T') = \hat{k}_1(T_1, T_1) + \hat{k}_1(T_2, T_2) + 2\hat{k}_1(T_1, T_2) ,$$

and

$$\hat{k}_1(T_3, T') = \hat{k}_1(T_3, T_1) + \hat{k}_1(T_3, T_2) .$$

This implies that for the class of magnetic fields we considered, the only topological invariant, conserving in the process that admit of the reconnection, is the Hopf invariant Ref. [1].

**Supercoiling in DNA.** Topological methods were successfully applied to the description of the processes od DNA supercoiling. The DNA described by the Calugareanu formula(CF):

$$Lk = Tw + Wr,$$

where  $Lk$  is the Gauss linking coefficient and  $Tw$  is the twist and  $Wr$  is the writhing number correspondingly. The process of removal supercoils takes place exclusively by cutting edges of the DNA ribbon, twisting and sewing the band. Thus the CF should be modified as:

$$(Lk - q) = \widetilde{Tw} + \widetilde{Wr}$$

Here  $q$  is the number of cutting-sewing events and  $\widetilde{Tw}$  and  $\widetilde{Wr}$  are modified parameters of the CF. Since we deal with with the ensemble of cuts and sews the final formula after averaging over all states looks like

$$\langle Lk - q \rangle = \langle \widetilde{Tw} \rangle + \langle \widetilde{Wr} \rangle .$$

This explains the applicability of topological methods to study scDNA relaxation caused by enzymatic activity of topoisomeras. It can be shown that intrinsic hydrodynamics behavior of DNA is closely related to this process [2].

## References

- [1] M.I. Monastyrsky, P.V. Sasorov, Sov. Phys. JETP **64**(4), 683 (1987); M.I. Monastyrsky, P.V. Sasorov, “Conservation of topological invariants of magnetic field in magnetohydrodynamics”, Preprint ITEP 88-63, M.: ATOMINFORM, 1988.
- [2] A. Gabibov, E. Yakubovskaya, M. Lukin, P. Favorov, A. Reshetnyak, and M. Monastyrsky “Dynamics of DNA Supercoiling”, pp. 43-67, in Topology in Molecular Biology, Ed. M. Monastyrsky, Springer, 2007.

---

## Cluster of interacting wave triads in QG model: quadratic invariants

S.V. Nazarenko

*University of Warwick, Mathematics Institute, Coventry CV4 7AL, UK*  
`s.v.nazarenko@warwick.ac.uk`

We consider clusters of interconnected resonant triads arising from the QG model. A cluster consists of  $N$  modes forming a total of  $M$  connected triads. We investigate the problem of constructing a linearly independent set of quadratic constants of motion. We show that this problem is equivalent to an underlying basic linear problem, consisting of finding the null space of a rectangular  $M \times N$  matrix  $A$  with entries 1,  $-1$  and 0. In particular, we prove that the number of independent quadratic invariants is  $J = N - M^* \geq N - M$ , where  $M^*$  is the number of linearly independent rows in  $A$ . We formulate an algorithm for decomposing large clusters of complicated topology into smaller ones and show how various invariants are related to certain parts and linking types of a cluster, including the basic structures leading to  $M^* < M$ .

These results were published in [1].

## References

- [1] KL Harper, MD Bustamante, SV Nazarenko, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **46** (24), 245501

---

# Multiscale phenomena, asymptotics and thermonuclear fusion in cavitating bubbles

Robert Nigmatulin

*Schirshov Institute of Oceanology*

nigmar@ocean.ru

A paradox is a real phenomenon, which contradicts ordinary insights and human intuition. Paradoxes are milestones of science.

Two-phase bubbly fluids manifest a number of paradoxical properties. In spite of the negligible amount of the gas (mass concentration  $\sim 10^{-5}$ ) the thermo-physical properties of the gas in the bubbles exert a significant influence on the shock and acoustic wave attenuation. At the same time the variation in viscosity and other thermo-physical properties of the liquid, which composes almost all of the bubbly liquid mass has little influence on wave attenuation.

It is common for the bubbly liquid to damp the shock, but for some regimes the shock waves can be strongly amplified by bubbly liquids. The basis for this phenomenon is determined by a very specific property of the bubbly liquid known as a local volume deformation inertia when the pressure depends not only on the density,  $\rho$ , but on the acceleration of compression,  $\ddot{\rho}$ .

The third paradox of bubbly liquid is connected with the bubble motion in a vertical column with a bottom subjected to intensive vertical vibration ( $\omega \sim 10$  Hz). For specific regimes gas bubbles can be entrained on the upper surface of liquid and move down forming a gas cushion on the bottom of the column. This cushion may initiate additional vertical oscillations with frequency,  $\Omega$ . Interaction of these two frequencies may be resonant and initiate motion of the bubbles down and up. This phenomena can be used for very effective mixing of two liquids which normally are mixed poorly.

Many paradoxes are manifested in sonoluminescence and bubble fusion experiments (Taleyarkhan, West, Cho, Lahey, Nigmatulin, Block, 2002, 2004, 2006). The last experiments showed that neutron emission and tritium formation may occur in deuterated acetone under acoustic cavitation conditions. Intensity of the fast neutron (2.5 MeV) emission and tritium nucleus production is  $10^4 - 10^6 \text{ s}^{-1}$ . This suggests ultrahigh compression of the matter produced inside the bubbles during their collapse. Systematic research is being carried out on vapor bubble implosion in intense acoustic fields in D-acetone ( $\text{C}_3\text{DO}_6$ ) to provide the observed effect theoretical confirmation and explanation. The dynamics of the bubbles formed during maximum rarefaction in the liquid is numerically studied on the basis of the models developed for a single bubble and bubble clusters. It is assumed

that during their growth the bubbles coagulate and form a few bigger bubbles, which then collapse under the additional pressure pulses produced in the liquid through the amplification of compression waves within the cluster. A shock wave is shown to be formed inside the bubble during the latter's rapid contraction. Focusing of this shock wave in the bubble center initiates dissociation and ionization, results in violent increases ( $0.77 \times 10^5$  times) in density ( $10^4 \text{ kgm}^3$ ), pressure ( $10^{10}$ - $10^{11}$  bar) and temperature ( $10^8$ - $10^9$  K), high enough to produce nuclear fusion reactions. The bubble looks like a nano-hydrogen bomb. The diameter of the neutron emission zone is about 100 nm. The highest neutron emission is recorded at about 25 nm from the bubble center. The number of neutrons emitted during the implosion of a single bubble is  $\sim 10$  neutrons per implosion, and the number of tritium nuclei is the same. It is found out that the intensity of bubble implosion and the number of neutron emitted increase with variations in nucleation phase, positive half-wave amplitude, and liquid.

Some important features of the process analyzed in our theoretical paper (Nigmatulin et al, 2005) were:

1. The cold liquid effect, where relatively small variations of the liquid pool temperature strongly influence the acceleration of the liquid and intensity of the thermonuclear fusion reaction.
2. The bubble cluster effect, where multi-bubble cluster dynamics produce an amplification of compression compared with the incident pressure of acoustical field
3. Non-dissociation of the liquid, where, in spite the high pressures and temperature experienced on the interface ( $10^5 - 10^6$  bar, 2500 K) the liquid has insufficient time for dissociation during 10 ns. That is why the liquid is much less compressible than implied by the equilibrium adiabat which corresponds to more than a microsecond of compression. Thus only the extrapolation of first part of D-U shock adiabat should be used for the estimation of compressibility of the liquid.
4. "Cold" electrons. During the extremely short time of the compression ( $10^{-13} - 10^{-12}$  s) the electrons have no time to be heated by ions. Thus the heat capacity of the gas/vapor is  $\sim 2,000$  J/kg instead of the equilibrium heat capacity of fully ionized plasma,  $\sim 8,000$  J/kg. This allows the temperature of ions to be four times higher than for an equilibrium plasma which results in conditions suitable for thermonuclear fusion. Moreover the "cold" electrons do not produce intensive energy losses by photon emissions.
5. Intensive collapse of the bubble is a multi-scale phenomena with the final sharpening. During the different stages the different physical

phenomena, spatial and time scales dominate the process. These physical processes are: heat transfer, evaporation, condensation, transition from two phase to supercritical fluid, transition from a non-compressible liquid and a homobaric pressure distribution in the vapor (this stage takes almost all the time of the process (41.5  $\mu$ s from 42  $\mu$ s) to high compression of the liquid and to shock wave phenomena in gas (0.5  $\mu$ s), dissociation, ionization and finally to nuclear fusion). The spatial scales are the following: acoustical field scale is  $\sim 10^{-2}$  m, cluster scale is  $\sim 10^{-3}$  m, bubble scale is  $\sim 10^{-5} - 10^{-4}$  m, dissociation and ionization cores scale is  $\sim 10^{-7} - 10^{-6}$  m, thermonuclear core scale is  $10^{-8} - 10^{-7}$  m. The time scales are the following: evaporation and condensation scale is  $\sim 10^{-5}$  s, compression wave scale is  $\sim 10^{-6}$  s, dissociation and ionization scale is  $\sim 10^{-9}$  s, and thermonuclear time scale is  $10^{-13}$  s. The numerical code needs to vary the equations to accommodate the different physical phenomena and different sizes of the grid and different time steps from  $\Delta t = 10^{-7}$  s to  $10^{-14}$  s. To clarify the process in the tiny central thermonuclear core this zone should be considered by the cell size  $\Delta r = 10^{-10}$  m in the bubble with radius  $10^{-5}$  m. The same problem exists with the thin boundary layers near the interface.

6. Three-dimensional analysis for the shape of the bubble supports the assumption of a spherically symmetrical flow to produce the concentration of the energy in the tiny core.

All these effects are crucial for the prediction of the thermonuclear reaction intensity.

---

## **Knot polynomials as new tool for turbulence research**

**Renzo L. Ricca**

*Department of Mathematics and Applications, U. Milano-Bicocca,  
ITALY*

`renzo.ricca@unimib.it`

In recent decades there has been overwhelming evidence that vorticity tends to get concentrated to form coherent structures, such as vortex filaments and tubes (the “sinews of turbulence”), in both classical and quantum fluids. In the case of vortex tangles, structural complexity methods have proven to be useful to investigate and establish new relations between energy, helicity and complexity [1]. Indeed, this approach can be pursued further by introducing knot polynomials. By using a suitable

transformation in terms of helicity, it has been recently shown [2] that the standard Jones polynomial of knot theory can be interpreted as a new invariant of topological fluid mechanics. By briefly reviewing this work, we show how to compute this invariant for some simple, but non-trivial topologies. Then, by considering the standard decomposition of the helicity of a vortex filament in terms of writhe and twist, we focus on geometric aspects of vortex reconnection, a key feature in real vortex dynamics, and present a recent result [1] on the conservation of writhe under reconnection. For dissipative systems, this means that any deviation from helicity conservation is entirely due to twist, inserted or deleted locally at the reconnection site. This result has important implications for helicity and energy considerations. We conclude the talk with some speculations on future work, by showing how a combination of these results may lead to the development of a novel approach to investigate fundamental aspects of turbulence research.

## References

- [1] Ricca, R.L. (2009) Structural complexity and dynamical systems. In Lectures on Topological Fluid Mechanics (ed. R.L. Ricca), pp. 169-188. Springer-CIME Lecture Notes in Mathematics 1973. Springer-Verlag.
- [2] Liu, X., Ricca, R.L. (2012) The Jones polynomial for fluid knots from helicity. *J. Phys. A: Math. and Theor.*, 45, 205501.
- [3] Laing, C.E., Ricca, R.L. and Summers, DeW. L. (2013) Conservation of writhe and helicity under reconnection. *PNAS*, in preparation.

---

## Asymptotic solutions and regularization for the Cauchy problem for the induction equation

**A.I. Shafarevich**

*Moscow State University, Leninskie Gory, Moscow, Russia*

shafarev@yahoo.com

The description of the magnetic field temporal evolution in a conductive fluid plays an important role in the study of strong fields of planets, stars and galaxies. In particular, a lot of papers was devoted to the detailed study of the effect of hydrodynamic dynamo — unlimited growth of the magnetic field at large times caused by irregular behavior of the trajectories of the smooth velocity field of the fluid. From the mathematical point of

view, it means there are eigenvalues with positive real part of the induction operator and the Cauchy problem's solutions, which grow exponentially as  $t \rightarrow \infty$ . We study the alternative effect — instantaneous growth of the field due to the velocity field's jump (break). It appears that the magnetic field has delta-type singularity on the surface of discontinuity. The correct generalized statement of problem exists, in particular, if passing through the surface only the amplitude changes rather than direction of the velocity field.

---

## Dynamics of geostrophic vortices in two-layer rotating fluid: stability, choreographies, chaos

M.A. Sokolovskiy, J. Verron, X. Carton

*WPI of RAS, 3, Gubkina Str., 119333, Moscow, Russia*

*MEOM/LGGE, BP 53, 38041, Grenoble Cedex, France*

*LPO, UFR Sciences, UBO, 6 Av. Le Gorgeu, 29200, Brest, France*

sokol@aqu.laser.ru

Motion of a system composed of  $2A$  point vortices is investigated in the frames of two-layer quasi-geostrophic model on a rotating plane. We suppose that layers are of the same thickness, and  $A$  identical vortices are initially located in corners of a regular  $A$ -gon in each layer. Polygons of the upper and lower layers have the same center, but, generally, different lateral lengths.

Let the variable  $z_j^\alpha = x_j^\alpha + iy_j^\alpha$  to be a complex coordinate of the vortex located in the layer  $j$  and having intensity  $\kappa_j^\alpha$  ( $j = 1, 2; \alpha = 1, 2, \dots, A$ ). We suppose that  $-\kappa_1^1 = -\kappa_1^2 = \dots = -\kappa_1^A = \kappa_2^1 = \kappa_2^2 = \dots = \kappa_2^A \equiv \kappa$ , where  $\kappa > 0$ , i. e. in the upper and lower layers we have correspondingly  $A$  negative and positive vortices of the equal modulo intensity.

Equations of motion for  $2A$ -vortex structure are [1]:

$$\begin{aligned} \dot{z}_j^\alpha = & \frac{(-1)^j \kappa}{4\pi i} \left\{ \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^A \frac{1}{z_j^\alpha - z_j^\beta} \left[ 1 + \gamma |z_j^\alpha - z_j^\beta| \mathbf{K}_1 \left( \gamma |z_j^\alpha - z_j^\beta| \right) \right] \right. \\ & \left. - \sum_{\beta=1}^A \frac{1}{z_j^\alpha - z_{3-j}^\beta} \left[ 1 - \gamma |z_j^\alpha - z_{3-j}^\beta| \mathbf{K}_1 \left( \gamma |z_j^\alpha - z_{3-j}^\beta| \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

where the upper bar denotes complex conjugation,  $\mathbf{K}_1$  is a modified Bessel function of the first order,  $\gamma$  is a parameter inversely proportional to the Rossby radius of deformation  $\lambda = \sqrt{g'}/2f$  ( $g'$  being the reduced gravitational acceleration and  $f$  is Coriolis parameter).

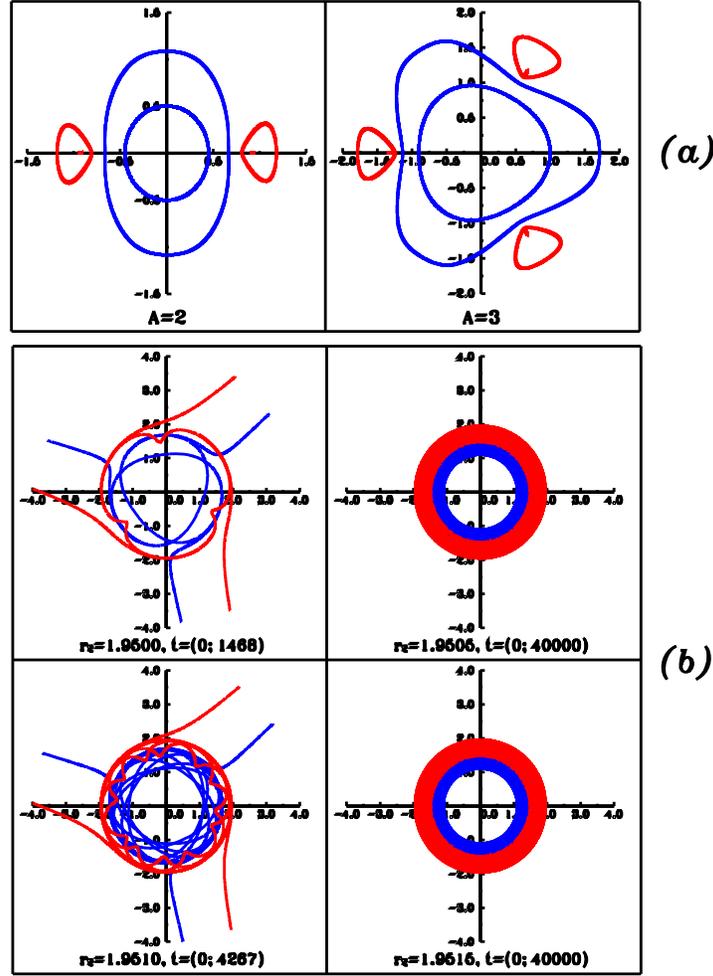


Figure 7: Absolute trajectories of vortices in upper (red) and lower (blue) layers: (a) Family of absolute choreographies for the cases  $A = 2$  and  $A = 3$ ; (b) Example of parametric instability in the case  $A = 3$ ,  $r_1 = 1.683$ , and indicated values of  $r_2$

The analysis of the system (4) allowed us to make classification of all kinds of motion under investigation for different parameters of  $A$  and  $r_j$ , where  $r_j$  ( $j = 1, 2$ ) are the radii of circumcircle around the polygons. We obtained diagrams for possible states of the vortex system. In the plane of parameters  $(r_1, r_2)$ , we found existence domains of different types of solutions for different numbers of  $A$ . In particular, we found a family of absolute choreographies, where all vortices of the upper layer rotate along one closed trajectory, and each vortex in the lower layer performs nutational periodical movements along closed peripheral orbits (panel (a) in the Figure 1). Vortex rotational periods in the lower layer  $T_l$  and in the upper layer  $T_u$  follow the conditions  $T_l/T_u = 1/A$ . At  $A \geq 3$ , there appear areas of parametric instability (panel (b) in the Figure 1) and of chaotic vortex behavior.

## References

- [1] Sokolovskiy, M.A., Verron, J., 2014. Dynamics of vortex structures in a stratified rotating fluid. Series Atmospheric and Oceanographic Sciences Library. Vol. 47, Springer: Cham - Heidelberg - New York - Dordrecht - London, 382 p.

---

## QNSE model of anisotropic turbulence with waves

**Semion Sukoriansky**

*Department of Mechanical Engineering Ben-Gurion University of the  
Negev, Beer-Sheva, Israel,*

`semion@bgu.ac.il`

Most of the practically important turbulent flows are exposed to external factors (extra strains), such as density stratification, solid body rotation, external magnetic fields, etc. Some of these extra strains support wave solutions in linearized problems (e.g. gravity waves in stably stratified flows, inertial waves in rotating flows, Alfvén waves in MHD turbulence) that lead to complex wave-turbulence interactions in fully non-linear formulation. In addition, the extra strains may render the large-scale flows strongly anisotropic. We present an investigation of turbulence anisotropization by external body forces (gravity, rotation and magnetic friction) using the quasi-normal scale elimination (QNSE) theory of turbulence. This spectral theory uses a recursive procedure of small-scale modes elimination based upon a quasi-normal mapping of the velocity and temperature fields. The approximation of quasi-normality (Millionshchikov, 1941) is used in a very weak sense for the modes been eliminated and is complemented by the "renormalization" of eddy viscosity. By virtue of implying the quasi-normal modal forcing and eddy damping by the effective viscosity for every mode, the QNSE theory belongs in the class of the quasi-normal eddy-damped theories of turbulence. In the limit of weak extra strain, the theory becomes completely analytical and yields simple expressions for horizontal and vertical eddy viscosities and eddy diffusivities. In addition, the theory provides expressions for various one-dimensional spectra that quantify turbulence anisotropization. Tendency to two-dimensionalization is clearly seen in flows with solid body rotation and magnetic friction. Anisotropization of stably stratified flow is different; in this flow the effective viscosity in the vertical direction decreases but remains finite while the vertical diffusivity diminishes on large scales where stratification is strong. On the

other hand, both horizontal viscosity and diffusivity increase on large scales compared with the case of neutral stratification.

---

## The exact solution of the two-dimensional Poincaré–Sobolev equation in a trapezium

S.D. Troitskaya

*Institute of Content and Methods of Education of the Russian Academy of Education, Pogodinskaya 8, Moscow 119435 Russia*

troitsks@gmail.com

We consider the following initial-boundary problem for Poincaré–Sobolev equation:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y; t) \in D \times (0, \infty), \quad D \subset \mathbf{R}^2, \quad (5)$$

$$p|_{\partial D \times (0, \infty)} = 0, \quad (6)$$

$$p|_{t=0} = p_0(x, y), \quad p_t|_{t=0} = p_1(x, y), \quad (p_0|_{\partial D} = 0, p_1|_{\partial D} = 0), \quad (7)$$

where  $D$  is a trapezium:

$$D := \{(x, y) : -1 < y < 0, \quad -1 < x < y + 1\}.$$

This problem arises in the study of small oscillations of a rotating ideal fluid in a two-dimensional model case. The choice of the domain is defined by the fact that in experimental studies of rotating fluid in a cylindrical container with such cross-section  $D$  the internal vibrations of a special kind were discovered (see [1, 2]).

Let  $p_0, p_1$  be functions from Sobolev space  $\mathring{W}^{\frac{1}{2}}(D)$ . We call a two times continuously differentiable in  $t$  function  $p(x, y; t)$  valued in  $\mathring{W}^{\frac{1}{2}}(D)$  a *generalized solution* (in the sense of theory of distributions) of this problem if they satisfy (7) and the equality

$$\int_D (p_{ttx}\varphi_x + p_{tty}\varphi_y + p_y\varphi_y) dD = 0 \quad \forall t \in (0, \infty) \quad (8)$$

keeps for any  $\varphi \in C_0^\infty(D)$ . If such a function  $p$  is a sufficiently smooth solution of the problem, then it is its classical solution.

Consider the hyperbolic equation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad a^2 = \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \quad \lambda \in (0, 1). \quad (9)$$

If  $\lambda \in (\frac{1}{2}, \frac{4}{5})$ , then for each  $\lambda$  there is a parallelogram  $P(\lambda)$ , inscribed in the trapezium  $D$  so that its sides are parallel to the characteristics of the equation (9).

**Theorem 1** *Suppose,*

$$\lambda_1(x, y) := \frac{(y-1)^2 + 2x^2 + 6x + 4 + (1-y)\sqrt{(y-1)^2 + 4(x+1)}}{2((y-1)^2 + (x+2)^2)}, \quad (10)$$

$$\lambda_2(x, y) := \frac{(y-1)^2 + 2x^2 + 2x + (1-y)\sqrt{(y-1)^2 - 4(x+1)}}{2((y-1)^2 + x^2)}, \quad (11)$$

$$\lambda_3(x, y) := \frac{(y+3)^2 + 2x^2 + 2x + (y+3)\sqrt{(y+3)^2 - 4(x+1)}}{2((y+3)^2 + x^2)}, \quad (12)$$

$$\lambda_4(x, y) := \frac{(y+1)^2 + 2x^2 + 6x + 4 + (1+y)\sqrt{(y+1)^2 + 4(x+1)}}{2((y+1)^2 + (x+2)^2)} \quad (13)$$

and  $\lambda_* < \lambda_{**}$ ,  $\lambda_*, \lambda_{**} \in (\frac{1}{2}, \frac{4}{5})$ . Then the function  $p(x, y, t)$ , given in the Fig. 8, is a solution of the problem (5)–(7) in the domain  $D$ , with  $p_0$  given in the Fig. 9, and  $p_1 \equiv 0$ .

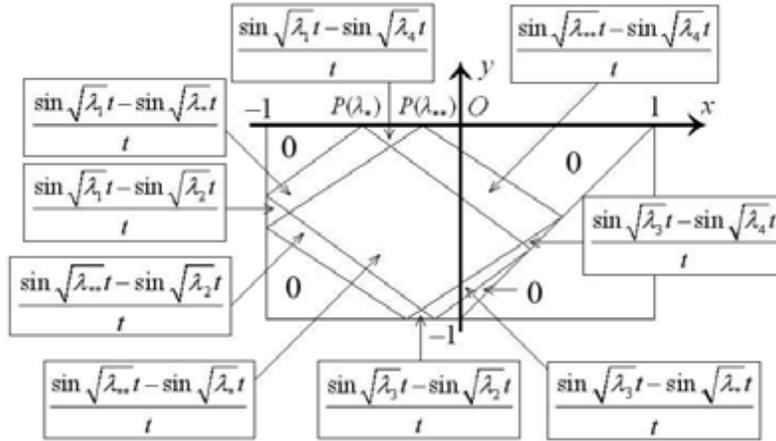


Figure 8:

The existence of this type of oscillations of a rotating fluid in this domain  $D$  questioned the existence of the wave attractor, as predicted in the works [2, 3].

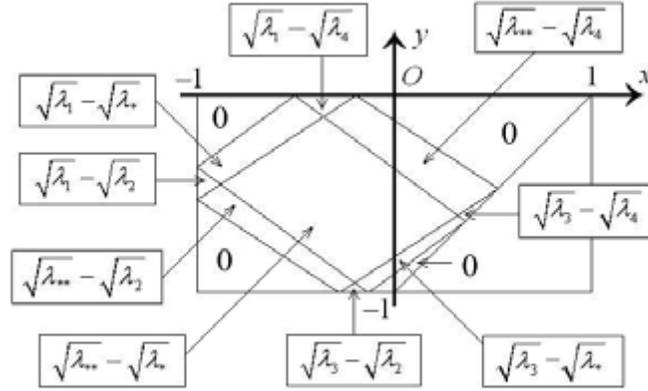


Figure 9:

## References

- [1] MAAS L. R. M., BENIELLI D., SOMMERIA J., LAM F.-P. Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid // Nature. 1997. V. 388, no. 7. P. 557-561.
- [2] MANDERS A. M. M., MAAS L. R. M. Observations of inertial waves in a rectangular basin with one sloping boundary // J. Fluid Mech. 2003. V. 493. P. 59-88.
- [3] HARLANDER U. Towards an analytical understanding of internal wave attractors // Advances in Geosciences. 2008. V. 15. P. 3-9.

---

## Atmospheric Boundary Layer Over Steep Surface Waves

**Yu.I. Troitskaya**

*Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod, Russia, // Lobachevsky  
Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russia*

yuliya@hydro.appl.sci-nnov.ru

Small-scale air-sea interaction is one of the most important factors determining the exchange processes in the air-sea boundary layers (i.e., wind stress, heat, and mass exchange between the atmosphere and the ocean). These processes govern the boundary conditions for the atmosphere and the ocean and affect the coupled dynamics of both geospheres. Therefore, parameterization of the exchange processes on the air-sea interface is of special interest, particularly with the view of improving the climate and

weather prediction models, investigation of the sea-air interaction under severe wind, tropical hurricanes, etc. Another important aspect of the air-sea interaction is excitation of surface waves. One of the most debated open questions of wave modeling is concerned with the nonlinear effects of wind input in the wave field, especially for the case of steep and breaking waves [1]. Two physical mechanisms are suggested to describe the excitation of finite amplitude waves. The first one is based on the treatment of the wind-wave interaction in quasi-linear approximation in the frameworks of semi-empirical models of turbulence of the low atmospheric boundary layer [2, 3, 4]. An alternative mechanism is associated with separation of wind flow at the crests of the surface waves [5]. The "separating" and "non-separating" mechanisms of wave generation lead to different dependences of the wind growth rate on the wave steepness: the latter predicts a decrease in the increment with wave steepness, and the former – an increase. In this paper the mechanism of the wind-wave interaction is investigated basing on physical and numerical experiments.

In the physical experiment, turbulent airflow over waves was studied using the video-PIV method, based on the application of high-speed video photography [6]. Alternatively to the classical PIV technique this approach provides the statistical ensembles of realizations of instantaneous velocity fields. Experiments were performed in a round wind-wave channel at Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences. A fan generated the airflow with the centerline velocity 4 m/s. The surface waves were generated by a programmed wave-maker at the frequency of 2.5 Hz with the amplitudes of 0.65 cm, 1.4 cm, and 2 cm. The working area (27.4 X 10.7 cm<sup>2</sup>) was at a distance of 3 m from the fan. To perform the measurements of the instantaneous velocity fields, spherical polyamide particles 20  $\mu$  m in diameter were injected into the airflow. The images of the illuminated particles were photographed with a digital CCD video camera at a rate of 1000 frames per second. For the each given parameters of wind and waves, a statistical ensemble of 30 movies with duration from 200 to 600 ms was obtained. Individual flow realizations manifested the typical features of flow separation, while the average vector velocity fields obtained by the phase averaging of the individual vector fields were smooth and slightly asymmetrical, with the minimum of the horizontal velocity near the water surface shifted to the leeward side of the wave profile, but do not demonstrate the features of flow separation. The wave-induced pressure perturbations, averaged over the turbulent fluctuations, were retrieved from the measured velocity fields, using the Reynolds equations. It ensures sufficient accuracy for study of the dependence of the wave increment on the wave amplitude. The dependences of the wave growth rate on the wave steepness are weakly decreasing, serving as indirect proof of the non-separated character of flow

over waves.

Also direct numerical simulation of the airflow over finite amplitude periodic surface wave was performed citetr7. In the experiments the primitive 3- dimensional fluid mechanics equations were solved in the airflow over curved water boundary for the following parameters: the Reynolds number  $Re=15000$ , the wave steepness  $ka=0.2$ , the parameter  $c/u_*=0.1$  (where  $u_*$  is the friction velocity and  $c$  is the wave celerity). Similar to the physical experiment the instant realizations of the velocity field demonstrate flow separation at the crests of the waves, but the ensemble averaged velocity fields had typical structures similar to those existing in shear flows near critical levels, where the phase velocity of the disturbance coincides with the flow velocity. The wind growth rate determined by the ensemble averaged wave-induced pressure component in phase of the wave slope was retrieved from the DNS results. Similar to the physical experiment the wave growth rate weakly decreased with the wave steepness.

The results of physical and numerical experiments were compared with the calculations within the theoretical model of a turbulent boundary layer based on the system of Reynolds equations with the first-order closing hypothesis. Within the model the wind-wave interaction is considered within the quasi- linear approximation and the mean airflow over waves within the model is treated as a non-separated. The calculations within the model represents well profiles of the mean wind velocity, turbulent stress, amplitude and phase of the main harmonics of the wave-induced velocity components and also wave- induced pressure fluctuations and wind wave growth rate obtained both in the physical experiment and DNS.

Applicability of the non-separating quasi-linear theory for description of average fields in the airflow over steep and even breaking waves, when the effect of separation is manifested in the instantaneous flow images, is explained by strong inhomogeneity of the separation zone in the transversal direction (along the wave front), shown in DNS. It appears that the vorticity is mostly concentrated in thread-like vortex structures, which have a horseshoe shape and resemble well-known  $\lambda$ -vortices extensively studied in the case of a "classical" boundary layer over a solid plane boundary. The instantaneous flow velocity and vorticity fields averaged only along the wave front (and not in time) are non-separating and characterized by the well-known Kelvin's "cat eye" pattern. We verified applicability of the model in wide range of wind and wave parameters on the base of laboratory and field experiments.

Wind-wave interaction at extreme wind speed is of special interest now in connection with the problem of explanation of the sea surface drag saturation at the wind speed exceeding 30 m/s. The idea on saturation (and even reduction) of the coefficient of aerodynamic resistance of the sea

surface at hurricane wind speed was first suggested in [8] on the basis of theoretical analysis of sensitivity of maximum wind speed in a hurricane to the ratio of the enthalpy and momentum exchange coefficients. Both field [9, 10] and laboratory [11] experiments confirmed that at hurricane wind speed the sea surface drag coefficient is significantly reduced in comparison with the parameterization obtained at moderate to strong wind conditions (see [12, 13]). We supposed that the peculiarities of surface drag coefficient can be explained by dependence of the form drag of surface waves at strong wind conditions.

To verify the supposition we measured simultaneously aerodynamic resistance of the water surface and frequency-wave number spectra of wind waves in wide range of wind speeds in the laboratory tank of the Institute of Applied Physics [14]. Wind friction velocity and surface drag coefficients  $CD_{10}$  were retrieved from the measurements by the profile method. Similar to data [11] surface drag coefficient flattens for wind speed exceeding 30 m/s. We compared the obtained experimental dependencies with the predictions of the quasi-linear model of the turbulent boundary layer over the waved water surface [4]. The quantitative agreement occurred when momentum flux associated with short wave part of the wind wave spectra was taken into account. The model is also in agreement with the data on parameters of wind and waves measured in the course of field experiments at the lake part of the Gorky reservoir at the Volga river for wind speeds exceeding 4 m/s.

The model is generalized to the case of stratified atmosphere over the ocean. This work is supported by grant of the government of the Russian Federation (contract 11.G34.31.0048), Federal Targeted Program "Scientific and Pedagogical Staff for Innovative Russia" for 2009-2013 and by RFBR (13-05- 00865, 13-05-97068).

## References

- [1] M. A. Donelan, A. V. Babanin, I. R. Young, et al., *J. Phys. Oceanogr.*, 2006, 36, 1672-1689.
- [2] P. A. E. M. Janssen, *J. Phys. Oceanogr.*, 1991, 21, 1631-1642.
- [3] A. D. Jenkins, *J. Phys. Oceanogr.*, 1992, 22, 843-858.
- [4] V. P. Reutov and Yu. I. Troitskaya, *Izv. Atmosph. and Ocean Phys.*, 1995, 31, 825-834.
- [5] H. Jeffreys, *Proc. Roy. Soc.* 107A, 1924, 189-206.
- [6] Yu. Troitskaya et al, *J. Phys. Oceanogr.*, 2011, 41, 1421-1454.

- [7] O.A.Druzhinin, Yu.I.Troitskaya, S.S.Zilitinkevich, 2012, Journ. of Geophys Res., 117, C00J05, doi:10.1029/2011JC007789, 2012
- [8] K.A. Emanuel. 1995. J. Atmos. Sci, 52(22), 3969-3976.
- [9] Powell, M.D., Vickery P.J., Reinhold T.A. 2003 Nature, (422), 279-283.
- [10] Black P.G., et al BAMSociety, 2007, 88 (3), 357-374.
- [11] Donelan M.A. et al 2004. Geophys. Res. Lett., 31, L18306.
- [12] Garratt J.R. Mon. Weather Rev., 1977,105, .915-929.
- [13] Fairall C.W. et al 2003, J. Climate, 16 (4), 571-591.
- [14] Troitskaya Yu. et al, 2012 Journ of Geophys Res., 117, C00J21, doi:10.1029/2011JC007778, 2012.

---

## **H-theorem for Dynamical systems and Boltzmann extremals**

**V.V. Vedenyapin**

*Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow*

vicveden@yahoo.com

We describe connection between Liouville Equation, Vlasov Dynamics, Hydrodynamics and Magneto-hydrodynamics [1-16]. We consider H-theorem, Boltzmann Extremes and asymptotic behavior as time tends to infinity, and the theorem "Time Averages coincides with Boltzmann Extreme" [6], Arnold-Kozlov [11-14] lemma on commuting fields with a modification for Vlasov-Maxwell and Vlasov-Poisson equations, derivation of Hamilton-Jacobi equations from Liouville and Vlasov equations [15-16].

## **References**

- [1] L.D. Landau and E.M. Lifshits. In: Theoretical Physics Vol. 2, Nauka, Moscow (1967).
- [2] V. V. Vedenyapin Boltzmann and Vlasov Kinetic Equations, (in Russian) FIZMATLIT, Moscow, 2001.
- [3] V. V. Kozlov, "The generalized Vlasov kinetic equation", Russian Math. Surveys, 63:4 (2008), 691-726.

- [4] M. B. Gavrikov, V. V. Savel'ev. Plasmastatic problems in magnetohydrodynamics with allowance for the electron inertia // Fluid Dynamics, 2010, V 45, N 2, P. 325-341.
- [5] V.V.Vedenyapin, M.A.Negmatov. Derivation and classification of Vlasov-type and magneto-hydro-dynamics equations: Lagrange identity and Godunov's form. Teoret. Mat. Fiz., 170:3 (2012), 468-480.
- [6] V.V.Vedenyapin. Time Averages and Boltzmann Extremals. Soviet Math. Doklady, v. 422, N2, 2008, pp.161-163.
- [7] V.V.Vedenyapin, A.V.Sinitsyn and E.V.Dulov. Boltzmann and Vlasov Kinetics. Amsterdam-London-New-York-Tokio, Elsevier, 2011. Pp.1-304.
- [8] V. P. Maslov, P. P. Mosolov "The asymptotic behavior as  $N \rightarrow \infty$  of the trajectories of  $N$  point masses interacting in accordance with Newton's law of gravitation", Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 42:5 (1978), 1063-1100.
- [9] Boltzmann L. Weitere Studien uber das Warmegleichgewicht unter Gasmolekulen. Wien: Akad. Sitzungsber, 1872. Bd. 66. S. 275-370.
- [10] L.Boltzmann. Uber die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der Mechanischen Warmetheory und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, respective den Satzen uber das Warmegleichgewicht. - Wien . Akad. Sitzungsber. ,1878 , Bd. 76, S. 373-435.
- [11] Arnold V.I. On topology of three-dimensional streams of ideal fluids. Prikl.Mat.Mech., 1966, v.30, N1, pp. 183-185.
- [12] Arnold V.I., Mathematical Methods of Classical Mechanics. M, Fizmatlit, 1974.
- [13] Kozlov V.V. Hydrodynamics of Hamiltonian systems. Vestnic MGU, Ser. Mathematics, Mechanics, 1983, v.6, pp.10-22.
- [14] Kozlov V.V. General theory of Curls. Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics, 1998.
- [15] Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Liouville Equation, Hydrodynamic Substitution and Hamilton-Jacobi equation. Russian math. dokl., 2012, v. 446, N2, pp. 142-144.
- [16] Vedenyapin V.V., Negmatov M.A., On topology of stationary solutions for Hydrodynamic and Curl consequences of Vlasov equation and Hamilton-Jacobi method. Russian math. dokl., 2013, v. 449, N5, pp. 1-6.

---

# Fractal Dimensions of Energy and Enstrophy Containing Structures

Alireza Nejadmalayeri, Alexei Vezolainen, Oleg V. Vasilyev

*Department of Mechanical Engineering, University of Colorado, Boulder,  
CO 80309, USA*

Alireza.Nejadmalayeri@Colorado.edu,

Alexei.Vezolainen@Colorado.edu, Oleg.Vasilyev@Colorado.edu

Turbulence flow intermittency is an important phenomenon that has been widely recognized, yet mostly overlooked by turbulence modeling community. Exploiting flow intermittency to construct reduced models of turbulence (e.g. in terms of coherent vortices [1]) or to optimally use a finite number of computational elements (e.g. using adaptive mesh refinement [2]) are promising ways of constructing a simplified representation of turbulence. Fractal dimensionality of turbulent flow structures is the direct measure of flow intermittency and was extensively studied in the past in terms of understanding of flow physics, e.g. [3, 4, 5]. This work is an attempt to tie fractal dimensionality of turbulent structures representing different flow physics with numerical simulation and modeling.

The fractal dimension of turbulent structures can be estimated analogously to the analysis of Ref. [6, 7] where the  $\beta$ -model of [8] was utilized to show that the spatial degrees-of-freedom of an intermittent turbulent flow should scale like  $Re^{3D_F/(D_F+1)}$ , where  $D_F \leq 3$  is the fractal dimension of the active part of the turbulent flow. To distinguish the dimensionality of different flow structures, the Reynolds number scaling study is combined with the wavelet thresholding filtering, which, depending on thresholding strategy, can isolate either energy or enstrophy containing flow structures. In particular, in the recent computational complexity studies of CVS (Coherent Vortex Simulations) and SCALES (Stochastic Coherent Adaptive Large Eddy Simulation) of linearly forced homogeneous turbulence [9] the fractal dimensions  $D_F = 1$  and 2 were observed respectively for energy and enstrophy containing structures. This recent work not only presented the first Reynolds number scaling of CVS and SCALES, where threshold level of the wavelet-thresholding filter were set to constant values corresponding to capturing energy containing flow structures, but also offered Reynolds number scaling of SCALES at constant levels of fidelity by means of a novel continuously variable fidelity space/time/model-form adaptive methodology [9] capable of dynamic adaptation of computational mesh and model-fidelity to ensure the spatially and temporarily uniform turbulence resolution. The model fidelity or “turbulence resolution” is defined as the quantity that measures the level to which one would like to resolve

the most energetic/dynamically-important structures of turbulence. In this work the turbulence resolution is measured by the local fraction of SGS dissipation (FSGSD,  $\mathcal{F}$ )  $\frac{\Pi}{\varepsilon_{\text{res}} + \Pi}$ , where  $\varepsilon_{\text{res}}$  and  $\Pi$  are the local resolved viscous and SGS dissipations. The two-way coupling between numerical resolution and physical models is achieved through the use of spatio-temporal variation of the wavelet thresholding factor [9, 10], which controls both the local numerical resolution and modeled dissipation. This variable fidelity approach provides a unique framework for performing a *dynamic* computational complexity study of SCALES, where the Reynolds number scaling for different levels of turbulent resolution can be explored.

A summary of the Reynolds number scaling study [9] can be outlined as follows: to construct the Reynolds number scaling statistics, a series of CVS and SCALES simulations of linearly forced homogeneous turbulence [11] with progressively increasing Reynolds number were performed. First, CVS and SCALES simulations were performed with constant threshold levels  $\epsilon = 0.2, 0.43$  respectively, which are set to based on earlier works on  $256^3$  turbulent simulations [12, 13]. Then to study the influence of the fidelity of simulation on the Reynolds number scaling of SCALES, a series of simulations of different turbulence resolution were conducted. The different fidelity is achieved by using spatially variable thresholding approach [9, 10] with different goal values of  $\mathcal{F}$ , namely  $\mathcal{G} = 0.2, 0.25, 0.32, 0.4, 0.5$ . The simulations were performed on a dynamically adaptive dyadic grid with effective nonadaptive resolutions of  $256^3, 512^3, 1024^3$ , and  $2048^3$ . These correspond to Taylor micro-scale Reynolds number of  $Re_\lambda \cong 70, 120, 190, 320$ .

The CVS scaling exponent is observed as 3, Figure 10(a), while, the slope of  $Re_\lambda$  scaling of constant-dissipation SCALES spatial modes at least up to  $1024^3$  remains approximately the same regardless of the level of turbulence resolution, Figure 10(b). In other words, the scaling exponent of constant-fidelity SCALES is nearly insensitive to the level of fidelity, while the dependence of the compression ratio on the turbulence resolution is quite strong and faster than  $\mathcal{G}^{-2}$  for all Reynolds numbers studied, Figure 10(c). It is observed that the fractal dimension for constant-threshold CVS and SCALES are  $D_{F_{\text{CVS}}} \lesssim 1$  and  $D_{F_{\text{SCALES}}} \lesssim \frac{11}{13}$  respectively, while fractal dimension of constant-dissipation SCALES is  $D_{F_{\text{cdSCALES}}} \lesssim 2$ .

Retaining constant threshold in either CVS or SCALES implies a constant relative level of the resolution of the velocity field and consequently kinetic energy. In other words, the percentage of resolved kinetic energy is kept constant by using the same threshold value. As a result,  $D_{F_{\text{CVS}}} \lesssim 1$  represents that the number of flow structures at a constant percentage of resolved kinetic energy is linearly increasing with the Reynolds number. On the other hand, maintaining a fixed level of fidelity, dissipation, implies that relative enstrophy is kept constant. All in all, fractal dimension of

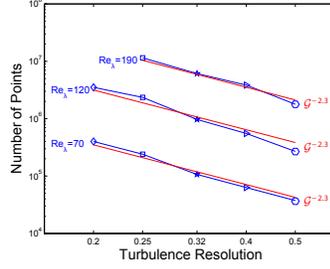
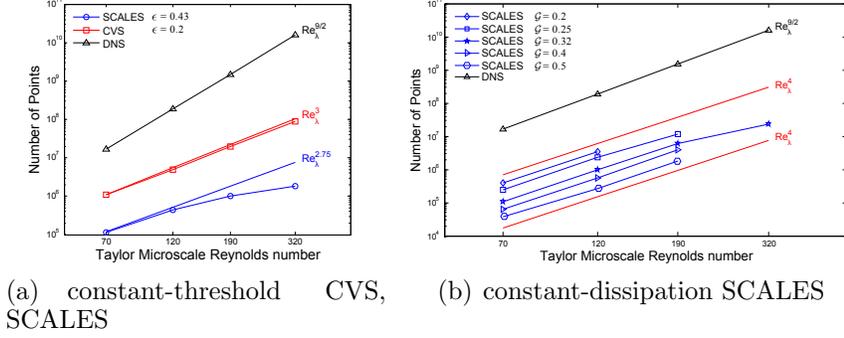


Figure 10: Reynolds number scaling of constant-threshold CVS and SCALES as well as constant-dissipation SCALES at various goal values. Turbulence resolution scaling of constant-dissipation SCALES at different Reynolds number.

the energy containing structures is close to unity and fractal dimension of enstrophy containing structures is close to two. These results are consistent with previous findings of vortex filaments ( $D_F = 1$ ) and vortex sheets respectively ( $D_F = 2$ ) [5, 14], as well as the sheet-like structures of the iso-dissipation surfaces ( $D_F = 2$ ) [3, 15]. The presented fractal dimensions observations are indeed consistent with most of asymptotic ideas except that of Ref. [4], where the fractal dimension 2.7 for the regions of active dissipation was reported. Both CVS and SCALES at constant threshold resolve the energy containing structures, which are indeed the vortex filaments. SCALES utilized a relatively large threshold and therefore as the Reynolds number increase, the SGS stresses become more pronounced. Hence, the resolved vortex filaments do not contain all the deterministic modes responsible for the energy cascade. That is why the fractal dimension of constant-threshold SCALES is less than 1. Although, the fixed threshold chosen for CVS is also the optimal threshold corresponding to  $256^3$  simulations, still it was small enough to retain majority of significant modes and as result, the performed constant-threshold CVS resolves most of the important vortex filaments cores and retained a fractal dimension of 1. The constant-dissipation SCALES, maintains dissipation at a fixed level throughout the space and time; therefore, it captures iso-surfaces of dissipation as sheet-like structures and as a result fill the space with fractal dimension of 2.

## References

- [1] M. Farge, K. Schneider, and N. K.-R. Kevlahan, Non-Gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis, *Phys. Fluids* **11**, 2187–2201 (1999).
- [2] O. V. Vasilyev and C. Bowman, Second generation wavelet collocation method for the solution of partial differential equations, *J. Comp. Phys.* **165**, 660–693 (2000).
- [3] B. Mandelbrot, Intermittent Turbulence and Fractal Dimension: Kurtosis and the Spectral Exponent  $5/3+B$ . In *Turbulence and Navier-Stokes Equations* (ed. R. Temam). *Lecture Notes in Mathematics* **565**, 121–145 (Springer, 1976).
- [4] K. R. Sreenivasan and C. Meneveau, The fractal facets of turbulence, *J. Fluid Mech.*, **173**, 357–386 (1986).
- [5] A. Bershadskii and A. Tsinober, Asymptotic fractal and multifractal properties of turbulent dissipative fields, *Physics Letter A* **165**, 37–40 (1992).
- [6] G. Paladin and A. Vulpiani, Degrees of freedom of turbulence, *Phys. Rev. A* **35**(4), 1971–1973 (1987).
- [7] N. K.-R. Kevlahan, J. Alam, and O. V. Vasilyev, Scaling of space-time modes with Reynolds number in two-dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.* **570**, 217–226 (2007).
- [8] U. Frisch, P.-L. Sulem, and M. Nelkin, A simple dynamic model of intermittently fully developed turbulence, *J. Fluid Mech.* **87**(4), 719–736 (1978).
- [9] A. Nejadmalayeri, *Hierarchical multiscale adaptive variable fidelity wavelet-based turbulence modeling with Lagrangian spatially variable thresholding*, PhD Thesis, University of Colorado Boulder, Boulder, CO, USA (2012).
- [10] A. Nejadmalayeri, O.V. Vasilyev, A. Vezolainen, and G. De Stefano, Spatially variable thresholding for stochastic coherent adaptive LES. In: Kuerten, H., Geurts, B., Armenio, V., Fröhlich, J. (eds.) *Proceedings of Direct and Large-Eddy Simulation Workshop 8: Eindhoven University of Technology, the Netherlands, July 7-9, 2010*, pp. 95–100 (Springer, 2011).

- [11] C. Rosales and C. Meneveau, Linear forcing in numerical simulations of isotropic turbulence: physical space implementations and convergence properties, *Phys. Fluids* **17**, 1–8 (2005).
- [12] D. E. Goldstein and O. V. Vasilyev, Stochastic coherent adaptive large eddy simulation method, *Phys. Fluids* **16**, 2497–2513 (2004).
- [13] D. E. Goldstein, O. V. Vasilyev, and N. K.-R. Kevlahan, CVS and SCALES simulation of 3D isotropic turbulence, *J. of Turbulence* **6**, 1–20 (2005).
- [14] A. Bershadskii and C.H. Gibson, Singularities in multifractal turbulence dissipation networks and their degeneration, *Physica A* **212**, 251–260 (1994).
- [15] J. Schumacher, H. Zilken, B. Eckhardt, and K.R. Sreenivasan, Scalar dissipation fronts in high-Schmidt number mixing, *CHAOS* **15**, 041105 (2005).

---

## **A Probabilistic Description of Turbulent Processes in the Atmosphere**

**Vladislav P. Yushkov**

*Physics Department, Moscow State University*

`yushkov@phys.msu.ru`

A way is suggested to obtain a statistical description of inhomogeneous and anisotropic turbulence through expansion of probability density of Lagrangian particles. The role of adiabatic motions in the spectral energy transfer is discussed. The spectrum of adiabatic fluctuations at the homogeneity and isotropy scales is shown to follow the Planck's curve.

---

# On vortex filaments and the multifractal structure of fully developed hydrodynamic turbulence

K.P. Zybin, V.A. Sirota

*P.N.Lebedev Physical Institute of RAS, 119991, Leninskij pr.53, Moscow, Russia*

zybin@lpi.ru

The appearance of vortex filaments, the power-law dependence of velocity and vorticity correlators and their multiscaling behavior are derived from the Navier-Stokes equation. This is possible due to interpretation of the Navier-Stokes equation as an equation with multiplicative noise, and remarkable properties of random matrix products.

Understanding of statistical properties of a turbulent flow is one of the classical problems of hydrodynamics. In particular, experiments and numerical simulations demonstrate scaling behavior of velocity structure functions with intermittent scaling exponents [1, 2]. The most successful, and conventional nowadays, way to interpret this intermittency is the Multifractal approach introduced in [3]. It allows, in particular, to express all observed intermittent characteristics by means of velocity scaling exponents [4].

However, the Multifractal method is a phenomenological theory: it does not derive the scaling properties from the Navier-Stokes (or Euler) equation, and it does not specify the structures, or configurations, that are responsible for the intermittency. The attempts to derive the Multifractal formalism directly from the first principles (Navier-Stokes equation) have not been successful yet.

On the other hand, the numerical simulations [5] reveal the importance of high-vorticity regions called vortex filaments for power-law structure functions. In this work we investigate the stochastic Navier-Stokes (Euler) equation to describe the formation of these filaments. The main idea is that random oscillations of large-scale velocity result in systematical stretching of a filament. Stretching produces power-law structure functions. Different filaments contribute to scaling exponents of different orders, this is a source of multiscaling.

To derive statistical properties, one has to introduce randomness into the Navier-Stokes equation. This is usually done by adding a large-scale random external force into the right-hand side of the Navier-Stokes equation. But the external volume-acting forces might exist in the flow and might not. Also, these external forces do not simplify the problem.

We propose another way: large-scale fluctuations of velocity are themselves treated as independent random quantities. The stochastic properties

of small-scale fluctuations can then be derived based on the properties of the large-scale fluctuations.

We analyze the stochastic equation for small-scale velocity fluctuations that is a stochastic analog to the Navier-Stokes equation [6]. It appears that, for a large class of solutions, high-vorticity regions undergo exponential stretching, despite the stochastic symmetry of the large-scale velocity. This stretching produces exponential growth of vorticity and formation of vortex filaments. It also provides the scaling behavior of structure functions. This stretching, and not decay, of vortices appears to be the main mechanism of turbulence development.

We note that in our model there is no finite-time singularity, even in the non-viscous case. Scaling of velocity structure functions is achieved by stationary scaling profiles of velocity and vorticity in the vortex filaments, while in the middle of a filament there is always a constantly narrowing non-stationary inner part.

The dispersion of the stochastic large-scale parameters results in nonlinear dependence of scaling exponents of their orders, i.e., in intermittency. This gives a qualitative explanation of multifractal formalism: different scalings are produced by different vortex filaments. We derive a simple approximation to the dimension function  $D(h)$  expressed in terms of the properties of large-scale velocity distribution.

## References

- [1] F.Toschi and E.Bodenschatz *Annu. Rev. Fluid Mech.* **41**: 375, 2009.
- [2] R.Benzi, L.Biferale, R.Fisher et al *J.Fluid. Mech.* **653**: 221, 2010.
- [3] G. Parisi, U. Frisch *in: Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics, Proceed. Intern. School of Physics 'E.Fermi', 1983, Varenna, Italy; North-Holland, Amsterdam edited by. M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi* : 84-87, 1985.
- [4] G. Boffetta, A. Mazzino and A. Vulpiani *Journal of Physics A* **41**: 363001, 2008.
- [5] N. Okamoto, K. Yoshimatsu, K. Schneider et al *Phys.Fluids* 19, 115109 (2007)
- [6] K.P. Zybin, V.A. Sirota accepted to *Phys. Rev. E*

---

## Формирование фингер – структур в волнах фильтрационного горения

А.П. Алдушин, Т.П. Ивлева

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт  
структурной макрокинетики и проблем материаловедения РАН,  
г.Черноголовка*

Фильтрационное горение (ФГ) – распространение волн экзотермического превращения в пористой среде при фильтрации окислителя – реализуется как в природных условиях (тление, подземные пожары и т.п.), так и во многих технологических процессах [1, 2]. Эффективное использование ФГ в технологических целях предполагает стационарное распространение плоского фронта реакции, заполняющего все сечение канала реактора, содержащего пористое топливо. Исследование устойчивости волн ФГ [3] показало, что при определенных условиях стационарное распространение плоского фронта реакции становится неустойчивым. В гидродинамическом приближении, предполагающем зону горения бесконечно тонкой по сравнению с шириной канала, задача о фильтрационном горении (ФГ) обладает тем же спектром решений, что и известная задача Саффмана – Тэйлора (Saffman – Taylor, (ST)) о вытеснении маловязкой жидкостью сильновязкой жидкости [4]. В обоих случаях спектр решений включает семейство симметричных и асимметричных уединенных фингеров. Выбор реального решения в гидродинамической проблеме ST происходит путем учета поверхностного натяжения на границе раздела жидкостей, подавляющего асимметричные фингеры и устанавливающего приоритет осе- симметричного фингера, заполняющего половину сечения канала. В случае ФГ поверхностное натяжение на поверхности раздела сгоревшей и несгоревшей частей пористой среды отсутствует. Для выяснения характера распространения фронта ФГ в области неустойчивости плоской волны необходимо учитывать кинетику физико-химических превращений, растягивающих фронт горения в зону конечной ширины. В докладе представлены результаты численного исследования динамики распространения волны ФГ в пористой среде, продуваемой газом, содержащим окислитель и инертную компоненту. Математическая модель процесса включает уравнения баланса тепла и массы твердых и газообразных реагентов, кинетическое уравнение выгорания топлива, зависимости коэффициентов тепломассопереноса от состава пористой среды. Скорость фильтрации газа определялась по закону Дарси. Задача рассматривалась в плоской геометрии, имитирующей тонкий щелевидный

канал, заполненный пористым топливом. Рассматривались оба варианта подачи окислителя во фронт реакции - через продукты сгорания и через топливо. В качестве граничного условия на входе в канал задавался равномерный по сечению постоянный поток газа  $G_0$  с фиксированной концентрацией окислителя. На рис. 11 показан процесс распространения волны горения в длинном канале при фильтрации газа через продукты сгорания. Однородное по ширине канала инициирование реакции приводит к формированию плоской волны, неустойчивость которой сначала проявляется в мелкомасштабных возмущениях поверхности фронта. В ходе дальнейшей эволюции волны горения начинают преобладать крупномасштабные возмущения. Фронт разглаживается, и его головная часть приобретает форму ST фингера.

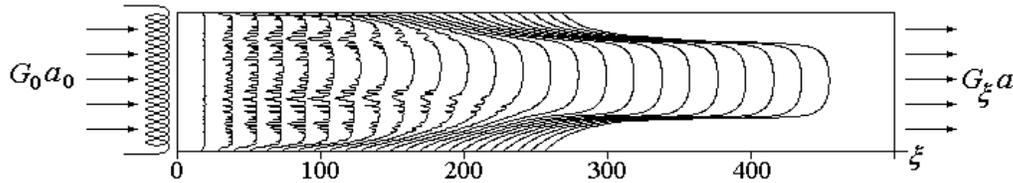


Рис. 11: Динамика структурирования фронта в длинном канале при однородном зажигании ( $K = 6, d = 24$ )

Осесимметричный фингер, заполняющий половину сечения канала, является доминирующей структурой в задаче о вытеснении вязкой жидкости [4]. При фильтрационном горении, как показывают расчеты, возможны и другие конфигурации фронта. Наиболее важными параметрами задачи, определяющими динамику распространения фронта, являются отношение коэффициентов фильтрации продуктов реакции и топлива ( $K$ ), ширина канала  $d$  (в масштабе толщины зоны горения плоской волны) и характеристики зажигания (распределение температуры на входе в канал при инициализации процесса).

На рис. 12 показана эволюция фронта горения при локальном инициировании волны реакции высокотемпературным источником, сосредоточенным на одной трети ширины канала в центральной его части. В отличие от предыдущего варианта, в данном случае последовательность мягких трансформаций фронта заканчивается формированием двух фингеров, распространяющихся независимо друг от друга.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 12-03-00944.

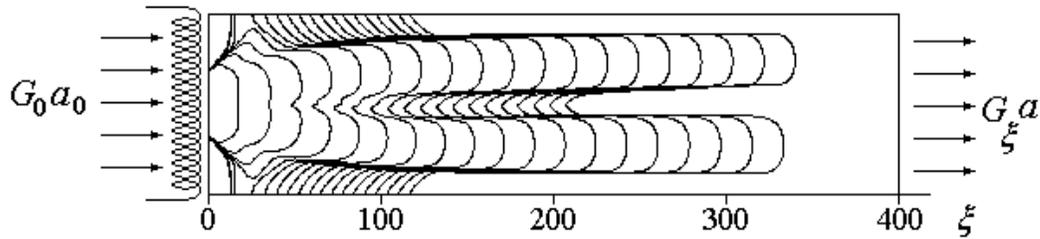


Рис. 12: Динамика структурирования фронта в длинном канале при локальном зажигании ( $K = 6$ ,  $d=48$ )

## Список литературы

- [1] Aldushin A.P. Advances in combustion science: In honor of Ya.B.Zel'dovich. Progress in aeronautics and astronautics, V.173, AIAA, Reston, 1997, pp.95 – 115
- [2] Алдушин А.П., Мержанов А.Г. В сб.: Распространение тепловых волн в гетерогенных средах. Новосибирск: Наука, 1988. С. 9 – 52. .
- [3] Aldushin A.P., Matkowsky B.J.// Comb. Sci. and Tech., 1998, V.133, pp. 293 – 341.
- [4] Saffman P.G., Taylor G.I.// Proc. Roy. Soc., 1958, A245, pp. 312 – 329.

---

## Обратимые структуры разрывов и усредненные уравнения в гидродинамических моделях с усложненной дисперсией

**И.Б. Бахолдин**

*Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, 125047,  
Россия, Москва, Миусская пл. д.4*

`ibbakh@yandex.ru`

Анализируются численные решения задачи о распаде произвольного разрыва для уравнений в частных производных, описывающих среды с усложненной дисперсией и нелинейностью [1]. Уравнения как правило относятся к неинтегрируемому типу. Рассматриваются чисто обратимые по пространству и по времени уравнения и аналогичные уравнения, где добавлена слабая диссипация. В первом случае со временем возникает решение, в котором протяженность волновых зон растет со временем. В

случае упорядоченного решения, оно автомодельное, огибающая зависит от  $x/t$ . Решение может быть также стохастическим. Во втором случае со временем расширение прекращается, решение становится стационарным, периодическим по времени или стохастическим. В упорядоченном случае волновые зоны описываются усредненными уравнениями, а не волновые зоны – упрощенными уравнениями. Внутри этих решений встречаются обратимые структуры разрывов (кинки). Они представляют собой переходы между однородными, периодическими, двоякопериодическими состояниями. Анализ результатов численных расчетов показывает, что в слабодиссипативном случае для некоторых интервалов амплитуды начального разрыва по мере уменьшения параметра диссипации происходит переход от стационарного решения к периодическому времени, а затем – к стохастическому, т.е. имеют место бифуркационные переходы, типичные для общей теории динамических систем и в частности для турбулентных процессов [2].

Разработана методика прогноза возможности существования структуры разрыва, основанная на оценке размерностей устойчивого и неустойчивого инвариантного многообразия системы обыкновенных дифференциальных уравнений бегущих волн. Эта методика подкреплена методами численного анализа решений обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющими найти решение и подтвердить или опровергнуть его существование. Необходимым условием устойчивости структуры разрыва является условие эволюционности. В случае гиперболичности упрощенных или усредненных уравнений согласно условию эволюционности число граничных условий на разрыве должно быть на единицу больше числа уходящих характеристик. Условия на разрыве появляются как следствия совпадения для разных сторон разрыва констант, возникающих при первичном интегрировании уравнений бегущих волн (основные граничные условия) и как условия существования решения уравнений бегущих волн (дополнительные граничные условия). Для кинков для каждой прямой структуры всегда существует обратная. Для выявленных типов кинков было обнаружено, что встречаются случаи, когда эволюционны обе структуры (полностью обратимые структуры) и когда одна эволюционна, а для другой число условий избыточно (частично обратимые структуры). Было сделано предположение, что это является общим свойством решений некоторого класса уравнений [3]. Для оценки числа уходящих характеристик анализируется, как расположена относительно дисперсионных кривых  $\omega = \omega(k)$  прямая  $V = \omega/k$ , соответствующая скорости разрыва. Для оценки характера решения на какой-либо стороне от разрыва (однородная зона, одноволновая зона, двухволновая) оценивается число пересечений этой прямой с дисперсионными ветвями. Число пересечений используется также для оценки размерностей инва-

риантных многообразий, однако такая оценка не всегда дает правильный результат для двухволновых решений, поэтому была разработана специальная методика, основанная на построении ветвей периодических решений [2]. В результате применения этой методики было обнаружено, что свойства семейств периодических решений в интегрируемом и неинтегрируемом случае существенно отличаются и резонансы играют большую роль. Под резонансом здесь понимается то, что отношение периодов волн равно рациональному числу. Длинноволновая ветвь рвется на фрагменты, переходящие в ветви с целым отношением периодов волн. Наблюдаются соответствующие структуры.

Все это позволило создать новую классификацию типов разрывов [3]. За нулевой класс приняты аналоги ударной волны в газовой динамике: для заданных значений констант первичного интегрирования уравнений бегущих волн существует одна, конечное или счетное число структур. В классе -1 для существования структуры требуется подбор параметра, обычно это скорость. В классе +1 у решения есть один свободный параметр. К рассмотрению допускаются и нестационарные структуры с многоволновыми зонами общего (нерезонансного) типа. В таком случае возможны структуры класса +2 и выше. В связи с тем, что один из методов поиска структур разрывов основан на последовательных предельных переходах от периодических волн к уединенным волнам, а затем к кинкам, в данную классификацию включены также периодические и уединенные волны.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, номер проекта 11-01-00034-а и Президентской программы поддержки ведущих научных школ, НШ-1303.2012.1.

## Список литературы

- [1] Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. М.:Физматлит, 2004. 318 с.
- [2] Бахолдин И.Б. Стационарные и нестационарные структуры разрывов для моделей, описываемых обобщенным уравнением Кортевега–Бюргерса// Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. N. 2, С. 271-302
- [3] Бахолдин И.Б. Методы исследования, теория и классификация обратимых структур разрывов в моделях гидродинамического типа. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, Москва, 2013, №30.

---

## Перемежаемость и обобщенное самоподобие в турбулентных пограничных слоях лабораторной и магнитосферной плазмы

В.П. Будаев, Л.М. Зеленый, С.П. Савин

НИЦ Курчатовский институт, 123182, пл. Курчатова 1, Москва, Россия  
Институт космических исследований Российской Академии Наук,  
117997, Москва, Россия

budaev@mail.ru

В турбулентных погранслоях (ТПС) магнитосферы Земли и вблизи границ плазмы, удерживаемой в термоядерных установках, наблюдаются перемежаемый характер флуктуаций и аномальный перенос массы и импульса за счет спорадических плазменных потоков с вероятностью больших амплитуд потока значительно большей, чем предсказывается гауссовым законом классической диффузии. Экспериментально обнаружено, что турбулентность в плазменных ТПС обладает обобщенным свойством масштабной инвариантности (расширенной автомодельности) в широком диапазоне характерных масштабов, простирающемся вплоть до масштабов диссипации. Такое свойство обеспечивает дальние корреляции в турбулентных погранслоях. Наблюдаемые свойства турбулентности плазменных погранслоев, такие как перемежаемость, обобщенное самоподобие, мультифрактальность, дальние корреляции не могут быть объяснены в рамках стандартных каскадных моделей турбулентности - модели изотропной турбулентности К41 Колмогорова и модели Ирошникова-Кречнана. Сравнительный анализ экспериментальных данных [1] показал, что скейлинги турбулентности и наблюдаемое свойство обобщенного самоподобия хорошо описываются лог-пуассоновской моделью турбулентности со случайным анизотропным каскадом в предположении существования филаментарных (квазиодномерных) диссипативных структур. Такие свойства наблюдаются также в турбулентности нейтральной жидкости, что служит аргументом в пользу предположения об универсальности статистических свойств турбулентности с перемежаемостью. Закон среднеквадратичного смещения частиц

$$\langle \delta x^2 \rangle$$

со временем

$$\tau,$$

полученный из экспериментальных данных и описываемый лог-пуассоновской моделью турбулентности,

$$\langle \delta x^2 \rangle \propto \tau^\alpha$$

с показателем

$$\alpha \approx (1, 2 \div 1, 8)$$

свидетельствует о наличии супердиффузии в плазменных турбулентных пограничных слоях [1]. Определение характера обобщенного диффузионного процесса из имеющихся регулярных данных является одним из необходимых шагов на пути количественного описания процессов переноса в ТПС. Полученные из эксперимента характеристики и скейлинги аномального диффузионного процесса в турбулентных погранслоях лабораторной и магнитосферной плазмы являются основой для рассмотрения универсальности статистических свойств турбулентности с перемежаемостью, наблюдаемой в различных средах - в плазменных и гидродинамических потоках.

## Список литературы

- [1] В. П. Будаев, С. П. Савин, Л. М. Зеленый, Наблюдения перемежаемости и обобщенного самоподобия в турбулентных пограничных слоях лабораторной и магнитосферной плазмы: на пути к определению количественных характеристик переноса, УФН, т. 181, №9, с. 905-952, 2011.

---

### Экспериментальное изучение турбулентности в пределах городской застройки

**М.И. Варенцов, П.И. Константинов, Т.Е. Самсонов, И.А. Репина, А.Ю. Артамонов, А.В. Глазунов**

*МГУ им. М.В. Ломоносова, Географический факультет, Кафедра метеорологии и климатологии, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1*

*МГУ им. М.В. Ломоносова, Географический факультет, Кафедра картографии и геоинформатики, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1*

*Институт физики атмосферы им. А.М.Обухова РАН, Лаборатория взаимодействия окна и атмосферы, 119017, Москва, Пыжевский пер., 3*

*Институт вычислительной математики РАН, Лаборатория взаимодействия окна и атмосферы, 119333, г. Москва, ул. Губкина, 8*

*mvar91@gmail.com, kostadini@mail.ru, tsamsonov@geogr.msu.ru, iar.ifaran@gmail.com, glazunov@inm.ras.ru*

Одной из актуальных задач современной метеорологии является улучшение качества прогноза погоды для урбанизированных территорий, в

пределах которых городская застройка оказывает существенное влияние на состояние пограничного слоя атмосферы. Данная задача является крайне широкой и включает в себя предсказание таких явлений, как городской остров тепла, экстремальные скорости ветра в условиях городских улиц, опасные концентрации загрязнений и т.д. Для всех этих явлений и для всех сроков прогноза, от краткосрочного до климатического, необходимо учитывать влияние городской застройки на состояние приземного и пограничного слоев атмосферы, и, в первую очередь, на характеристики турбулентности, во многом определяющие температурный и ветровой режим пограничного слоя.

В настоящее время все эти факторы лишь начинают включаться в прогностические модели атмосферы через различные параметризации, описывающие влияние городской застройки, например, на основе концепции городского каньона [4] – упрощенной модели улицы с вытянутыми вдоль нее домами. Нужно отметить, что практически все эти параметризации включают в себя эмпирические или полуэмпирические компоненты, определяемые на основе данных измерений. При этом, измерений в пределах городской застройки, а тем более в пределах городских каньонов – оживленных городских улиц – осуществляется не так уж много даже в Европе, а в России они ранее не проводились вообще. В данном исследовании предпринята попытка проведения экспериментальных измерений *in situ* в городской застройке в пределах Московского мегаполиса и использования данных наблюдений для изучения характерных особенностей турбулентности, а также для тестирования и улучшения модельных параметризаций. Под экспериментальными измерениями здесь имеются в виду эксперименты UrbEx-2011 и UrbEx-2013, проведенные, соответственно, в апреле 2011 года и июле 2013 года и являющиеся первыми в России измерениями характеристик турбулентности в пределах городской застройки. Эксперимент UrbEx-2011 был направлен, в первую очередь, на изучение микроклиматических различий между городским каньоном и расположенной по соседству лесопарковой зоной на территории МГУ, и позволил выявить существенную разницу как в значениях температуры и скорости ветра, так и турбулентных потоков, оцениваемых методом ковариации вихревых пульсаций, между двумя точками, расположенными на расстоянии 100 метров друг от друга. Полученные данные использовались для тестирования и улучшения параметризаций для мезомасштабных моделей, основанных на модифицированной схеме городского каньона согласно [3].

Эксперимент UrbEx-2013 был проведен в самом центре Москвы и был направлен на изучение характеристик воздушных потоков в двух перпендикулярных городских каньонах: Пыжевском и Старомонетном переулках. В ходе этого эксперимента впервые были опробованы мобильные

автономные измерительные комплексы, собираемые на базе легковых автомобилей и оборудованные автоматическими метеостанциями DAVIS VANTAGE PRO 2 и акустическими анемометрами METEC. Данные измерений позволили получить представление о поведении скорости ветра в двух перпендикулярных каньонах, один из которых расположен параллельно направлению ветра над городом, а другой – перпендикулярно ему. В частности, было показано, что несмотря на то, что средняя скорость ветра выше в параллельном потоку каньоне, скорость максимальных порывов выше в перпендикулярном потоку каньоне, что важно для задачи прогноза экстремальных скоростей ветра в пределах городской застройке. Результаты измерительного эксперимента сравнивались с результатами численного моделирования с помощью вихреразрешающей модели ИВМ РАН [1, 2], в результате чего было показано, что результаты измерений и моделирования хорошо соответствуют друг другу.

\* Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук МК-1497.2013.5

\*\* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 12-05-33090 и № 13-05-41443

## Список литературы

- [1] Глазунов А.В. Вихреразрешающее моделирование турбулентности с использованием смешанного динамического локализованного замыкания. Часть 1. Формулировка задачи, описание модели и диагностические численные тесты. // Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2009, т. 45, с. 7-28
- [2] Глазунов А.В. Вихреразрешающее моделирование турбулентности с использованием смешанного динамического локализованного замыкания. Часть 2. Численные эксперименты; моделирование турбулентности в канале с шероховатыми границами. // Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2009, т. 45, с. 29-42.
- [3] Martilli A., Clappier A., Rotach M.W. An urban surface exchange parameterization for mesoscale models // Bound. Layer. Meteor. 2002. N. 104. P. 261–304.
- [4] Nunez M., Oke T.R. The energy balance of an urban canyon // J. Appl. Meteor. 1977. V. 16. P. 11-19.

---

# Автомодельный турбулентный пограничный слой с градиентом давления. Четыре режима течения

И.И. Вигдорович

Институт механики Московского государственного университета им.  
М.В. Ломоносова, Мичуринский пр., 1, Москва, 119192, Россия

Исследованы автомодельные течения несжимаемой жидкости в турбулентном пограничном слое, когда скорость набегающего потока задана как степенная, с показателем  $m$ , функция продольной координаты. Автомодельная постановка не только упрощает решение, сводя уравнения движения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, но и позволяет сформулировать условия замыкания задачи. Показано, что для рассматриваемого класса течений, зависящих от трех определяющих параметров, безразмерный путь смещения во внешней области есть функция относительного расстояния до стенки и показателя  $m$ , а в пристеночной области — универсальная функция локального числа Рейнольдса, причем последний вывод справедлив и при обращении в нуль трения на стенке. В расчетах эта функция полагалась не зависящей от градиента давления, что дает результаты очень близкие к экспериментальным данным. Существуют четыре различных автомодельных режима течения. Каждому режиму отвечает свой параметр подобия, одним из которых является известный параметр равновесности Клаузера, а три других установлены впервые. При неблагоприятном градиенте давления, когда показатель степени  $m$  лежит в некотором диапазоне, зависящем от числа Рейнольдса, задача имеет два решения с разными значениями толщины пограничного слоя и трения на стенке, что указывает на возможность гистерезиса в предотрывном течении. Отрыв наступает не при минимальном значении  $m$ , которое соответствует наиболее сильному неблагоприятному градиенту давления, а при  $m = -0.216 - 0.4\text{Re}_p^{-1/3} + O(\text{Re}_p^{-2/3})$ , где  $\text{Re}_p$  — число Рейнольдса, образованное по продольному градиенту давления. Результаты теории находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

Для турбулентного пограничного слоя со степенным распределением скорости набегающего потока существуют четыре автомодельных режима течения. При благоприятном и умеренном неблагоприятном градиенте давления (первый режим) пограничный слой имеет обычную двухслойную структуру, такую же как при безградиентном течении. Параметром подобия является известный параметр равновесности Клаузера  $\beta$  [1, 4].

При сильном неблагоприятном градиенте давления (второй режим) пограничный слой становится трехслойным. Над логарифмическим подслоем вблизи стенки образуется промежуточная область — градиентный подслой, в котором касательное напряжение изменяется линейно. Во внешней части градиентного подслоя профиль скорости подчиняется закону квадратного корня. Во внешней области профиль скорости в переменных подобия описывается универсальной (зависящей только от безразмерного расстояния до стенки) функцией. Параметром подобия служит величина  $\omega = (c_f/2)^{1/6} \sqrt{1 + \beta}$ . В этом режиме при каждом значении показателя степени  $m$  существуют ровно два решения с разными значениями толщины пограничного слоя и трения на стенке. Переход с одной ветви решения на другую происходит при величине параметра подобия  $\omega \approx 0.66$ . Относительная толщина пограничного слоя зависит от продольной координаты и убывает вниз по потоку пропорционально  $(\ln Re_x)^{-1}$  и  $(\ln Re_x)^{-2/3}$  для первого и второго режима соответственно [2].

Третьим является предотрывный режим течения, при котором пограничный слой по-прежнему имеет трехслойную структуру. Эта структура такова, что профиль скорости, полученный из решения для внешней области, удовлетворяет на стенке условию «проскальзывания» и кроме того подчиняется закону квадратного корня. Величина проскальзывания уменьшается по мере роста параметра подобия  $\Omega = \sqrt{-\delta_* U' / \bar{U}}$  и обращается в нуль при значении  $\Omega_* = 0.0911$ , которому отвечает отрыв. Предотрывный режим — это последний режим течения, при котором профиль скорости имеет логарифмический участок [3].

Логарифмический подслой полностью исчезает при четвертом режиме течения, при котором трение на стенке может обратиться в нуль. Ему приходит на смену промежуточная область, в которой профиль скорости подчиняется закону квадратного корня. Пограничный слой вновь приобретает двухслойную структуру. Во внешней области профиль скорости в переменных подобия описывается одной универсальной кривой, полученной при  $\Omega = \Omega_*$ . Параметром подобия является величина  $\tau = Re_p^{2/3} c_f / 2$ . Решение дает поправку порядка  $Re_p^{-1/3}$  для значения параметра  $\Omega$ , при котором происходит отрыв потока. При третьем и четвертом режимах толщина пограничного слоя и интегральные параметры в первом приближении линейно растут по длине, однако всегда, во всех четырех случаях, трение на стенке не постоянно и зависит от продольной координаты.

В результате точного асимптотического решения задачи установлен характерный масштаб дефекта скорости во внешней области (закон дефекта скорости), справедливый для всех четырех режимов течения. Рассчитаны два семейства безразмерных профилей скорости, зависящих от параметров  $\beta$  и  $\Omega$ . Сформулированы законы подобия для профилей ком-

понент тензора Рейнольдса. Установлен закон трения, справедливый во всем диапазоне изменения градиента давления, от благоприятного до вызывающего отрыв пограничного слоя. В формулировку закона входят три универсальные функции от переменных  $\beta$ ,  $\Omega$  и  $\tau$  соответственно. Показатель степени  $m$  есть функция двух параметров подобия  $\beta$  и  $\Omega$ .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 12-08-00260).

## Список литературы

- [1] Вигдорович И. И. Закон дефекта скорости для автомодельного турбулентного пограничного слоя с градиентом давления// ДАН. 2011. Т. 437. № 6. С. 759–765.
- [2] Вигдорович И. И. Автомодельный турбулентный пограничный слой с градиентом давления. Закон дефекта скорости// ЖЭТФ. 2013. Т. 144. Вып. 2(8). С. 413–427.
- [3] Вигдорович И. И. Явление гистерезиса в турбулентном пограничном слое при сильном неблагоприятном градиенте давления// ДАН. 2012. Т. 444. № 1. С. 42–46.
- [4] Вигдорович И. И. Автомодельный турбулентный пограничный слой в состоянии, близком к отрыву// ДАН. 2012. Т. 445. № 5. С. 516–520.

---

### Интегральные оценки критических чисел Рейнольдса для уравнения Орра — Зоммерфельда

Д.В. Георгиевский, В.Х. Мюллер, Б.Э. Абали

МГУ имени М.В.Ломоносова, Воробьёвы Горы, Москва, 119991, Россия

*Technische Universität Berlin, Einsteinufer 5, D-10587, Berlin, Germany*

georgiev@mech.math.msu.su, wolfgang.h.mueller@tu-berlin.de,

abali@tu-berlin.de

В линеаризованной теории гидродинамической устойчивости большое место занимают задачи устойчивости одномерного стационарного плоскопараллельного течения сплошной среды. К числу таких течений относится движение ньютоновской жидкости в плоском слое. При этом речь идёт прежде всего о течениях Куэтта, Пуазейля и их возможных

комбинациях. Исследованию устойчивости таких течений, выполненному в духе как прямого анализа спектральных задач, так и с привлечением других методов, посвящено большое количество работ (см. обзоры в [1, 2, 3]).

Среди упомянутых других методов выделим развиваемый в докладе метод интегральных соотношений [4, 5, 6]. Он позволяет получать довольно общие, в основном достаточные, оценки гидродинамической устойчивости, т. е. нижние оценки критических чисел Рейнольдса. В широком смысле он включает в себя использование интегральных неравенств (типа неравенств Фридрихса, Пуанкаре, Шварца) и априорных оценок в различных функциональных пространствах [7].

В докладе [8, 9] на основе метода интегральных соотношений аналитически исследуется устойчивость ряда одномерных плоскопараллельных стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Математическая постановка сводится к задачам на собственные значения для уравнения Орра — Зоммерфельда. В качестве граничных условий выбирается один из трех вариантов: равенство нулю всех компонент возмущения скорости на обеих границах слоя (в этом случае имеет место классическая задача Орра — Зоммерфельда); равенство нулю всех компонент возмущения скорости на одной из границ и равенство нулю возмущений касательной компоненты вектора напряжения и нормальной компоненты скорости на другой; равенство нулю всех компонент возмущения скорости на одной границе и требование, чтобы другая граница была свободна. Граничные условия, выведенные в последнем случае, характеризуются вхождением в них спектрального параметра. Для кинематических условий улучшаются нижние оценки критического числа Рейнольдса — оценки Джозефа — Йи. В остальных случаях развивается техника метода интегральных соотношений, что приводит к новым оценкам устойчивости. Для граничных условий всех перечисленных типов выводятся аналоги теоремы Сквайра. Даются верхние оценки инкремента роста возмущений в задачах на собственные значения для уравнения Релея с двумя типами граничных условий.

## Список литературы

- [1] *Lin C.C.* The Theory of Hydrodynamic Stability. Cambridge: Univ. Press, 1955 = *Линь Цзя-цзяо* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
- [2] *Betchov R., Criminale W.O.* Stability of Parallel Flows. N.Y., London: Acad. Press, 1967 = *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 350 с.

- [3] *Гольдштик М.А., Штерн В.Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
- [4] *Козырев О.Р., Степаняни Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 25. С. 3–89.
- [5] *Климов Д.М., Петров А.Г., Георгиевский Д.В.* Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость, перемешивание. М.: Наука, 2005. 394 с.
- [6] *Георгиевский Д.В.* Вариационные оценки и метод интегральных соотношений в задачах устойчивости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 23. С. 96–146.
- [7] *Rektorys K.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Prague: SNTL, 1980 = *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.
- [8] *Георгиевский Д.В.* Новые оценки устойчивости одномерных плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 4. С. 633–644.
- [9] *Георгиевский Д.В., Мюллер В.Х., Абали Б.Э.* Задачи на собственные значения для обобщённого уравнения Орра — Зоммерфельда в теории гидродинамической устойчивости // Докл. РАН. 2011. Т. 440. № 1. С. 52–55.

---

## Формирование турбулентного потока за двумерной периодической структурой

А.В. Глушнева, А.С. Савельев, Э.Е. Сон

ОИВТ РАН

В последнее время уделяется огромное внимание изучению турбулентных течений. В лабораторных условиях для создания турбулентности в потоке применяются турбулизаторы - это двумерные или трехмерные периодические структуры, призванные внести возмущение в поток. От геометрии данной структуры зависит турбулизация потока - характерный масштаб вихревых возмущений  $u'$  и интегральный масштаб турбулентности  $L$ , а так же расстояние, на котором образуется однородный турбулентный поток [1].

В настоящей экспериментальной работе для турбулизации потока используется двумерная периодическая структура — решетка. Решетка представляет собой сплетенную стальную проволоку жесткозакрепленную на раму. Геометрические параметры решетки: размером ячейки —  $1 \times 1 \text{ см}^2$ , диаметр проволоки — 3 мм. Решетка помещается на выходе из сопла сверхзвуковой трубы СТ-4, которая создает сверхзвуковой поток  $M=2$ . В качестве метода диагностики потока применяется теневой метод.

Теневая визуализация потока позволила рассмотреть структуру течения. При обтекании решетки сверхзвуковым потоком от прутьев отходят ударные волны, которые на расстоянии толщины прута превращаются в скачки уплотнения, а затем вырождаются в слабые возмущения и исчезают. За прутком решетки распространяется турбулентный след. Турбулентный след расширяется проходя первое пересечение скачков уплотнения, а затем теряется в однородной структуре потока. Предыдущие исследования выявили усиление возмущений турбулентности и убывание интегрального масштаба турбулентности при пересечении скачка уплотнения [2], однако в случае слабых возмущений, распространяющихся от решетки, усиление турбулентности не было обнаружено. Визуализация потока показывает, что на расстоянии в несколько размеров ячейки  $3-4d$  поток становится равномерно турбулизированным с характерным размером турбулентности порядка  $0.5d$ .

## Список литературы

- [1] N. P. Mikhailova, E. U. Repik, and Yu. P. Sosedko Reynolds Number Effect on the Grid Turbulence Degeneration Law // Fluid Dynamics, Vol. 40, No. 5, 2005, pp. 714–725.
- [2] А.Н. Секундов Вязкие течения, турбулентность горение // М. Машиностроение. 2000 Кн. 2. 725 с.

---

## Гравитационная турбулентность и крупномасштабная структура Вселенной

С.Н. Гурбатов, А.И. Саичев, С.Ф. Шандарин

*Радиофизический факультет, Нижегородский государственный университет*

*Department of Physics and Astronomy, University of Kansas*

`gurb@rf.unn.ru`

В космологии понятие крупномасштабной структуры относится к распределению галактик и массы темного вещества (на масштабах от одного до нескольких сотен мегапарсек). Современная теория объясняет формирование крупномасштабной структуры Вселенной как следствие роста исходных слабых флуктуаций плотности вещества за счет гравитационной неустойчивости. При этом формирование ярко выраженных элементов структуры происходит на нелинейной стадии. Именно поэтому процесс формирования крупномасштабной структуры принято иногда называть гравитационной турбулентностью.

Наиболее очевидный путь преодоления сложности учета законов нелинейной эволюции гравитационной неустойчивости на поведение поля плотности вещества состоит в численном моделировании трехмерного движения  $N$  гравитационно взаимодействующих частиц. Альтернативой являются приближенные аналитические решения некоторых уравнений в частных производных, адекватно описывающих рост флуктуаций неоднородной плотности вещества в расширяющейся Вселенной. Первый из этих подходов был предложен Зельдовичем в 1970 году. Второй аналитический подход к проблеме описания формирования крупномасштабной структуры Вселенной [1] базируется на векторном уравнении Бюргерса. В данном подходе многопотокное движение гравитационно взаимодействующих частиц в особенностях, приводящее к их локализации, моделируется вязким слагаемым в уравнении Бюргерса. В предельном случае исчезающе малой вязкости это эквивалентно слипанию частиц и поэтому данный подход часто называют приближением слипания - *adhesion model* (см., например, [2, 3, 4]). Предельная версия модели слипания естественным образом описывает характерную мозаичную структуру распределения вещества во Вселенной. Основные элементы “мозаики” в трехмерном пространстве (вершины, ребра, грани и внутренности ячеек) могут быть ассоциированы с наблюдаемыми структурами трехмерного распределения галактик (компактные скопления галактик, филаменты – цепочки галактик, поверхности со сравнительно высокой плотностью галактик, и темные области между ними, бедные галактиками).

Сама эволюция крупномасштабной структуры Вселенной может трактоваться как непрерывный процесс транспортировки вещества преимущественно из объектов большой размерности к объектам мозаичной структуры, обладающим меньшей размерностью. К примеру, вещество из внутренних ячеек мозаичной структуры (трехмерных объектов) перетекает в ее грани (квазидвумерные объекты), а из них в ребра и вершины мозаичной структуры. В то же время, сами ячейки участвуют в непрерывном движении, деформации и поглощении одних ячеек другими.

Как и в одномерном случае, для многомерной турбулентности Бюргера с конечной дисперсией начального потенциала удается дать исчерпывающее описание турбулентности, найти **одно- и двухточечные вероятностные распределения, спектры и корреляционные функции векторного поля** [2, 5]. В общем случае поведение турбулентности на больших временах определяется «хвостами» функции распределения начального потенциала. При этом в зависимости от вида начального распределения потенциала могут реализоваться три универсальных автомодельных режима затухания турбулентности.

Работа выполнена при поддержке Мегагранта Российского правительства № 11.G34.31.066 и гранта государственной поддержки ведущих научных школ

## Список литературы

- [1] Gurbatov S.N., Saichev A.I., & Shandarin S.F. 1989, Mon. Not. R. astr. Soc., 236, 385
- [2] *Gurbatov S.N., Malakhov A.N., Saichev A.I.* Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays and particles. — Manchester University Press, 1991. — 308 p.
- [3] *Vergassola M., Dubrulle B., Frisch U., Noullez A.* 1994, Astron. Astrophys. 289. 325.
- [4] Гурбатов С. Н., Саичев А. И., & Шандарин С. Ф. 2012 УФН, (182 ), 233
- [5] *Gurbatov S.N., Rudenko O.V., & Saichev A.I.* Waves and Structures in Nonlinear Nondispersive Media. General Theory and Applications to Nonlinear Acoustics. — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Germany, 2012. — 500 p . c.

# Неустойчивость контактной границы двухфазной системы жидкостей со сложной реологией

А.Н. Долуденко

Объединенный институт высоких температур, ул. Ижорская, дом 13,  
стр. 2, Москва, 125412, Россия

adoludenko@gmail.com

Течения сред со сложной реологией являются важным классом фундаментальных и прикладных задач, а области применения включают химическую, металлургическую, пищевую промышленности.

Настоящая работа посвящена неустойчивости Релея-Тейлора вязкопластической, дилатантной и псевдопластической жидкостей. В качестве основной реологической модели, включающей эффекты вязкопластической жидкости, была выбрана модель Бингама. В численном моделировании рассматривается многомодовое возмущение поля скорости контактной границы двух сред (рис. 13). Главной целью работы было проведение численного моделирования перемешивания двух сред с различными реологиями, плотности которых отличаются в два раза, и получение взаимосвязи между развитием неустойчивости и характерными свойствами неньютоновских жидкостей. Отличительной особенностью этой модели является то, что в системе из двух фаз каждая из них имеет различные реологические зависимости.

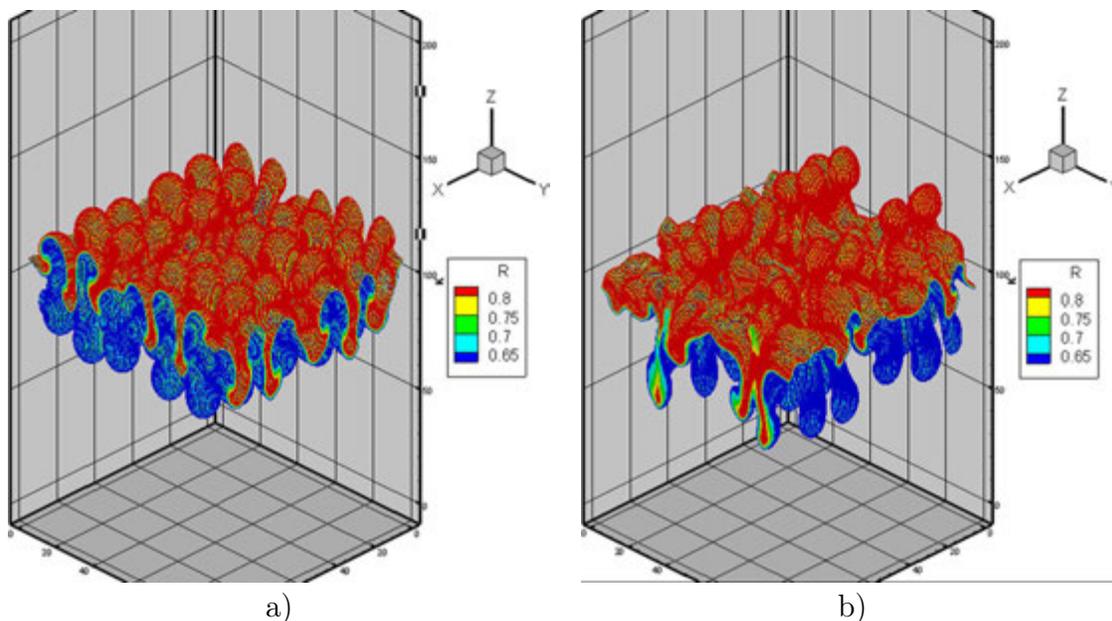


Рис. 13: Топология границы раздела при перемешивании ньютоновских (а) и бингамовских (b) жидкостей в результате развития неустойчивости Релея-Тейлора.

---

## Прямое численное моделирование течений с использованием вихревых и дипольных частиц

Г.Я. Дынникова

МГУ Имех, Мичуринский проспект, д. 1, Москва 119192, Россия

`dyn@imec.msu.ru`

Вихревые методы численного моделирования течений позволяют исследовать динамику взаимодействия разномасштабных вихревых структур, что актуально для понимания процессов возникновения и развития турбулентности. В основе вихревых методов лежит расчет эволюции вихревого поля в лагранжевых координатах. Для этого область завихренности представляется набором движущихся вихревых элементов. В результате появляется возможность построения бессеточных численных схем. Привлекательность таких схем обусловлена возможностью экономии вычислительных ресурсов, так как во многих случаях вихревые области занимают относительно небольшую часть течения, кроме того, бессеточные методы существенно облегчают расчеты при сложной и изменяющейся во времени геометрии обтекаемых тел. Поле скорости несжимаемой жидкости может быть вычислено по распределению завихренности с помощью формулы Био–Савара.

Вихревые методы применяются для расчета, как двумерных, так и трехмерных течений. Однако, в случае трехмерных течений возникает проблема дискретизации вихревого поля, затрудняющая применение бессеточных методов. Это связано с тем, что соленоидальность поля завихренности, набранного из дискретных элементов в трехмерном пространстве, может нарушаться при движении элементов, в результате чего ротор поля скорости, вычисленного по формуле Био–Савара, может существенно отличаться от поля, образованного элементами, что является источником погрешностей, плохо поддающихся анализу. Поэтому в настоящее время для расчета таких течений используются гибридные методы, сочетающие бессеточный подход для описания перемещения вихревых элементов с их последующим перераспределением на сетке в целях восстановления соленоидальности. Построение строго обоснованного полностью лагранжева вихревого метода для трехмерных течений до сих пор остается открытой проблемой.

В данной работе для исследования двумерных течений применяется бессеточный вихревой метод Вязких Вихревых Доменов (ВВД) [1, 2], а для трехмерных течений предложен новый метод Вязких Дипольных Доменов (ВДД) [3].

Метод ВВД обладает рядом преимуществ по сравнению с существующими вихревыми методами моделирования двумерных течений, он не

содержит эмпирических параметров, обладает низкой схемной вязкостью, устойчивостью численной схемы, и является обоснованным методом решения уравнений Навье-Стокса в лагранжевых координатах. Благодаря низкой схемной вязкости и устойчивости численной схемы метод ВВД позволяет рассчитывать течения при высоких значениях числа Рейнольдса без привлечения моделей турбулентности. В частности, этим методом был воспроизведен эффект снижения коэффициента сопротивления (так называемый, кризис сопротивления), наблюдаемый при обтекании цилиндра в диапазоне чисел Рейнольдса  $10^5 < Re < 10^6$ . Традиционно данный эффект объясняется турбулизацией течения в области отрыва пограничного слоя.

Для моделирования трехмерных течений в данной работе используется вспомогательная векторная функция, названная плотностью диполей. Дискретизация поля диполей приводит к рассмотрению множества частиц взаимодействующих друг с другом по закону взаимодействия диполей. Ранее попытки моделирования турбулентных течений с помощью диполей предпринимались в работах [4, 5]. Однако они не были доведены до реализации численных методов, возможно, из-за неустойчивости численных схем, в которых диполи считались точечными, а жидкость идеальной. В данной работе при взаимодействии дипольных частиц учитывается их протяженность а также наличие вязкости жидкости. Выведены уравнения эволюции поля плотности диполей, эквивалентные уравнениям Навье-Стокса. Построена численная схема со свойствами консервативности. Приводятся примеры расчетов.

## Список литературы

- [1] Дынникова Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье-Стокса // ДАН 2004. Т.399. №1. С. 42-46.
- [2] Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я.. Моделирование обтекания колеблющегося профиля методом вязких вихревых доменов. // Известия РАН. МЖГ. 2007. № 1. С. 3-14.
- [3] Дынникова Г.Я. Расчет трехмерных течений несжимаемой жидкости на основе дипольного представления завихренности // ДАН. 2011. Т. 437, №1. С. 35-38.
- [4] Яненко Н.Н., Веретенцев А.Н., Григорьев Ю.Н. Гамильтонов формализм для пространственной системы малых вихрей в идеальной жидкости // Численные методы механики сплошной среды. 1979. Т. 10. № 5. С. 144-149.

- [5] Чефранов С.Г. Динамика точечных вихревых диполей и спонтанная сингулярность в трехмерных турбулентных потоках. //Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1987. Т. 93. С. 151-158.

---

## Немодовые эффекты устойчивости конвективного течения в гидродинамической модели роста кристаллов по Чохральскому

М.К. Ермаков

*ИПМех РАН, просп. Вернадского 101/1, Москва, 119526, Россия*

`ermakov@ipmnet.ru`

Эволюционные операторы для возмущений во многих гидродинамических системах не являются нормальными. Неортогональность собственных мод таких систем может приводить к значительному росту энергии системы в переходный период за короткие промежутки времени даже для асимптотически устойчивых течений [1, 2].

Рассматривается глобальная устойчивость конвективного течения в гидродинамической модели роста кристаллов по Чохральскому в широком диапазоне чисел Прандтля от 0,005 до 30 по отношению к двумерным и трехмерным возмущениям. Модель представляет собой осесимметричный объем жидкости в тигле, свободной поверхности которой сверху касается кристалл. Естественно-конвективное течение возникает благодаря разнице температур между стенкой тигля и поверхностью кристалла. Течение описывается уравнениями Навье-Стокса в приближении Буссинеска с уравнением притока тепла. Исследование линейной устойчивости сильно нелинейного осесимметричного течения сводится к решению обобщенной задачи на собственные значения  $Ax = \lambda Bx$  с вырожденной матрицей  $B$ . Решение таких задач для нелинейных осесимметричных течений на основе метода Ньютона в матричной форме для нахождения базисного решения и методе обратных итераций для решения обобщенной задачи на собственные значения разработано в [3].

Для чисел Прандтля жидкости в диапазоне от 0,005 до 30 найдены кривые нейтральной устойчивости (критические числа Грасгофа), азимутальные волновые числа которых меняются от 1 до 6 в зависимости от числа Прандтля. Для чисел Прандтля выше 12 наиболее неустойчивой становится двумерная мода. Данные результаты сравниваются с результатами работы [4], в которой точки нейтральной кривой определялись методом прямого численного моделирования для ограниченного набора чисел Прандтля. Различие результатов наблюдается для трехмерных возмущений при числах Прандтля 0,05 и 30. Для выявления причины

различия результатов были проведены расчеты эволюционного поведения системы с тем же оператором для случайных возмущений.

В случае числа Прандтля 30 для слабо надкритических значений числа Грасгофа возмущения начальных данных вырастают более чем в 100 раз на переходном этапе, что может быть интерпретировано как наличие неустойчивости при ограниченном интервале интегрирования. В случае числа Прандтля 0,05 для надкритических значений числа Грасгофа при некоторых начальных возмущениях получено кратковременное уменьшение амплитуды возмущений примерно в 10 раз, что может быть интерпретировано как устойчивое состояние.

## Список литературы

- [1] L.N. Trefethen, A.E. Trefethen, S.C. Reddy, T.A. Driscoll. Hydrodynamic stability without eigenvalues, *Science* 261 (1993) 578-584.
- [2] P.J. Schmid. Nonmodal stability theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 39 (2007) 129-162.
- [3] M.K. Ermakov, M.S. Ermakova. Linear-stability analysis of thermocapillary convection in liquid bridges with highly deformed free surface. *J. Crystal Growth* 266 (2004) 160-166.
- [4] О.А. Бессонов, В.И. Полежаев. Неустойчивости тепловой гравитационной конвекции и теплообмен в модели метода Чохральского при различных числах Прандтля. *Изв. РАН, серия МЖГ.* 2013, № 1, с. 26-40.

---

## Пограничный слой в турбулизированном потоке жидкости

**В.М. Зубарев**

*ИПМех РАН*

*Россия, 119526, г.Москва, пр-т Вернадского 101, корп. 1*

*zubarev@ipmnet.ru*

Для исследования пристенных пограничных слоев и изучения влияния турбулизированного внешнего потока рассмотрена модифицированная модель турбулентности  $k$ - $\varepsilon$  (переноса кинетической энергии  $k$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$ ), позволяющая рассчитывать непрерывным образом области с ламинарными, переходными и турбулентными режимами течения, при различных интенсивностях турбулентности набегающего

потока  $Tu_\infty$ . Изучено влияние параметров интенсивности турбулентности и величины её масштаба  $L_\infty$  [1] на структуру перехода в пограничном слое в диапазоне от малых до больших значений локальных чисел Рейнольдса [2, 3].

При обтекании плоской пластинки потоком несжимаемой жидкости с большой степенью турбулентности  $Tu_\infty = 4.86\%$  [6] результаты расчетов по пристеночной  $k$ - $\varepsilon$  модели [4, 5], записанной для для полной скорости диссипации, сопоставлены с результатами измерений [6] по профилям скорости и интенсивности турбулентности. При численном моделировании использовались данные эксперимента.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы РФФИ (грант №12-08-00260).

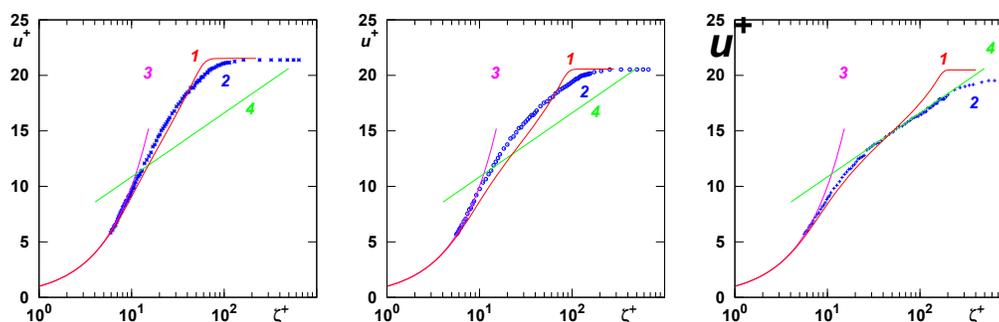


Рис. 14: Сравнение рассчитанных и измеренных профилей продольной средней скорости  $u^+(\zeta^+)$  соответственно в сечениях пограничного слоя:  $\xi' = 0.2, 0.3, 0.6$ . Здесь 1 – расчет по модели [4, 5] при  $\varepsilon' = 1.84$ ; безразмерная скорость диссипации энергии турбулентности  $\varepsilon'_\infty = R\varepsilon_\infty/V_\infty^3$  связана с диссипационным масштабом  $L_\infty$  обратно пропорциональной зависимостью:  $\varepsilon_\infty = c_D k_\infty^{3/2}/L_\infty$ ;  $c_D = 0.164$ ;  $R$  – длина пластинки;  $V_\infty$  – скорость набегающего потока; 2 – экспериментальные точки  $\bullet, \blacklozenge, \blacksquare$  из [6]; 3 – линейный закон стенки  $u^+ = \zeta^+$ ; 4 – логарифмический профиль  $u^+ = 2.5 \ln \zeta^+ + 5.1$ ;

## Список литературы

- [1] Драйден Х.Л. Переход ламинарного течения в турбулентное // Турбул. течения и теплопередача. Аэродин. больших скоростей и реакт. техника. - М.: ИЛ, 1963, с.9-82.
- [2] Алексин В.А., Зубарев В.М. Моделирование влияния параметров турбулентности набегающего потока на пристеночные переходные течения в пограничном слое // Мат. модел. РАН, 2008, т.20, №8, с.87-106.

- [3] Зубарев В.М. Влияния параметров турбулентности набегающего потока на переходные течения в пограничном слое // Матер. междуна-род. конф. "Нелин. задачи теории гидродинам. устойч. и турбулент-ность 05 фев.-11 фев. 2012г. Моск. обл. панс. "Звенигородский" РАН - М: Изд.НИИ механики МГУ, 2012, с. 83-85.
- [4] Myong H.K., Kasagi N. A new proposal for a k-e turbulence model and its evaluation. 1st report, development of the model // Trans. Japan Soc. Mech. Eng., B, 1988, v.54, N 507, p.3003-3009.
- [5] Myong H.,K., Kasagi N. A new proposal for a k-e turbulence model and its evaluation. 2nd report, evaluation of the model // Trans. Japan Soc. Mech. Eng., B, 1988, v.54, N 508, p.3512-3520.
- [6] Epik E.Ya. Heat transfer effects in transitions // Engin. Found. Conf., March 10-15, 1996, New York - San Diego, California, 1996, p.1-47.

---

## **Подавление турбулентности в интенсивных атмосферных вихрях – механизм положительной обратной связи**

**Л.Х. Ингель**

*ФГБУ «НПО «Тайфун» (Росгидромет)*

*Россия, 249038, Калужская обл.,г. Обнинск, ул. Победы, 4*

*lev.ingel@gmail.com*

Для интенсивных атмосферных вихрей (торнадо, тропических циклонов) характерен так называемый циклострофический баланс – приближенное равновесие между направленной к оси вращения силой градиента давления и суммой центробежной и кориолисовой сил (последняя обусловлена планетарным вращением и в центральных областях интенсивных вихрей обычно пренебрежимо мала). Этот баланс нарушают, прежде всего, диссипативные факторы – вязкость и теплопроводность. При больших сдвигах скорости, существующих в таких вихрях, турбулентность и связанная с ней диссипация вихря, на первый взгляд, должны быть весьма интенсивными и эффективными. Например, при горизонтальных размерах смерча 30 м, и коэффициенте турбулентного обмена 10 м<sup>2</sup>/с стандартная оценка характерного времени диффузионных процессов дает время диссипации вихря порядка одной минуты. Но такие вихри обычно существуют заметно дольше, и даже когда они существуют недолго, наблюдаемая картина обычно не похожа на классическую

диффузию: наблюдается весьма резко выраженная вертикальная или наклонная граница вихря [1, 2]. Такие градиенты (скачки) представляются несовместимыми с интенсивным турбулентным перемешиванием. В качестве объяснения, можно предположить, что важную роль в интенсивных вихрях играют некоторые особенности взаимодействия вращения и турбулентности. Известно, что интенсивное вращение может, подобно устойчивой стратификации плотности, заметно подавлять турбулентность [3 – 6]. Поэтому просматривается следующий механизм положительной обратной связи. Быстрое вращение подавляет турбулентность, а это, в свою очередь, способствует поддержанию и интенсификации циклострофического режима с большими скоростями вращения и горизонтальными перепадами давления и плавучести. В настоящем докладе эта мысль проиллюстрирована некоторыми простыми аналитическими моделями. На основе анализа полуэмпирического уравнения баланса турбулентной энергии (модифицированного с учетом эффектов вращения) оценено характерное время подавления турбулентности в смерче. Результаты показывают, что в ядре интенсивного вихря турбулентность подавляется за время, сравнимое с характерным периодом вращения, т.е. весьма эффективно. Это, в частности, затрудняет проникновение турбулентности «извне» в направлении оси вращения. Последнее обстоятельство дает возможное объяснение и наблюдаемому отсутствию сильных порывов ветра в глазе тропического циклона (предлагается соответствующая аналитическая модель нелинейной диффузии энергии турбулентности). Рассмотрена также простая линейная модель конвекции во вращающейся среде, демонстрирующая интенсификацию вращения при ослаблении диссипативных факторов (турбулентного обмена). Результаты будут подробно изложены в [7].

## Список литературы

- [1] Природные опасности России. Т.5. Гидрометеорологические опасности. Под ред. Г.С. Голицына и А.А. Васильева. М.: Крук, 2001. 296 с.
- [2] Наливкин Д.В. Смерчи. М.:Наука, 1984. 110 с.
- [3] Луговцов Б.А. Лабораторные модели торнадоподобных вихрей. В сб. "Интенсивные атмосферные вихри". М., Мир, 1985. С.341-353.
- [4] Искендеров Д.Ш., Николаевский В.Н. Ламинаризация ядер атмосферных турбулентных вихрей // Докл. РАН. 1991. Т. 319. № 1. С. 124-128.

- [5] Владимиров В.А. Луговцов Б.А., Тарасов В.Ф. Подавление турбулентности в ядрах локализованных вихрей // ПМТФ. 1980. № 7. С. 69–76.
- [6] Владимиров В. А. Аналогия эффектов плотностной стратификации и вращения и ее использование в теории устойчивости // Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри. Горький: ИПФ АН СССР, 1987. С. 76-90.
- [7] Ингель Л.Х. Об одном механизме положительной обратной связи в интенсивных атмосферных вихрях // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2014 (принято к печати).

---

## Математическое моделирование турбулентного пограничного слоя зональным RANS/LES методом

А.А. Исахов

*Казахский Национальный университет имени аль-Фараби, Алматы,  
Казахстан*

alibek.issakhov@mail.ru

За последние годы зональные RANS/LES методы моделирования получили значительное внимание из-за их возможности применить LES только в необходимых зонах потока. Одним из применений этих методов является вычисление RANS в зонах, где стандартные модели турбулентности ожидаются точными, в то время как LES используется в неравновесных зонах потока. Проблема, которая возникает в этих приложениях — это поведение потока в зоне перехода между зонами LES и RANS. В зоне RANS решение для потока содержит информацию только о самых больших масштабах движения, если будет присутствовать крупномасштабная неустойчивость; большинство или все напряжения Рейнольдса обеспечиваются моделью турбулентности. С другой стороны в зоне LES, разрешенные масштабы должны предоставлять большую часть напряжений Рейнольдса, а для обеспечения этого должны присутствовать структуры мелкого масштаба. Как правило, зона перехода существует там, где разрешенные, содержащие энергию вихри постепенно образуются и растут. Генерация реалистических турбулентных колебаний в переходе от RANS в LES является критическим фактором при определении длины этой зоны перехода. Как минимум существует два способа обеспечить переходное условие в зональном подходе: первый подход использует

модель непрерывной турбулентности, которая переходит из RANS метода в LES метод - для замыкания системы уравнений в единой области, например такие методы как Detached-eddy simulation (DES). Другой метод, включающий использование двух различных вычислительных областей, в которых результаты RANS используются, чтобы предоставить статистику турбулентности, которая будет использоваться в качестве притока для LES и затем обе зоны накладываются вместе в одну область.

Моделирование методом крупных вихрей основано на отфильтрованном уравнении Навье - Стокса для трехмерного сжимаемого потока. Для произвольной переменной потока используется пространственное осреднение по Фавру:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{V} \int_V G(x_i) \phi(x_i, t) dV$$

где  $G(x_i)$  – функция фильтрации и  $\rho$  – плотность. Используя стандартные обозначения, отфильтрованные по пространству, уравнение получается в таком виде [8,12,13,14,15]:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^{SGS}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{e}_t) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{e}_t + \bar{p}) \tilde{u}_j = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \bar{\tau}_{ij} + \tilde{u}_i \tau_{ij}^{SGS}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{q}_j + q_j^{SGS})$$

Основой синтетического метода вихря SEM (Synthetic eddy method) является генерация скоростного сигнала с предписанным первым и вторым моментами в трехмерном виртуальном поле. В данной работе моменты второго порядка задаются в виде нормализованного стохастического сигнала  $\tilde{u}_j(x, y, z, t)$ , наложенного на среднее значение  $U_i(y)$  с использованием разложения Холецкого  $A_{ij}(y)$  и предписанного тензора напряжения Рейнолдса  $R_{ij}(y)$  [1-7]

$$u_j(x, y, z, t) = U_i(y) + \sum_j A_{ij} \tilde{u}_j(x, y, z, t), i = 1, 2, 3$$

Зональные моделирования RANS/LES были выполнены, используя связывающий метод, основанный на объединенной синтетической турбулентности и на методе контролируемого воздействия, который, как было

показано, был эффективен при создании полностью реалистической турбулентности, запускающейся с синтетической турбулентностью в пределах короткого расстояния и времени. В этом методе используется перекрывающаяся зона, в которой решение RANS обеспечивает статистические данные для синтетической генерации турбулентности и для метода контролируемых воздействий, используемые в зоне LES. Этот метод мог бы также использоваться в аналогичном потоке в предложенном виде для полного LES моделирования, если бы использовалась та же плоскость, которая разделяет переходную область с RANS в LES. В целом, были выполнены много успешных зональных моделирований RANS/LES неравновесных пограничных слоев. Эти моделирования подчеркивают, что правильное переключение с RANS в LES является критическим в получении точных результатов в зонах LES. Использование синтетической турбулентности в одном переходе приводит к тому, что турбулентность в зоне LES быстро затухает, порождая неправильную среднюю скорость. При использовании зоны наложения RANS/LES метода, в которой, чтобы управлять напряжением сдвига в LES к значениям, полученным из RANS, добавляется метод контролируемого воздействия, который дал хороший результат по сравнению с полным моделированием LES.

## Список литературы

- [1] Batten P., Goldberg U., Chakravarthy S.. Interfacing statistical turbulence closures with large-eddy simulation. *AIAA J.* 2004, 42 (3), 485 - 492.
- [2] Zhang Q., Schroder W., Meinke M.. A zonal RANS-LES method to determine the flow over a high-lift configuration. *Computers Fluids* 39, 2010, 1241 - 1253
- [3] Spalart PR., Allmaras SR.. A one-equation turbulence model for aerodynamic flow. *AIAA paper* 92-0439, 1992
- [4] Pamies M., Weiss PE., Garnier E., Deck S.. Generation of synthetic turbulent inflow data for large eddy simulation of spatially evolving wall-bounded flows. *Phys. of fluids* 21, 2009, 12-27
- [5] Keating U., Piomelli E., Balaras H. and Kaltenbach H.-J.. A priori and a posteriori tests of inflow conditions for large-eddy simulation. *Phys. Fluids* 16, 4696 (2004)
- [6] Jarrin N., Benhamadouche S., Laurence D., and Prosser R.. A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy-simulations. *Int. J. Heat Fluid Flow* 27, 585 (2006)

- [7] Pamies M., Garnier E., Marlen A., and Sagaut P.. Response of a spatially developing turbulent boundary layer to active control strategies in the framework of opposition control. *Phys. Fluids* 19, 108102 (2007)
- [8] Schlichting H.. *Boundary-Layer theory* (Mc Graw Hill, New York, 1979)
- [9] Keating G., Prisco De., Piomelli U.. Interface conditions for hybrid RANS/LES calculations. *Int. J. of Heat and Fluid Flow* 27, 778-788 (2006)
- [10] Keating U., Piomelli E.. Synthetic generation of inflow velocities for large-eddy simulations. *AIAA paper*, 2004-2547
- [11] Meinke M., Schroder W., Krause E., Rister Th.. A comparison of second- and sixth-order methods for large-eddy simulations. *Comput. Fluids* 2002: 31; 695-718
- [12] Meinke M., El-Askary WA., Zhang Q., Schroder W.. Large eddy simulation of airfoil flows. In: *Proceeding of the 4th aeroacoustic workshop SWING+, Aachen (Germany)*. 2004
- [13] El-Askary W., Schroder W., Meinke M.. LES of compressible wall-bounded flows, *AIAA paper*. 2003, 2003-3554.
- [14] Исахов А. А. Численное исследование турбулентного пограничного слоя с использованием зонального RANS/LES метода. *Математическое моделирование*, 2013, том 25, номер 7, стр. 59-68.
- [15] Roidl B., Issakhov A., Meinke M., Schroeder W. Synthetic Turbulence Generation for a Zonal RANS-LES Method. *PROGRESS IN HYBRID RANS-LES MODELLING Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, 2012, Volume 117/2012, pp. 181-192.

---

# Кластеризация случайного положительного поля как закон природы

В.И. Кляцкин

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН

klyatskin@yandex.ru

...  
*Хаос есть место, вмещающее в себя целое.  
Именно, если бы он не лежал в основании,  
то ни земля, ни вода, ни прочие элементы,  
ни весь космос не могли бы и возникнуть.*  
...

Секст Эмпирик, *Сочинения в двух томах*, ред. А.Ф. Лосев,  
т. 1, *Две книги против физиков*, с. 318, М.: Мысль, 1976.

В стохастических, параметрически возбуждаемых динамических системах, в отдельных реализациях положительного случайного поля  $f(r, t)$  может происходить явление кластеризации в фазовом и физическом пространствах. Кластеризация случайного поля – это возникновение компактных областей с большими величинами данного поля на фоне окружающих областей с относительно низкими их значениями. Естественно, что традиционные статистические характеристики (типа моментных и корреляционных функций любого порядка) не отражают явления кластеризации. И если кластеризация осуществляется в пространстве, то это происходит в конкретных реализациях почти всегда, т.е. с вероятностью единица, и характеризуется для пространственно - однородной статистической задаче следующими свойствами:

1. С течением времени поле почти во всех точках пространства убывает (разумеется, с какими-то флуктуациями);
2. Но, при этом в самом пространстве  $\{r\}$  возникают области малого объема, где это поле кластеризуется.

При этом стохастическое структурообразование обусловлено диффузией случайного поля  $f(r, t)$  в своем фазовом пространстве  $\{f\}$ . В этом случае кластеризация поля любой природы  $f(r, t)$  является общим свойством динамических полей, и можно сказать, что структурообразование для любых таких случайных полей – закон природы.

На начальном этапе пространственно-временной эволюции динамической системы, описываемой уравнениями в частных производных, параметрически возбуждаемое положительное случайное поле  $f(r, t)$ , любой природы, является логнормальным и для него формулируются условия, при которых кластеризация осуществляется. Такие задачи возникают в

гидродинамике, магнитной гидродинамике, физике плазмы, астрофизике и радиофизике. Примечательно, что эти условия имеют прозрачный физико-математический смысл, и они описываются на достаточно элементарном математическом уровне (на основе идей статистической топографии).

## Список литературы

- [1] <http://gc.lpi.ru/proceedings.html>
- [2] В.И. Кляцкин, УФН, 182(11), 1235, 2012.
- [3] V.I. Klyatskin, in Chaos and Complex Systems, Proceedings of the 4th International Interdiscipl. Chaos Symp., Springer – verlag, 2013.
- [4] В.И. Кляцкин, ТМФ, 176(3), 495, 2013.

---

### Формулировка гидромеханики без гипотезы псевдоотверждения жидкой точки

В.А. Князев

НИЦ "Курчатовский институт пл. Академика Курчатова, д. 1, Москва,  
123182, Россия

knyazev\_va@pochta.ru

Классическая система уравнений гидромеханики (несжимаемой жидкости) включает уравнения неразрывности, импульса, момента импульса, энергии, а также реологическое соотношение связи тензора напряжений  $\hat{\Pi}$  с тензором скоростей деформации  $\hat{D}$ . Уравнения момента импульса и энергии выводятся с использованием гипотезы псевдоотверждения жидкой точки. Следствием этого являются: (1) доказательство симметрии тензора напряжений и (2) установление равенства диссипации  $\hat{\Pi}$ , которая всегда неотрицательна, и мощности внутренних сил  $\sigma$ , соответствующей производству энтропии, которая должна быть неотрицательной в естественном процессе. Последнее утверждение означает, что любое динамически возможное движение совместимо с требованиями термодинамики.

Представление реальных жидких тел сплошной средой, в которой отсутствует понятие материальной точки, предполагает, что переменными теории могут быть только полевые переменные, т.е. функции точки непрерывного пространства. Для описания динамики материальных

тел вводится новая полевая переменная – динамический тензор  $\widehat{K}$ . Его поток на замкнутую поверхность равен импульсу тела, ограниченного этой поверхностью. По определению,  $div\widehat{K} = \rho\vec{v}$ , т.е. дивергенция динамического тензора  $\widehat{K}$  характеризует скорость центра масс этого тела. Интегральное уравнение импульса для жидкого тела, ограниченного замкнутой поверхностью  $\Sigma$ , принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \oint \widehat{K} \cdot d\Sigma = \oint \left( \frac{d}{dt} \widehat{K} + \vec{v} div\widehat{K} \right) \cdot d\Sigma = \oint \widehat{\Pi} \cdot d\Sigma,$$

где  $\widehat{T} = \vec{v} div\widehat{K}$  – симметричный тензор потока импульса.

Применение динамического тензора не меняет вида локального уравнения импульса. Принимая реологическое соотношение  $\widehat{\Pi} = 2\mu\widehat{D}$ , получим уравнение движения Навье-Стокса.

Интегральное уравнение энергии имеет вид:

$$\oint \vec{v} \cdot \left( \frac{d}{dt} \widehat{K} + \widehat{T} - \widehat{\Pi} \right) \cdot d\Sigma = - \int \sigma \cdot d\tau.$$

Из локального уравнения выделяется составляющая изменения кинетической энергии центра массы жидкого элемента и получается уравнение энергии движения относительно точки центра масс жидкого элемента:

$$grad\vec{v} : \frac{d}{dt} \widehat{K} + \widehat{D} : \widehat{T} = \Phi - \sigma, \text{ где } \widehat{D} : \widehat{T} = \vec{v} \cdot grad \frac{v^2}{2},$$

которое утверждает, что темп изменения энергии относительного движения не может превосходить диссипации. Приводятся расчеты, показывающие, что решения уравнений Навье-Стокса содержат области течения, в которых  $\sigma < 0$ . В безразмерном виде динамически возможное движение совместимо с требованиями термодинамики, если:

$$\frac{1}{Re} \bar{\Phi} - \overline{\widehat{D} : \widehat{T}} \geq 0, \text{ где } \widehat{\Phi} = 2\mu(\widehat{D} : \widehat{D}).$$

Относительное влияние диссипации уменьшается с увеличением числа  $Re$ , т.е. течения, термодинамически возможные при некоторых относительно малых значениях  $Re$ , могут перестать быть таковыми при достаточно больших значениях  $Re$ .

Полученное неравенство является критерием того, что в расчетных точках, где оно нарушается, должен быть скорректирован темп деформации поля скорости. Уравнение импульса не дает конкретных рекомендаций для такой корректировки. Такие рекомендации дает уравнение момента импульса.

Определяя кинетический момент как  $\vec{L} = \oint (\vec{r} \times \hat{K}) \cdot d\Sigma$  и исключая составляющую момента жидкого элемента как материальной точки, получим составляющую, которая определяет возникновение сосредоточенного момента жидкого элемента (точечный вихрь или вихревая пелена), при этом с необходимостью появляются дополнительные несимметричные компоненты тензора напряжений.

Механика сплошной среды допускает любое суждение относительно тензора напряжений. Разрешение проблемы нужно искать в моделировании свойств сплошной среды. Исследование уравнения энергии показало, что только реологической модели не достаточно.

Получена система уравнений, в которой стандартная система дополнена уравнением энергии относительного движения (уравнением производства энтропии  $\sigma$ ). В расчетных точках,  $\sigma = \sigma^* \leq 0$ , генерируется возмущение завихренности  $\omega^* \approx \sqrt{\frac{-\sigma^*}{\nu}}$ .

Приводятся примеры расчета. Из данной работы следует, что турбулентность — это естественно течение жидкости, управляемое условием неубывания энтропии в действительном процессе.

---

## Моделирование свойств материалов и физико-химических процессов на основе первых принципов в механике

**В.Л. Ковалев**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
механико-математический факультет*

`valerykovalev@yandex.ru`

Перспективы развития наукоемких отраслей промышленности требуют проведения новых исследований физико-химических процессов в экстремальных условиях и при конструировании новых материалов. Особенно актуальным становится развитие предсказательного моделирования, использующего методы квантовой механики и молекулярной динамики. Такие подходы стали возможны в последнее время на основе вычислительных супермощностей.

В работе приводятся результаты исследований, проведенных на основе методов молекулярной динамики и квантовой механики, связанные с исследованием каталитических свойств теплозащитных покрытий многоазотных космических аппаратов и адсорбционных свойств углеродных наноструктур. Такие методы позволили также разработать многоуровневые модели и соответствующие программные средства их реализации

для исследования неравновесных физико-химических процессов в перспективных авиационных двигателях и энергетических установках. Теоретическое описание позволило существенно уменьшить объем экспериментальной работы при исследовании таких задач.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 11-01-00280 и № 13-01-12091- офи-м).

---

## О развитии песчаных волн в напорном канале

Ю.Г. Крат

*ДВГУПС, Серышева, дом 47, Хабаровск, 680000, Россия*

*kratyuliya@mail.ru*

В работе предложена математическая модель задачи о развитии донной поверхности в напорном канале. Модель включает в себя линеаризованные уравнения движения водного потока, уравнение Эйснера, определяющее эволюцию донной поверхности и оригинальную формулу движения влекомых наносов [1], учитывающая влияние физико-механических характеристик донного материала и неровности донной поверхности на транспорт влекомых наносов. Предложен алгоритм расчета задачи, учитывающий лавинное движение донного материала [2].

В рамках предложенной стохастической модели формирования донных волн получены численные закономерности, определяющие рост длины волны во времени, в зависимости от характеристик гидродинамического потока и физико-механических и гранулометрических параметров донного материала. Выполнено сравнение полученных зависимостей с известными экспериментальными данными [3].

## Список литературы

- [1] Петров А.Г., Потапов И.И. О развитии возмущений песчаного дна канала // Доклады Академии наук. 2010. - Т. 431. № 2. - с. 191 - 195.
- [2] Крат Ю.Г., Потапов И.И. Модель стохастического развития донных волн // Вестник Удмуртского университета. 2013. - Вып. 2. - с. 85 - 91.
- [3] Stephen E.Coleman, Juan J.Fedele, Marcelo H.Garcia. Closed-conduit bed-forms initiation and development // Journal of Hydraulic Engineering. - 2003. - Vol. 129, №12. - p. 956 - 965.

---

## Исследование турбулентных шумов обтекания: эксперимент в глубоком море

Е.Б. Кудашев, В.А. Колышницын, В.П. Маршов

*Институт космических исследований РАН, 117997, Москва,*

*Профсоюзная ул., д. 84/32*

*Крыловский Научный Центр, 196158, Санкт-Петербург, Московское  
шоссе, д. 44*

*kudashev@iki.rssi.ru, marshov41@mail.ru*

В докладе представлены результаты экспериментальных исследований статистических характеристик турбулентных пульсаций давления в условиях глубокого моря. В 1974 г. академик М.Д. Миллионщиков обратил внимание экспериментаторов на то, что «Учение о турбулентности оказывается иногда под влиянием недооценки значения экспериментальных данных и общих закономерностей, получаемых из эксперимента... Наиболее прямым будет тот путь, на котором мы, опираясь на экспериментальные закономерности, строили бы модели, объясняющие эти закономерности» [1]. В наших исследованиях при интерпретации экспериментальных данных, искаженных из-за осреднения пульсаций датчиком конечных размеров, чтобы восстановить неискаженные спектры, приходится строить корректировочные функции, которые, в свою очередь, зависят от того, насколько реалистичны использованные модели исследуемых турбулентных полей. Для того, чтобы откорректировать спектр мощности турбулентных пульсаций, искаженный при измерениях, необходимо знать взаимный спектр пульсаций, т.е. о турбулентном поле нужно заранее знать больше, чем мы хотим в нем измерить. Для проведения экспериментальных исследований гидродинамических шумов обтекания в Сухумской акватории Черного моря разработана Автономная морская лаборатория. Развита новый метод исследования статистических характеристик турбулентных пульсаций давления в условиях глубокого моря, основанный на применении всплывающих устройств. Всплывающее устройство представляет собой удлиненное тело вращения, имеющее в погруженном состоянии избыточную архимедову плавучесть и по этой причине способное самостоятельно всплывать из глубоководных частей морской акватории, куда оно предварительно доставляется с помощью специальных заглубляющих приспособлений. Режим течения в пограничном слое всплывающего устройства практически на всей его длине является турбулентным, с градиентом среднего давления, равным нулю. Основное внимание при создании Автономной лаборатории было сосредоточено на моделировании интегральных кинематических и динамиче-

ских характеристик пограничных слоёв на корпусах судов и экспериментальном определении спектров турбулентного шума.

В результате была создана Автономная морская лаборатория, оснащенная датчиками пульсаций давления, цифровой регистрирующей аппаратурой и системой автоматического управления процессом измерения, способная эффективно работать в море при всплытии с глубин до 200 м и скоростях всплытия до значений 25 м/с. Принципы, реализованные при создании всплывающих устройств, позволяют осуществлять сложный акустико-гидродинамический эксперимент в турбулентном пограничном слое при высоких числах Рейнольдса (до значений 108) в автономных условиях, без вмешательства оператора, практически не искаженный посторонними помехами.

В серии экспериментов проведено большое количество измерений спектров мощности и взаимных спектров турбулентных пульсаций давления точечными датчиками диаметром 1.3 мм и уровней сигналов, воспринимаемых протяженными пьезоэлектрическими преобразователями давления диаметром 20 мм. Частотный диапазон исследования турбулентного шума расширен до 80 кГц. Представлен характерный вид спектров мощности турбулентных давлений на поверхности всплывающего устройства автономной морской лаборатории. В измеренных спектрах обнаружены неожиданные особенности: перегиб спада спектра на 8-10 КГц и подъем высокочастотной области спектра вплоть до частот 80 КГц [5]. Выполненный анализ на основе теории разрешающей способности датчиков конечных размеров [2, 3] позволил объяснить эти особенности. Измеренный спектр был откорректирован на влияние размера преобразователя с использованием корректировочной функции, построенной по модели взаимного спектра Коркоса, и функции, построенной по двухпараметрической модели взаимного спектра, предложенной Смольяковым [4]. Корректировка спектров турбулентного давления на основе модели взаимного спектра Коркоса привела к противоречивым результатам в области высоких частот. Корректировка на основе двухпараметрической модели прогнозирует более сильные искажения спектра по сравнению с Коркосом. Функция Смольякова при увеличении частоты спадает не монотонно, а с некоторыми флуктуациями (с перегибами). С физической точки зрения возникновение перегибов измеренных спектров на высоких частотах объясняется тем, что распределение энергии по волновым числам в частотно-волновом пространстве для модели взаимного спектра Смольякова получается более компактным, что эквивалентно большей степени «замороженности» поля турбулентных давлений. Использование двухпараметрической модели взаимного спектра для пересчета измеренных спектров позволило устранить наблюдаемое в эксперименте возникновение перегибов спектров и получить для представления частотного

спектра турбулентных давлений монотонный (без перегибов) спад спектральных уровней на высоких частотах.

## Список литературы

- [1] Миллионщиков М.Д. Вступительное слово. - Всесоюзный Симпозиум «Турбулентные течения». - М.:Наука, 1974.
- [2] Кудашев Е.Б. Экспериментальные исследования шумов обтекания на всплывающем устройстве // Акустический журнал. 2005. Т. 51. № 4. С. 488 – 499.
- [3] Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р. Турбулентные пристеночные пульсации давления. - М.: Научный мир, 2007. - 223 с.
- [4] Смольяков А.В. Шум турбулентных потоков. – СПб.: ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, 2005. – 312 с.: ил.
- [5] Кудашев Е. Б., Колышницын В. А., Маршов В. П., Ткаченко В. М., Цветков А. М. Экспериментальное моделирование гидродинамических шумов обтекания на автономной морской лаборатории // Акустический журнал. 2013. Т. 59. № 2. С. 211 – 221.

---

### Метод полиномов Лагерра в задачах волновой механики структурно-неоднородных тел

**Виталий Галазюк, Игорь Кузь, Игорь Турчин**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко, ул.*

*Университетская, 1, Львов, 79000, Украина*

*ihorkuz@yahoo.com, ihorturchyn@gmail.com*

Математическое моделирование нестационарных физико-механических процессов в неоднородных элементах конструкций, имеющих технологические дефекты структуры (наполнители, включения, трещины и т.д.) часто приводит к сложным и малоисследованным задачам математической физики. Найти решение таких задач традиционными методами очень сложно. Поэтому в последнее время в научной литературе при исследовании такого рода физико-механических процессов используют численные методы (в основном метод конечных элементов или метод граничных элементов с многочисленными модификациями), а также основанные на этих методах пакеты прикладных программ. Несмотря на

высокую эффективность этих методов в прикладных инженерных исследованиях деформирования элементов конструкций из традиционных материалов, при рассмотрении новых объектов, основанных на применении современных инженерных решений и технологий, существующие численные подходы и алгоритмы для получения достоверных как в количественном, так и в качественном плане решений требуют определенной коррекции и усовершенствования. В начале 90-х на кафедре механики Львовского национального университета имени Ивана Франко под руководством В.А. Галазюка был разработан и апробирован эффективный метод решения начально-краевых задач математической физики – метод полиномов Лагерра. За последние десятилетия этот метод был развит, в частности, на широкий класс динамических задач для структурно-неоднородных тел. В докладе рассматриваются теоретические основы метода полиномов Лагерра, а также особенности его применения к динамическим задачам теории упругости слоистых плоских и цилиндрических тел и к нестационарным задачам волновой механики со смешанными краевыми условиями.

---

## Особенности вихревого перемешивания импульса и тепла в атмосферных течениях при устойчивой стратификации

А.Ф. Курбацкий, Л.И. Курбацкая

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А.*

*Христиановича СО РАН, г. Новосибирск*

*Институт вычислительной математики и математической геофизики*

*СО РАН, г. Новосибирск*

kurbat@itam.nsc.ru, L.Kurbatskaya@ommgp.sscs.ru

RANS схема турбулентности [1], включающая эффект внутренних гравитационных волн, применена для анализа особенностей вихревого перемешивания в устойчиво стратифицированном атмосферном пограничном слое (АПС) и в свободной атмосфере (верхней тропосфере и нижней стратосфере).

**1. RANS схема турбулентности для устойчиво стратифицированных геофизических течений**. Выражения для вихревых коэффициентов диффузии импульса и тепла могут быть выведены из замкнутых уравнений переноса для потоков импульса и тепла в приближении слабо равновесной турбулентности [1]:

$$(\overline{uw}, \overline{vw}) = -K_m \left( \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial z} \right), \overline{\theta w} = -K_h \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \gamma_c$$

$$K_m = E_k S_m \tau, K_h = E_k S_h, \tau$$

где  $S_m = \frac{1}{D} f_m(G_h, N, \tau, \overline{\theta^2})$ ,  $S_h = \frac{1}{D} f_h(G_h, N)$  - структурные функции;  $\gamma_c = \gamma_c(G_m, G_h, N, \tau, \overline{\theta^2})$  - температурный противогradient, который включает вклад крупных вихрей в полный поток.  $G_m = (\tau S)^2$ ,  $G_h = (\tau N)^2$ ,  $D = D(G_m, G_h)$ ,  $\tau = E_k / \varepsilon$ ,  $E_k = \overline{u_i u_i} / 2$  - кинетическая энергия турбулентности (ТКЕ), а  $\varepsilon$  - спектральное расхождение ТКЕ,  $N = (\beta g \frac{\partial \Theta}{\partial z})^{1/2}$  - частота плавучести,  $S = ((\partial U \partial z)^2 + (\partial V / \partial z)^2)^{1/2}$  - вертикальный сдвиг средней горизонтальной скорости. Три параметра ТКЕ,  $\varepsilon$  и дисперсия температурных флуктуаций  $\overline{\theta^2}$  находятся из решения уравнений переноса [1].

**2. Вихревое перемешивание: коэффициенты диффузии импульса и тепла в устойчиво стратифицированном АПС.** С ростом устойчивости АПС вертикальный перенос импульса и тепла турбулентными вихрями существенно ослабляется стратификацией. Возрастающая при этом активность внутренних гравитационных волн способствует поддержанию импульса течения, но не тепла. Включение в трехпараметрическую  $E - \varepsilon - \langle \theta^2 \rangle$  RANS схему стратифицированной турбулентности [1] эффекта воздействия внутренних волн на перенос импульса позволяет корректно воспроизвести поведение вихревых коэффициентов диффузии импульса и тепла (рис. 15) в согласии с данными измерений в атмосфере [2].

**3. Вихревое перемешивание: коэффициенты диффузии импульса и тепла в свободной атмосфере (верхней тропосфере и нижней стратосфере).** Диффузионные процессы малых компонентов в верхней тропосфере и нижней стратосфере существенны для глобального потепления климата, истощения стратосферного озона и проблемы трансграничного загрязнения воздуха, поскольку они регулируют массообмен между тропосферой и стратосферой. В верхней тропосфере и нижней стратосфере воздух обычно устойчиво стратифицирован и внутренние гравитационные волны, индуцируемые течением в пограничном слое, и орография оказываются доминирующими. Генерация турбулентных вихрей в этих атмосферных слоях происходит спорадически, когда гравитационные волны разрушаются, и возникает сдвиговая неустойчивость. Эти турбулентные вихри переносят импульс и массу, разрушаясь затем плавучестью и вязкими силами. На рис. 16 представлены вертикальные профили вихревого коэффициента диффузии импульса  $K_m$ , вычисленные по: двухпараметрическим схемам турбулентности (штрихпунктирная линия, "стандартная"  $k - \varepsilon$  модель турбулентности, пунктирная линия с двумя штрихами, алгебраическая  $k - \varepsilon$  двухпараметрическая модель), и трехпараметрической  $E - \varepsilon - \langle \theta^2 \rangle$  RANS схеме

турбулентности (толстая штриховая линия). Рис. 16 показывает скорее качественное согласие, вычисленного по двум  $k - \epsilon$  моделям турбулентности, вертикального распределения вихревого коэффициента диффузии импульса с его прямо измеренным аналогом. Хорошее согласие с измеренным профилем коэффициента  $K_m$  (толстая сплошная линия на рис. 16) показывает профиль (толстая штриховая линия), вычисленный по трехпараметрической RANS схеме турбулентности. Можно сделать вывод, что приближение слаборавновесной турбулентности, положенное в основу вывода полностью явной трехпараметрической RANS схемы геофизической турбулентности, физически более аккуратно учитывает воздействие стратификации в вихревых коэффициентах диффузии. В верхней тропосфере и нижней стратосфере (атмосферных слоях от 4км до 8км и от 14 км до 18 км, соответственно), наблюдаемые [3] и вычисленные по трехпараметрической RANS схеме коэффициенты вихревой диффузии импульса и тепла, оказываются сравнимы по порядку величины,  $K_h \sim K_m$ . Это поразительно контрастирует с внешней областью, слоем гетерогенной температурной инверсии, устойчивого АПС, где отношение  $K_h / K_m$  в условиях сильно устойчивой стратификации может достигать значений, равных 0, 1 - 0,02 [1].

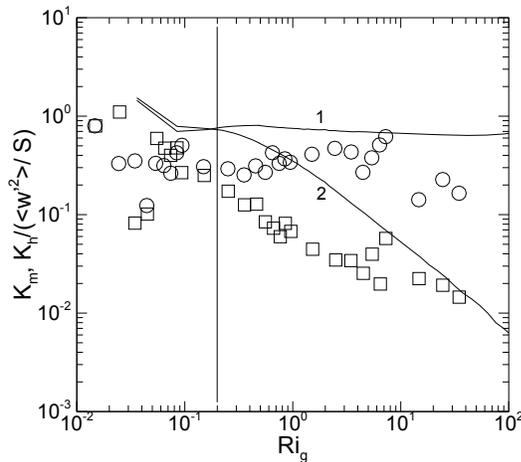


Рис. 15: Коэффициенты вихревой диффузии импульса  $K_m$  (линия-1) и тепла  $K_h$  (линия-2), нормализованные на величину  $\overline{w'^2}/S$ , как функции числа Ричардсона в устойчиво стратифицированном планетарном пограничном слое. Данные измерений [2]:  $K_h$  -  $\square$ ,  $K_m$  -  $\circ$ .

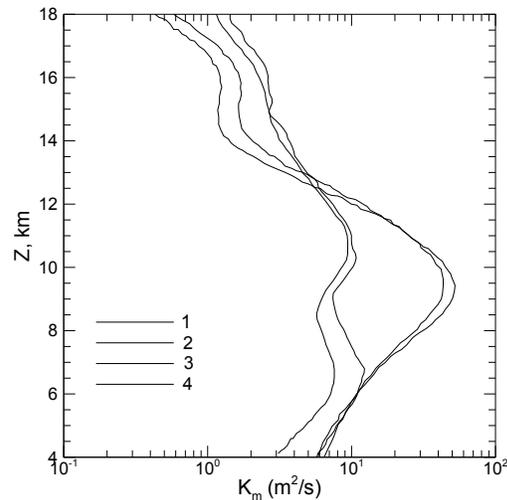


Рис. 16: Вихревой коэффициент диффузии импульса  $K_m$  прямо измеренный доплеровским радаром (толстая сплошная линия 1) в сравнении со значениями коэффициента, оцененными по трем схемам турбулентности: тонкая штрих-пунктирная линия 2 - стандартная  $k - \epsilon$  модель, тонкая штриховая двухпунктирная линия 3 - алгебраическая  $k - \epsilon$  модель и толстая штриховая линия 4 - трехпараметрическая RANS схема турбулентности.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, в рамках проекта №13-05-00006а, а также интеграционного проекта по фундаментальным исследованиям №132 и №35 СО РАН.

## Список литературы

- [1] Курбацкий А.Ф., Курбацкая Л.И. О турбулентном числе Прандтля в устойчиво стратифицированном атмосферном пограничном слое // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46, № 2. С.187-196.
- [2] Pardyjak E. R., Monti P., Fernando H. J. S. Observations of flow and turbulence in the nocturnal boundary layer over a slope. Flux Richardson number measurements in stable atmospheric shear flows // J. Fluid Mech. 2002. V. 459. P. 307-316.
- [3] Ueda H., Fukui T., Kajno M., Horiguchi M. Eddy Diffusivities for Momentum and Heat in the Upper Troposphere and Lower Stratosphere Measured by MU Radar and RASS, and a Comparison of Turbulence Model Predictions // J. Atmos. Sci. 2012. V. 69, 323-337.

---

## Работы М.Д. Миллионщикова и их развитие в ЦАГИ Д.С. Данилов, И.И. Липатов, Р.Я. Тугазаков

ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского, ул. Жуковского, дом 1,  
Жуковский, Московской обл., 140180 Россия

igor\_lipatov@mail.ru

Настоящий доклад посвящен развитию некоторых научных направлений, которыми занимался М.Д. Миллионщиков. Основное содержание связано с его работой в Центральном Аэрогидродинамическом Институте имени профессора Н.Е. Жуковского. Работа академика Миллионщикова совпала во времени с решением новых грандиозных задач по созданию авиационной и ракетной техники. Неудивительно, что одна из работ Михаила Дмитриевича того времени была учебником, в соавторстве с С.А. Христиановичем, Л.А. Симоновым и В.Г. Гальпериным «Прикладная газовая динамика». Необходимо было обеспечить учебниками новых людей, приходящих в науку, и, хотя впоследствии появились многие переводные книги, эта была одной из первых.

Доклад состоит из рассмотрения ряда работ М.Д. Миллионщикова и описания некоторых дальнейших исследований, продолжающих работы юбиляра.

Говоря о газовой динамике, стоит также упомянуть книгу по теории диффузоров, но мы здесь коснемся по большей части вопросов газовой динамики в целом. В качестве примера стоит упомянуть большое число работ по исследованию процессов передачи возмущений в гиперзвуковых пограничных слоях [1], тоже в определенной степени волновой газовой динамики. Также представлены результаты исследований псевдоскачка [2], возникающего при торможении сверхзвуковых течений в каналах.

Еще одно направление работ М.Д. Миллионщикова связано с исследованиями процессов в газовых центрифугах, обеспечивающих разделение изотопов. Работы этого направления по-видимому остаются вне открытой библиографии. Вместе с тем были проведены исследования устойчивости течений газа в течениях Куэтта-Тэйлора между вращающимися цилиндрами. Были определены инкременты роста и в результате решения нелинейных уравнений получены формы вихрей Тэйлора-Гертлера [3].

Вопросам использования моделей численного моделирования турбулентности посвящена заключительная часть доклада. В том числе рассмотрены вопросы прямого численного моделирования отрывных течений [4], использование дифференциальных моделей турбулентности для описания бафтинга – автоколебательного течения, возникающего при взаимодействии скачка уплотнения с течением в пограничном слое. Также представлены результаты исследования процессов локального отрыва (берстов) в турбулентных и переходных течениях [5].

## Список литературы

- [1] Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. Физматлит. 2004. 455 стр.
- [2] Гуськов О.Н., Копченков В.И., Липатов И.И., Острась В.Н., Старухин В.П. Процессы торможения сверхзвуковых течений в каналах. Физматлит. 2008. 168 с.
- [3] С.З. До, И.И. Липатов, М.И. Липатов. Структура сжимаемых вихревых течений Куэтта-Тэйлора. 2013. Труды МФТИ. В печати
- [4] Липатов И.И., Тугазаков Р.Я. Механизм образования пульсаций давления при падении ударной волны на пограничный слой. Ученые записки ЦАГИ. 2013. Т. 44. № 1. С. 62-74.
- [5] Данилов Д.С. “Развитие в пограничном слое нестационарных возмущений, вызванных щелевым отсосом” Ученые записки ЦАГИ. 2011. Т. 42. №3. С. 73-83

---

## Экспериментальное и численное исследование ламинарно-турбулентного перехода за препятствием в канале

А.Б. Мазо, Е.И. Калинин, В.М. Молочников

Казанский федеральный университет, Казань, ул. Кремлёвская, д. 18,  
420008, Россия

Исследовательский научный центр проблем энергетики КазНЦ РАН,  
Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31, 420111, Россия

amazo@ksu.ru

При течении вязкой жидкости в канале с препятствием наблюдается отрыв потока и формирование упорядоченных крупномасштабных вихревых структур, которые квазипериодически выносятся из области отрыва. При достаточно больших значениях числа Рейнольдса в следе происходит распад крупных вихрей на каскад мелких с переходом к турбулентности. Механизм формирования и турбулентного распада этих структур изучался в работах [1, 2], однако до настоящего времени нет общей точки зрения на причины данного феномена.

В рамках настоящей работы выполнены лабораторные исследования и прямое численное моделирование трехмерного отрывного течения за поперечным полуцилиндрическим выступом в канале на ламинарном и переходном к турбулентному режимам течения.

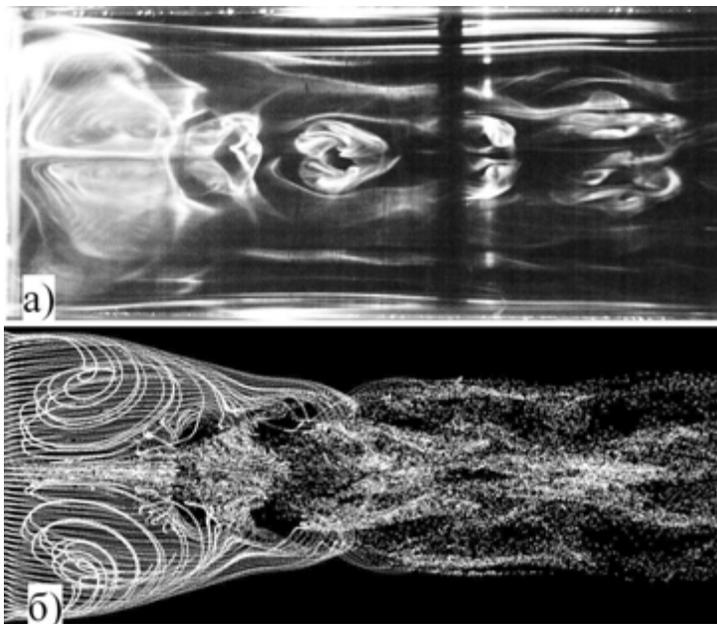


Рис. 17: Результаты визуализации (а) и расчета (б) течения за выступом при  $Re_H = 1500$  ( $Re_h = 225$ ). Вид сверху.

Экспериментальное исследование проводилось в канале прямоугольного поперечного сечения высотой  $H = 20$  и шириной 50 мм с плавным входом, выполненным по лемнискате Бернулли. Выступ устанавливался на расстоянии 106 мм от входного сечения рабочего участка и имел высоту  $h$ , равную 3 мм. Эксперименты проводились в диапазоне изменения числа Рейнольдса  $Re_H = U_0 H / \nu = 390 \dots 2930$ , где  $U_0$  – средняя скорость потока,  $\nu$  – кинематическая вязкость воздуха. Соответствующее число Рейнольдса, вычисленное по высоте препятствия  $h$ , изменялось в диапазоне  $Re_h = 58.5 \dots 439.5$ .

Для составления более полной картины ламинарно-турбулентного перехода в канале с полуцилиндрическим выступом было выполнено прямое численное моделирование исследуемого течения в пакете Ansys Fluent 14.5 [3]. Расчетная область в точности соответствовала конфигурации рабочего участка лабораторной установки. Решалась трехмерная нестационарная задача Навье-Стокса в переменных “скорость-давление” для несжимаемой жидкости при числах Рейнольдса в диапазоне  $1100 < Re_H < 3200$  ( $165 < Re_h < 480$ ).

Сравнение полученных экспериментальных и расчетных картин течения при  $Re_H = 1500$  представлено на рис. 17. Установлено, что непосредственно за выступом формируется пара симметричных угловых вихрей, включающих спиралевидное движение жидкости от боковых стенок к центру канала по периферии этих вихрей и застойные области в их центральной части.

При достижении критического числа Рейнольдса за выступом формируются вихревые сгустки, локализованные вблизи плоскости симметрии канала. Размер этих сгустков по трансверсальной координате составляет приблизительно 0.25 ширины канала. С ростом числа Рейнольдса угловые вихри сохраняются, однако их масштаб уменьшается, а зона начала формирования вихревых сгустков смещается в сторону выступа. Процесс сопровождается дроблением крупных вихрей на более мелкие вихревые структуры, усилением пульсаций потока, течение в следе за препятствием ниже линии присоединения приобретает черты турбулентного режима. При этом течение в ближнем следе остается ламинарным.

Механизм формирования вихревых структур за выступом в канале заключается в следующем. При увеличении числа Рейнольдса выше критического, энергия циркуляции жидкости, накапливаемая в замкнутой отрывной области, превышает энергию, отводимую от ее границы во внешний поток за счет вязкости. В этих условиях течение в отрывной области в зоне положительного градиента давления теряет устойчивость, образуются поперечные вихревые структуры, которые периодически выносятся из рециркуляционной области во внешний поток.

## Список литературы

- [1] Довгаль А.В., Сорокин А.М. Экспериментальное моделирование периодического вихреобразования при отрыве течения за уступом поверхности // Теплофизика и аэромеханика. – 2002. – Т. 9. – № 2. – С. 193 – 200.
- [2] Душина О.А., Молочников В.М., Паерелий А.А. и др. Структура потока за выступом в канале в условиях ламинарно-турбулентного перехода // Теплофизика и аэромеханика. 2010. – Т.17, №3. – С. 349 – 361.
- [3] Программный комплекс ANSYS, версия 14.5, лицензия #625482 ANSYS Academic Research

---

### Точное определение волнового сопротивления твёрдого тела, равномерно движущегося в жидкости конечной глубины, по параметрам создаваемых им волн

Д.В. Маклаков, А.Г. Петров

Казань, КФУ,

Москва, ИПМех РАН

petrovipmech@gmail.com

Рассматривается тело, движущееся поступательно над плоским горизонтальным дном с постоянной скоростью. Вдали от тела, впереди него, жидкость покоится и имеет постоянную глубину  $h$ , а позади тела устанавливаются волны длины  $\lambda$ , движущиеся со скоростью тела. Картина установившегося течения в системе координат, связанной с телом, изображена на рис. 18.

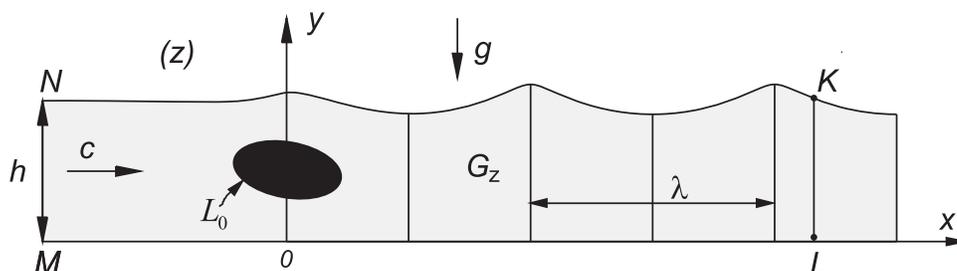


Рис. 18: Схема установившегося течения

Приближённая формула для волнового сопротивления тела, движущегося в тяжёлой жидкости параллельно дну с постоянной скоростью, была получена лордом Кельвиным в 1887 году. Кельвин применил закон изменения импульса, а потоки импульсов нашёл из решения задачи для линейной волны. Таким образом, был найден главный член разложения сопротивления, квадратичный по амплитуде. Сила сопротивления  $R_x$  и коэффициент сопротивления  $c_x$  в приближении Кельвина имеет вид

$$R_x = \rho g \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 c_x, \quad c_x = \frac{1}{4} a^2 \left( 1 - \frac{2D}{\text{sh } D} \right), \quad a = \frac{A}{\lambda} 2\pi, \quad D = \frac{h}{\lambda} 2\pi,$$

где  $a$  и  $D$  – безразмерные амплитуда и глубина.

Следующие члены разложения по амплитуде оставались до сих пор неизвестными. В данной работе найдены точные соотношения, связывающие волновое сопротивление и параметры волн конечной амплитуды далеко позади тела. Например, для бесконечной глубины найдено точное соотношение  $R_x = (3\Pi - 2T)/\lambda$ , где  $\Pi$  и  $T$  – потенциальная и кинетическая энергия одного периода волны.

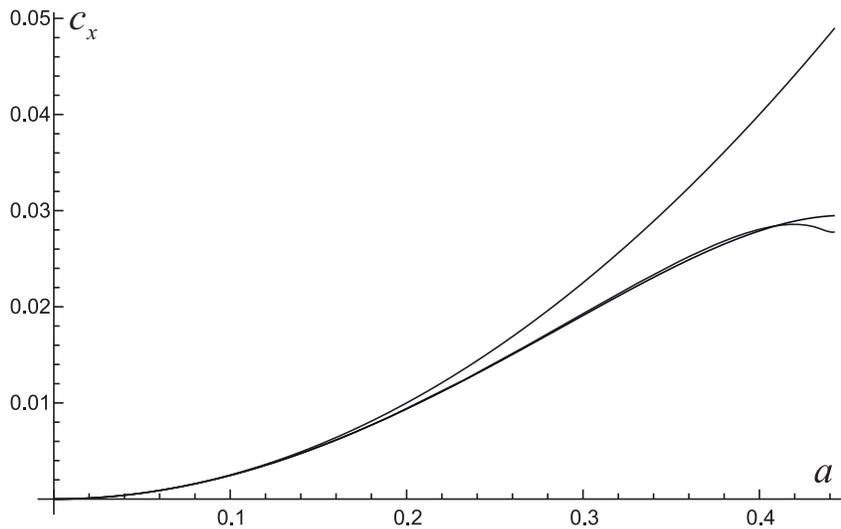


Рис. 19: Коэффициент сопротивления

Показано, что средние уровни впереди и позади тела в жидкости конечной глубины различаются и этот эффект влияет на величину волнового сопротивления. Разработан эффективный численный метод, позволяющий найти волновое сопротивление, если известны параметры, определяющие волны, например, если известны средняя глубина волн за телом, их длина и амплитуда. Предложен также алгоритм, по которому вычисляется любой коэффициент степенного ряда по амплитуде волны для волнового сопротивления. Для бесконечной глубины ряд с точно-

стью до членов 12-ой степени таков

$$c_x = \frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{8}a^4 - \frac{19}{48}a^6 + \frac{2597}{2880}a^8 - \frac{559733}{201600}a^{10} + O(a^{12})$$

На рис. 19 приведено сравнение формул для сопротивления с точным численным расчётом. Черная линия - точный расчёт, штрихпунктирная - формула Кельвина и штриховая - выписанные члены ряда.

Коэффициенты ряда в общем случае найдены в виде рациональных функций параметра глубины. Установлено, что при приближении амплитуды к предельному значению зависимость сопротивления от амплитуды является осциллирующей функцией, имеющей бесконечную последовательность максимумов и минимумов, и эта функция подчиняется универсальному асимптотическому закону Лонгет-Хиггинса и Фокса.

---

## Прямое численное моделирование пространственного ламинарно-турбулентного перехода на сфере

П.В. Матюшин, В.А. Гущин

*Институт автоматизации проектирования РАН  
2-я Брестская ул., д. 19/18, Москва, 123056, Россия  
pmatyushin@mail.ru, gushchin@icad.org.ru*

Используя прямое численное моделирование (без введения каких либо моделей турбулентности) в настоящей работе удалось получить пространственный ламинарно-турбулентный переход на простейшем трехмерном теле конечных размеров (сфере), которому соответствует резкое уменьшение (кризис) коэффициента сопротивления сферы с 0.455 до 0.155 при  $5 \cdot 10^4 < Re < 4 \cdot 10^5$ , где  $Re = U \cdot d / \nu$  - число Рейнольдса,  $U$  и  $d$  - скорость и диаметр сферы,  $\nu$  - коэффициент кинематической вязкости. Для моделирования использовались уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска, описывающие слабо неоднородные по плотности течения несжимаемой вязкой жидкости. Здесь наряду с  $Re$  есть еще один дополнительный параметр течения - внутреннее число Фруда  $Fr = U / (N \cdot d)$ , где  $N$  - частота плавучести. В данных расчетах рассматривались большие числа  $Fr$  ( $Fr > 100$ ). В результате внутри пограничного слоя (у линии первичного отрыва) удалось получить характерное для кризиса сопротивления формирование отрывных пузырей (вытянутых в поперечном направлении), их дальнейший рост, снос вниз по течению и последующую трансформацию в вихревые петли следа. Для визуализации пространственных вихревых структур течения строились изоповерхности  $\beta$  (мнимой части комплексно-сопряженных собственных

значений тензора градиента скорости) и изоповерхности  $\lambda_2$  (второго собственного значения симметричного тензора, состоящего из суммы квадратов симметричной и несимметричной частей тензора градиента скорости). Хорошая работоспособность  $\beta$ -визуализации была продемонстрирована в [1]. Для расчета течений на суперкомпьютерах использовался метод расщепления по физическим факторам для несжимаемой жидкости МЕРАНЖ [2] с явной, гибридной конечно-разностной схемой для аппроксимации конвективных членов уравнений (второй порядок аппроксимации по пространственным переменным, минимальная схемная вязкость и дисперсия, монотонность). Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-01-00764, 13-01-92696) и программ фундаментальных исследований Президиума РАН и Отделения математических наук РАН.

## Список литературы

- [1] В.А. Гуцин, П.В. Матюшин, Механизмы формирования вихрей в следе за сферой при  $200 < Re < 380$  // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 5. С. 135–151.
- [2] О.М. Белоцерковский, В.А. Гуцин, В.Н. Коньшин, Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // ЖВМ и МФ. 1987. V. 27. № 4. С. 594–609.

---

### О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона-Якоби

В.В. Веденяпин, М.А. Негматов

*ИПМ РАН, МФТИ, Москва, Россия*

`maliknegmatov@gmail.com`

Уравнения Власова-Пуассона и Власова-Максвелла успешно используются для описания плазмы [1-5]. Для этих уравнений используется гидродинамическая подстановка, которая редуцирует их к уравнениям типа МГД. Для уравнений идеальной несжимаемой жидкости В.И. Арнольд [6] была доказана теорема о структуре стационарных решений, основанная на наличии двух коммутирующих векторных полей. В.В. Козловым [7-9] эта конструкция была обобщена на сжимаемую жидкость. Мы исследуем возможность таких конструкций в случае уравнений Власова-Пуассона и Власова-Максвелла. В обоих случаях можно получить два

коммутирующих поля Арнольда-Козлова. Рассмотрена аналогия между уравнениями Лиувилля и уравнениями Власова с взаимным обогащением. Для уравнения Лиувилля мы получили короткий путь к уравнению с помощью гидродинамической подстановки с обобщением на негамильтонов случай. В случае уравнения Власова, мы получаем уравнение типа Гамильтона-Якоби для уравнения Власова-Пуассона, а для уравнения Власова-Максвелла это не проходит.

## Список литературы

- [1] Власов А.А. О вибрационных свойствах электронного газа. // ЖЭТФ. 1938. Т.8. Вып.3. сс. 291-318.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика Т. 10. Физическая кинетика –М.: Наука.1979.
- [3] Маслов В.П., Мосолов П.П. Асимптотическое поведение при  $N \rightarrow \infty$  траекторий  $N$ точечных масс, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона // Известия Ан. СССР. серия математическая. т.42. №5. 1978. СС. 1063-1100.
- [4] Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова – М.: Физматлит. 2001.
- [5] Веденяпин В.В., М.А.Негматов. О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова. Теоретическая и математическая физика, т. 170, N 3, стр. 468-480. 2012
- [6] В.И. Арнольд. О топологии трехмерных стационарных течений идеальной жидкости. ПММ, 1966, т.30, вып.1, с. 183-185.
- [7] Козлов В.В. Замечания о стационарных вихревых движениях сплошной среды. ПММ, 1983, т. 47, N 2, с. 341-342.
- [8] Козлов В.В. Гидродинамика гамильтоновых систем. Вестник МГУ, Серия математика, механика, 6, 1983, стр. 10-22.
- [9] Козлов В.В. Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, издательство Удмуртского государственного университета, 1995.

---

## О механизме пристенной турбулентности и снижения турбулентного трения

**Николай Никитин**

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Мичуринский проспект  
д. 1, 117192 Москва, Россия*

`nvnikitin@mail.ru`

Считается, что цикл самоподдержания турбулентности в пристенных течениях включает в себя несколько звеньев. Результаты лабораторных и численных экспериментов свидетельствуют, что вспышки пульсационной активности происходят на фоне вытянутых вдоль потока полос замедленного движения, где локальный профиль скорости имеет точку перегиба. Для возникновения полос необходимы движения в поперечной к основному потоку плоскости. Последние образуются в результате нелинейного взаимодействия мелкомасштабных пульсаций. Попытки снижения турбулентного трения нацелены на разрыв одного из звеньев турбулентного цикла. В работе будет дан краткий обзор существующих методов, таких как продольное оребрение, поперечные колебания обтекаемой поверхности и комбинация этих двух подходов. Будут представлены результаты, полученные автором и другими исследователями. Интересно выявление механизма снижения трения. Последние результаты свидетельствуют о существенной роли так называемых оптимальных возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 11-01-00088-а. Вычисления проводились на суперкомпьютерном комплексе МГУ “Чебышев”.

---

## Применение $f$ -модели турбулентности для расчета внутренних задач гидродинамики и тепло-массообмена

**В.А. Павловский, С.Ю. Маламанов**

*Санкт-Петербургский Государственный Университет. Россия, 199034,  
Санкт-Петербург, Университетская наб. д.7-9.*

`v.a.pavlovsky@gmail.com, stevmal@mail.ru`

Для расчета внутренних задач гидродинамики и тепло-массообмена разработана  $f$ -модель турбулентности, которая содержит в выражении для осредненного тензора вязких напряжений дополнительную неизвестную скалярную величину  $f$ , характеризующую степень турбулентности.

Поле этой скалярной величины  $f(r, t)$  определяется соответствующим уравнением переноса. Система уравнений для описания течения вязкой несжимаемой жидкости имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} &= -\vec{\nabla} p + \frac{\mu}{(1-f)} \Delta \vec{V} + 2\mu \frac{\underline{d} \cdot \vec{\nabla} f}{(1-f)^2} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= 0 \\ \rho \frac{df}{dt} &= \mu \Delta f + \mu \frac{\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} f}{(1-f)} \psi(f) + (1-f) \frac{(\vec{\nabla} p \times \vec{\nabla} f) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V})}{\sqrt{2\underline{d} : \underline{d}} \sqrt{2|\underline{w} : \underline{w}|}} \end{aligned}$$

Здесь  $\underline{d}$  и  $\underline{w}$  - тензор скоростей деформаций и спин, соответственно, характеризующие симметричную и антисимметричную части тензора градиентов скоростей; две точки - двойное скалярное произведение тензоров;  $\psi(f)$  - скалярная функция,  $\psi(f) = \frac{2\alpha + \beta(1-f)}{\alpha + \beta(1-f)}$ ,

где  $\alpha$  и  $\beta$  - две феноменологические константы, универсальные для внутренних задач гидромеханики,  $\alpha = 2.5$ ,  $\beta = 8.5$ .

Краевыми условиями для этой системы уравнений являются условия прилипания и вязкого ньютоновского трения на твердой границе  $S$  с нормалью  $\vec{n}$ , а также равенство нулю функции  $f$  на этой стенке и условие на производную модуля скорости по этой функции:

$$\vec{V}|_S = 0; \quad |2\underline{d} \cdot \vec{n}|_S = \frac{V_*^2}{\nu}; \quad f|_S = 0; \quad \left| \frac{d\vec{V}}{df} \right|_S = (\alpha + \beta)V_*.$$

В этих выражениях  $V_*$  - динамическая скорость.

Для простых сдвиговых течений эта модель позволяет находить решения в квадратурах. Она дает предельные переходы - при малых числах Рейнольдса решения совпадают с классическими для ламинарного режима, а при больших - дают логарифмические профили скоростей и характерные для этого режима логарифмические законы сопротивления. При решении задач теплообмена с помощью  $f$  - модели модифицируется закон теплопроводности Фурье. В этом случае турбулентное число Прандтля вычисляется в ходе расчетов.

---

# Распространение дисперсной фазы и теплообмена в ограниченных турбулентных газочапельных отрывных потоках

М.А. Пахомов

ФГБУН Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, пр. Ак.  
Лаврентьева, д. 1, 630090, Новосибирск, Россия

pakhomov@ngs.ru

Взаимодействие между мелкими частицами и турбулентным газовым потоком является сложным и не полностью изученным явлением. Двухфазные течения с жидкими частицами в технических устройствах, как правило, анизотропные и могут быть осложнены межфазным теплообменом, испарением капель, отрывом или закруткой потока. Наличие рециркуляционного и закрученного течения оказывает значительное влияние на интенсивность процессов переноса импульса, теплоты и массы и определяют структуру турбулентного двухфазного течения. Одним из важных приложений двухфазных закрученных потоков является стабилизация горения испаряющихся капель топлива с помощью создания отрывных областей.

Целью работы является проведение численного исследования распространения дисперсной примеси, турбулентности газовой фазы и теплообмена после внезапного расширения трубы в двухфазном потоке, в том числе и при наличии закрутки течения. Для описания двухфазного потока применяется эйлерово континуальное описание двух фаз (так называемые двухжидкостные модели) и лагранжев траекторный подход.

В работе для описания динамики течения и тепломассопереноса в газовой и дисперсной фазах использовались эйлеров [1, 2] и лагранжев [3] подходы. Расчет компонент пульсаций скорости, температуры и турбулентного теплового потока дисперсной фазы осуществляется с использованием модели переноса рейнольдсовых напряжений [4]. Поле концентрации частиц рассчитывалась в рамках так называемого полного лагранжева подхода Осипцова [5]. Рассмотрена задача о динамике двухфазного газочапельного закрученного турбулентного потока. При решении используются 3D RANS уравнения, записанные в цилиндрических координатах, с учетом обратного влияния частиц на процессы осредненного и турбулентного переноса в газе. Расчеты проводились на сетке 156-80-64 контрольных объемов.

Показано подавление мелкодисперсными каплями турбулентности газовой фазы. Этот эффект в основном ограничен приосевой зоной трубы из-за испарительных процессов, которые интенсивно протекают в пристенной области. Мелкодисперсная примесь хорошо вовлекаются в ре-

циркуляционное течение и присутствуют по всему сечению трубы. Крупные частицы проходят через сдвиговой слой и практически не попадают в отрывную область. Пристенная часть трубы оказывается практически свободной от частиц за счет их интенсивного процесса испарения. Наблюдается значительное увеличение интенсивности теплообмена при добавлении испаряющихся капель в отрывное течение (более чем в 1.5 раза по сравнению с однофазным потоком). Для мелкодисперсного потока увеличение теплообмена происходит на всем участке за отрывом двухфазного потока, а для крупных частиц – в основном за точкой присоединения.

Для сопоставления в режиме двухфазного закрученного потока были использованы известные экспериментальные данные [6]. Закрученное двухфазное течение исследовано в опускном режиме течения за внезапным расширением трубы. Расчеты дают несколько меньшую величину скоростей фаз, чем данные измерений для частиц и несколько завышенное значение для газовой фазы. В силу инерционности частиц зона обратных токов для дисперсной фазы заметно меньше, по сравнению с зоной рециркуляции газовой фазы. Проведено сопоставление по трем компонентам осредненных и пульсационным скоростям газа и частиц с данными измерений и получено также неплохое согласие. При расчетах массового потока частиц заметно наличие максимума в профиле массового потока в приосевой зоне трубы, сохраняющееся до расстояния  $x=200$  мм от ее внезапного расширения. С увеличением размера частицы могут не вовлекаться в отрывное течение и сохраняют положительную величину скорости по всей длине расчетной области. В силу инерционности частиц зона обратных токов для дисперсной фазы заметно меньше, по сравнению с зоной рециркуляции газовой фазы. Расчеты удовлетворительно согласуются с данными измерений для двухфазного ограниченного закрученного и отрывного потоков.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ № 11-08-00112) и гранта Президента РФ для молодых докторов наук (МД-670.2012.8).

## Список литературы

- [1] Деревич И. В., Зайчик Л. И. Осаждение частиц из турбулентного потока. Изв. АН. СССР, сер. МЖГ. 1988. № 5. С. 96–104.
- [2] Reeks M.W. On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows. Phys. Fluids A. 1991. V. 3. P. 446–456.

- [3] Moissette S., Oesterle B., Boulet P. Temperature fluctuations of discrete particles in a homogeneous turbulent flow: a Lagrangian model. *Int. J. Heat Fluid Flow*. 2001. V. 22. P. 220–226.
- [4] Zaichik L. I. A statistical model of particle transport and heat transfer in turbulent shear flows, *Phys. Fluids* 1999. V. 11. P. 1521–1534.
- [5] Osipov A. N. Lagrangian modeling of dust admixture in gas flows. *Astrophys. Space Sci.* 2000. V. 274. P. 377–386.
- [6] Sommerfeld M., Qiu H.-H. Detailed measurements in a swirling particulate two-phase flow by a phase-Doppler anemometer. *Int. J. Heat Fluid Flow*. 1991. V. 12. P. 20–28.

---

## **Крупномасштабные структуры в турбулентной жидкости с твердыми частицами и с пузырьками газа**

**А.С. Петросян**

*Институт космических исследований Российской Академии Наук*

apetrosy@iki.rssi.ru

В последнее время большое внимание уделяется проблемам возникновения структур в неравновесных средах. Особый интерес вызывают крупномасштабные вихри, возникающие в турбулентной жидкости, - когерентные структуры. Такие структуры наблюдаются экспериментально. Когерентные структуры наблюдаются также и в природных условиях: вихри Россби в атмосфере Земли и Юпитера, тропические циклоны. При изучении явления турбулентности важную роль играет модель однородной изотропной и стационарной турбулентности. Возникает вопрос, может ли такая турбулентность усиливать крупномасштабные возмущения. В магнитной гидродинамике показано, что исходно однородная, изотропная и зеркально-симметричная турбулентность не может усиливать крупномасштабные магнитные поля. Однако, если зеркальная симметрия турбулентности нарушена, то такая среда может усиливать крупномасштабное магнитное поле. Это явление получило название магнитного динамо. Простейший пример нарушения зеркальной симметрии представляет собой поле скоростей, в котором величина средней спиральности отлична от нуля. Такое турбулентное поле скоростей характерно тем, что правовинтовые и левовинтовые вихри наблюдаются с разной вероятностью, то есть вихрей одного знака больше, чем другого.

В работе мы изучаем свойства спиральной турбулентности в несжимаемой жидкости, заполненной твердыми частицами. Ограничиваясь случаями, когда размеры твердых частиц во много раз больше молекулярно-кинетических и масштабы рассматриваемых возмущений таковы, что твердые частицы образуют сплошную среду, мы пользуемся уравнениями двухфазной гидродинамики. При выводе усредненных уравнений, мы существенно используем факт, что относительный объем, занимаемый частицами, мал, что позволяет нам пренебречь столкновениями частиц между собой. Движение вязкой несжимаемой жидкости с твердыми частицами будем описывать следующей системой уравнений Р.И. Нигматулина:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\bar{V}_s) = 0 \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div}(\bar{V}) = -\frac{4}{3}\pi a^3 \operatorname{div}(n)(\bar{V}_s - \bar{V}) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_s}{\partial t} + \beta(\bar{V}_s - \bar{V}) + (\bar{V}_s, \nabla)\bar{V}_s + \frac{1}{\rho_s}\nabla P = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \gamma n(\bar{V}_s - \bar{V}) + (\bar{V}, \nabla)\bar{V} + \frac{1}{\rho}\nabla P = \nu\Delta\bar{V} \quad (1.4)$$

Здесь  $\bar{V}_s$  и  $\bar{V}$  – гидродинамические скорости жидкой и твердой фаз соответственно,  $\rho_s$  и  $\rho$  – их плотности,  $n$  – концентрация твердых частиц с радиусом  $a$ ,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $P$  – давление в среде. В модели (1.1-1.4) частицы твердой фазы предполагаются невзаимодействующими между собой. Коэффициенты

$$\gamma = \frac{4}{3}\pi a^3 \beta \frac{\rho_s}{\rho}; \quad \beta = \frac{9}{2} \frac{\nu}{a^2} \frac{\rho}{\rho_s} \quad (1.5)$$

описывают стоксовское трение между компонентами каждой фазы. Используя корреляционное приближение второго порядка и гипотезу двумасштабности, мы получаем замкнутые уравнения Рейнольдса в линейном по средней скорости приближении:

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} + n_0 \operatorname{div}(\langle \bar{V}_s \rangle) = 0 \quad (1.6)$$

$$\operatorname{div}(\bar{V}) = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{V}_s \rangle}{\partial t} + \beta(\langle \bar{V}_s \rangle - \langle \bar{V} \rangle) + \frac{1}{\rho_s} \langle P \rangle = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{V} \rangle}{\partial t} - \gamma n_0 (\langle \bar{V} \rangle - \langle \bar{V}_s \rangle) + \alpha \text{rot}(\langle \bar{V} \rangle) + \frac{1}{\rho} \nabla P = \nu \Delta \langle \bar{V} \rangle \quad (1.9)$$

Показано, что в замкнутых уравнениях возникает генерационный член из-за ненулевой дивергенции в результате обтекания твердых частиц жидкостью. По существу такая двухфазная среда ведет себя как сжимаемая. Проведенный анализ показал, что спиральная турбулентность в несжимаемой жидкости с твердыми частицами неустойчива относительно вихревых возмущений.

Аналогичный механизм генерации вихревых структур исследуется для случая жидкости с распределенными газовыми пузырьками. Будем изучать процессы в жидкости с распределенными пузырьками. Мы будем пренебрегать схлопыванием пузырьков, считая, что в жидкости поддерживается постоянное количество пузырьков, совершающих радиальные колебания. Для изучения турбулентных движений такой смеси воспользуемся следующей системой уравнений гидродинамики смеси жидкости с пузырьками:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho V_i) = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V_i + (V_k, \nabla_k) V_i = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\nu}{\rho} \Delta^2 V_i \quad (1.11)$$

Дополненное уравнение Рэлея для одиночного пузырька :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_0}(p_r - p) \quad (1.12)$$

В (1.10–1.12)  $\rho$  – плотность газожидкостной смеси,  $p$  – давление и  $V_i$  – скорость среды,  $R$  – радиус пузырька,  $\rho_0$  – плотность жидкости,  $p_r$  – давление газа в пузырьке. Уравнение (2.3) эквивалентно следующему уравнению для объема пузырька  $U = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\alpha U^{-\frac{1}{3}}\ddot{U} - \frac{\alpha}{6}U^{-\frac{4}{3}}\dot{U}^2 + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = p_r - p, \text{ где } \alpha = \rho_0/3^{\frac{1}{3}}(4\pi)^{\frac{2}{3}} \quad (1.13)$$

Используя корреляционное приближение второго порядка и гипотезу двумасштабности, мы получим систему уравнений, описывающих эволюцию средних движений на фоне мелкомасштабной спиральной турбулентности в жидкости с пульсирующими пузырьками газа в линейном по средней скорости приближении:

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} = \alpha \text{rot}(\bar{V}_i) - \frac{\nabla_i \bar{p}}{\rho_0} + \frac{\nu}{\rho_0} \Delta^2 \bar{V}_i \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{V}_i \rho_0) = 0 \quad (1.15)$$

$$\bar{\rho} = \rho_0 (1 - n\bar{U} + \chi\bar{p}) \quad (1.16)$$

$$\frac{d^2 \bar{U}}{dt^2} + w_0^2 \bar{U} = -\varepsilon \bar{p} \quad (1.17)$$

Полученное уравнение имеет растущие решения. Появление в усредненных уравнениях неустойчивых решений обязано наличию в несжимаемой жидкости осциллирующих пузырьков, которые обеспечивают ненулевую дивергенцию на масштабе пульсационных движений и тем самым нарушают симметрию напряжений Рейнольдса в усредненных уравнениях.

Исследованы свойства спиральной турбулентности в гетерогенных средах. Показано, что в несжимаемой жидкости с твердыми частицами возможно усиление крупномасштабных вихревых возмущений исходно однородной, изотропной и спиральной турбулентностью. Наличие твердых частиц, движение которых обеспечивает ненулевую дивергенцию на пульсационном масштабе и тем самым обеспечивает ненулевые значения напряжений Рейнольдса в усредненных уравнениях. Найдена вихревая неустойчивость спиральной турбулентности в несжимаемой жидкости с осциллирующими пузырьками газа по отношению к крупномасштабным возмущениям. Показано, что колебания пузырьков обеспечивают асимметрию напряжений Рейнольдса в усредненных уравнениях и появление генерационных членов. Обратим внимание, что получаемые в результате структуры имеют спиральный характер, то есть  $\langle \bar{V} \rangle \text{rot}(\langle \bar{V} \rangle) \neq 0$ .

---

# Расчет гидравлического сопротивления при обтекании пологих двухмерных гряд турбулентным потоком

А.Г. Петров, И.И. Потапов

Институт прикладной механики РАН, 119526, Москва,

Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, Россия

petrov@ipmnet.ru, potapovii@rambler.ru

**Уравнения гидродинамики.** В работе исследуется задача двумерного турбулентного течения несжимаемой жидкости над периодически волнистой шероховатой поверхностью. Задача решается отдельно во внутренней и внешней областях течения. Решение строится в виде разложения по двум малым параметрам. Первый параметр  $h = H_0/H$  характеризует сопротивление потоку со стороны донного рельефа, второй параметр  $\mu$  характеризует сопротивление за счет донной шероховатости  $\mu = 1/\ln(H/Z_0)$ , где  $H$  - высота логарифмического слоя потока,  $Z_0$  - высота шероховатости дна. Математическая формулировка задачи имеет вид и обозначения принятые в работе [1]

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial x} &= 0, \\ v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p - \omega}{\partial x} &= \kappa^2 \frac{\partial \tau}{\partial z}, \\ v^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial p - \omega}{\partial x} &= \kappa^2 \frac{\partial \tau}{\partial x}.\end{aligned}$$

Уравнения удовлетворяют граничным условиям

$$z = 0, \quad v = 0, \quad \Theta = h \frac{d\sigma}{dx} + \dots,$$

$$z \rightarrow \infty, \quad v = v_0(z) = \ln \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right) \ln \left( \frac{1}{z_0} \right)^{-1},$$

а также условию периодичности

$$v(x, z) = v(x + L, z),$$

где

$$\begin{aligned}x &= X/H, \quad z = Z/H, \quad h = H_0/H, \\ v &= V/U, \quad z_0 = Z_0/H, \quad \mu = 1/\ln(1/z_0), \\ \tau &= T/(\rho \kappa^2 U^2), \quad p = P/(\rho U^2), \quad \omega = \Omega/(\rho U^2),\end{aligned}$$

Здесь  $U$ ,  $P$  - скорость и давление потока на высоте  $z = H$ . Рельеф дна определяется при помощи безразмерной функции  $\sigma(x)$ , определяющей уровень дна по уравнению  $Z = H_0\sigma(x)$ ,  $H_0$  - амплитуда донных волн.

В работе получена аналитическая формула позволяющая оценить, касательные придонные напряжения, возникающие над периодической донной поверхностью.

Теоретически установлено, что характер обтекания донных волн фиксированной формы  $\sigma(x)$  зависит от единственного безразмерного параметра  $h/\mu_0$ . При его увеличении течение становится отрывным, и зона отрыва стремится к увеличению. Критическое значение  $h/\mu_0$ , при котором течение становится отрывным, зависит от формы донных волн  $\sigma(x)$ . На высоте  $z$  больше  $\mu_0$  возмущение скорости потока стремится к потенциальному.

Показано, что наличие сдвига между средней скоростью потока и придонной скоростью, при этом значение сдвига при фиксированной геометрии донных волн  $\sigma(x)$  зависит от единственного безразмерного параметра  $h/\mu_0$ .

Работа выполнена при поддержке фонда (код проекта 12-01-98518-р восток(а)).

Работа выполнена при поддержке фонда ДВО РАН, (код проекта 12-III-A-03-034).

## Список литературы

- [1] Алферов О. С., Некрасов И. В., Петров А. Г. Обтекание пологого двухмерного холма турбулентным потоком//Физика атмосферы и океана. Т. 36 N. 1, 2000. С. 55-63.

---

## Оценки фрактальных характеристик радиотеплового излучения атмосферы

**А.А. Потапов**

*ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, ул. Моховая, дом 11, корп. 7,  
Москва, 125009, Россия*

`potapov@cplire.ru`

Радиотепловое излучения тропосферы является частным случаем теплового (температурного) излучения. В первой части доклада автором приведены фрактальные характеристики реального процесса радиотеплового излучения на длине волны 8,2 мм [1].

В экспериментах измеряли в основном величину вертикального поглощения  $\Gamma^B$  на длине волны 8,2 мм. Радиометр с чувствительностью 0,5 К, выполненный по модуляционной схеме с супергетеродинным приёмником на входе, обеспечивал измерение шумового сигнала в частотной полосе  $\Delta f = 400$  МГц по основному и зеркальному каналам при промежуточной частоте 250 МГц. Модуляция сигнала с частотой 1000 Гц осуществлялась при помощи ферритового переключателя. В качестве антенны использовался рупор с шириной диаграммы направленности  $9^\circ \times 1^\circ$ . Устройство внутренней калибровки на входе приемника включало в себя волноводный переключатель, согласованные нагрузки при температуре окружающей среды и жидкого азота, электромеханический привод переключателя и датчики его положения [1]. Было проанализировано 5 серий записей, произведенных в различных метеоусловиях.

На основе полученных данных восстановлены фазовые портреты для каждой серии и построены автокорреляционные функции исследуемых серий. Эмпирические распределения вероятностей значений радиотепловой температуры, построенные на различных сериях экспериментальных данных, слабо различаются между собой. Анализ статистических характеристик радиотеплового излучения произведен с помощью диаграммы Пирсона. Статистические характеристики серий № 1 и № 2 группируются в области законов распределений, близких к гауссовскому, с другой стороны, серии №№ 3 - 5 находятся в области степенных законов с тяжелыми хвостами. Данный факт говорит о целесообразности использования именно современной фрактальной обработки. Далее измерялись фрактальная размерность  $D$  и показатель Херста  $H$ . Измеренная величина  $H$  говорит о высокой антиперсистентности процесса радиотеплового излучения.

Взаимодействие стартующих и летящих космических ракет (КР) с окружающей средой (ОС) являлось предметом многих исследований [2]. В частности, установлено, что характер взаимодействия существенно зависит от высоты  $h$ , компонентов ракетного топлива и других факторов. Принято рассматривать особенности взаимодействия ракеты с ОС в трех областях: в ионосфере ( $15 < h < 30$  км), нижней ионосфере ( $60 - 70 < h < 120$  км) и верхней ионосфере (120 - 450 км). Многочисленными исследованиями показано, что основные волновые процессы, стимулированные КР, связаны с акустико-гравитационными волнами в ионосфере, акустическими волнами в атмосфере, явлениями в оптическом и квазиоптическом диапазонах, генерацией низкочастотных электромагнитных колебаний и возмущением геополей, образованием ионосферных дыр. К излучению СДВ – волн приводят следующие процессы: возникновение спонтанных электрических разрядов на корпусе ракеты; МГД-эффекты проводящих объемов; акустические (вибрационные) колебания плазмы

факела ракеты; индуцированные высыпания частиц [2].

Фрактальный экспресс-анализ данных проводился по сериям измерений длительностью около 5 мин. В ходе обработки определялась фрактальная размерность  $D$ , а также размерность вложения фазового портрета серии измерений. Фрактальная размерность определялась по углу наклона корреляционного показателя. В данном случае число наблюдений было равно 500, т.е. размерность определялась в скользящем окне по 500 измерений.

Во второй части доклада представлены избранные результаты экспресс-анализа фрактально-скейлинговыми методами процессов обнаружения и идентификации искусственных ионосферных возмущений по экспериментальным данным ИЗМИРАН и НИИДАР [2].

Результативность радиофизических исследований может быть значительно повышена благодаря учету фрактальности волновых явлений, развивающихся на всех этапах излучения, рассеяния и распространения волн в различных средах. Коренное отличие фрактальной радиофизики от классической связано с принципиально иным подходом к основным составляющим сигнала и поля [1 - 4]. Это позволяет перейти на новый уровень информационной структуры реальных *немарковских сигналов и полей*.

Полученные в докладе результаты показывают перспективность использования фрактальной - скейлинговой обработки информации в научных и прикладных задачах исследования тропосферы и ионосферы современными методами радиофизики.

## Список литературы

- [1] *German V.A., Potapov A.A., Sykhonin E.V.* Fractal Characteristics of Radio Thermal Radiation of a Different Layer of Atmosphere in a Range of Millimeter Waves // Proc. PIERS 2009 "Progress in Electromagnetics Research Symp." - Cambridge, MA: Electromagnetics Academy, 2009. P. 1813 – 1817.
- [2] *Герман В.А., Михайлов Ю.М., Потанов А.А., Савельев С.М., Шустов Э.И.* Фрактальные измерения искусственных возмущений ионосферы // Сб. докл. IV Всероссийской конф. "Радиолокация и радиосвязь" (Москва, 29 ноября – 03 декабря 2010 г.).- М.: ИПЭ им. В.А. Котельникова РАН, 2010. С. 216 – 217.
- [3] *Потанов А.А.* Идентификация фрактальных характеристик излучения атмосферы // Материалы XII Международной научно-технической конференции "Проблемы техники и технологий телекоммуникаций ПТиТТ-2011" (Казань, 21 - 24 ноября 2011 г.).- Казань: Изд-во Казанского гос. технического ун-та, 2011. С. 25 – 28.

- [4] *Потанов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп.- М.: Университетская книга, 2005.- 848 с.

## Научное наследие М.Д. Миллионщикова и развитие его идей в современных проблемах турбулентности

Научное наследие М.Д. Миллионщикова и развитие его идей  
 в современных проблемах турбулентности  
 Объединенный институт высоких температур РАН,  
 Московский физико-технический институт  
 son.eduard@gmail.com

**Аннотация.** В настоящем докладе приводятся результаты работ по турбулентности, выполненные в последние годы в МФТИ и ОИВТ РАН. Приведены работы по турбулентным течениям во вращающихся трубах, турбулентные течения в поле объемных сил, турбулентные течения электропроводной жидкости в магнитном поле при больших магнитных числах Рейнольдса (астрофизическая турбулентность и турбулентность термоядерной плазмы), турбулентность неньютоновской жидкости в сдвиговых течениях, релей-тейлоровская турбулентность вязкопластической жидкости, сверхзвуковая турбулентность и ее распад за решеткой, турбулентность термовязкой жидкости.

В 1947 М.Д. Миллионщиков стал одним из первых профессоров МФТИ и вместе с С.А. Христиановичем принимал активное участие в создании МФТИ. В то время им были инициированы экспериментальные и теоретические работы по турбулентности в ЦАГИ и МФТИ. Позже, начиная с 1962 г. работы по турбулентности в МФТИ продолжились на кафедре физической механики в научных школах С.А. Христиановича, В.М. Иевлева и Е.С. Щетинкова, тесно связанных с М.Д. Миллионщиковым.

**Турбулентность электропроводной жидкости при больших магнитных числах Рейнольдса.** Численное моделирование турбулентных течений во многих приложениях основано на уравнениях моментов. Транспортные уравнения для моментов второго порядка во многих пакетах численного моделирования турбулентных течений представлены в виде замыкающих соотношений уравнений турбулентности. Для задач турбулентного движения проводящих сред система уравнений представляет комбинацию уравнений гидродинамики для векторов скоростей и уравнений для индуцированного магнитного поля. При малых магнитных числах Рейнольдса пульсации магнитного поля индуцированное магнитное поле мало и его пульсации выражаются через пульсации скоростей [1]. При больших магнитных числах Рейнольдса пульсации магнитного поля могут быть представлены в виде, аналогичном пульсациям скорости. Для построения полной аналогии можно использовать переменные Эльзассера [2]. В переменных Эльзассера переменные скорости и альфвеновской скорости представлены в виде суммы скоростей. В случае, когда числа Рейнольдса и магнитное число Рейнольдса имеют существенно различные порядки, можно ввести альфвеновские скорости и их пульсации в турбулентном потоке

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \mathbf{a}' = \frac{\mathbf{h}'}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

Уравнения движения турбулентного движения могут быть записаны в виде

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}^S}{\partial x_k} + \frac{\partial \sigma_{ik}^R}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik}^S + \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik}^R,$$

где  $\sigma_{ik}^R$  — напряжения Стокса,  $\sigma_{ik}^R$  — напряжения Рейнольдса,  $T_{ik}^S$  — средний максвелловский тензор напряжений,  $T_{ik}^R$  — статистический максвелловский тензор, определяемый аналогично тензору напряжений Рейнольдса.

Уравнения для магнитного поля после представления в виде средних значений и пульсационных величин приводятся к виду, аналогичному уравнениям Рейнольдса для вторых моментов скоростей  $M_{ij} = \langle v'_i v'_j \rangle$  и вторых моментов пульсаций магнитного поля  $B_{ij} = \langle a'_i a'_j \rangle$

$$\begin{aligned} \frac{dM_{ij}}{dt} = & \sigma_{jk}^R \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \sigma_{ik}^R \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \langle p' v'_j \rangle \delta_{ik} + \langle p' v'_i \rangle \delta_{jk} + M_{ijk} \right) - \\ & - v \left( \left\langle v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle v'_i \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \right\rangle \right) - 2\varepsilon_{ij} + A_k \left( \left\langle v'_j \frac{\partial a'_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle v'_i \frac{\partial a'_j}{\partial x_k} \right\rangle \right) + \\ & + \langle v'_j a'_k \rangle \frac{\partial A_i}{\partial x_k} + \left\langle v'_j \frac{\partial}{\partial x_k} a'_i a'_k \right\rangle + \left\langle v'_i \frac{\partial}{\partial x_k} a'_j a'_k \right\rangle, \\ \frac{\partial B_{ij}}{\partial t} + V_k \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k} = & A_k \left( \left\langle a'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle a'_i \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \right\rangle \right) - \langle a'_j v'_k \rangle \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \langle a'_i v'_k \rangle \frac{\partial A_j}{\partial x_k} + \\ & + \langle a'_j a'_k \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \langle a'_i a'_k \rangle \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + v_m \left( \left\langle a'_j \frac{\partial^2 a'_i}{\partial x_k \partial x_k} \right\rangle + \left\langle a'_i \frac{\partial^2 a'_j}{\partial x_k \partial x_k} \right\rangle \right) \end{aligned}$$

Кинетическая энергия в МГД – турбулентности представляет сумму кинетической энергии гидродинамического движения и пульсационного магнитного поля.

$$k = \frac{1}{2} \langle v'^2 \rangle + \frac{\langle h'^2 \rangle}{8\pi\rho} = \frac{\langle v'^2 \rangle}{2} + \frac{\langle a'^2 \rangle}{2}.$$

В результате для уравнений турбулентного движения электропроводной жидкости в магнитном поле получаются уравнения, которые аналогичны уравнениям моментов для турбулентного движения без магнитного поля. Например, уравнения для вторых моментов пульсационного магнитного поля имеет вид.

$$\frac{dB_{ij}}{dt} = P_{ij}^B - \frac{\partial q_{ijk}^B}{\partial x_k} - 2\varepsilon_{ij}^B + v_m \Delta B_{ij}$$

где производство турбулентности определяется как генерацией турбулентных пульсаций скоростей, так и генерацией турбулентных пульсаций магнитного поля

$$P_{ij}^M + P_{ij}^B = -M_{ik} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - M_{jk} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + B_{ik} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + B_{jk} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + (R_{jk} - R_{kj}) \frac{\partial A_i}{\partial x_k} + (R_{ik} - R_{ki}) \frac{\partial A_j}{\partial x_k}$$

Предлагаемый подход может быть основой для численного моделирования турбулентных движений при больших значениях магнитных чисел Рейнольдса.

Применение гипотезы Миллионщикова в данной проблеме приводит к соотношениям между четвертыми моментами пульсационных гидродинамических и альфвеновских скоростей дает возможность замыкания уравнений турбулентного движения. Для задач распада турбулентности за решеткой в продольном магнитном поле можно получить аналог уравнения Кармана-Ховарта и найти решение на стадии распада турбулентности.

---

## Кавитационные автоколебания как релаксационные предельные циклы в переменных “расход-давление”

А.К. Такмазян, В.В. Прокофьев

Московский Государственный Университет им. Ломоносова, Институт  
Механики МГУ. 119992 Москва, Мичуринский пр., 1

takmazian@gmail.com

В работе моделируется течение в искусственной вентилируемой каверне с повышенным по отношению к окружающему пространству давлением (каверна с отрицательным числом кавитации). Данная задача была ранее авторами изучена экспериментально [1] в НИИ механики МГУ на плоской струйной установке, причем двумерность течения достигалась за счет того, что оно происходило между двумя близко расположенными параллельными пластинами. Вода из накопителя попадает в трубопровод, заканчивающийся форкамерой с сужающимся плоским соплом. Струя воды после выхода из сопла ударяется перпендикулярно в экран и имеет возможность свободно вытекать в одну сторону вдоль экрана в атмосферу, а с другой стороны ограничена замкнутой областью повышенного давления (каверной), которая поддерживается путем подачи в нее воздуха.

В зависимости от соотношения расходов подаваемой жидкости и поддуваемого газа, возможны три качественно различных вида стационарного истечения струи: 1) струя вытекает из полости наружу, не касаясь экрана, 2) струя при ударе об экран растекается на две: направленную вовне, и внутрь каверны, 3) критический режим - струя касается экрана, но вытекает целиком наружу из каверны. При сверхкритических режимах течения в экспериментах наблюдались устойчивые автоколебания струи в большом диапазоне внешних параметров. С нестационарными режимами при практической реализации течений с отрицательным числом кавитации сталкивались в Институте механики МГУ в 60-х и 70-х годах (исследования, проводимые под руководством академика Л.И. Седова профессорами В.Ф. Шушпановым, В.П. Карликовым и их сотрудниками).

При указанном виде течения ускорение жидкости на внешней границе струи направлено по радиусу из жидкости в газ, а на границе каверны, наоборот, из газа в жидкость. Таким образом, граница каверны подвержена неустойчивости Рэлея-Тейлора (РТ) [2]. Однако в настоящем исследовании предполагается, что эффекты, связанные с уносом газа за счет РТ-неустойчивости не сильно влияют на свойства автоколебательных режимов течения.

Следуя подходу, использованному в [3], показано существование автоколебаний в исследуемом течении. Уравнения сохранения количества движения для жидкости в подводящей системе в одномерном (гидравлическом) приближении интегрируются по длине трубопровода от входа до выхода из подводящей системы. При этом вводится замыкающее предположение о связи давления на выходе из сопла с давлением в каверне. В данном случае, это предположение об отсутствии потерь в свободной струе, на всем ее протяжении от сопла до выхода в атмосферу. Таким образом, получается ОДУ для расхода жидкости в сопле, в котором зависимость от давления в каверне входит через коэффициент сужения струи при ее попадании в атмосферу.

Уравнение баланса массы газа в каверне составляет второе ОДУ системы. Приток газа через питающий трубопровод можно считать постоянным, т.к. расходный кран на входе в каверну газодинамически заперт. Истечение газа из каверны предполагается квазистационарным и зависит от мгновенно-равновесных значений давления и плотности в каверне и окружающей среде, а также от диаметра отверстия. В предположении изотермичности процесса, уравнение принимает замкнутый вид, так как зависимость размера отверстия от параметров среды известна (квазистатика), либо его динамику можно описать некоторым ОДУ.

Полностью система двух ОДУ замыкается, если известна зависимость коэффициента сужения (поджатия) струи от искомым переменных - расхода в трубе и давления в каверне. Используя известное теоретическое решение (см. например [4]), можно построить полиномиальную аппроксимацию зависимости коэффициента сужения от подходящей комбинации давления и расхода [5].

В результате задача свелась к быстро-медленной системе, описывающей релаксационные колебания с S-образной "медленной" кривой с двумя устойчивыми и одной неустойчивой ветвью, как в осцилляторе Ван дер Поля. Введение в систему дополнительного (третьего) ОДУ для кривизны струи позволяет получить количественное совпадение с данными эксперимента.

Работа поддержана грантом РФФИ № 13-01-00250.

## Список литературы

- [1] Козлов И.И., Прокофьев В.В. Унос газа из вентилируемой каверны с отрицательным числом кавитации // Изв. РАН. МЖГ. 2001. №5. С. 92-106.

- [2] Козлов И.И., Прокофьев В.В., Пучков А.А. Исследование развития волновых структур на неустойчивой границе каверны с помощью скоростной видеокамеры // Изв. РАН. МЖГ. 2008. №2. С. 137-148.
- [3] Пилипенко В.В. Кавитационные автоколебания // К.: Наукова думка, 1989 г.
- [4] Козлов И.И., Очеретяный С.А., Прокофьев В.В. Экспериментальные исследования автоколебательных режимов при истечении жидкой струи в плоский вентилируемый канал // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 4. С. 47-58.
- [5] Прокофьев В.В., Такмазьян А.К. Теоретическое и экспериментальное исследование автоколебаний в каверне с отрицательным числом кавитации // Труды IX Всероссийской научной конференции "Нелинейные колебания механических систем" (Нижний Новгород, 24-29 сентября 2012 г.)

---

## **Аномальные режимы трансзвукового турбулентного обтекания крылового профиля с элероном**

**А.Н. Рябинин, А.Г. Кузьмин**

*Санкт-Петербургский государственный университет,  
математико-механический факультет. Университетский проспект, дом  
28, Петергоф, Санкт-Петербург, 198504, Россия*

*anatoly.ryabinin@pobox.spbu.ru,  
alexander.kuzmin@pobox.spbu.ru*

В последнее десятилетие ряд численных исследований продемонстрировал высокую чувствительность трансзвукового течения к изменениям параметров набегающего на крыловой профиль потока в том случае, когда профиль имеет участки малой кривизны. Чувствительность вызвана взаимодействием двух локальных сверхзвуковых зон, примыкающих к профилю. Увеличение чисел Маха свободного потока ведет к расширению сверхзвуковых зон. Следствием этого является слияние двух сверхзвуковых зон, при этом резко меняются давление и аэродинамические силы, действующие на профиль. Это явление было изучено как для ряда симметричных профилей [1], так и для несимметричного профиля J-78, верхняя граница которого имеет в средней части малую кривизну [1, 2]. Неустойчивость близко расположенных зон исследована также для профилей Drela Apex 16 и Boeing 737 Outboard, на нижних поверхностях которых вблизи передней кромки имеются почти плоские участки

[3, 4, 5]. В [4, 5] рассматривалось обтекание профиля Witcomb, снабженного элероном. Отклонение элерона приводит к уплощению профиля в окрестности соединения профиль-элерон или даже к образованию впадины.

В настоящей работе численно исследуется трансзвуковое обтекание крылового профиля Dsma-523b [6] с элероном. Решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса проводилось с помощью пакета Ansys CFX - 13 [7] методом конечных объемов, основанным на схеме высокого разрешения [8]. Неявная второго порядка точности обратная схема Эйлера вовлечена для решения по временным шагам. Расчеты выполнялись на гибридных неструктурированных сетках, которые сгущались в пограничных слоях, в следе и в окрестности скачков уплотнения. Безразмерная толщина первого слоя сетки  $y^+$  была меньше 1. В большинстве расчетов использовалась стандартная модель турбулентности  $k - \omega$  SST. В ряде случаев проведено сравнение с моделью турбулентности BSL Reynolds stress [7]. Пригодность используемой программы для трансзвуковых течений была проверена на нескольких тестовых задачах путем сравнения полученных результатов с данными эксперимента и численных расчетов, доступных в литературе.

Получено, что существуют такие диапазоны чисел Маха, углов атаки и углов отклонения элерона, в которых малые изменения угла атаки и числа Маха свободного потока ведут к значительным изменениям подъемной силы, что может привести к опасным ситуациям для экипажа и пассажиров самолета. В то же время при других параметрах набегающего потока отклики на повороты элерона оказываются аномально малы и управление полетом с помощью элеронов оказывается невозможным. Два различных режима обтекания характеризуются различными размерами и расположением сверхзвуковых зон, примыкающих к профилю.

Настоящая работа поддержана РФФИ, грант №13-08-00288. Исследования были проведены с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра "Вычислительный центр СПбГУ" (<http://cc.spbu.ru>).

## Список литературы

- [1] Kuzmin A. Non-unique transonic flows over airfoils // Computers and Fluids. 2012. Vol. 63. P. 1–8.
- [2] Kuzmin A. Bifurcations of transonic flow past flattened airfoils. Centre pour la Communication Scientifique Directe. E-print. [<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00433168>], 2009.

- [3] Kuzmin A. Advers free-stream conditions for transonic airfoils with concave arcs // Computational Fluid Dynamics 2010 / Ed. A. Kuzmin. — Berlin – Heidelberg:Springer, 2010. P. 887–891.
- [4] Кузьмин А. Г., Рябинин А. Н. Аномальное поведение коэффициента подъемной силы крыла Whitcomb в трансзвуковом полете // Аэродинамика / Под редакцией Р. Н. Мирошина. — СПб.:«ВВМ», 2013. С. 125–130.
- [5] Kuzmin A., Ryabinin A. Airfoils admitting anomalous behavior of lift coefficient in descending transonic flight // The Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics. 2012. 7 p. [http://www.iccfd.org/iccfd7/assets/pdf/papers/ICCFD7-4301\\_paper.pdf](http://www.iccfd.org/iccfd7/assets/pdf/papers/ICCFD7-4301_paper.pdf)
- [6] UIUC Airfoil Coordinates Database. [http://aerospace.illinois.edu/m-selig/ads/coord\\_database.html#D](http://aerospace.illinois.edu/m-selig/ads/coord_database.html#D)
- [7] ANSYS CFX-Solver Modeling Guide. Release 13.0. — Canonsburg: ANSYS, Inc., 2010. 604 p.
- [8] Barth T. J., Jespersen D. C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // AIAA Paper, No. 89-0366. P. 1–12.

---

## **Хаос и турбулентность в двухдиффузионной и проникающей конвекции**

**Ильяс Сибгатуллин**

*Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова*

**sibgat@imec.msu.ru**

Наряду с моделированием развитых турбулентных течений большое значение имеет изучение и моделирование процессов перехода от ламинарных течений к турбулентным. Особенно это важно из-за того, что такие режимы трудно прогнозируемы и для них помимо хаотического режима могут присутствовать режимы с перемежаемостью, при которых хаотические всплески возникают на фоне длительных стационарных или периодических режимов. Для таких режимов выделяется два механизма неустойчивости: один проистекает из-за неустойчивости в пристенной области, другой связан с неустойчивостью конвективного течения в замкнутой области, при этом пристеночные особенности могут не играть большой роли.

Мы продолжили исследования конвекции в жидкостях с такими особенностями как двойная диффузия или аномальная зависимость плотности от температуры. Двумерные режимы являются неустойчивыми по отношению к трехмерным возмущениям, но дают представление о динамических режимах, которые могут развиваться в рамках уравнений Навье-Стокса. На характер решения также сильно влияют симметрии решения, возникающие из-за граничных условий. В двухдиффузионной конвекции возможен сценарий перехода к хаосу Фейгенбаума, в то время как для проникающей конвекции возникают субкритические бифуркации, приводящие к квазипериодическому решению и затем к режимам с перемежаемостью. Трехмерные режимы проникающей конвекции даже в стационарных конфигурациях показывают еще более сложные структуры и траектории частиц, чем представлено в [3] для классической конвекции Релея-Бенара. Для исследований применяется высокоточный псевдоспектральный метод, позволяющий в широком диапазоне исследовать нестационарные режимы и перенос энергии между модами Фурье.

## Список литературы

- [1] Sibgatullin I., Gertsenstein S., Sibgatullin N. Some properties of two-dimensional stochastic regimes of double-diffusive convection in plane layer // Chaos. 2003, V. 13, pp. 1231–1242.
- [2] Kuznetsova D.V., Sibgatullin I.N. Transitional regimes of penetrative convection in a plane layer, Fluid Dynamics Research, 44(3):031410, 2012.
- [3] Getling A. V., Brausch, O. Cellular flow patterns and their evolutionary scenarios in three-dimensional Rayleigh-Bénard convection, Physical Review E, vol. 67, Issue 4, id. 046313

---

## Компьютерное моделирование распространения волн в метастабильных средах

**Н.Н. Смирнов, В.Ф. Никитин, Б.П. Рыбакин**

*Механико-математический факультет МГУ, кафедра газовой и  
волновой динамики, Ленинские Горы дом 1, Москва, 119991, Россия*

`ebifsun1@mech.math.msu.su`

Доклад посвящен анализу разработанных методов математического моделирования переходных процессов при распространении горения в неоднородных средах на многопроцессорных суперЭВМ. В настоящее

время математическое моделирование как процессов перехода горения в детонацию, так и расщепления детонационного фронта на ударную волну и отстающую от нее зону горения требует высокой степени пространственного разрешения, сравнимого с толщиной зоны реакции. Это делает расчеты реальных процессов в областях сложной геометрии трудно выполнимыми в течение разумного времени. Поэтому применение для этой цели параллельных вычислений на суперЭВМ представляется весьма перспективным. С другой стороны моделирование таких сложных взаимозависимых процессов, как взаимодействие химических, физических и газодинамических процессов в турбулентных потоках не поддается распараллеливанию “напрямую”, а производительность вычислительного комплекса не прямо пропорциональна числу подключаемых процессоров. Поэтому одной из основных задач исследований является разработка методов распараллеливания вычислений переходных процессов при распространении горения в неоднородных средах, и определение зависимости скорости вычислений от количества подключаемых процессоров. Разработанные модели применяются для исследования влияния неоднородности распределения горючего, сложности геометрии границ, концентрации горючего в смеси и ее температуры на режимы зажигания, потухания и перехода горения в детонацию.

Исследование механизмов перехода горения в детонацию, проведенное авторским коллективом, показало, что экспериментально наблюдаемая множественность сценариев при переходе горения в детонацию объясняется возникновением тепловых взрывов в горячих точках, образующихся в результате взаимодействия волн перед ускоряющимся фронтом пламени. В зависимости от предыстории процесса и градиентов времен задержки воспламенения в окрестности горячей точки, тепловой взрыв может привести либо к возникновению детонационной волны, либо к возникновению волны нормального горения, распространяющегося из очага во все стороны. Локально в отдельно взятом экзотермическом центре возникновение детонации происходит следуя закономерностям спонтанного механизма, в то время как появление экзотермических центров в потоке происходит вследствие его неоднородностей, турбулизации, взаимодействия волн. Таким образом, как показали проведенные исследования, ключевым моментом при изучении переходных процессов такого типа является возникновение и эволюция отдельного очага детонации. Процесс этот существенно трехмерный, и требует для изучения соответствующих трехмерных моделей. Турбулентность потока при этом должна играть существенную роль как в процессе перехода горения в детонацию в целом, так и при возникновении и развитии отдельных очагов детонации.

В настоящее время трехмерное численное моделирование перехода го-

рения в детонацию на базе уравнений Навье-Стокса для случая простой одноступенчатой кинетики проводится группой лаборатории военно-морских исследований США. Однако, получаемые ими результаты часто не соответствуют экспериментальным данным, вероятно, ввиду невозможности учесть подсеточную турбулентность. В свете этого данная модель представляет существенный шаг вперед, так как она предполагает учитывать подсеточную турбулентность и многостадийную редуцированную кинетику (до пяти стадий). Кроме того, переходные процессы до настоящего времени численно исследовались с применением последовательной схемы вычислений, что при требуемом уровне пространственного разрешения приводит к исключительно длительной процедуре расчета, огромному количеству шагов. В отличие от гомогенных газовых смесей процессы перехода горения в детонацию в полидисперсных гетерогенных средах не настолько хорошо изучены в настоящее время, что, по-видимому, объясняется большим интересом к ударно-волновому инициированию детонации в таких средах, проявившимся российскими и зарубежными исследователями до последнего времени. Проведенные коллективом исследования переходных процессов в гетерогенных средах, возникающих при мягком инициировании, показали существенную роль неравновесности физических процессов фазовых переходов на режимы распространения экзотермических волн в таких системах. Новизна предполагаемых в данном проекте исследований, в частности, состоит в том, что будет изучаться “мягкое” инициирование детонации в дисперсных газо-жидкостных системах в процессе перехода горения в детонацию.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-03-00213.

---

## **Исследование деформаций поперечной русловой прорези с помощью математической модели для неустановившегося руслового процесса**

**К.С. Снигур**

*ВЦ ДВО РАН, ул. Ким Ю Чена, дом 65, Хабаровск, 680000, Россия*

*snigur\_ks@rambler.ru*

В работе предложена одномерная математическая модель, которая включает в себя стационарные уравнения движения водного потока, определенное в рамках приближения мелкой воды, уравнение баланса наносов, неравновесное уравнение переноса взвешенных наносов, равновесную формулу движения влекомых наносов. Формула движения влекомых наносов учитывает влияние морфологии дна, физико-механических и гранулометрических параметров донного материала и не содержит

в себе феноменологических параметров. Предложенная математическая модель руслового потока включает в себя: - уравнение мелкой воды [1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{2g} + \eta \right) + \frac{\tau}{gH\rho_w} = 0, \quad Q = UH; \quad (14)$$

- уравнение переноса взвешенных наносов [2, 3]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial SU}{\partial x} = \alpha \frac{W}{H} (S_* - S); \quad (15)$$

- уравнение Эйснера [4]

$$(1 - \varepsilon)\rho_s \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = -\alpha \frac{W}{H} (S_* - S). \quad (16)$$

Математическая постановка (14) - (16) замыкается начальными и граничными условиями

$$\zeta(x, 0) = \zeta_0(x, 0), \quad S(x, 0) = S_*, \quad \zeta(L, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = J, \\ G(0, t) = G^0, \quad H(L, t) = H^0. \quad (17)$$

Обозначения, используемые в выражениях (14)-(17):  $x, t$  – пространственная и временная координата соответственно,  $U$  – скорость потока,  $H$  – глубина потока,  $Q$  – расход потока,  $\eta = H + \zeta$  – уровень свободной поверхности,  $\zeta$  – уровень донной поверхности,  $\tau$  – сдвиговые напряжения сопротивления,  $\rho_w$  – плотность воды,  $\rho_s$  – плотность песка,  $g$  – ускорение свободного падения,  $S$  – концентрация частиц в потоке,  $S_*$  – транспортирующая способность потока,  $W$  – гидравлическая крупность для переходного потока, где  $d$  – диаметр частиц,  $\varepsilon$  – пористость донного материала,  $G$  – поток влекаемых наносов,  $J$  – уклон донной поверхности,  $G^0$  – транзит донных наносов,  $H^0$  – глубина потока на выходе из расчетной области. Транспортирующая способность потока  $S_*$  находится по формуле, предложенной автором [3]. Определение напряжений гидравлического сопротивления потоку  $\tau$  выполняется по формуле Шези. Поток влекаемых наносов из уравнения (16) определяется по феноменологической модели [4]

$$G = G_0 \tau^{\frac{3}{2}} (1 - \chi) - \frac{G_0 \tau^{\frac{3}{2}}}{\tan \varphi \cos \gamma} \left[ \left(1 - \frac{\chi}{2}\right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right], \quad \chi = \sqrt{\frac{\tau_*}{\tau}}, \quad (18)$$

$$G_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s m}{\kappa \sqrt{\rho_s} (\rho_s - \rho_w) g \tan \varphi \cos \gamma}, \quad m = \begin{cases} 1, & \chi \leq 1 \\ 0, & \chi > 1 \end{cases},$$

$$\tau_* = \frac{3\kappa^2 d(\rho_s - \rho_w)g \tan \varphi \cos \gamma}{8c_x}$$

где  $\tau_*$  – критическое донное напряжение,  $\varphi$  – угол внутреннего трения частиц,  $c_x$  – лобовое сопротивление частиц,  $\gamma$  – острый угол между нормалью к поверхности дна и вертикальной линией,  $\kappa = 0.4$  – постоянная Кармана. Результаты моделирования по предложенной модели приведены на рис. 20, где кривые 1-3 определяют геометрию русловой прорези в различные моменты времени. Геометрия донной поверхности, определенная по экспериментальным данным [5], представлена на рис. 20 точечными множествами 4,5. Результаты моделирования по гравитационной двумерной модели [5] представлены пунктирными кривыми 6,7.

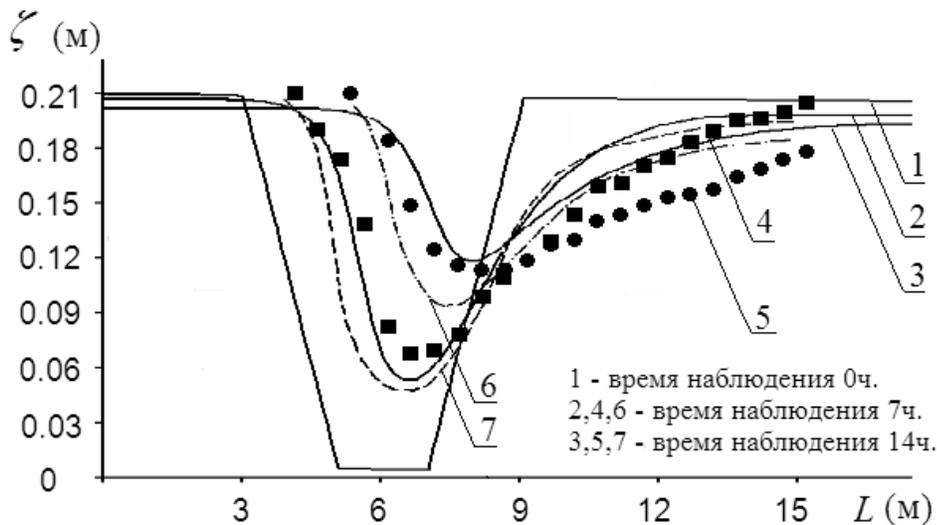


Рис. 20: Сравнение экспериментальных и расчетных данных

## Список литературы

- [1] Картвелишвили Н. А. Потoki в недеформируемых руслах. — Л.: Гидрометеиздат, 1973. — 279 с.
- [2] Караушев А. В. Теория и методы расчета речных наносов: Монография — Л.: Гидрометеиздат., 1977. — 272 с.
- [3] Белолипецкий В. М., Генова С. Н. Вычислительный алгоритм для определения динамики взвешенных и донных наносов в речном русле // Вычислительные технологии. — 2004. — Т. 9. № 2. — С. 9 – 25.
- [4] Петров П. Г. Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости // ПМТФ. — 1991. — № 5. — С. 72 - 75.

- [5] van Rijn L. C. Sedimentation of dredged channels by currents and waves // Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering. —1986. — Vol. 112. № 5. — pp. 541 – 559
- 

## **О влиянии изменений климата на динамику крупномасштабных волн в атмосфере Южного полушария**

**С.А. Солдатенко, А.В. Тертышников**

*Centre for Australian Weather and Climate Research, Melbourne*

*Институт прикладной геофизики, Москва*

S.Soldatenko@bom.gov.au

Изменения климата, наблюдаемые в последние несколько десятилетий, в определенной мере обуславливают преобразования, происходящие на наших глазах в природных и антропогенных системах. Проявления изменений климата весьма разнообразны. В частности, было замечено некоторое увеличение статической устойчивости и ослабление меридионального градиента температуры (МГТ) в ряде областей обоих полушарий (см., например, [1]). Эти изменения привели к уменьшению количества и ослаблению интенсивности среднеширотных синоптических вихрей (циклонов) и сдвигу по направлению к полюсу шторм-треков. В результате в южном полушарии существенно изменились погодные условия над обширными территориями, включая Австралийский континент.

Основным механизмом зарождения синоптических вихрей в средних широтах, как известно, служит бароклинная неустойчивость квазизонального потока. Сравнительный анализ бароклинной неустойчивости, характеризуемой критерием Филлипса, проведенный на основе данных реанализа за периоды 1949-1968 и 1975-1994 и более поздний интервал времени, показал значительное ухудшение со временем благоприятных условий для развития бароклинной неустойчивости в средних широтах Южного полушария, что, по-видимому, обусловило изменение погодных условий на значительных территориях [2]. Известно, что развитие бароклинной неустойчивости определяется статической устойчивостью атмосферы и меридиональным температурным градиентом, обуславливающим наличие вертикального градиента скорости зонального потока.

В докладе рассматривается чувствительность характеристик крупномасштабных волн (в первую очередь скорости роста неустойчивых мод  $\chi_k$ , где  $k$  - волновое число) к вариациям параметра статической устойчивости  $\sigma_0$  и вертикального градиента скорости зонального потока  $\Lambda$  в

атмосфере Южного полушария. Для изучения чувствительности характеристик волн синоптического масштаба (зональные волновые числа 5-8) построена модель типа модели Иди на  $f$  - плоскости [3]. В результате исключения из рассмотрения гравитационных волн получены аналитические выражения для функций чувствительности  $S_\sigma$  и  $S_\Lambda$ , позволяющие оценить влияние вариаций параметров  $\sigma_0$  и  $\Lambda$  на скорость роста неустойчивых волн. Приведены оценки влияния указанных выше параметров на длину волны с максимальной скоростью роста и величину коротковолнового отсечения, характерного для модели Иди. Функции чувствительности позволяют оценить влияние вариаций параметров  $\sigma_0$  и  $\Lambda$  на скорость роста неустойчивых мод. Например, влияние параметра  $\sigma_0$  оценивается следующим образом:  $\chi_k(\sigma_0 + \delta\sigma) \approx \chi_k(\sigma_0) + S_\sigma \times \delta\sigma_0$ .

Для оценки влияния статической устойчивости и скорости зонального потока на динамику волн планетарного масштаба (зональные волновые числа 1-4) используется модель, построенная на основе полных уравнений гидротермодинамики атмосферы на  $\beta$  - плоскости путем их осреднения по вертикали в приближении политропности [4]. Численно получена зависимость мнимой части фазовой скорости волн различной длины от величины безразмерного вертикального температурного градиента и осредненной по вертикали скорости зонального потока. Предложенные модели позволяют в первом приближении исследовать влияние вариаций параметров, определяющих развитие бароклинической неустойчивости в средних широтах (параметра статической устойчивости и вертикального градиента скорости зонального потока) на характеристики неустойчивых волн синоптического и планетарного масштабов. Полученные результаты качественно объясняют те изменения погодных условий, которые произошли за последние несколько десятилетий в Южном полушарии.

## Список литературы

- [1] Frierson D.M.W. Robust increases in midlatitude static stability in global warming simulations // Geophysical Research Letters. 2006. Vol.33. No. 24. Article ID L24816.
- [2] Frederiksen C.S., Frederiksen J.S., Sisson J.M., Osbrough S.I. Observed and projected changes in the annual cycle of Southern Hemisphere baroclinicity for storm formation // Proc. 19th International Congress on MODSIM, Perth, Australia, 12-16 December 2011. P. 2719-2725.
- [3] Дымников В.П. Устойчивость и предсказуемость крупномасштабных атмосферных процессов. - М.: ИВМ РАН, 2007. 283 с.

- [4] Алишаев Д.М. О динамике двумерной бароклиной атмосферы // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16. С. 99-107.
- 

## Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона–Якоби

В.В. Веденяпин, Н.Н. Фимин

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Миусская пл., дом 4, Москва, 125047,  
Россия*

vicveden@yahoo.com

Продемонстрирована возможность вывода базисного уравнения метода Гамильтона-Якоби с использованием гидродинамической подстановки [1]–[2] в уравнение Лиувилля. Рассматривается решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с дискретным аргументом 1-го порядка посредством их приведения к уравнениям кинетического типа с последующим использованием для последних вышеупомянутой гидродинамической подстановки. Приведены примеры исследования систем уравнений, связанных с моделями турбулентности Лоренца [3] и Эно [4].

### Список литературы

- [1] Власов А.А., Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966.
- [2] Бом Д., Общая теория коллективных переменных. М.: Мир, 1964.
- [3] Lorenz E.N., J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130-141.
- [4] Henon M., Comm. Math. Phys. 1976. V. 50. № 1. P. 69–77.

---

# Вихревой каскад неустойчивостей и переход к турбулентности в сдвиговом слое

С.В. Фортова

123056 Москва, ул. 2-я Брестская, д. 19/18, Учреждение Российской академии наук Институт автоматизации проектирования РАН  
sfortova@mail.ru

На основе численного моделирования исследуется задача о сдвиговом слое при наличии постоянного внешнего воздействия (задача Колмогорова). Изучается динамика развития течения при различных профилях продольной составляющей скорости в начальный момент времени. Рассматривается переход от двумерного ламинарного течения к пространственному турбулентному. Показано, что развитие гидродинамических неустойчивостей приводит к возникновению вихревого каскада, который далее при переходе течения в турбулентную стадию соответствует развитию каскада вихрей в энергетическом и, далее, инерционном интервалах.

Течение Колмогорова для сдвигового слоя при различных профилях продольной составляющей скорости в начальный момент времени рассматривалось при различных размерах расчетной области, а именно, начиная от узкого канала  $L_x = \pi/8$ ,  $L_y = \pi$ ,  $L_z = 2\pi$  и кончая пространственным случаем  $L_x = 2\pi$ ,  $L_y = 2\pi$ ,  $L_z = 2\pi$ . На рисунке 21 продемон-

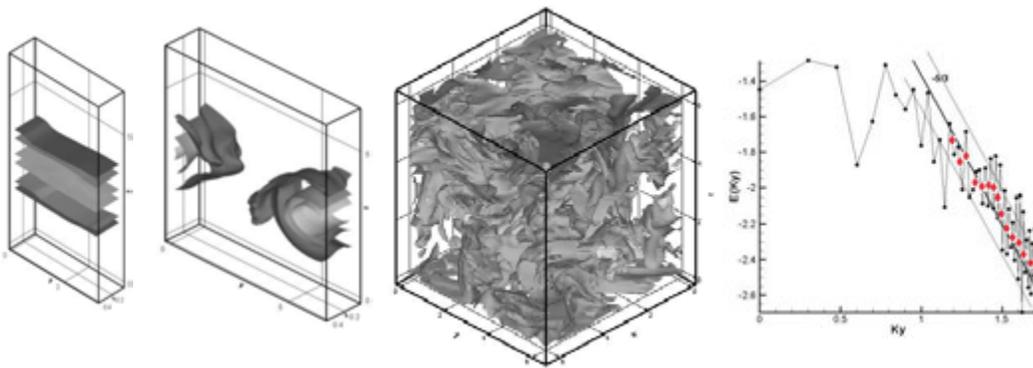


Рис. 21: Изоповерхности условной концентрации при  $t = 10$ . Переход к турбулентному режиму в случае параболического профиля скорости: ламинарное течение, вторичное течение и турбулентное течение. Спектр кинетической на развитой стадии турбулентности в момент времени  $t = 28$ .

стрирован переход от устойчивого ламинарного течения в узком канале к пространственному турбулентному. Полученные результаты показывают, что при увеличении ширины области в поперечном направлении

течение перестает быть ламинарным и представляет собой устойчивую во времени крупную структуру (вторичное течение), что соответствует двумерной теории Бэтчелора [1]. При дальнейшем увеличении расчетной области формируется турбулентное течение аналогично [2-4]. А именно, начальный этап развития турбулентности состоит из формирования одной крупной структуры (аналогично двумерному случаю) по форме напоминающего вихревой рулон. Затем на поверхности рулона набегаящий “ламинарный” поток образует вторичные неустойчивости в виде вихревых рулонов меньшего. Таким образом, наличие очередных неустойчивостей на поверхности предыдущих приводит к потере стабильности течения и вызывает развитие вихревого каскада.

## Список литературы

- [1] Бетчелор Дж.К. Теория однородной турбулентности // Москва. Изд-во иностр. лит. 1955.
- [2] Belotserkovskii O.M., Chechetkin V.M., Fortova S.V., Oparin A.M. The turbulence of free shear flows // Proc. Internat. Workshop “Hot Points in Astrophysics and Cosmology”. Dubna, 2005. P. 191–209.
- [3] Белоцерковский О.М., Фортова С.В. Макропараметры пространственных течений в свободной сдвиговой турбулентности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 6. С. 1126–1139.
- [4] Фортова С.В. Численное моделирование трехмерного течения Колмогорова для сдвигового слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 3. С. 433–441.

---

### Метод нахождения логарифмического профиля скорости течения жидкости в трубе кругового сечения при больших значениях числа Рейнольдса на основе стохастической модели турбулентности

О.Н. Хатунцева

г. Королев, ОАО РКК “Энергия”, МФТИ

ol-khatun@yandex.ru

Общепринятым подходом к описанию течения вязкой несжимаемой жидкости, вообще, и течения такой жидкости в трубах различного сечения, в частности, является нахождение решений системы уравнений Навье-Стокса.

Если труба имеет круговое сечение, то в стационарном случае система уравнений Навье-Стокса допускает единственное аналитическое решение в виде выражения, описывающего параболический профиль скорости при любых значениях числа Рейнольдса [1]. Причем такое решение является устойчивым при исследовании задачи на устойчивость в линейной постановке. Этот результат противоречит огромному количеству экспериментов, в которых обнаруживают различные режимы течения жидкости в трубах кругового сечения и соответствующие им различные осредненные профили скорости [2]-[4]. При больших числах Рейнольдса устанавливается турбулентный режим течения жидкости. Такой режим течения является ярким примером недетерминированных – стохастических процессов. В (квази)стационарном случае ему соответствует логарифмический профиль скорости.

При численном решении уравнений Навье-Стокса на режимах с большими значениями числа Рейнольдса для нахождения профиля скорости, соответствующего экспериментальному, используют дополнительные искусственные приемы, например, задание периодического возмущения на оси трубы [5].

Целью работы является разработка метода описания стохастических процессов (без привлечения обычной в таких случаях методологии стохастических дифференциальных уравнений) [6] и отыскание с его помощью дополнительных аналитических решений задачи течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения с гладкими стенками.

Для этого пространство переменных расширяется за счет введения непрерывно изменяющейся плотности вероятности реализации исследуемого параметра, характеризующего течение жидкости (например, скорости).

Такой подход позволяет для стохастических систем, не имеющих выделенных состояний равновесия, получить соотношение, связывающее отклонение случайной величины от средних значений реализаций случайных величин в двух временных точках, а также плотности вероятности этих реализаций.

На основе этого соотношения получена система уравнений, описывающая эволюцию траекторий отклонений исследуемого параметра от среднего значения в фазовом стохастическом пространстве [6].

Для больших значений числа Рейнольдса совместное решение уравнений Навье-Стокса с дополнительной стохастической переменной и уравнений, описывающих эволюцию траекторий в фазовом стохастическом пространстве позволило найти аналитическое решение задачи течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения, характеризуемое логарифмическим профилем осредненной скорости течения.

## Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. С.282.
- [2] Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. – М., “Наука”, 1969, 824 с.
- [3] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: «Наука», 1974. 711 с.
- [4] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: «Наука», 1978. 736 с.
- [5] Никитин Н.В. Прямое численное моделирование трехмерных турбулентных течений в трубах кругового сечения. Изв. РАН. Механ. жидкости и газа, 1994.
- [6] Хатунцева О.Н. Описание динамики марковских процессов в расширенном пространстве переменных. Журнал “Ученые записки ЦАГИ” Т. XLII №1 2011 г. стр. 62-85.

---

### **Дифференциальная механика жидкостей: инструмент расчета динамики и структуры течений**

**Ю.Д. Чашечкин**

*ИПМех РАН, Москва, Россия*

В последние годы все более активно развиваются исследования геометрических форм механики жидкостей, дополняющие традиционное описание. Одной из побудительных причин развития данного направления является универсальность видов тонких структур природных процессов. Выраженные регулярные тонкие структуры отмечаются во всех доступных для наблюдения природных системах, масштаб которых простирается от световых лет в межзвездной среде до метров в атмосфере и гидросфере Земли. В лабораторных условиях элементы тонкой структуры вихревых и волновых течений более мелкие с поперечными размерами от сантиметров до микрон (приводятся примеры). Расчеты структуры дополняют традиционное описание динамики процессов в жидкостях или газах. Обсуждаются теоретические основы механики жидкостей, обосновывается выбор основных физических величин с учетом условий их

наблюдаемости [1]. Обосновывается выбор уравнений, образующих фундаментальную систему – основу математического моделирования течений. Анализируются инфинитезимальные симметрии системы, включающей уравнения неразрывности, баланса импульса и энергии, диффузии компонент и замыкающее уравнение состояния, показывается их согласие с базовыми принципами физики, отмечается отличие свойств других распространенных модельных систем [2]. Такие свойства, как ранг полной системы уравнений, порядок ее линеаризованной версии и степень алгебраического характеристического (дисперсионного) уравнения, которые определяются условием совместности, оказываются зависящими от степени учета диссипативных факторов, и достаточно высокими [3]. Дальнейший анализ свойств решений линеаризованной формы фундаментальной системы проводится методами теории сингулярных возмущений в приближении слабой диссипации [3, 4]. Показано существенное различие свойств регулярно возмущенных компонент решений дисперсионного уравнения, описывающих крупномасштабные компоненты течений и богатого семейства сингулярно возмущенных решений, задающих тонкую структуру течений. Впервые дана полная математическая классификация решений различных модельных систем, широко используемых в практической гидродинамике, прослежена эволюция сопутствующих тонкоструктурных компонент, дополняющих крупномасштабные элементы периодических течений при упрощении вида моделей. Обсуждаются следствия вырожденности классической системы уравнений неразрывности и переноса импульса в приближении однородной жидкости. Приводятся примеры расчета генерации и распространения инфинитезимальных внутренних волн и сопутствующих тонкоструктурных компонент, возбуждаемых в непрерывно стратифицированных средах компактными 2D и 3D источниками, совершающими линейные или крутильные колебания [4] и сравнения с данными контактных и дистанционных измерений внутренних волн, выполненных в нашей стране и за ее пределами [5]. Опыты, выполненные с использованием высокоразрешающих теневых приборов, позволяют проследить эволюцию тонкой структуры при изменении параметров течения, оказывающей существенное влияние на рассеяние звука спутными течениями за препятствиями [6]. В расчетах по конститутивным моделям, достаточно точно описывающим картины волновых полей, тонкая структура полей плотности не воспроизводится [7]. В то же время с помощью высокоразрешающих инструментов удается проследить трансформацию тонкой структуры пучка периодических внутренних волн с увеличением амплитуды колебаний источника, формирование разрывов в поле градиента плотности и компактных вихрей вдали от источника в областях конвергенции тонкоструктурных компонент волновых полей. Такие структуры существенно влияют на перенос

примесей, рост концентрации в одних областях течения и убывание в других [8]. Процессы реструктуризации вещества происходят достаточно медленно в полях внутренних волн и весьма энергично в быстропротекающих процессах, обусловленных падением капли одной жидкости в другую [9]. В опытах разделение первоначально однородного пятна растворимой примеси на отдельные волокна наблюдается как в волновых, так и вихревых процессах [10]. В качестве иллюстрации свойств полных решений приводятся результаты расчетов двумерных течений, индуцированных диффузией в неподвижной стратифицированной среде на наклонной полосе и клине [11, 12]. Расчеты задач в полной постановке, выполненные на суперкомпьютерных комплексах, позволяют одновременно проследить эволюцию динамики и тонкой структуры при установлении течений, выделить особенности и показать различия полей основных физических величин – скорости жидкости, завихренности и темпа ее бароклинной генерации, диссипации механической энергии, возмущений плотности и давления. В заключение проводится сравнительное обсуждение математического и физического содержания понятий «движение» и «течение жидкости», требований к измерительной технике и методике, обеспечивающих выполнение условия полноты эксперимента.

## Список литературы

- [1] Chashechkin Yu. D. The Complex Structure of Wave Fields in Fluids // *Procedia IUTAM*. 2013. V. 8. P. 65–74.
- [2] Байдулов В.Г., Чашечкин Ю.Д. Сравнительный анализ симметрий моделей механики неоднородных жидкостей // *Доклады АН*. 2012. Т. 444. № 1. С. 38–41.
- [3] Чашечкин Ю.Д. Иерархия моделей классической механики неоднородных жидкостей // *Морской гидрофизический журнал*. 2010. № 5. С. 3-10.
- [4] Васильев А.Ю., Чашечкин Ю. Д. Трехмерные периодические течения, образующиеся при колебаниях части наклонной плоскости в неоднородной жидкости // *Прикл. мат. и механика*. 2012. Т. 76. Вып. 3. С. 418-428.
- [5] Paoletti M. S. c1 and Swinney H. L. Propagating and evanescent internal waves in a deep ocean model // *J. Fluid Mech*. 2012. V. 706. P. 571-583.
- [6] Прохоров В.Е., Чашечкин Ю.Д. Визуализация и акустическая регистрация тонкой структуры стратифицированного течения за вертикальной пластиной // *Механика жидкости и газа*. 2013. № 6. С.15-28.

- [7] Houcine H., Chashechkin Yu. D., Fraunie Ph., Fernando H., Gharbi A., and Lili T. Numerical modeling of the generation of internal waves by uniform stratified flow over a thin vertical barrier // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2012. V. 68. P. 451–466.
- [8] Калиниченко В.А., Чашечкин Ю.Д. Структуризация и реструктуризация однородной суспензии в поле стоячих волн // Механика жидкости и газа. 2012. № 6. С. 109-121.
- [9] Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. Гидродинамика удара капли: короткие волны на поверхности венца // Доклады АН. 2013. Т. 451. № 1. С. 41–45.
- [10] Степанова Е.В., Чашечкин Ю.Д. Перенос маркера в составном вихре // Механика жидкости и газа. 2010. № 6. С. 12-29.
- [11] Загуменный Я.В., Чашечкин Ю.Д. Тонкая структура нестационарного течения, индуцированного диффузией на неподвижной пластине // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 3. С. 99- 117.
- [12] Загуменный Я.В., Чашечкин Ю.Д. Индуцированное диффузией течение на клине // Доклады НАН Украины. 2013. Т. 3. С.41-48.

---

## Волновые движения на вращающейся притягивающей сфере: модель атмосферы

А.В. Спешилова, В.В. Остапенко, А.А. Черевко, А.П. Чупахин

*Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева, проспект Лаврентьева,  
дом 15, Новосибирск, 630090, Россия*

*ivanovaannav@gmail.com, ostapenko\_vv@ngs.ru,  
cherevko@hydro.nsc.ru, chupakhin@hydro.nsc.ru*

Гидродинамика атмосферы, вследствие наличия двух дополнительных факторов – вращения и притяжения – обнаруживает большую сложность и богатство эффектов по сравнению с классической. Взаимодействие этих двух сил удерживает сплошную среду на поверхности планеты в состоянии равновесия в целом. Вместе с тем на фоне этого равновесия происходят движения различных масштабов.

Модель мелкой воды, широко применяемая в физике атмосферы, представляет собой гиперболическую систему дифференциальных уравнений [1, 2], заданную на компактном многообразии [3] - поверхности вращающейся притягивающей сферы.

В настоящей работе изучаются уравнения мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере, в которых учтены горизонтальные составляющие силы Кориолиса и центробежной силы [4]. В [2] найден и исследован класс стационарных решений системы. Эти стационарные решения представляют собой состояния равновесия твердотельно вращающейся жидкости, в которых обе компоненты скорости равны нулю, тогда профиль глубины жидкости достигает максимума на экваторе, а минимума на полюсах и внешним видом напоминает яблоко.

Помимо состояния равновесия существует класс точных зональных течений, в которых меридиональная скорость равна нулю, а долготная отлична от нуля, течение направлено вдоль параллелей, при этом профиль глубины отличается от профиля в равновесном состоянии. Существуют решения, сопрягающие состояние равновесия с такими течениями через контактный разрыв.

На фиг. 22 показан профиль глубины слоя жидкости в развороте на плоскость  $(\theta, \phi)$  для четырех последовательных моментов времени. Вдоль оси  $OX$  откладывается широта, по оси  $OY$  – долгота. Насыщенность заливки отвечает глубине слоя, меняясь от светлого к темному при увеличении глубины. Темные линии на фигурах – линии тока. В началь-

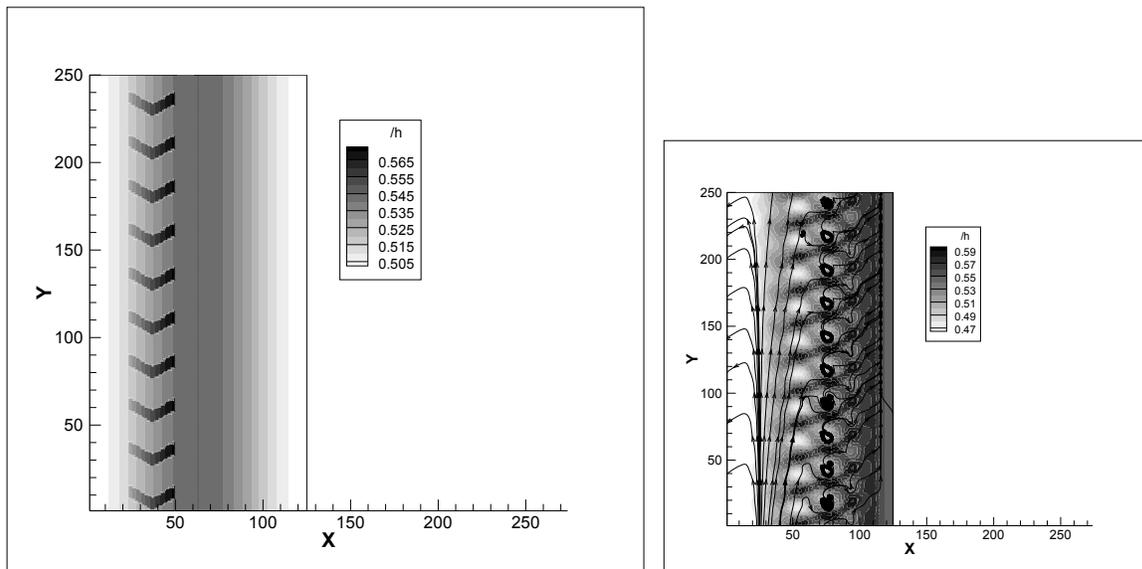


Рис. 22: а (t=0)

б (t=60)

ный момент времени на фоне равновесного состояния на сфере имеются десять одинаковых шевронов, расположенных в сферическом поясе с границами  $(0.2\pi, 0.4\pi)$  и равноудаленных друг от друга (фиг. 22а). В каждом шевроне задано зональное течение. Темные линии на фигурах – линии тока.

Распространение волн при таких начальных данных сопровождается образованием системы вихрей различных масштабов (фиг. 22б), которые

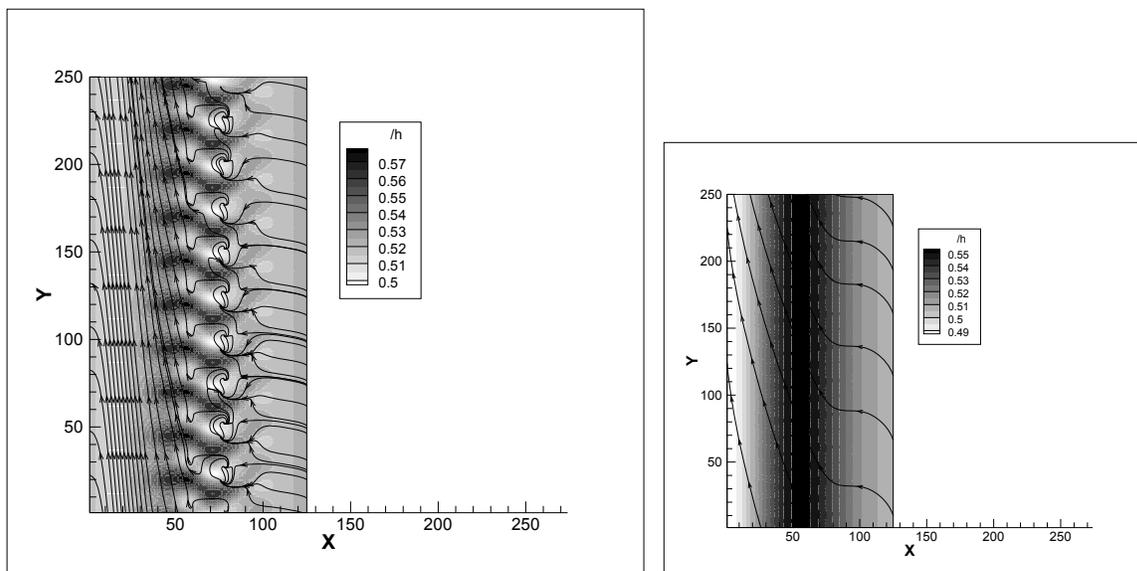


Рис. 23: а ( $t=150$ )

б ( $t=1000$ )

взаимодействуя друг с другом порождают еще большее количество более мелких вихрей (фиг. 23а). С течением времени все вихри угасают и на фоне равновесного состояния остается зональное течение (фиг. 23б). В итоге начальная система шевронов порождает зональное течение на фоне исходного равновесного состояния.

Приведенный пример имеет наглядную физическую интерпретацию: образования в виде шевронов наблюдаются на снимках со спутников поверхности Земли и других планет (как облаков в атмосфере, так и течений в океане) [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект № 11-01-00026, Интеграционного проекта СО РАН № 44 и программы ОЭММПУ № 2.13.4.

## Список литературы

- [1] Черевко А.А., Чупахин А.П. Уравнения модели мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере 1. Вывод и общие свойства // ПМТФ. 2009. Т. 50, N 2. С. 37-45.
- [2] Черевко А.А., Чупахин А.П. Уравнения модели мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере 2. Простые стационарные волны и звуковые характеристики // ПМТФ. 2009. Т. 50, N 3. С. 82-96.
- [3] Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. М. Изд-во МЦНМО, 2007. 392с.

- [4] Остапенко В.В., Черевко А.А., Чупахин А.П., О разрывных решениях уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 2. С.33-51.
- [5] Simon-Miller, A.A., J.H. Rogers, P.J. Gierasch, D. Choi, M.D. Allison, A. Adamoli, and H.-J. Mettig, 2012: Longitudinal variation and waves in Jupiter's south equatorial wind jet // Icarus, 218, 817-830.

---

## Турбулентность по Колмогорову и динамика твердого тела, взаимодействующего со средой

М.В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Мичуринский пр., д. 1,  
Москва, 119192, Россия

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

А. Н. Колмогоров в своих классических работах [1, 2], в которых начато систематическое изучение мелкомасштабной турбулентности, сформулировал две гипотезы, касающиеся статистических свойств однородной и изотропной турбулентности при больших числах Рейнольдса.

*1-я гипотеза Колмогорова.* Статистические свойства в инерционном и диссипативном интервале (т.е. на масштабах  $l \ll L$ ) не зависят от способа возбуждения турбулентности и универсальным образом определяются тремя параметрами: скоростью диссипации энергии  $e$ , кинематической вязкостью  $\nu$  и самим масштабом  $l$ .

*2-я гипотеза Колмогорова.* Статистические свойства турбулентности в инерционном интервале в некотором роде универсальны и зависят только от скорости диссипации энергии  $e$  и масштаба  $l$ .

Далее, М. Д. Миллионщиков принимал во внимание гипотезу о нормальном распределении пульсирующих скоростей (для локально изотропного турбулентного поля) в стационарном случае [3] (при изучении теории турбулентности для специальных целей).

Как известно, турбулентность является процессом хаотическим. Но существует и иная точка зрения на турбулентность, высказанная Пригожиным [4, 5, 6]. Согласно ей переход от ламинарного течения к турбулентному является процессом самоорганизации, при котором энергия теплового хаоса переходит в глобальное организованное движение упорядоченных структур, являющихся диссипативными. Это обстоятельство и повышает внутреннюю упорядоченность системы по сравнению с молекулярным хаосом.

Отражение данных вопросов и содержится в работе при построении модели воздействия среды на твердое тело, несмотря на то, что в данной

области знаний, как правило, не содержится изучение движения среды, а исследуется лишь "движимое" тело.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-01-00020-а).

## Список литературы

- [1] Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299–303.
- [2] Колмогоров А.Н. Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса, In: *Mecanique de la turbulence: Colloq. Intern. CNRS, Marseille, aout — sept. 1961 / На рус. и фр. яз. Paris. — 1962. P. 447–458.*
- [3] Миллионщиков М.Д. К теории однородной и изотропной турбулентности // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1941. Т. 5. № 4–5. С. 433–446.
- [4] Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. М.: Изд-во "Прогресс 1986, 310 с.
- [5] Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. М.: Изд. группа «Прогресс», 1994. 240 с.
- [6] Пригожин И. Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. Москва: Мир, 2002, 461 с.

---

## Турбулентность в атмосферных вихревых течениях

**А.Ю. Шиховцев**

*Институт Солнечно-земной физики СО РАН, ул. Лермонтова, 126-а,  
Иркутск, Россия*

`artepochta2009@rambler.ru`

В работе рассматриваются мелкомасштабные пульсации характеристический атмосферной турбулентности в части их обусловленности крупномасштабной турбулентностью, рассматриваемой как в широком диапазоне энергетического спектра, так и в отдельных его интервалах. При этом показано насколько далеко может сказываться влияние внешнего

течения на турбулентные неоднородности разных пространственных диапазонов спектра. Получены спектры пульсаций температуры и скорости ветра в широком диапазоне масштабов и проанализирована связь поля мелкомасштабной атмосферной турбулентности с полем синоптических неоднородностей температуры и скорости ветра. Оценены высотные деформации диапазона синоптической турбулентности с показателем степени “-3” в слое от 2 м до свободной атмосферы. Для анализа использованы данные наблюдений на высотной метеорологической мачте (ВММ) г. Обнинска в слое 2-301 м за 2008 г., данные акустической метеостанции, расположенной на площадке Большого солнечного вакуумного телескопа (БСВТ) на высоте 5 м и данные прямых оптических наблюдений Солнца на БСВТ. Представленные результаты спектральных исследований атмосферной турбулентности полезны для понимания физических закономерностей взаимодействия турбулентных атмосферных неоднородностей разных масштабов, что важно как для общей теории турбулентности, так и для ее приложений в физике и оптике атмосферы.

## Author Index — Авторский указатель

- Абали, Б.Э., 108  
Алдушин, А.П., 97  
Артамонов, А.Ю., 103  
Баренблатт, Г.И., 26  
Бахолдин, И.Б., 99  
Будаев, В.П., 102  
Варенцов, М.И., 103  
Веденяпин, В.В., 144, 172  
Вигдорovich, И.И., 106  
Галазюк, Виталий, 133  
Георгиевский, Д.В., 108  
Глазунов, А.В., 103  
Глушнева, А.В., 110  
Гурбатов, С.Н., 112  
Гущин, В.А., 143  
Данилов, Д.С., 137  
Долуденко, А.Н., 114  
Дородницын, А.А., 8  
Дынникова, Г.Я., 115  
Ермаков, М.К., 117  
Зеленый, Л.М., 102  
Зубарев, В.М., 118  
Ивлева, Т.П., 97  
Ингель, Л.Х., 120  
Исахов, А.А., 122  
Калинин, Е.И., 139  
Кляцкин, В.И., 126  
Князев, В.А., 127  
Ковалев, В.Л., 129  
Кольшницын, В.А., 131  
Константинов, П.И., 103  
Крат, Ю.Г., 130  
Кудашев, Е.Б., 131  
Кузь, Игорь, 133  
Кузьмин, А.Г., 162  
Курбацкая, Л.И., 134  
Курбацкий, А.Ф., 134  
Липатов, И.И., 137  
Мазо, А.Б., 139  
Маклаков, Д.В., 141  
Маламанов, С.Ю., 146  
Маршов, В.П., 131  
Маслов, В.П., 18  
Матюшин, П.В., 143  
Молочников, В.М., 139  
Мюллер, В.Х., 108  
Негматов, М.А., 144  
Никитин, В.Ф., 165  
Никитин, Николай, 146  
Остапенко, В.В., 179  
Павловский, В.А., 146  
Пахомов, М.А., 148  
Петров, А.Г., 141, 154  
Петросян, А.С., 150  
Пономарёв-Степной, Н.Н., 14  
Потапов, А.А., 155  
Потапов, И.И., 154  
Прокофьев, В.В., 160  
Репина, И.А., 103  
Рыбакин, Б.П., 165  
Рябинин, А.Н., 162  
Савельев, А.С., 110  
Савин, С.П., 102  
Саичев А.И., 112  
Самсонов, Т.Е., 103  
Сибгатуллин, Ильяс, 164  
Смирнов, Н.Н., 165  
Снигур, К.С., 167  
Солдатенко, С.А., 170  
Сон, Э.Е., 110, 158  
Спешилова, А.В., 179  
Такмазьян, А.К., 160  
Тертышников, А.В., 170  
Тугазаков, Р.Я., 137  
Турчин, Игорь, 133  
Фимин, Н.Н., 172  
Фортова, С.В., 173  
Хатунцева, О.Н., 174

Чашечкин, Ю.Д., 176  
 Черевко, А.А., 179  
 Чупахин, А.П., 179  
 Шамолин, М.В., 182  
 Шандарин, С.Ф., 112  
 Шейндлин, А.Е., 10  
 Шиховцев, А.Ю., 183  
  
 Abdurakhimov, L.V., 58  
  
 Barenblatt, G.I., 33  
 Brandolese, Lorenzo, 33  
 Brazhnikov, M.Yu., 58  
  
 Calogero, Francesco, 34, 35  
 Cambon, Claude, 36  
 Carton, X., 79  
 Chkhetiani, O.G., 38, 51  
 Chorin, A.J., 33  
  
 Dmitrenko, Artur V. , 39  
 Dorodnitsyn, V., 41  
  
 Efimov, V, 41  
 Elizarova, T.G., 43  
  
 Falkovich, Gregory, 45  
 Funakoshi, Satoshi, 69  
  
 Gawedsky, Krzysztof, 46  
 Golitsyn, G.S., 46  
 Gurbatov, Sergey N., 47  
  
 Kerner, Richard, 49  
 Kolokolov, I. V., 50  
 Koprov, B.M., 51  
 Koprov, V.M., 51  
 Kozlov, V. V., 53  
 Kuchugov, P., 53  
 Kupka, F. , 55  
 Kurgansky, M.V., 51  
 Kuznetsov, E.A., 56  
  
 L'vov, Victor S., 65  
 Levchenko, A.A., 58  
 Levina, G.V., 61  
  
 Levshin, A.O., 38  
  
 Magri, Franco, 65  
 Mamaloukas, C., 66  
 Mazumdar, H.P. , 66  
 Miškinis, P., 68  
 Miyamoto, Hironori, 69  
 Miyazaki, Takeshi, 69  
 Moffatt, Keith, 72  
 Monastyrsky, M., 72  
 Montgomery, M.T., 61  
  
 Nazarenko, S.V. , 74  
 Nejadmalayeri, Alireza, 90  
 Nigmatulin, Robert, 75  
  
 Prostokishin, V.M., 33  
  
 Remizov, I.A., 58  
 Ricca, Renzo L., 77  
 Rozanov, V. , 53  
 Rudenko, Oleg V., 47  
  
 Sasorov, P., 72  
 Shafarevich, A.I., 78  
 Shirokov, I.A., 43  
 Sirota, V.A., 95  
 Sokolovskiy, M.A., 79  
 Sukoriansky, Semion, 81  
  
 Troitskaya, S.D., 82  
 Troitskaya, Yu.I., 84  
  
 Vasilyev, Oleg V., 90  
 Vedenyapin, V.V., 88  
 Verron, J., 79  
 Vezolainen, Alexei, 90  
  
 Yushkov, Vladislav P., 94  
  
 Zmitrenko, N., 53  
 Zybin, K.P., 95

## Contents — Содержание

<b>Введение:</b> Плодотворность и творческое многообразие как модель турбулентности. Гипотеза Миллионщикова . . . . .	5
<b>А.А. Дородницын:</b> Академик из нашей школы . . . . .	8
<b>А.Е. Шейндлин:</b> Совместно работая . . . . .	10
<b>Н.Н. Пономарёв-Степной:</b> О Михаиле Дмитриевиче Миллионщикове . . . . .	14
<b>В.П. Маслов:</b> Вечера у Миллионщиковых . . . . .	18
<b>Г.И. Баренблатт:</b> Михаил Дмитриевич Миллионщиков — блеск и трагедия . . . . .	26
<b>G.I. Varenblatt, A.J. Chorin, V.M. Prostokishin:</b> Turbulent Flows at Very Large Reynolds Numbers: the Lessons of Investigation . . . . .	33
<b>Lorenzo Brandolese:</b> On wave propagation in shallow water and in hyperelastic media . . . . .	33
<b>Francesco Calogero:</b> Pugwash . . . . .	34
<b>Francesco Calogero:</b> Isochronous systems are not rare . . . . .	35
<b>Claude Cambon:</b> Coexistence of “strong” and “weak” wave turbulence . . . . .	36
<b>O.G. Chkhetiani, A.O. Levshin:</b> Helicity decay in homogeneous turbulence . . . . .	38
<b>Artur V. Dmitrenko:</b> Equivalent measures and stochastic equations for determination of the turbulent velocity fields and correlation moments of the second order . . . . .	39
<b>V. Dorodnitsyn:</b> First integrals of ordinary difference equations: Beyond Lagrangian methods . . . . .	41
<b>V. Efimov.:</b> Acoustic turbulence of second sound waves in superfluid helium . . . . .	41
<b>T.G. Elizarova, I.A. Shirokov:</b> Laminar and turbulent regimes of Taylor-Green vortex decay . . . . .	43
<b>Gregory Falkovich:</b> Turbulence theory in 21 century: a synthesis of Kolmogorov and Landau? . . . . .	45
<b>Krzysztof Gawedzky:</b> Turbulence in the Lobachevsky plane . . . . .	46
<b>G.S. Golitsyn:</b> Size distribution of lithospheric plates . . . . .	46
<b>Sergey N. Gurbatov, Oleg V. Rudenko:</b> Nonlinear random waves and turbulent flows in hereditary media . . . . .	47
<b>Richard Kerner:</b> Dynamical Models of Agglomeration and Growth Processes . . . . .	49
<b>I. V. Kolokolov:</b> Kynematic dynamo in large-scale chaotic flows . . . . .	50
<b>B.M. Koprov, V.M. Koprov, M.V. Kurgansky, O.G. Chkhetiani:</b> Helicity of atmospheric turbulence . . . . .	51

<b>V. V. Kozlov:</b> The Vlasov kinetic equation, dynamics of continuum and turbulence . . . . .	53
<b>P. Kuchugov, N. Zmitrenko, V. Rozanov:</b> The development of two- and three-dimensional multimode perturbation under the influence of the gravitational instability . . . . .	53
<b>F. Kupka:</b> Modelling of coherent structures in turbulent convection . . . . .	55
<b>E.A. Kuznetsov:</b> Breaking phenomena in incompressible fluids as a route to the Kolmogorov and Kraichnan spectra . . .	56
<b>L.V. Abdurakhimov, M.Yu. Brazhnikov, I.A. Remizov, A.A. Levchenko:</b> Capillary turbulence on the surface of cryogenic liquids . . . . .	58
<b>G.V. Levina, M.T. Montgomery:</b> Turbulent vortex dynamo in the tropical atmosphere of the Earth . . . . .	61
<b>Victor S. L'vov:</b> Hydrodynamic and wave turbulence in superfluids . . . . .	65
<b>Franco Magri:</b> On the geometry of integrable systems of hydrodynamic type . . . . .	65
<b>C. Mamaloukas, H.P. Mazumdar:</b> Applications of Millionschikov's zero-fourth-order cumulant hypothesis to the theory of homogeneous turbulence . . . . .	65
<b>P. Miškinis:</b> The universal nature of the Reynolds number in local and nonlocal phenomena . . . . .	68
<b>Takeshi Miyazaki, Hironori Miyamoto, Satoshi Funakoshi:</b> Maximum entropy states of quasi-geostrophic point vortices under periodic boundary conditions . . . . .	69
<b>Keith Moffatt:</b> The Role of Helicity in Turbulent Flow . . . .	72
<b>M. Monastyrsky, P. Sasorov:</b> Topological invariants in magnetohydrodynamics and DNA supercoiling . . . . .	72
<b>S.V. Nazarenko:</b> Cluster of interacting wave triads in QG model: quadratic invariants . . . . .	74
<b>Robert Nigmatulin:</b> Multiscale phenomena, asymptotics and thermonuclear fusion in cavitating bubbles . . . . .	75
<b>Renzo L. Ricca:</b> Knot polynomials as new tool for turbulence research . . . . .	77
<b>A.I. Shafarevich:</b> Asymptotic solutions and regularization for the Cauchy problem for the induction equation . . . . .	78
<b>M.A. Sokolovskiy, J. Verron, X. Carton:</b> Dynamics of geostrophic vortices in two-layer rotating fluid: stability, choreographies, chaos . . . . .	79
<b>Semion Sukoriansky:</b> QNSE model of anisotropic turbulence with waves . . . . .	81

<b>S.D. Troitskaya:</b> The exact solution of the two-dimensional Poincaré–Sobolev equation in a trapezium . . . . .	82
<b>Yu.I. Troitskaya:</b> Atmospheric Boundary Layer Over Steep Surface Waves . . . . .	84
<b>V.V. Vedenyapin:</b> H-theorem for Dynamical systems and Boltzmann extremals . . . . .	88
Alireza Nejadmalayeri, <b>Alexei Vezolainen</b> , Oleg V. Vasilyev: Fractal Dimensions of Energy and Enstrophy Containing Structures . . . . .	90
<b>Vladislav P. Yushkov:</b> A Probabilistic Description of Turbulent Processes in the Atmosphere . . . . .	94
<b>K.P. Zybin, V.A. Sirota:</b> On vortex filaments and the multifractal structure of fully developed hydrodynamic turbulence . . . . .	95
<b>А.П. Алдушин, Т.П. Ивлева:</b> Формирование фингер – структур в волнах фильтрационного горения . . . . .	97
<b>И.Б. Бахолдин:</b> Обратимые структуры разрывов и усредненные уравнения в гидродинамических моделях с усложненной дисперсией . . . . .	99
<b>В.П. Будаев, Л.М. Зеленый, С.П. Савин:</b> Перемежаемость и обобщенное самоподобие в турбулентных пограничных слоях лабораторной и магнитосферной плазмы . . . . .	102
<b>М.И. Варенцов, П.И. Константинов, Т.Е. Самсонов, И.А. Репина, А.Ю. Артамонов, А.В. Глазунов:</b> Экспериментальное изучение турбулентности в пределах городской застройки	103
<b>И.И. Вигдорович:</b> Автомодельный турбулентный пограничный слой с градиентом давления. Четыре режима течения	106
<b>Д.В. Георгиевский, В.Х. Мюллер, Б.Э. Абали:</b> Интегральные оценки критических чисел Рейнольдса для уравнения Орра – Зоммерфельда . . . . .	108
<b>А.В. Глушнева, А.С. Савельев, Э.Е. Сон:</b> Формирование турбулентного потока за двумерной периодической структурой	110
<b>С.Н. Гурбатов, А.И. Саичев, С.Ф. Шандарин:</b> Гравитационная турбулентность и крупномасштабная структура Вселенной . . . . .	112
<b>А.Н. Долуденко:</b> Неустойчивость контактной границы двухфазной системы жидкостей со сложной реологией . . . . .	114
<b>Г.Я. Дынникова:</b> Прямое численное моделирование течений с использованием вихревых и дипольных частиц . . . . .	114
<b>М.К. Ермаков:</b> Немодовые эффекты устойчивости конвективного течения в гидродинамической модели роста кристаллов по Чохральскому . . . . .	117

<b>В.М. Зубарев:</b> Пограничный слой в турбулизированном потоке жидкости . . . . .	118
<b>Л.Х. Ингель:</b> Подавление турбулентности в интенсивных атмосферных вихрях – механизм положительной обратной связи . . . . .	120
<b>А.А. Исахов:</b> Математическое моделирование турбулентного пограничного слоя зональным RANS/LES методом . . . . .	122
<b>В.И. Кляцкин:</b> Кластеризация случайного положительного поля как закон природы . . . . .	126
<b>В.А. Князев:</b> Формулировка гидромеханики без гипотезы псевдоотверждения жидкой точки . . . . .	127
<b>В.Л. Ковалев:</b> Моделирование свойств материалов и физико-химических процессов на основе первых принципов в механике . . . . .	129
<b>Ю.Г. Крат:</b> О развитии песчаных волн в напорном канале . . . . .	130
<b>Е.Б. Кудашев, В.А. Колышницын, В.П. Маршов:</b> Исследование турбулентных шумов обтекания: эксперимент в глубоком море . . . . .	131
<b>Виталий Галазюк, Игорь Кузь, Игорь Турчин:</b> Метод полиномов Лагерра в задачах волновой механики структурно-неоднородных тел . . . . .	133
<b>А.Ф. Курбацкий, Л.И. Курбацкая:</b> Особенности вихревого перемешивания импульса и тепла в атмосферных течениях при устойчивой стратификации . . . . .	134
<b>Д.С. Данилов, И.И. Липатов, Р.Я. Тугазаков:</b> Работы М.Д. Миллионщикова и их развитие в ЦАГИ . . . . .	137
<b>А.Б. Мазо, Е.И. Калинин, В.М. Молочников :</b> Экспериментальное и численное исследование ламинарно-турбулентного перехода за препятствием в канале . . . . .	139
<b>Д.В. Маклаков, А.Г. Петров:</b> Точное определение волнового сопротивления твёрдого тела, равномерно движущегося в жидкости конечной глубины, по параметрам создаваемых им волн . . . . .	141
<b>П.В. Матюшин, В.А. Гуцин:</b> Прямое численное моделирование пространственного ламинарно-турбулентного перехода на сфере . . . . .	143
<b>В.В. Веденяпин, М.А. Негматов:</b> О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона-Якоби . . . . .	144
<b>Николай Никитин:</b> О механизме пристенной турбулентности и снижения турбулентного трения . . . . .	146

<b>В.А. Павловский, С.Ю. Маламанов:</b> Применение $f$ -модели турбулентности для расчета внутренних задач гидродинамики и тепло-массообмена . . . . .	146
<b>М.А. Пахомов:</b> Распространение дисперсной фазы и теплообмена в ограниченных турбулентных газокапельных отрывных потоках . . . . .	148
<b>А.С. Петросян:</b> Крупномасштабные структуры в турбулентной жидкости с твердыми частицами и с пузырьками газа	150
<b>А.Г. Петров, И.И. Потапов:</b> Расчет гидравлического сопротивления при обтекании пологих двумерных гряд турбулентным потоком . . . . .	154
<b>А.А. Потапов:</b> Оценки фрактальных характеристик радиотеплового излучения атмосферы . . . . .	155
<b>Э.Е. Сон:</b> Научное наследие М.Д. Миллионщикова и развитие его идей в современных проблемах турбулентности . . . . .	158
<b>А.К. Такмазян, В.В. Прокофьев:</b> Кавитационные автоколебания как релаксационные предельные циклы в переменных “расход-давление” . . . . .	159
<b>А.Н. Рябинин, А.Г. Кузьмин:</b> Аномальные режимы трансзвукового турбулентного обтекания крылового профиля с электроном . . . . .	162
<b>Ильяс Сибгатуллин:</b> Хаос и турбулентность в двухдиффузионной и проникающей конвекции . . . . .	164
<b>Н.Н. Смирнов, В.Ф. Никитин, Б.П. Рыбакин:</b> Компьютерное моделирование распространения волн в метастабильных средах . . . . .	165
<b>К.С. Снигур:</b> Исследование деформаций поперечной русловой прорези с помощью математической модели для неустановившегося руслового процесса . . . . .	167
<b>С.А. Солдатенко, А.В. Тертышников:</b> О влиянии изменений климата на динамику крупномасштабных волн в атмосфере Южного полушария . . . . .	170
<b>В.В. Веденяпин, Н.Н. Фимин:</b> Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона–Якоби .	172
<b>С.В. Фортова:</b> Вихревой каскад неустойчивостей и переход к турбулентности в сдвиговом слое . . . . .	173
<b>О.Н. Хатунцева:</b> Метод нахождения логарифмического профиля скорости течения жидкости в трубе кругового сечения при больших значениях числа Рейнольдса на основе стохастической модели турбулентности . . . . .	174
<b>Ю.Д. Чашечкин:</b> Дифференциальная механика жидкостей: инструмент расчета динамики и структуры течений . . . . .	176

А.В. Спешилова, В.В. Остапенко, А.А. Черевко, <b>А.П. Чупахин</b> : Волновые движения на вращающейся притягивающей сфере: модель атмосферы . . . . .	179
<b>М.В. Шамолин</b> : Турбулентность по Колмогорову и динамика твердого тела, взаимодействующего со средой . . . . .	182
<b>А.Ю. Шиховцев</b> : Турбулентность в атмосферных вихревых течениях . . . . .	183
Author Index — Авторский указатель . . . . .	184