– Функциональные пространства

– Дифференциальные операторы

– Общая топология

– Проблемы математического образования

Функциональные пространства

Дифференциальные операторы

Общая топология

Проблемы математического образования

Тезисы докладов
Четвёртой Международной конференции,
посвященной 90-летию со дня рождения
члена-корреспондента РАН,
академика Европейской академии наук

Л.Д. Кудрявцева

Москва, РУДН, 25–29 марта 2013 г.

Москва
Российский университет дружбы народов
2013

УДК 510.2 (063)
ББК 22.15
Ф 94

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) по проекту №13-01-06010 Г

Ф 94 **Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования** [Текст] : тезисы докладов Четвёртой Международной конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева. Москва, РУДН, 25–29 марта 2013 г. — М.: РУДН, 2013. — 732 с.

ISBN 978-5-209-04820-6

На конференции представлены работы по широкому спектру математических проблем: функциональные пространства, дифференциальные операторы, общая топология, проблемы математического образования. Такой широкий охват тематики данной конференции отражает плодотворность и многоплановость интересов Л.Д. Кудрявцева, многочисленных его коллег и учеников — профессорско-преподавательского сообщества в области математики, естественнонаучных дисциплин и методики их преподавания, а также истории этих наук.

В сборнике содержатся тезисы докладов участников конференции, представленные в авторской редакции.

Конференцию поддерживает Российский фонд фундаментальных исследований (РФФИ), проект №13-01-06010 Г.

ISBN 978-5-209-04820-6 УДК 510.2 (063)
ББК 22.15
Ф 94

Международный организационный комитет:
Сопредседатели: академик РАН С.В. Емельянов, академик РАН В.В. Козлов, член-корреспондент РАН Н.Н. Кудрявцев, академик РАН В.А. Садовничий, академик РАО В.М. Филиппов.

Заместители председателя: С.А. Розанова, профессор (МИРЭА); В.М. Савчин, профессор (РУДН); А.Г. Сергеев, профессор (МИРАН); В.Н. Чубариков, профессор (МГУ); А.Г. Ягола, профессор (МГУ).

Члены оргкомитета: М.Н. Андреева, директор Физматлит (Россия); А.В. Арутюнов, профессор (Россия); Р.М. Асланов, профессор (Россия); Ю.М. Батурин, член-корреспондент РАН (Россия); О.М. Белоцерковский, академик РАН (Россия); В.И. Буренков, профессор (Россия); Г.М. Вайникко, академик АН Эстонии (Эстония); А.Д. Гаджиев, академик АзНАН (Азербайджан); П. Галайда, профессор, академик АПСН (Словакия); Г.Г. Геворгян, академик НАН РА (Армения); Я. Гондо, профессор (Кот-д'Ивуар); Г.С. Жукова, профессор (Россия); В.А. Зернов, профессор (Россия); В.А. Ильин, академик РАН (Россия); А.Д. Искендеров, профессор (Азербайджан); С.И. Кабанихин, член-корреспондент РАН (Россия); Т.Ш. Кальменов, академик НАН Казахстана (Казахстан); В.А. Каштанов, профессор (Россия); А.И. Кибзун, профессор (Россия); А.И. Кириллов, профессор (Россия); В.Л. Клюшин, профессор (Россия); М. Клякля, профессор (Польша); Ю.М. Колягин, академик РАО (Россия); А. Куфнер, профессор (Чехия); С.И. Похожаев, член-корреспондент РАН (Россия); А.С. Сигов, академик РАН (Россия); А. Хасаноглу (Хасанов), профессор (Турция).

Международный программный комитет

Сопредседатели: В.В. Афанасьев, ректор ЯГПУ (Россия); З. Крушевский, ректор ВШ ПШ (Польша); академик РАН и РАО В.Л. Матросов, ректор МПГУ (Россия).

Заместители председателя: Н.Х. Розов, член-корреспондент РАО (Россия); В.Д. Степанов, член-корреспондент РАН (Россия).

Члены программного комитета: Ш.А. Алимов, академик АН Узбекистана (Узбекистан); П.С. Геворкян, профессор (Россия); О.В. Зимина, профессор (Россия); М. Мкртчян, зам. Министра образования и науки Армении, член-корреспондент АПСН (Армения); П. Насядко, профессор (Польша); М.О. Отелбаев, академик НАН Казахстана (Казахстан); Е.С. Половинкин, профессор (Россия); Я.В. Радыно, член-корреспондент НАН Беларуси (Беларусь); А.М. Самойленко, академик НАН Украины (Украина); П.В. Семёнов, профессор (Россия); В.С. Сенашенко, профессор (Россия); Б. Сендов, академик АН Болгарии (Болгария); А.Л. Скубачевский, профессор (Россия); Е.И. Смирнов, профессор (Россия); К. Тахир Шах, профессор (Италия); В.М. Тихомиров, профессор (Россия); В.А. Треногин, профессор (Россия); Ю.И. Худак, профессор (Россия); Н.С. Чекалкин, профессор (Россия).

Локальный комитет

Сопредседатели: Е.Б. Ланеев, профессор; С.П. Коновалов, доцент; В.А. Лазарев, д.п.н.

Члены локального комитета: Н.В. Белецкая, доцент; П.А. Вельмисов, профессор; Е.И. Галахов, доцент; А.И. Громов, доцент; С.П. Грушевский, профессор; П.Г. Данилаев, профессор; М.Г. Дмитриев, профессор; Н.Б. Журавлев, доцент; Г.А. Калябин, профессор; Д.Л. Кудрявцев, доцент; Н.Л. Кудрявцев, доцент; Т.А. Кузнецова, доцент; Э.И. Кэбин, доцент; А.Б. Ольнева, профессор; В.Т. Петрова, профессор; Т.С. Пиголкина, доцент; А.А. Пунтус, профессор; Н.А. Романченко, доцент; А.А. Русаков, профессор; Е.И. Санина, профессор; В.А. Соколов, профессор; Д.Г. Супрун, доцент.

Секретариат: Е.И. Галахов, Я.С. Барсукова.

В Москве, в Российском университете дружбы народов, с 25 по 29 марта 2013 года проводится Четвёртая Международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посвящённая 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева.

Организаторами конференции являются Российский университет дружбы народов (РУДН), Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (МИРАН), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ), Московский физико-технический институт (МФТИ), Научно-методический совет по математике Министерства образования и науки РФ (НМС).

Конференция проводится при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ).

В организации конференции принимают участие Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (МГТУ МИРЭА), Ярославский государственный педагогический университет (ЯГПУ), Центр современного образования (ЦСО), Ереванский государственный университет (Армения), Высшая школа им. Павла Влодковица (Польша), Международное образовательное учреждение (Словакия), Варненский свободный университет (Болгария).

Предполагается, что с пленарными докладами выступят академик РАН В.В. Козлов, член-корреспондент РАН С.В. Конягин (МИРАН); академик РАН В.А. Садовничий, член-корреспондент РАО Н.Х. Розов (МГУ); профессор В.С. Рябенький; профессор Е.С. Половинкин (МФТИ); член-корреспондент РАН В.Д. Степанов, профессор А.Л. Скубачевский, профессор В.И. Буренков, профессор В.О. Мантуров (РУДН); профессор Л.-Е. Перссон (Швеция); профессор Л. Пик (Чехия); академик Б. Сендов (Болгария).

Со вступительным словом, как ожидается, выступят: ректор РУДН В.М. Филиппов, ректор МФТИ Н.Н. Кудрявцев, ректор МПГУ В.Л. Матросов.

Работа ученых и педагогов будет проходить в следующих 9 секциях:

Секция 1. «Теория функций и функциональные пространства».

Сопредседатели: академик НАН Армении Г.Г. Геворгян (Армения), профессор М.Л. Гольдман (Россия), член-корреспондент РАН В.Д. Степанов (Россия).

Секция 2. «Дифференциальные операторы и их приложения».

Сопредседатели: член-корреспондент РАО Н.Х. Розов (Россия), профессор А.Л. Скубачевский (Россия).

Секция 3. «Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики».

Сопредседатели: член-корреспондент РАН С.И. Похожаев (Россия), профессор В.И. Буренков (Россия), профессор А.И. Кириллов (Россия).

Секция 4. «Общая топология и ее приложения».

Сопредседатели: профессор П.С. Геворкян (Россия), профессор С. Илиадис (Греция), профессор В.О. Мантуров (Россия).

Секция 5. «Обратные и некорректно поставленные задачи».

Сопредседатели: член-корреспондент РАН В.В. Васин (Россия), член-корреспондент РАН С.И. Кабанихин (Россия), член-корреспондент РАН В.Г. Романов (Россия), профессор А.Г. Ягола (Россия).

Секция 6. «Проблемы математического образования».

Сопредседатели: профессор П. Галайда (Словакия), профессор М. Клякля (Польша), профессор С.А. Розанова (Россия).

Секция 7. «Образование и нравственность».

Сопредседатели: профессор В.А. Гусев (Россия), академик РАО Ю.М. Колягин (Россия), профессор В. Томский (Франция).

Секция 8. «История математики и естествознания».

Сопредседатели: профессор С.С. Демидов (Россия), профессор В.М. Тихомиров (Россия).

Секция 9. «Информационные технологии в образовании».

Сопредседатели: профессор А.И. Кириллов (Россия), профессор П. Павлов (Болгария), профессор В.А. Соколов (Россия).

В конференции изъявили желание участвовать более 370 ученых из России, а также ближнего и дальнего зарубежья.

Представленные в этом сборнике тезисы печатаются в авторской редакции.

Подготовка и выпуск данного сборника осуществлен при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-01-06010 Г.

Оргкомитет

Содержание

Пленарные доклады

Секция 1. Теория функций и функциональные пространства

Секция 2. Дифференциальные операторы и их приложения

Секция 3. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики

Секция 4. Общая топология и ее приложения

Секция 5. Обратные и некорректно поставленные задачи

Секция 6. Проблемы математического образования

Секция 7. Образование и нравственность

Секция 8. История математики и естествознания

Секция 9. Информационные технологии в образовании

Пленарные доклады

Spectral stability of the p-Laplacian

V. I. Burenkov

Cardiff University, Cardiff, UK
burenkov@cf.ac.uk

Dependence of the eigenvalues of the p-Laplacian upon domain perturbation will be under discussion. Namely Lipschitz-type estimates for deviation of the eigenvalues following a domain perturbation will be presented. Such estimates are obtained for the class of open sets admitting open sets with arbitrarily strong degeneration and are expressed in terms of suitable measures of vicinity of two open sets, such as the "atlas distance" between these sets or the "lower Hausdorff–Pompeiu deviation" of their boundaries. In the case of open sets with Hölder continuous boundaries, our results essentially improve a result known for the first eigenvalue [1].

Joint work with P. D. Lamberti. The results were published in [2].

References

1. *Fleckinger J., Harrell E. M., de Thélin F.* Boundary behaviour and estimates for solutions for equations containing the p-Laplacian // Electronic Journal of Differential Equations. — 1999. — Vol. 38. — P. 1–19.
2. *Burenkov V. I., Lamberti P. D.* Spectral stability of the p-Laplacian // Nonlinear Analysis. — 2009. — Vol. 71. — P. 2227–2235.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project No. 11-01-00744a.

Reduction theorems for operators on the cones of monotone functions

A. Gogatishvili*, V. D. Stepanov†

* *Insitute of Mathematics of CAS, Prague, Czech Republic*
gogatish@math.cas.cz

† *Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia*
stepanov@mi.ras.ru

For a quasilinear operator on the semiaxis a reduction theorem is proved on the cones of monotone functions in $L^p - L^q$ setting for $0 < q < \infty, 1 \leqslant p < \infty$. The case $0 < p < 1$ is also studied for operators with additional properties. In particular, we obtain critera for three-weight inequalities for the Hardy-type operators with Oinarov' kernel on monotone functions in the case $0 < q < p \leqslant 1$.

References

1. *Gogatishvili A., Stepanov V.D.* Operators on cones of monotone functions // *Doklady Mathematics.* — 2012. — Vol. 86:1 P. 562–565.
2. *Gogatishvili A., Stepanov V.D.* Integral operators on cones of monotone functions. // *Doklady Mathematics.* — 2012. — Vol. 86:2. — P. 650–653.
3. *Gogatishvili A., Stepanov V.D.* Reduction theorems for operators on the cones of monotone functions // Preprint CRM 1067, Barcelona, 2011. — P. 1-25.

The research of the first author was partially supported by the grant 201/08/0383 of the Grant Agency of the Czech Republic and RVO: 67985840.
The research of the second author was partially supported by the Russian Fund for Basic Research (Projects 12-01-00524 and 12-01-00554) and by the Russian Academy of Sciences (Projects 12-I-OMN-01 and 12-II-0-01M-005).

Embeddings of Besov-Morrey function spaces

Dorothee D. Haroske

Mathematical Institute, Friedrich-Schiller-University Jena, Germany
dorothee.haroske@uni-jena.de

We study embeddings of spaces of Besov-Morrey type,

$$MB^{s_1,r_1}_{p_1,q_1}(\Omega) \hookrightarrow MB^{s_2,r_2}_{p_2,q_2}(\Omega),$$

and obtain necessary and sufficient conditions for the continuity or compactness of such an embedding, where Ω denotes either $\mathbb{R}^d$ or a sufficiently smooth bounded domain in $\mathbb{R}^d$. We can also characterise the special weighted situation $B^{s_1}_{p_1,r_1}(\mathbb{R}^d, w) \hookrightarrow MB^{s_2,r_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d)$ for a Muckenhoupt $\mathcal{A}_\infty$ weight w, with $w_\alpha(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > -d$, as a typical example. Finally we discuss some embeddings of Besov-Morrey type spaces into classical spaces like $L_p(\Omega)$ or $C(\Omega)$.This is joint work with Leszek Skrzypczak (Poznań) [1, 2].

References

1. *Haroske D.D., Skrzypczak L.* Continuous embeddings of Besov-Morrey function spaces. *Acta Math. Sinica.* 2012. — 28(7). — P. 1307–1328.
2. *Haroske D.D., Skrzypczak L.* Embeddings of Besov-Morrey spaces on bounded domains. (*submitted*)

Some new and old (even scales of) conditions to characterize some weighted integral inequalities

Lars-Erik Persson

Lulea University of Technology larserik@sm.luth.se

Some weighted forms of classical integral inequalities can be characterized via nowadays well-known conditions. It is also known that in some cases these conditions are not unique and can even be replaced by some scales of conditions. To illustrate this fairly new idea I start by discussing some classical facts concerning Hardy-type inequalities (see e.g. [5]) and some classical and newer conditions of this type to characterize such inequalities. Moreover, I will present the maybe surprising fact that all such conditions (e.g. those by Muckenhoupt-Bradley, Mazya-Rosin and Persson-Stepanov) in fact can be replaced by infinite many equivalent conditions (see [3], [6] and [8]). After that I will present some similar results connected to Stieltjes inequality (see [1] and [4]) and and the B_p condition (see [2]). Some striking applications and limiting cases (see [7]) are pointed out and some concrete open questions connected to this new idea are presented.

References

1. *Gogatishvili A., Kufner A., Persson L.E.* The weighted Stieltjes inequality and applications // Math. Nachr., to appear 2013.
2. *Gogatishvili A., Kufner A., Persson L.E.* Some new scales of weight characterizations of the class B_p // Acta Math. Hungar. — 2009. — Vol. 123, No. 4. — P. 365–377.
3. *Gogatishvili A., Kufner A., Persson L.E.* Some new scales of characterizations of Hardy's inequality // Proc. Estonian Acad. Sci. — 2010. — Vol. 59. — P. 7–18.
4. *Gogatishvili A., Persson L.E., Stepanov V., Wall P.* Some scales of equivalent conditions to characterize the Stieltjes inequality: the case $q < p$ // Acad. Nauk. Doklady. — 2012. — Vol. 447, No 1. — P. 13–14.
5. *Kufner A., Persson L.E.* Weighted Inequalities of Hardy Type. — NJ: World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, 2003.
6. *Kufner A., Persson L.E., Samko N.* Some new scales of weight characterizations of Hardy-type inequalities // "Operator, Theory, PDE and Mathematical Physics" in the Series: Operator Theory: Advances and Applications. — Vol. 228, Basel: Springer, 2013. — P. 261-274.
7. *Persson L.E., Stepanov V.* Weighted integral inequalities with the geometric mean operator // J. Inequal. Appl. — 2002. — Vol. 7. — P. 727–746.
8. *Persson L.E., Stepanov V., Wall P.* Some scales of equivalent weight characterizations of Hardy's inequality: the case $q < p$ // Math. Inequal. Appl. — 2007. — Vol. 10, No. 2. — P.267–279.

Higher-order Sobolev embeddings and isoperimetric inequalities

Lubos Pick

Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, Sokolovska 83, 186 75 Praha 8, Czech Republic
pick@karlin.mff.cuni.cz

Sobolev inequalities and isoperimetric inequalities had traditionally been investigated along independent lines of research, which had led to the cornerstone results by Sobolev, Gagliardo and Nirenberg on the one hand, and by De Giorgi on the other hand, until their intimate connection was discovered by Maz'ya half a century ago.

The strength of the approach to Sobolev embeddings via isoperimetric inequalities stems from the fact that not only it applies to a broad range of situations, but also typically yields sharp results. The available results, however, essentially deal with first-order Sobolev inequalities.

We shall present a new powerful iteration method which shows that, this notwithstanding, isoperimetric inequalities in fact do imply optimal higher-order Sobolev embeddings in quite general frameworks.

As a consequence, we shall characterize the optimal target spaces in the relevant Sobolev embeddings. We apply the results to any-order Sobolev embedding in regular (John) domains, in Maz'ya classes of (possibly irregular) Euclidean domains described in terms of their isoperimetric function, and in families of product probability spaces, of which the Gauss space is a classical instance.

This is a recent joint work with Andrea Cianchi and Lenka Slavíková.

Keywords: Isoperimetric function, higher-order Sobolev embedding, rearrangement-invariant space, John domain, Maz'ya domain, product probability measure, Gaussian–Sobolev inequality.

Minimal point sets in the geometry of polynomials

Bl. Sendov

Bulgarian Academy of Sciences,
Acad. G. Bonchev Str., Bl. 25A 1113 Sofia, Bulgaria
sendov2003@yahoo.com

To every polynomial $p \in \mathcal{P}_n$ of degree n, we correspond a multiaffine symmetric polynomial in n complex variables $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathcal{C}$:

$$P(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} S_k(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

where

$$S_k(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_k}, \quad S_0(z_1, z_2, \ldots, z_n) := 1.$$

are the elementary symmetric polynomials of degree $k = 1, 2, \ldots, n$.

Clearly, one has $p(z) = P(z, z, \ldots, z)$. We say that $P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ is the *n-th symmetrization* of p with n variables. If $P(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$, then the n-tuple $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ is called a *solution* of p.

The classical Grace theorem, see [1, p. 107], states a relation between the zeros of two apolar polynomials.

Theorem 1. (Grace) *Let p and q be apolar polynomials of degree n. Then, every circular domain containing all the zeros of one of them contains at least one zero of the other.*

Grace's theorem implies that if a circular domain contains all zeros of p then it contains at least one point from every solution $\{z_1, \ldots, z_n\}$ of p. That circular domain is a locus holder of p, according to our main definition.

Definition 1. *Let $p \in \mathcal{P}_n$. Call a closed set $\Omega \subset \mathcal{C}$* **locus holder** *of p if Ω contains at least one point from every solution of p. A minimal by inclusion locus holder of p is called* **locus** *of p.*

The notion locus has the potential to derive refinements of several classical theorems in the geometry of polynomials, see [2].

The polar derivative of $p \in \mathcal{P}_n$ with pole u is the linear operator $\mathcal{D}_u(p; z) := np(z) - (z - u)p'(z)$ with $\lim_{u \to \infty} u^{-1} \mathcal{D}_u(p; z) = p'(z)$.

The fundamental theorem for polar derivatives, see [1, p. 98], states.

Theorem 2. (Laguerre) *Let p be a polynomial of degree $n \geqslant 2$ and let $u \in \mathcal{C}$. A circular domain containing the zeros of p, but not the point u, contains all zeros of the polar derivative $\mathcal{D}_u(p; z)$.*

Denote by $D[p]$ the smallest closed, bounded, disc containing all zeros of p. Theorem 2. implies that the disc $D[p]$ is the smallest disc with the property that, if $u \notin D[p]$, then all the zeros of the polar derivative $\mathcal{D}_u(p; z)$

This work was supported by National Science Foundation of Bulgaria, project No. DKT 02/44.

are in $D[p]$. To refine Laguerre's theorem one would need to find a smaller point set with this property. The following theorem holds.

Theorem 3. *Let p be a polynomial of degree n with a locus Ω. If $u \in \mathcal{C} \setminus \Omega$, then all zeros of the polar derivative $\mathcal{D}_u(p; z)$ are in Ω. Moreover, Ω is a minimal, by inclusion, closed set with this property.*

Definition 2. *A closed subset of $\mathcal{C}$ is called* **Rolle's set of order** n*, if every polynomial p of degree n, satisfying $p(i) = p(-i)$, has at least one critical point in it.*

The famous Rolle's theorem for complex polynomials, see [1, p. 126], states.

Theorem 4. (Grace-Heawood) *The closed disc $D[c; r]$ with center $c = 0$ and radius $r = \cot(\pi/n)$ is a Rolle's set of order n.*

In other words, the Grace-Heawood Theorem tells that the disc $D[0; \cot(\pi/n)]$ is a Rolle's set. Using the loci of the polynomial $\kappa_{n-1} = (z+i)^n - (z-i)^n$, we may refine Theorem 4. For example

$$\Omega = D\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \bigcup D\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \subset D(0; \cot(\pi/4))$$

is a Rolle's set of order 4, as Ω is a locus of κ_3.

In this paper, we discus the properties of the loci of complex polynomials.

Литература

1. *Rahman Q. I. and G. Schmeisser* Analytic Theory of Polynomials. — New York: Oxford Univ. Press Inc., 2002.
2. *Sendov Bl., Sendov H.* Loci of Complex Polynomials, Part I // Trans. Amer. Math. Soc. [Submitted]

The Vlasov equations and applications

A. L. Skubachevskii

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
skub@lector.ru

We consider the Vlasov–Poisson system of equations describing evolution of distribution functions of the density for the charged particles in rarefied plasma. We study the Vlasov–Poisson system in $\mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^3$ with initial conditions $f^\beta|_{t=0} = f^\beta_0(x,p)$, $\beta = \pm 1$, for distribution functions $f(x,p,t)$ and the Dirichlet boundary condition for potential of electric field $\varphi(x,t)$ for $x_1 = 0$, where $f^\beta_0(x,p)$ is the initial distribution function (for positively charged ions if $\beta = +1$ and for electrons if $\beta = -1$) at the point x with impulse p, $\mathbb{R}^3_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 > 0\}$. Assume that the initial distribution functions are sufficiently smooth and $\operatorname{supp} f^\beta_0 \subset (\mathbb{R}^3_\delta \cap B_\lambda(0)) \times B_\rho(0)$, $\delta, \lambda, \rho > 0$, and magnetic field $H(x)$ is also sufficiently smooth and has a special structure near the boundary $x_1 = 0$, where $\mathbb{R}^3_\delta = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 > \delta\}$. Then we prove that for any $T > 0$ there is a unique classical solution of the Vlasov–Poisson system in $\mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^3$ for $0 < t < T$ if $\|f^\beta_0\| < \varepsilon$, where $\varepsilon = \varepsilon(T, \delta, \lambda, \rho, \|H\|)$ is sufficiently small, see [1].

This result is generalized to abstract Vlasov equations and to the Vlasov–Poisson system in infinite cylinder. In the form of abstract Vlasov equations, we can write both the first and the second mixed problem for the Vlasov–Poisson system in, as well as the Vlasov–Poisson system with nonlocal boundary condition for the potential φ.

References

1. *Skubachevskii A. L.*, On the Unique Solvability of Initial Boundary Value Problems for the Vlasov–Poisson System of Equations in a Half-Space // Dokl. Akad. Nauk. — 2012. — Vol. 443. — Pp. 431–434; English transl. in Doklady Mathematics. — 2012. — Vol. 85. — P. 255–258.

This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research, project No. 12-01-00524.

Феномен буферности и механизмы его возникновения

А. Ю. Колесов*, Н. Х. Розов†

* *ЯрГУ им П.Г. Демидова, Ярославль, Россия*
kolesov@uniyar.ac.ru
* *P.G. Demidov Yaroslavl State University,Yaroslavl, Russia*
kolesov@uniyar.ac.ru
† *МГУ им М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
fpo.mgu@mail.ru
† *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
fpo.mgu@mail.ru

О феномене буферности принято говорить в случае, когда в фазовом пространстве некоторой динамической системы при подходящем выборе параметров можно гарантировать сосуществование любого фиксированного числа однотипных аттракторов (состояний равновесия, циклов, торов и т.д.).

Из результатов известной работы А. А. Витта [1], а также из значительно более поздних работ [2]– [7] следует, что буферность представляет собой универсальное нелинейное явление, возникающее в математических моделях из различных областей естествознания: радиофизики, механики, экологии, нелинейной оптики, теории горения и т.д. Поэтому весьма актуальна проблема изучения типовых сценариев накапливания аттракторов в различных динамических системах. К настоящему времени удалось выявить четыре таких сценария: в первую очередь это сценарий Витта, являющийся наиболее распространенным, а также тьюрингский, гамильтонов и гомоклинический механизмы накапливания аттракторов.

Ситуация, в которой реализуется механизм Витта, заключается в следующем. Предположим, что в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия некоторой динамической системы имеет место критический случай счетного числа чисто мнимых собственных значений, а при изменении каких-либо входящих в эту систему параметров происходит последовательное смещение точек спектра в правую комплексную полуплоскость. Тогда, как установлено в уже упоминавшихся работах [1]– [6], чаще всего в такой системе наблюдается феномен буферности в простейшем его варианте: происходит неограниченное накапливание устойчивых циклов, причем каждый отдельно взятый цикл рождается из нулевого состояния равновесия неустойчивым, а затем обретает устойчивость, подрастая по амплитуде.

Тьюрингский механизм отличается от механизма Витта по существу лишь тем, что каждый индивидуальный цикл (или состояние равновесия) при изменении управляющих параметров сначала обретает устойчивость, а затем снова ее теряет. Таким образом, хотя общее число аттракторов и увеличивается, но их состав постоянно обновляется. Как

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00384а и № 12-01-00155а).

показано в монографии [5], данная ситуация реализуется главным образом в системах типа реакция-диффузия при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии, но может возникать и в системах с запаздыванием при неограниченном увеличении времени запаздывания. В частности, с ней сталкиваемся при рассмотрении известной модели «брюсселятор», изучавшейся еще А. Тьюрингом (отсюда и название — тьюрингский механизм).

Описанные сценарии накапливания аттракторов характерны только для систем с бесконечномерным фазовым пространством. Что же касается конечномерных систем, то в них простейшим механизмом возникновения буферности является, по всей видимости, так называемый гамильтонов сценарий, проиллюстрированный в [5]– [7] на ряде двумерных отображений из механики и на системах обыкновенных дифференциальных уравнений, близких к двумерным гамильтоновым. Суть этого сценария состоит в следующем.

Рассмотрим сначала некоторую гамильтонову или консервативную (не меняющуюся при обращении времени) систему обыкновенных дифференциальных уравнений с полутора или более степенями свободы. Согласно выработанным к настоящему времени общим представлениям о динамике таких систем хаотические движения в них сосуществуют со счетным числом так называемых островков устойчивости, примыкающих к эллиптическим состояниям равновесия или циклам. Предположим, далее, что наша система возмущена малыми добавками, обеспечивающими ее диссипативность. Тогда некоторые из упомянутых состояний равновесия или циклов могут стать асимптотически устойчивыми и, что самое главное, количество последних может неограниченно увеличиваться при стремлении возмущений к нулю. А это как раз и означает, что в рассматриваемой системе наблюдается явление буферности, механизм возникновения которого уместно назвать гамильтоновым.

Следует отметить, что в случае обыкновенных дифференциальных уравнений существуют и другие, значительно более сложные механизмы накапливания устойчивых циклов, которые с некоторой долей условности можно назвать гомоклиническими. Среди большого количества результатов, полученных для систем с гомоклиническими структурами, остановимся лишь на трех, имеющих непосредственное отношение к нашей тематике. В связи с эти сначала рассмотрим C^r-гладкую ($r \geqslant 4$) систему обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^3$ и предположим, что у нее существует изолированное состояние равновесия O с характеристическими корнями $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$, $\gamma > 0$, $\omega \neq 0$, $\lambda_3 > 0$. Предположим, далее, что имеется гомоклиническая к O траектория Г. Тогда, как установлено И.М. Овсянниковым и Л.П. Шильниковым, при $\sigma_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_1 + \lambda_3 > 0$, $\sigma_2 = 2\mathrm{Re}\,\lambda_1 + \lambda_3 < 0$ в классе таких систем плотны системы со счетным множеством устойчивых периодических движений.

Второй результат, аналогичный описанному выше, принадлежит Ньюхаусу. А именно, пусть p — гиперболическая седловая неподвижная точка C^r-диффеоморфизма f в $\mathbb{R}^2$, для которого $\det f'(p) < 1$, а устойчивое и неустойчивое многообразия точки p касаются в некоторой точке p_0. Тогда в сколь угодно малой C^r-окрестности f существует диффеоморфизм $\widetilde{f}$, имеющий бесконечно много устойчивых периодических орбит.

Третий результат, принадлежащий Н.К. Гаврилову и Л.П. Шильникову, заключается в том, что появлению или исчезновению точки гомоклинического касания предшествуют каскады бифуркаций типа седло-узел. При этих бифуркациях рождаются пары циклов – устойчивый и неустойчивый, причем количество устойчивых периодических движений за счет подходящего выбора бифуркационных параметров может быть сделано сколь угодно большим. Конкретные примеры, в которых реализуется указанный сценарий возникновения буферности, хорошо известны. Это уравнение Дуффинга с малой диссипацией и малым периодическим внешним воздействием, а также уравнение колебаний маятника с малым затуханием и вибрирующей точкой подвеса.

В заключение добавим, что реализуемость феномена буферности в автогенераторах с отрезком длинной линии в цепи обратной связи была установлена экспериментально. Описание соответствующих экспериментов приведены в работах [2], [4].

Литература

1. *Витт А.А.* Распределенные автоколебательные системы // Журн. технич. физики. — 1934. — Т. 4, № 1. — С. 144–157.
2. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. — М.: Наука, 1998. (Тр. МИАН, Т. 222).
3. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Явление буферности в резонансных системах гиперболических уравнений // УМН. — 2000. — Т. 55, вып. 2(332). — С. 95–120.
4. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Явление буферности в RCLG-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента // Тр. МИАН. — 2001. — Т. 233. — С. 153–207.
5. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: физматлит, 2005.
6. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Явление буферности в нелинейной физике // Тр. МИАН. — 2005. — Т. 250. — С. 112–182.
7. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Явление буферности в системах, близких к двумерным гамильтоновым // Тр. Института матем. и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 1. — С. 109–140.

The buffer phenomenon and the mechanisms of its occurrence

A. Yu. Kolesov*, **N. Kh. Rozov**†

О хроматических числах целочисленных и рациональных решеток

В. О. Мантуров

Российский университет дружбы народов
vomanturov@yandex.ru

В докладе будет доказано, что для каждого конкретного целого числа d хроматическое число для $\mathbb{Z}^n$ с критическим расстоянием $\sqrt{2d}$ имеет полиномиальный рост с ростом n, причем показатель не превосходит d (иногда эта оценка является точной). То же самое верно не только для случая евклидовых норм, но также и для любых l_p-норм. Кроме того, приведены конкретные оценки для малых размерностей, а также некоторые верхние оценки для хроматических чисел для пространств $\mathbb{Q}_p^n$, где через $\mathbb{Q}_p$ обозначено кольцо всех рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на некоторое простое число.

Литература

1. *Manturov V. O.* On The Chromatic Numbers of Integer and Rational Lattices // arXiv:math.GT/1206.1934v3, to appear in J. Mathematical Sciences.

On the chromatic numbers of integer and rational lattices

V. O. Manturov

Peoples' Friendship University of Russia
vomanturov@yandex.ru

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению N 220, договор 11.G34.31.0053, РФФИ (проект № 13-01-00664), программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1410.2012.1).

Задачи на экстремум с дифференциальными включениями в банаховом пространстве

Е. С. Половинкин

МФТИ, Долгопрудный, Россия
polovinkin@mail.mipt.ru

В докладе приводится созданный автором прямой метод исследования оптимизационных задач с дифференциальными включениями достаточно общего вида в банаховых пространствах. Метод состоит в том, что любое дифференциальное включение в окрестности испытуемой траектории приближается более простым дифференциальным включением, график правой части которого является выпуклым конусом, измеримо зависящим от времени. В отличии от других аппроксимационных методов исследования таких негладких оптимизационных задач, указанный прямой метод позволяет получать необходимые условия с более точными сопряженными (полярными) конусами.

В докладе рассмотрены дифференциальные включения в банаховых пространствах с локальными условиями на график правой части дифференциального включения в окрестности графика траектории, подозрительной на оптимальность, а именно: дифференциальные включения с измеримо-псевдо-липшицевой правой частью. Для таких включений автором получены теорема существования решений задачи Коши с оценками уклонения от начального приближения, теорема о связи решений дифференциального включения с решениями дифференциального включения с овыпукленной правой частью, т.е. обобщение теорем А.Ф.Филиппова и А.Ф. Филиппова – Т. Важевского на измеримо-квазилипшицев случай и на случай банаховых пространств. Также доказаны некоторые свойства множества решений таких дифференциальных включений, являющиеся обобщением классических теорем о непрерывной зависимости и о дифференцировании решений по начальным данным.

Для применения прямого метода исследованы новые классы производных от многозначных отображений, получены формулы их вычисления, установлены взаимосвязи с другими производными. В частности были изучены свойства различных эпипроизводных и гипопроизводных и субдифференциалов от произвольных точечнозначных функций со значеними в банаховых пространствах. Получены субдифференциальные свойства класса функций, которые представимы в виде разности двух выпуклых функций.

Данная работа развивает цикл результатов, полученных ранее автором совместно с Г.В. Смирновым в работах [1–3], и позже в работах автора [4–6], касающихся качественных свойств решений дифференциальных включений, со случая, когда решения принадлежали конечномерному пространству $\mathbb{R}^n$, на случай рефлексивного банахова пространства (см. [7–11]). В частности, для вывода необходимых условий

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 10-01-00139а, проект 13-01-00295а и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

оптимальности в указанном классе оптимизационных задач получен общий вид полярного конуса ко множеству решений дифференциального включения, график правой части которого является выпуклым замкнутым конусом (см. [9]).

В результате на основе развития аппарата многозначного анализа получены необходимые условия оптимальности в ряде оптимизационных задач с дифференциальными включениями.

Литература

1. *Половинкин Е.С., Смирнов Г.В.* Дифференцирование многозначных отображений и свойства решений дифференциальных включений // Доклады АН СССР. — 1986. — Т. 288, № 2. — С. 296–301.
2. *Половинкин Е. С., Смирнов Г.В.* Об одном подходе к дифференцированию многозначных отображений и необходимые условия оптимальности решений дифференциальных включений // Диффер. уравнения. — 1986. — Т. 22, № 6. — С. 944–954.
3. *Половинкин Е. С., Смирнов Г.В.* О задаче быстродействия для дифференциальных включений // Диффер. уравнения. — 1986. — Т. 22, № 8. — С. 1351–1365.
4. *Polovinkin E.S.* The properties of continuity and differentiation of solution sets of Lipschetzean differential inclusions // Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty / Editors: G.B.Di Masi, A. Gombani, A.B. Kurzhansky. ser. PSCT 10. — Boston: Birkhäuser, 1991.—P. 349–360.
5. *Polovinkin E.S.* Necessary conditions for optimization problems with differential inclusion // Set-valued Analysis and Differential Inclusions / Editors: A.B. Kurzhanski, V.M. Veliov, ser. PSCT 16. — Boston: Birkhäuser, 1993. — P. 157–170.
6. *Половинкин Е. С.* Необходимые условия оптимальности с дифференциальными включениями // Труды МИАН. — 1995. — Т. 211. — С. 387–400.
7. *Половинкин Е.С.* Теорема существования решений дифференциального включения с псевдо-липшицевой правой частью // Нелинейный мир. — 2012. — Т. 10, № 9. — С. 571–578.
8. *Половинкин Е.С.* О некоторых свойствах производных многозначных отображений // Труды МФТИ. — 2012. — Т. 4, № 4. — С. 141–154.
9. *Половинкин Е.С.* О вычислении полярного конуса ко множеству решений дифференциального включения /!/ Труды МИАН. — 2012. — Т. 278. — С. 178–187.
10. *Polovinkin E.* On differentiation of set-valued functions and differential inclusions // Abstracts of Intern. Conf. “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics”, S.Petersburg, 2012.— P. 134–137.
11. *Половинкин Е. С.* Дифференциальные включения с измеримо-псевдо-липшицевой правой частью // Труды МИАН, 2013 (принята к печати).

Управление решениями разностных уравнений в составных областях

В. С. Рябенький

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
ryab@keldysh.ru

Излагается теория, которая может служить, в частности, математической моделью технических устройств для активной защиты акустического поля в заданной области пространства (разговор в комнате с открытым окном) от внешнего (уличного) шума.

Эта теория основана на использовании разностных потенциалов, аналогичных интегралам Коши.

Control of solutions of difference equations in composite domains

V. S. Ryaben'kii

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia
ryab@keldysh.ru

Секция 1. Теория функций и функциональные пространства

On the convergence of an iterative process in banach space and it's application

Ali M. Akhmedov

Baku State University, Baku, Azerbaijan
akhmedovali@rambler.ru, babayevrauf55@mail.ru

Throughout this work, we assume that X is a real or complex Banach space.

We consider the following iterative process for an infinite family of bounded linear operators:

$$z_0 \in X, \quad z_{n+1} = T_n z_n + y_n, \quad n \in N, \tag{1}$$

where $T_n : X \to X$ is a bounded linear operator on X, for each $n \in N$, and (y_n) is a sequence in X.

The purpose of this paper is to study the boundedness and the convergence of the sequence (z_n) which is generated by the iterative process (1) for an infinite family of bounded linear operators on an arbitrary real or complex Banach space.

The main result of this work is

Theorem 1. *Let X be a real or complex Banach space and $T_n \in B(X)$, for each $n \in N$, and (y_n) is any sequence in X. Also, (z_n) be a sequence generated by (1). If $T_n \to T$* uniformly *on X and T is a strictly contractive operator, then we have the following:*

1. *The sequence (z_n) is bounded if and only if (y_n) is bounded.*
2. *If (y_n) is convergent and $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, then the sequence (z_n) converges to unique fixed point $x \in F(W)$, where W is given by*

$Wz = Tz + y$, $z \in X$ and x has the form $x = \sum_{n=0}^{\infty} T^n y$.

This theorem proofs by the next

Lemma 1. *Let $T \in B(X)$ be a strictly contractive operator on a Banach space X, and $y \in X$. Then the sequence (x_n) which is generated by $x_{n+1} = Tx_n + y$, converges to the limit*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} T^n y$$

and the limit x is the unique fixed point of the operator W which is given by

$$Wz = Tz + y, z \in X.$$

2. Application. Now, let (a_k) be either constant or strictly decreasing sequence of positive real numbers such that $\lim\limits_{n\to\infty} a_k = a > 0$ and $\sup\limits_k (a_k) \leqslant 2a$.

In [1] (see also [2,3]), the authors introduced new generalized difference operator

$$\Delta_a = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ -a_0 & a_1 & 0 & \cdots \\ 0 & -a_1 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

and investigated the spectrum of the operator Δ_a over the sequence space c_0.

Theorem 2. *Suppose that $|\lambda - a| > a$. Then, the following assertions are true*

1. *The sequence (S_n) is bounded if and only if the sequence $\left(\frac{1}{|a_n-\lambda|}\right)$ is bounded.*
2. *The sequence (S_n) is convergent if the sequence $\left(\frac{1}{|a_n-\lambda|}\right)$ is convergent.*
3. *If $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$, then $s = \frac{1}{|\lambda-a|-a}$*

References

1. *Srivastava P. D., Kumar S.* On the fine spectrum of the generalized difference operator Δ_v over the sequence space c_0 // Commun. Math. Anal. — 2009. — Vol. 6, No. 1. — P. 8–21.
2. *Akhmedov A. M., El-Shabrawy S. R.* On the spectrum of the generalized difference operator $\Delta_{a,b}$ over the sequence space c_0 // Baku Univ. News J., Phys. Math. Sci. Ser. — 2010. — No. 4. — P. 12–21.
3. *Akhmedov A. M., El-Shabrawy S. R.* On the fine spectrum of the operator $\Delta_{a,b}$ over the sequence space c // Comput. Math. Appl. — 2011. — Vol. 61. — P. 2994–3002.

Weighted integrability of double trigonometric series and of double series with respect to multiplicative systems

N. A. Bokayev, Zh. B. Mukanov

Gumilev Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
bokayev2011@yandex.ru, mukanovj@mail.ru

In the present paper, we study problems of weighted integrability of double trigonometric series

$$g(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{jk}\sin jx\sin ky, \tag{1}$$

and of double series with respect to the Price multiplicative systems

$$h(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y), \tag{2}$$

where $\chi_j(x)$ are functions of the Price system [1]. We recall that it is defined by a bounded sequence of positive integers $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ which is also used to contruct the sequence $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}, m_0=1, m_n=p_1\cdots p_n, n>1$.

A sequence of positive numbers $a:=\{a_{jk}\}$ satisfying the condition $a_{jk}\to 0$ as $j+k\to\infty$ is said to be of class $R_0^{+}BVS^2$ if the following inequalities are satisfied:

$$\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta_{11}a_{jk}|\leqslant Ca_{mn}$$

for $m,n\in N$, $\sum\limits_{j=m}^{\infty}|\Delta_{10}a_{jk}|\leqslant Ca_{mk}$ for each fixed k, and $\sum\limits_{k=n}^{\infty}|\Delta_{01}a_{jk}|\leqslant Ca_{jn}$ for each fixed j, where $\Delta_{11}a_{jk}=a_{jk}-a_{j+1,k}-a_{j,k+1}+a_{j+1,k+1}$, $\Delta_{10}a_{jk}=a_{jk}-a_{j+1,k}$, $\Delta_{01}a_{jk}=a_{jk}-a_{j,k+1}$. We define are functions $\gamma(x,y)$ and $\varphi(x,y)$ as follows: $\gamma\left(\frac{\pi}{j},\frac{\pi}{k}\right)=\gamma_{jk}\forall\ j,k\in N$, and there are positive constants A and B,C and D such that $A\gamma_{jk}\leqslant\gamma(x,y)\leqslant B\gamma_{j+1,k+1}\forall\ x\in\left(\frac{\pi}{j+1},\frac{\pi}{j}\right)$, $y\in\left(\frac{\pi}{k+1},\frac{\pi}{k}\right)$. $\varphi\left(\frac{1}{m_j},\frac{1}{m_k}\right)=\varphi_{jk}\forall\ j,k\in N$, $C\varphi_{jk}\leqslant\varphi(x,y)\leqslant D\varphi_{j+1,k+1}\forall\ x\in\left(\frac{1}{m_{j+1}},\frac{1}{m_j}\right)$, $\forall y\in\left(\frac{1}{m_{k+1}},\frac{1}{m_k}\right)$.

Theorem 1. *Let $g(x,y)$ be the sum of the series (1), $\{\lambda_{jk}\}\in R_0^{+}BVS^2$, $1\leqslant p<\infty$.*
(A) If a sequence of positive numbers $\{\gamma_{jk}\}$ satisfies the condition that there are some $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ such that the sequence $\{\gamma_{jk}\cdot j^{-1+\varepsilon_1}\}$ is almost decreasing

for each fixed k and the sequence $\{\gamma_{jk} \cdot k^{-1+\varepsilon_2}\}$ is almost decreasing for each fixed j, then the inequality

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{jk}(jk)^{p-2} \cdot \lambda_{jk}^{p} < \infty \tag{3}$$

implies the inclusion

$$\gamma(x,y)|g(x,y)|^p \in L(0,\pi)^2. \tag{4}$$

(B) If a sequence γ_{mn} satisfies the condition that there are $\varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$ such that the sequence $\{\gamma_{mn} m^{p-1-\varepsilon_3}\}$ are almost increasing for a fixed n and the sequence $\{\gamma_{mn} n^{p-1-\varepsilon_4}\}$ is almost increasing for a fixed m, then inequality (3) is necessary for inclusion (4) to be satisfied.

Theorem 2. *Let $h(x,y)$ be the sum of the series (2),$\{\lambda_{jk}\} \in R_0^+ BVS^2$, $1 \leqslant p < \infty$.*
(A) Let a sequence $\{\gamma_{jk}\}$ satisfies the condition of Theorem 1. Then it follows from condition (3) for the coefficients of the series (2) that

$$\gamma(x,y)|h(x,y)|^p \in L(0,1)^2. \tag{5}$$

(B) If a sequence positive numbers $\{\varphi_{jk}\}$ satisfies the folllowing condition: There are some $\varepsilon_5, \varepsilon_6 > 0$ such that the sequence $\{\varphi_{jk} \cdot {m_j}^{p-1-\varepsilon_5}\}$ is almost increasing for each fixed k and the sequence $\{\varphi_{jk} \cdot {m_k}^{p-1-\varepsilon_6}\}$ is almost increasing for each fixed j. Then it follows from the condition (5) that

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{jk} m_j^{p-1} m_k^{p-1} \left(\frac{1}{m_j m_k} \sum_{\mu=0}^{m_j-1} \sum_{\nu=0}^{m_k-1} \lambda_{\mu\nu} \right)^p < \infty.$$

The one-dimentional case was consider by [2].

References

1. *Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A.* Walsh Series and Transforms. Theory and Applications. — M.: Nauka, 1987. [in Russian].
2. *Tikhonov S. Yu.* About integrability of trigonometric series // Math.Notes. — 2005. — V. 78, No 3. — P. 437–441.

Hardy-Littlewood type theorems for classes of functions with general monotone Fourier coefficients

M. I. Dyachenko[*], E. D. Nursultanov[†], A. M. Zhantakbayeva[‡]

[*] *M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
dyach@mail.ru

[†] *Kazakhstan Branch of the Lomonosov Moscow State University, Astana, Kazakhstan*
er-nurs@yandex.ru

[‡] *L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
ayagoz.zhantakbayeva@yandex.ru

We will consider 1-periodic integrable functions $f(t)$ with a Fourier series $\sum\limits_{k\in N} a_k(f)e^{2\pi ikx}$, where $a_k(f)$ are real numbers. Let's denote by C constants depending only on the parameters p, q, p_i, q_i, α, β, where $i = 0, 1$. These constants can be different in different cases.

One of the most interesting problems in the theory of trigonometric series is to study the relationship between the degree of integrability of the function and behavior of its Fourier coefficients. The fundamental result in this direction is

Theorem. (Hardy-Littlewood)
If $1 < p < \infty$, $f \sim \sum\limits_{k\in N} a_k e^{2\pi ikx}$ *and* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *monotone decrease, then* $f \in L_p[0,1]$ *if and only if*

$$J_p(a) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2}|a_k|^p\right)^{1/p} < \infty. \tag{1}$$

In this regard, many authors studied the possibility of weakening the requirements of monotonicity of coefficients a_k, so that the statement of the Theorem holds.

It is impossible to reject the monotonicity condition of the Fourier coefficients. Without it, the statement is not true in generally. The weakening of the monotonicity condition is possible. Here we should mention the works [2]– [6]. In [1] the monotonicity requirement is replaced by

$$\sum_{m=k}^{2k} |\Delta a_m| \leqslant ck^{\alpha-1} \sum_{m=[\frac{k}{c}]}^{ck} \frac{a_k}{k^{\alpha}},$$

and

$$a_k \geqslant 0, \tag{2}$$

This research was partially supported by the grants RFFI N 12-01-00169, NS 979.2012.1 and the Committee of Science MES RK 0744/GF, N 1412/GF and N 1504/GF..

where $c > 1$ and $\alpha \in (0, 1]$. In this regard, we have established the following result.

Theorem 1. *Let* $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$, $p > \frac{1}{\alpha}$ *and* $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi ikx}$. *If*

$$|a_k| \leqslant Ck^{\alpha-1} \left| \sum_{m=[\frac{k}{2}]+1}^{\infty} \frac{a_m}{m^\alpha} \right|, \quad k \in \mathbb{N} \tag{3}$$

then $f \in L_p[0, 1]$ *if and only if*

$$J_p(a) \leqslant C(p, \alpha)\|f\|_p.$$

Theorem 2. *Let* $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$, $2 < p < 1/\alpha$, *then for every* $\delta > 0$ *there exists function* f *such that series*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^\alpha}$$

converges,

$$|a_k| \leqslant \frac{4}{k^{1-\alpha}} \left| \sum_{m=k}^{\infty} \frac{a_m}{m^\alpha} \right|, \quad k \in \mathbb{N}$$

and $\|f\|_{L_p} < \delta$, *but* $J_p(a) \geqslant 1$.

Let $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1)$, then the following result holds.

Theorem 3. *Let* $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1)$, $p > 1$ *and* $f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi ikx}$. *If condition (3) holds and* $f \in L_p[0, 1]$, *then* (1) *holds.*

At the same time, we can specify the condition on the coefficients, which allow us to obtain criterion for $\alpha \in (1/2, 1)$.

Theorem 4. *Let* $\alpha \in (1/2, 1)$ *and* $1/\alpha < p < \infty$. *If for every* m *we have*

$$\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} |\Delta a_k| \leqslant C \frac{1}{2^{(1-\alpha)m}} \left| \sum_{k=2^m}^{\infty} \frac{a_k}{k^\alpha} \right|,$$

then $f \in L_p[0, 1]$ *if and only if the following series converges*

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(2^{m(\frac{1}{p'}+\alpha-1)} \left| \sum_{k=2^m}^{\infty} \frac{a_k}{k^\alpha} \right| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Note that in the paper [1] there was proved statement similar to Theorem 4, but with the additional condition (2) of coefficients a_k.

References

1. *M. Dyachenko, S. Tikhonov*, Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria // Studia mathematica. — 2009. — Vol. 193 (3). — P. 285–306.
2. *L. Leindler*, On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Anal. Math. — 2001. —Vol. 27. — P. 279–285.
3. *S. Tikhonov*, Best approximation and moduli of smoothness: computation and equivalence theorems // J. Approx. Theory. — 2008. — Vol. 153. — P. 19–39.
4. *S. Tikhonov*, Trigonometric series of Nikol'skii classes // Acta Math. Hungar. — 2007. — Vol. 114. P. 61–78.
5. *S. Tikhonov*, Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — Vol. 326. — P. 721–735.
6. *D.S. Yu, P.Zhou and S.P.Zhou*, On Lp integrability and convergence of trigonometric series, Studia mathematica. — 2007. — Vol. 182. — P. 215–226.

Weighted estimates for a certain integral operator

S. M. Farsani

People's Friendship University of Russia, Moscow, Russia
s_mbahman@yahoo.com

For $0 < p < \infty$ we denote $L^p := L^p(\mathbb{R}^+)$ the set of all measurable functions defined on $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ such that

$$\|f\|_p := \left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Let $\alpha > 0$ and $\beta > 1$. In the present work, the necessary and sufficient conditions for the boundedness and compactness of the integral operator of the form

$$L_{\alpha,\beta} f(x) := v(x) \int_0^x \frac{\ln^{\beta-1}(\frac{x}{y}) f(y) u(y) dy}{(x-y)^{1-\alpha}}, \quad x > 0,$$

from $L^p \to L^q$, with locally integrable non-negative weight functions u and v, in the case $0 < p$, $q < \infty$, $p > \max(1/\alpha, 1)$, provided u is non-increasing on $\mathbb{R}^+$ are found. The kernel of the operator is niether fractional, nor Oinerov's class, but a product of the kernels of these types.

Inhomogeneous lacunary interpolation and optimization errors bound of seventh spline

Karwan H. F. Jwamer*, **F. K. Hamasalh**†

* *University of Sulaimani, Faculty of Science and Science Education, School of Science, Sulaimani, Iraq*
Jwameri1973@gmail.com

† *University of Sulaimani, Faculty of Science and Science Education, School of Science Education, Sulaimani, Iraq*
faraidunsalh@gmail.com

This paper surveys and reviews paper of spline degree seven inhomogeneous and optimized the best errors bound by spline (0,4 ; 0, 2, 3, 5, 6) case. It has been shown that the existence, uniqueness and convergence analysis with minimizing the error bounds of deficient seventh spline interpolated.

We have been constructed the new model for seventh degree spline as :

$$S\left(\frac{v}{n}\right) = f_v, \quad v = 0, 1, ..., n, \quad S''\left(\frac{2v}{n}\right) = f''_{2v},$$
$$S'''\left(\frac{2v+1}{n}\right) = f'''_{2v+1}, \quad S^{(5)}\left(\frac{2v}{n}\right) = f^{(5)}_{2v},$$
$$S^{(6)}\left(\frac{2v+1}{n}\right) = f^{(6)}_{2v+1}, \quad S'(0) = f'(0), \quad S'(1) = f'_n,$$
$$where\ v = 0, 1, 2, ..., \left(\frac{n-1}{2}\right).$$

We may all it (0, 4; 0, 2, 3, 5, 6) interpolation, in the next communication we shall return to same other problems of this nature: It can be verified that if is seventh on [0, 1] then

$$P(x) = P(0)B_0(x) + P(1)B_1(x) + P''(0)B_2(x) + P'''(1)B_3(x) +$$
$$+ P^{(4)}(0)B_4(x) + P^{(4)}(1)B_5(x) + P^{(5)}(0)B_6(x) + P^{(6)}(1)B_7(x).$$

It is easy to verify that a seventh can be expressed in the following form:

$$P(x) = P(0)A_0(x) + P(1)A_1(x) + P''(0)A_2(x) + P'''(1)A_3(x) +$$
$$+ P^{(4)}(0)A_4(x) + P^{(4)}(1)A_5(x) + P^{(5)}(0)A_6(x) + P^{(6)}(1)A_7(x).$$

Also we have been proved that the following theorems and lemma .

Theorem 1(Existence and Uniqueness). *For every odd integer n and for every set of* $\frac{5n+9}{2}$ *real numbers* $f_0,\ f_1, ..., f_n,\ f'_1, f'_3, ..., f'_n,$ $f''_0, f''_2, ..., f''_{n-1},\ f^{(4)}_1, f^{(4)}_3, ..., f^{(4)}_n,\ f^{(5)}_1, f^{(5)}_3, ..., f^{(5)}_n,\ f'_0,\ f'_n.$ *There exists a unique* $S(x) \in S^{(6)}_{(n-1)}$ *and satisfying all condition in (1).*

Lemma 1.

let $f \in C^7[0,1]$ *, n any odd integer and* $h = n^{-1}$ *, then for* $S_n(x) = S_n(f,x)$ *of theorem 1, we have*

$$||S_n'\overline{(2v+1h)} - f'\overline{(2v+1h)}|| \leqslant \frac{25}{234}h^6\theta_0 w_7(vh), |\theta_0| < 1,$$

$$||S_n(2vh) - f'(2vh)|| \leqslant \frac{730}{1863}h^6 w_7(2h), where, v = 0,1,..., \frac{n-1}{2}.$$

Lemma 2. *Let* $A_v = S_n'(vh) - f'(vh)$ *for* $v = 0,1,...,n$ *then :*

$$|A_{2v} - A_{2v+4}| \leqslant \frac{4393}{415}h^6 w_7(4h) - \frac{8}{115}h^6||f^{(7)}||.$$

Theorem 2. *Let* $f \in C^7[0,1]$ *and n an odd integer, then the unique seventh spline S(x) satisfying conditions of Theorem 1 then ;*

$$||S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)||_\infty \begin{cases} 2h^{6-r}K_1 \;\; where \;\; r = 5,6 \\ \\ h^{4-r}(2K_1h^2 + K_2) \;\; where \;\; r = 0,1,2,3,4 \end{cases}$$

Where $K_1 = \dfrac{675}{720}hw_7(f) + \dfrac{405}{720}h||f^{(7)}|| + 175h^{-5}|A_{2v}| + 105h^{-5}|A_{2v+1}|$, K_2 *is constant and* $w_7(.)$ *denotes the modulus of continuity of* $f^{(7)}$.

Interpolation polynomial occurs naturally in many fields of physics and mathematical statistics. They also arise as representation formulas for the interpolating of data.

This theory has developed into an interesting branch of applicable mathematics to minimize the function, which contains a wealth of new idea for inspiration inhomogeneous lacunary interpolation by higher order spline function. A better accuracy in the interpolation is especially relevant since the spline function is fully expressed in terms of boundary quantities. This type of problem arises in the mathematical modeling of inhomogeneous lacunary interpolations concerning [1, 4, 9]. Spline function have been used for this purpose in minimize errors estimation [3, 5, 6]. Various types of splines, such as quadratic [2], quinitics [7] and ninth [8] have been used to interpolate the polynomial and solve these different kinds of problems.

In this paper, we apply the two inhomogeneous seventh spline interpolations for finding the best optimal errors bound, also order of spline and the boundary conditions are developed. Convergence analysis and basic properties of the inhomogeneous spline model has been proposed. Also, the continuity of derivatives across mesh points improves convergence for the spline function.

References

1. *Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.* The theory of splines and their applications. — New York, London: Academic Press., 1967.
2. *Athanassios Nikolis* Numerical solutions of ordinary differential equations with quadratic trigonometric splines // Applied Mathematics E-Notes, ISSN 1607-2510, 2004. — Vol. 4. — P. 142–149.
3. *De Boor C.* A Practical Guide to Splines. Revised Edn. — New York: Springer Verlag, 2001.
4. *Faraidun K. Hama-Salh* Inhomogeneous Lacunary Interpolation by Splines (0, 2; 0, 1, 4) Case // Asian Journal of Mathematics and Statistics. 2010. — Vol. 3(4). — P. 211–224,
5. *Howell G, Varma A. K.* Best Error Bounds for Quantic Spline Interpolation, Approximation Theory. — 1989. — Vol. 58, No.1.
6. *Jwamer K. H.* Minimizing error bounds in (0,2,3) lacunary interpolation by sextic spline function // Journal of Mathematics and Statistics, USA. — 2007. — Vol. 3(4). — P. 249–256.
7. *Meir A., Sharma A.* Lacunary interpolation by splines // SIAM J. Numer. Anal. — 1973. — Vol. 10. — P. 433–442.
8. *Saad A Manna, Faraidun K. Hama-Salh,Hardi N. Aziz* An approximate solution of some differential equations with new type of interpolation, Asian Journal of Mathematics and Statistics, ISSN 1994-5418, 2013. — Vol. 6(1). — P. 33–42.
9. *Saxena R. B.,Joshi T. C.* Inhomogeneous lacunary interpolation by splines, I (0, 2: 0, 3). — Bulgaricae Mathematicae Publi. — 1980. — Vol. 6. — P. 341–351.

Differentiable measures as Hida distributions

A. I. Kirillov

Russian Foundation for Basic Research, Moscow, Russia
AcademiaXXI@mail.ru

How should we construct the infinite-dimensional analysis if there are not analogs of the Lebesque measure on infinite-dimensional spaces? Some people use the Gauss measures, others prefer to not specify the basic measure at all, assuming only that it has some properties. Of cource, the integration by parts formula

$$\int_X f'_h(x)d\mu(x) = \int_X f(x)\beta_h(x)d\mu(x), \quad h \in \mathcal{D}(\mu) \subset X \tag{1}$$

is requred. Therefore, the measure must be differentiable. We present theorems that show that the two approaches can be combined and give new results.

Let $S'(\mathbb{R}^d)$ be the space of tempered distributions and $S(\mathbb{R}^n)$ be the corresponding space of test functions. We investigate the measures on the Borel σ-ring $B(S'(\mathbb{R}^d))$ of subspaces of $S'(\mathbb{R}^d)$. One of those measures is the so-called white noice measure γ. It is defined by its caracteristic functional (the Fourier transform) as

$$f \in S(\mathbb{R}^d) \to \int_{S'(\mathbb{R}^d)} e^{i\langle\varphi,f\rangle}\, d\gamma(\varphi) = e^{-\|f\|^2/2}, \tag{2}$$

where $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denotes the pairing between $S'(\mathbb{R}^d)$ and $S(\mathbb{R}^d)$ and $\|\cdot\|$ stands for the norm of $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Using γ we define the space $(L^2) := L^2(S'(\mathbb{R}^d),\gamma)$ and two spaces (S) and (S') such that $(S) \subset (L^2) \subset (S')$ is a rigged Hilbert space (Gel'fand triple). There is explicite construction of such (S) and (S').

The elements of $(S)'$ are called the Hida distributions.

Theorem. Let a probability measure μ on $B(S'(\mathbb{R}^d))$ and a Gel'fand triple $H_+ \subset H = L^2(\mathbb{R}^d) \subset H_-$ satisfy these five conditions:

1. $S(\mathbb{R}^d) \subset H_+,\ H_- \subset S'(\mathbb{R}^d)$ with continuous embeddings;
2. $\mathrm{supp}\mu \subset H_-,\ H_+ \subset \mathcal{D}(\mu)$;
3. μ has a logarithmic gradient β with respect to $(\cdot,\cdot)_H$;
4. $\|\cdot\|_-, \quad \|\beta(\cdot)\|_- \in L^2(S'(\mathbb{R}^d), d\mu)$;
5. $\exists\ r,\ A > 0\colon \quad \|\varphi\|_- > r \Rightarrow (\beta(\varphi),\varphi)_- \leqslant -A\|\varphi\|_-^2$ for μ-a.e. φ.

Then there is a Hida distribution ρ such that $\forall f \in S(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{S'(\mathbb{R}^d)} e^{i\langle\varphi,f\rangle} d\mu(\varphi) = \langle\langle\rho,\ e^{i\langle\cdot,f\rangle}\rangle\rangle.$$

The distribution ρ is called the generalized Radon–Nikodim derivative of μ w.r.t. γ.

For any Hida distribution ρ there exist $p \in \mathbb{Z}$ and $g_p(\cdot) \in (L^2)$ such that $\forall \Psi \in (S)$

$$\langle\langle \rho, \Psi \rangle\rangle = \langle\langle g_p(\cdot), \Gamma(\hat{A}^p)\Psi \rangle\rangle$$

If ρ is generated by a measure μ, then $\rho = \Gamma(\hat{A}^p) g_p$, where for any sufficiently big $p \in \mathbb{N}$ and γ-a.e. φ

$$g_p(\varphi) = \lim_{\hat{P} \to \hat{I}} \langle\langle \tilde{\mu}(\hat{A}^{-p} \cdot), : e^{-i\langle \cdot, \hat{P}\varphi \rangle} : e^{\| \cdot \|^2_{-p}/2} \rangle\rangle,$$

$\hat{P}$ being a projection of $S(\mathbb{R}^d)$ on $S(\mathbb{R}^d)$ and $\hat{I}$ — the identity operator in $S'(\mathbb{R}^d)$.

Examples.

1. The Gauss $(\hat{C}, 0)$-measure μ_0 on $S'(\mathbb{R}^d)$.

$$g_p(\varphi) = (\det \hat{G}_p^{-1}) \exp\left[-\langle \varphi, (\hat{G}_p^{-2} - \hat{I})\varphi \rangle / 2 \right], \qquad p > d/2$$

where $\hat{G}_p^2 = \hat{I} + \hat{A}^{-p}(\hat{C} - \hat{I})\hat{A}^{-p}$.

$$g_p(\varphi) = \Gamma(\hat{A}^{-p}) : \exp\left[-\langle \varphi, (\hat{I} - \hat{C})\, \varphi \rangle / 2 \right] : .$$

2. Convolution $\nu = \mu_0 * \eta$

$$\int_{S'(\mathbb{R}^d)} \Psi(\varphi) d\nu(\varphi) = \left\langle \left\langle \int_{S'(\mathbb{R}^d)} \frac{d\mu_u}{d\gamma}(\cdot)\, d\eta(u), \Psi(\cdot) \right\rangle \right\rangle,$$

where, for any $p \in \mathbb{N}$ big enough,

$$\frac{d\mu_u}{d\gamma}(\cdot) = \Gamma(\hat{A}^p) g_p(\cdot - u) : e^{\langle \cdot, u \rangle} :$$

is the generalized Radon–Nikodym derivative of the translation μ_u of the measure μ_0.

The Hardy-Littlewood type inequalities for the Fourier coefficients

A. N. Kopezhanova[*], **E. D. Nursultanov**[†]

[*] *L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
Kopezhanova@yandex.ru

[†] *Kazakhstan Branch of the Lomonosov Moscow State University, Astana, Kazakhstan*
er-nurs@yandex.ru

In this work some inequalities of Hardy-Littlewood type with respect to a regular system for the generalized Lorentz spaces $\Lambda_q(\omega)$ are obtained.

Let $0 < q \leqslant \infty$ and let ω be a nonnegative function on $[0,1]$. The generalized Lorentz spaces $\Lambda_q(\omega)$ consists of all mesurable functions f on $[0,1]$ such that $\|f\|_{\Lambda_q}(\omega) < \infty$, where

$$\|f\|_{\Lambda_q(\omega)} := \begin{cases} \left(\int_0^1 \left(f^*(t)t\omega\left(\frac{1}{t}\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & \text{for} \quad 0<q<\infty, \\ \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} f^*(t)t\omega(\frac{1}{t}) & \text{for} \quad q=\infty, \end{cases}$$

where $f^*(t)$ is the nonincreasing rearrangement of the function $|f(t)|$.

Let the function f be periodic with period 1 and integrable on [0,1] and let $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ be an orthonormal system. The numbers

$$a_k = a_k(f) = \int_0^1 f(x)\overline{\varphi_k(x)}dx, \ k \in \mathbb{N},$$

are called the Fourier coefficients of the function f with respect to the system $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Let $\delta > 0$ and $\omega(t)$ be a nonnegative function on $[0,\infty)$. We define the following class

$$A = \bigcup_{\delta>0} A_\delta = \bigcup_{\delta>0} \{\omega(t): \ \ \omega(t)t^{-\delta} \nearrow \text{ and } \omega(t)t^{-1+\delta} \searrow\}.$$

Theorem 1. *Let $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a regular system and let $1 \leqslant q \leqslant \infty$. If $\omega(t)$ belongs to the class A, then*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\overline{a}_k k\omega(\frac{1}{k})\right)^q \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c_1\|f\|_{\Lambda_q(\omega)},$$

where $\overline{a}_k = \frac{1}{k}\left|\sum_{m=1}^{k} a_m(f)\right|$, $a_k(f)$ are the Fourier coefficients with respect to the system Φ.

Theorem 2. *Let* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *be a regular system,* $f \overset{a.e.}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$ *and* $1 \leqslant q \leqslant \infty$. *If* $\omega(t)$ *belongs to the class* A, *then*

$$\left(\int_0^1 \left(\overline{f(t)}\omega(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^* k \omega(\frac{1}{k})\right)^q \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}},$$

where $\overline{f(t)} = \frac{1}{t}\left|\int_0^t f(s)ds\right|$. The definition of the regular system Φ was presented in [1].

References

1. *Nursultanov E. D.* On the coefficients of multiple Fourier series from L_p-spaces // Izv. Ross Akad. Nauk Ser. Mat. — 2000. — Vol. 64, No. 1. — P. 95–122.

The inversion formula of the conversion of Laplace by only the positive values of the real axis

A. V. Pavlov

MIREA, Moscow, Russia
login11@umail.ru

For the wide class of the functions $S(x)$ it is proved the new inversion formula of the conversion of Laplace by only the positive values of the real axis: $SCLL(S(x)) = S(x)$, where S, C, L are cosine, sine and Laplace transforms.

The main theorem is the theorem 1. From the theorem we obtain the the inversion formula of the conversion of Laplace:

$$(\pi)^2 S(t) = SIN^0 COS^0 LLS(x)(\cdot)(t), t \in (0, \infty);$$

by definition,

$$F_{\pm}^0 S(x)(\cdot)(v) = \int_0^{\infty} e^{\pm ixv} S(x) dx, v \in (-\infty, \infty)$$

,

$$LS(x)(\cdot)(v) = \int_0^{\infty} e^{-vx} S(x) dx,\ v \in [0, \infty);$$

$$SIN^0 S(x)(\cdot)(t) = \int_0^{\infty} \sin tx S(x) dx,$$

$$COS^0 S(x)(\cdot)(t) = \int_0^{\infty} \cos tx S(x) dx,\ t \in [0, \infty).$$

$$\Omega S(x)(\cdot)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (S(x-t)/x) dx,\ t \in (-\infty, \infty).$$

All results are proved for a functions from a class G.

By definition, $S(x) \in G$, if

$$S(0) = 0, \int_0^{\infty} |S(x)| dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} |d^2 S(x)/dx^2| dx < \infty,$$

and $S(p)$ is regular [2] in $p : |p| > R$ for $R \in (0, \infty)$, and in the part of plain

$$|S(p)| < c/|p|,\ |p| \to \infty,\ c = const,\ c < \infty.$$

Theorem 1.

$$LF_0^- S(ix)(\cdot)(t) = (-1/i)LLS(x)(\cdot)(t), t \in (0, \infty),$$

and

$$F_0^- F_0^+ S(ix)(\cdot)(t) = iF_0^- LS(x)(\cdot)(t), t \in (0, \infty),$$

if $S(x) \in G$.

From the theorem 1 we have the main inversion formula of the conversion of Laplace by only the positive values of the real axis:

$$\pi S(it) = SIN^0 LS(x)(\cdot)(t), t \in (0, \infty),$$

if $S(x) \in G$, and $(\pi)^2 S(t) = SIN^0 COS^0 LLS(x)(\cdot)(t), t \in (0, \infty)$, if $S(x) \in G, S(-x) = S(x), x \in (-\infty, \infty)$.

Remark. From terms of regularity and evenness of $S(t)$ function it is possible to be delivered, leaving in force the other terms of class G.

Theorem 2. *Let's $S(p) \in G$ is regular in some opened domain containing arbitrary interval $I \in (-\infty, \infty)$ of the real axis, and $S(p) = S_1(p) + S_2(p)$, where the $S_1(p)$ function is is regular in the overhead part of plane $Im > 0$, and $S_2(p)$ is regular in the lower part of plane $Im < 0$.*

1.
$$\Omega\Omega S(x)(\cdot)(t) = CS(x),\ x \in (-\infty, \infty),\ C = const,$$

if both functions are continuous on all border $(-\infty, \infty)$.

2. if both functions are continuous on I, from the condition $Im\, S(t) = 0$, $t \in I$ it follows, that

$$Re\, S_1(x) = Re\, S_2(x), Im\, S_1(x) = -Im\, S_2(x), x \in (-\infty, \infty) \cap I,$$

and there is such $s(x)$ function , that $S_1(x) = F_0^+ s(t)(\cdot)(x)$, $x \in I$ (because of arbitrariness I the existence of such $s(x)$ function is proved without the uses of the methods of the tasks of Derihle only with help of the theorem of Reman about continuation of function through part of actual border [2]),and necessarily $S_2(x) = F_0^- s(t)(\cdot)(x)$, $x \in I$.

References

1. *Pavlov A. V.* Fourier transform and the inversion formula of the conversion of Laplace. Mosc.: Math. note. — 2011. — Vol. 90, No 5. — P. 793–796.
2. *Lavrentev M. A.,Shabat B. V.* Methods of theory of functions of complex variable. — Moscow: Izd. Sc, 1987. — 688 p.

Weighted Hardy operator for $0 < p < 1$

K. Senouci

Ibn Khaldoun University, Department of Mathematics, Tiaret, Algeria
kamer295@yahoo.fr

Let ω be a weight function on $(0, +\infty)$ (a positive measurable function). For $0 < p < 1$ the weighted space $L_{p,\omega(0,\infty)}$ is the space of real valued functions generated by the quasi-norm.

$$\|f\|_{L_{p,\omega}(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p(x)\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

The weighted Hardy operator H_ω is defined by

$$(H_\omega f)(r) = \frac{1}{W(r)}\int_0^r f(x)\omega(x)dx$$

where $0 < W(r) = \int_0^r \omega(x)dx < \infty, \forall r > 0$. Note that, if $\omega(x) = 1$ the operator H_ω is the usual Hardy operator

$$(Hf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx.$$

Lemma 1. *Let* $0 < p < 1$, $c_1, c_2 > 0$, ω *a weight on* $(0, +\infty)$ *and*

$$\omega(y) \leqslant c_1\omega(x) \quad for \quad 0 < y < x < r \tag{1}$$

$$\int_0^x \omega(t)dt \geqslant c_2 x\omega(x) \quad for \quad 0 < x < r$$

$$c_2\omega(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x \omega(t)dt \quad for \quad 0 < x < r \tag{2}$$

Then

$$\left(\int_0^x \omega(y)y^{p-1}dy\right)^{1-\frac{1}{p}} \leqslant Bx^{p-1}\frac{\int_0^r \omega(t)dt}{r\omega^{\frac{1}{p}}(r)} \tag{3}$$

where $B = c_2^{-1}c_1^{1-\frac{1}{p}}p^{\frac{1}{p}-1}$.

Lemma2. *Let* $0 < p < 1$,$A > 0$, ω *a weight function on* $(0, \infty)$ *and*

$$f(x) \leqslant A\left(\int_0^x \omega(y)y^{p-1}dy\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^r f(y)^p\omega(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

then

$$(H_\omega f)(r) \leqslant \frac{C}{r\omega(r)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^r f(y)^p\omega(y)y^{p-1}dy\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4}$$

where $C = A^{1-P}B$

Theorem: *Let* $0 < p < 1$, $A > 0$, ω *a weight function on* $(0, \infty)$ *and* $\alpha < n - \frac{1}{p}$. *if* f *is a non negative measurable function on* $(0, \infty)$ *and satisfies (1), (2), (4) for all* $r > 0$, *then*

$$\|r^{\alpha}(H_{\omega}f)(r)\|_{Lp,\omega}(0, +\infty) \leqslant D\|x^{\alpha}f(x)\|_{Lp,\omega}(\mathbb{R}^n)$$

where $D = \frac{C}{(\alpha p - p + 1)^{\frac{1}{p}}}$.

Hardy-type inequality for $0 < p < 1$ and hypodecreasing functions

T. V. Tararykova

Cardiff University, Cardiff, UK
tararykovat@cf.ac.uk

Let $0 < p < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. We say that a function f is *hypodecreasing* with the parameters p, α if f is a function non-negative and measurable on $\mathbb{R}^n$ for which for some $M > 0$ for all $r > 0$ $\|f(x)|x|^{\alpha - \frac{n-1}{p}}\|_{L_p(B_r)} < \infty$ and

$$\|f\|_{L_1(B_r)} \leqslant M r^{n - \frac{1}{p} - \alpha} \|f(x)|x|^{\alpha - \frac{n-1}{p}}\|_{L_p(B_r)}\,, \tag{1}$$

and we denote by $HD_p^\alpha(M)$ the space of all functions f non-negative and measurable on $\mathbb{R}^n$ for which inequality (1) holds for all $0 < r < \infty$. We also set $HD_p^\alpha = \bigcup_{M>0} HD_p^\alpha(M)$.

Each radially symmetric and non-increasing function belongs to the space HD_p^α for any $0 < p < 1$ and $\alpha \leqslant n - \frac{1}{p}$. However, this is a much wider space, which also contains radially symmetric increasing functions if they are not growing too fast at the origin and at infinity. Moreover, the function $f(x) = \|\Delta_x^\sigma \varphi\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}$, $x \in \mathbb{R}^n$, where $\sigma \in \mathbb{N}$, $\varphi \in L_q(\mathbb{R}^n)$, belongs to this space, which is quite important for applications.

We give sufficient conditions close to necessary ones in terms of spaces of hypodecreasing functions ensuring that the following stronger version of the Hardy-type inequality is satisfied for all functions f non-negative and measurable on $L_p(\mathbb{R}^n)$

$$\|t^\alpha (H(f\chi_{B_r}))(t)\|_{L_p(0,\infty)} \leqslant N \|f(x)\chi_{B_r}(x)|x|^{\alpha - \frac{n-1}{p}}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{2}$$

for all $0 < r \leqslant \infty$, where $N > 0$ is independent of f and r. (If $r = \infty$ this is the standard Hardy inequality.) Given $0 < p < 1$, $\alpha < n - \frac{1}{p}$ and $N > 0$, we denote by $H_p^\alpha(N)$ the space of all functions f non-negative and measurable on $\mathbb{R}^n$ for which inequality (2) is satisfied for all $0 < r \leqslant \infty$. We also set $H_p^\alpha = \bigcup_{N>0} H_p^\alpha(N)$.

Theorem. *Let $0 < p < 1$ and $\alpha < n - \frac{1}{p}$. Then for all $\alpha < \beta \leqslant n - \frac{1}{p}$*

$$HD_p^\beta \subset H_p^\alpha \subset HD_p^\alpha\,.$$

Detailed proofs, further results and applications are contained in [1, 2].

Joint work with V.I. Burenkov and A. Senouci.

The work on this topic was supported by grants of the Russian Foundation for Basic Research (projects 09-01-00093a, 12-01-00554a).

References

1. *Burenkov V. I., Senouci A., Tararykova T. V.* Hardy-type inequality for $0 < p < 1$ and hypodecreasing functions // Eurasian Mathematical Journal. — 2010. — Vol. 1, No 3. — P. 27–42.
2. *Burenkov V. I., Senouci A., Tararykova T. V.* Equivalent quasi-norms involving differences and moduli of continuity // Complex Analysis and Elliptic Equations. — 2010. — Vol. 55, No. 8–10. — P. 759–769.

Kolmogorov widths of Sobolev classes on a domain with a peak: some limiting cases

A. A. Vasil'eva

Moscow State University, Moscow, Russia, vasilyeva_nastya@inbox.ru

Let $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$, let $\omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$ be a bounded domain with a Lipschitz boundary, let $\varphi : (0,\, 1] \to (0,\, \infty)$ be an increasing Lipschitz function such that $\lim\limits_{z\to+0} \varphi(z) = \lim\limits_{z\to+0} \varphi'(z) = 0$, and let

$$\Omega = \left\{ x = (y,\, z) \in \mathbb{R}^d :\; z \in (0,\, 1),\; \frac{y}{\varphi(z)} \in \omega \right\}.$$

Let $r \in \mathbb{N}$, $1 < p < q < +\infty$. A criterion for boundedness of the embedding of $W^r_p(\Omega)$ into $L_q(\Omega)$ was obtained in [1]. For $\varphi(z) = z^\sigma$ with $\sigma > 1$, $r + (\sigma(d-1)+1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) > 0$, estimates of Kolmogorov widths $d_n(W^r_p(\Omega),\, L_q(\Omega))$ were obtained in [2]. It was shown that the orders of $d_n(W^r_p(\Omega),\, L_q(\Omega))$ are the same as the orders of $d_n(W^r_p([0,\, 1]^d),\, L_q([0,\, 1]^d))$.

Let $\sigma_* > 1$, $r + (\sigma_*(d-1)+1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) = 0$, let $\alpha > 0$, let $\rho : (0,\, \infty) \to (0,\, \infty)$ be an absolutely continuous function such that $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t\rho'(t)}{\rho(t)} = 0$, and let $\varphi(z) = z^{\sigma_*} |\ln z|^{\frac{\alpha}{d-1}} \rho^{\frac{1}{d-1}}(|\ln z|)$. Denote $\delta = r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p}$.

Theorem 1. *1. Let $1 < q \leqslant 2$. If $\frac{\delta}{d} > \alpha\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, then $d_n(W^r_p(\Omega),\, L_q(\Omega)) \asymp n^{-\frac{\delta}{d}}$. If $\frac{\delta}{d} < \alpha\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, then $d_n(W^r_p(\Omega),\, L_q(\Omega)) \asymp (n^\alpha \rho(n))^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$.
2. Let $2 < q < \infty$. Denote $\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q},\, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\}$, $\theta_2 = \frac{q\delta}{2d}$, $\theta_3 = \alpha\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q},\, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\}$, $\theta_4 = \frac{q\alpha}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 1$, $\sigma_4 = \frac{q}{2}$. Suppose that there exists $j_* \in \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$ such that $\theta_{j_*} < \min_{j\ne j_*} \theta_j$. Then $d_n(W^r_p(\Omega),\, L_q(\Omega)) \asymp n^{-\theta_{j_*}} \left(\rho(n^{\sigma_{j_*}})\right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$.*

References

1. *Maz'ya V. G., Poborchi S. V.* Imbedding theorems for Sobolev spaces on domains with peak and on Hölder domains // St. Petersburg Math. J. — 2007. — Vol. 18. — P. 583–605.
2. *Besov O. V.* On Kolmogorov widths of Sobolev classes on an irregular domain Submitted to Proc. Steklov Inst. Math.

The research was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (grant № 12-01-00554).

Некоторые оценки потенциалов Рисса с обобщенным сдвигом и почти монотонным ядром

С. К. Абдуллаев, Б. К. Агарзаев

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
Sadig.Abdullaev@mail.ru

Для $p \geqslant 1$, $\alpha > 0$, через $\tilde{\Omega}_{p,\alpha}$ обозначим совокупность функций $\omega : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ таких что $\omega(t)$ почти возрастает, $t^{-\frac{\alpha}{p}+\varepsilon}\omega(t)$ почти убывает при некотором $\varepsilon > 0$ и сходится интеграл $\int_0^r \omega(t)t^{-1}dt$.

По определению (см. [1]), положительная функция $g(t)$ почти убывает (почти возрастает) на множестве $X \subset (0; +\infty)$, если существует постоянная $c > 0$ такая, что для любых $t_1, t_2 \in X$, $t_1 < t_2$: $g(t_2) \leqslant cg(t_1)$ $(\,g(t_1) \leqslant cg(t_2)$.

Пусть R^m — m-мерное эвклидовое пространство $m \geqslant 2$,

$$R_+^m = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m :\ x_m > 0\}.$$

Для $\omega \in \tilde{\Omega}_{p,\, m+2\upsilon}$ $(\nu \geqslant 0)$ рассмотрим обобщенный потенциал Рисса (см. [2,3])

$$\left(I_\upsilon^\omega f\right)(x) = \int_{(R_m)_\upsilon} f(y) T_\upsilon^y \left(\frac{\omega\left(|x|\right)}{|x|^{m+2\upsilon}}\right) y_m^{2\upsilon} dy, \quad x \in (R_m)_\upsilon,$$

где $(R^m)_\nu = R^m$ и T_υ^y — обычный сдвиг $(T_0^y(f(x)) = f(x-y))$, при $\upsilon = 0$, $(R_m)_\upsilon = R_+^m$ и T_υ^y обобщённый сдвиг, ассоциированный дифференциальным оператором Лапласа- Бесселя (см. [4]) при $\upsilon > 0$:

$$T_\upsilon^y u(x) = c_\upsilon \int_0^\pi u\left(x' - s', \sqrt{x_m^2 - 2x_m s_m \cos\alpha}\right) \sin^\upsilon \alpha d\alpha,$$

где $x = (x', x_m)$, $s = (s', s_m)$, $x',\ s' \in R_{m-1}$ а c_υ — постоянная.

Обозначим $L_\upsilon^\Phi\left((R_m)_\upsilon\right) = \left\{f : \int_{(R_m)_\upsilon} \Phi\left(\varepsilon\left|f(x)\right|\right) \alpha^{2\upsilon} dx < \infty,\ \forall\varepsilon > 0\right\}$, $\left\|f : L_\upsilon^\Phi\left((R_m)_\upsilon\right)\right\| = \inf\left\{\lambda > 0\ \int_{(R_m)_\upsilon} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) \alpha_m^{2\upsilon} dx \leqslant 1\right\}$ — пространство Орлича, порожденное N-функцией $\Phi(u)$; при $\Phi(t) = t^p$ полагаем $L_\upsilon^\Phi\left((R_m)_\upsilon\right) = L_{p,\nu}\left((R_m)_\upsilon\right)$; BMO_γ — пространство всех функций, локально интегрируемых в R_+^m с весом $x_m^{2\nu}$;

$$\left\|f\left(\cdot\right)\right\|_{BMO_\upsilon} = \sup_{x,r} \left|B\left(0,r\right)\right|_\upsilon^{-1} \int_{B(0,r)} \left|T^y f\left(x\right) - f_{B(x,r)}\right| y_m^{2\upsilon} dy < \infty,$$

$$f_{B(x,r)} = \left|B\left(0,r\right)\right|_\upsilon^{-1} \int_{B(0,r)} T^y f\left(x\right) y_m^{2\upsilon} dy,$$

где $B(0,\, r) = \{x \in (R_m)_\upsilon\ :\ |x| < r\}$, $r > 0$; $\left|B(0,\, r)\right|_\upsilon = \int_{B(0,r)} y_m^{2\nu} dy$.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, $\nu \geqslant 0$, $\omega \in \tilde{\Omega}_{p,\, m+2\upsilon}$. Тогда существует N-функция Φ такая, что

$$C^{-1}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^{m+2\upsilon}}\right) \leqslant \frac{1}{r^{\frac{m+2\upsilon}{p}}}\int_0^r \frac{\omega(t)}{t}dt \leqslant C\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^{m+2\upsilon}}\right), \quad 0 < r < \infty$$

и оператор I_υ^ω действует из $L_{p,\upsilon}$ в I_υ^Φ и ограничен.

Положим $\omega_{p,\upsilon}(t) = \omega(t)t^{-\frac{m+k+2\upsilon}{p}}$, $t > 0$ и

$$\tilde{I}_\upsilon^\omega(f) = \int \left(T^y\left(\omega_{1,\,\upsilon}\left(|x|\right)\right) - \omega_{1,\,\upsilon}\left(|y|\right)\chi(y)\right) f(y) y_m^{2\upsilon} dy,$$

где $\chi(y)$ — характеристическая функция множества $(R_m)_\nu \backslash B(0,\, 1)$.

Теорема 2. Пусть ω и $p > 1$ такие, что $\omega_{p,\nu}(t)t^{-\varepsilon}$ почти убывает, а $\omega_{p,\nu}(t)t^{\varepsilon}$ почти возрастает для любого $\varepsilon > 0$ и $\omega_{p,\nu}(t) \leqslant const$. Тогда: а) существует $c > 0$ такое, что для любых $f \in L_{p,\,\nu}(R_{m+k}^k)$

$$\left\|\tilde{I}^\omega(f)\right\|_{BMO_\nu} \leqslant c\left\|f\right\|_{L_p}; \qquad (1)$$

б) если $I^\omega(f)$ существует для почти всех $x \in R_+^m$, то оценка (1) имеет место и для $I^\omega(f)$.

Литература

1. *Стечкин С. Б.* // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1955. — Т. 19, № 4. — С. 221–246.
2. *Абдуллаев С. К., Дамирова З. А.* // Вестник Университета Одлар Юрду. — 2005. — № 13. — С. 52–59.
3. *Sadig K. Abdullayev, Bakhruz K. Agarzayev* // Trans. of NAS of Azerbaijan, series of phys.-tech. and mathem. science. — Vol. XXV, № 4, Baku-2005. — P. 3–8.
4. *Левитан Б. М.* // Успехи матем. наук. — 1956. — Т. 6, № 2. — С. 102–143.

Some estimates of Riesz potentials with generalized shift and almost monotonic kernel

S. K. Abdullayev, B. K. Agarzaev

Baku State University, Baku, Azerbaijan, Sadig.Abdullaev@mail.ru

Аддитивные весовые оценки некоторых классов интегральных операторов на конусе неотрицательных функций

А. М. Абылаева, А. О. Байарыстанов

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан
abylayeva_ b@mail.ru, oskar_ 62@mail.ru

Пусть $I=(0,+\infty)$, $1\leqslant p,q<\infty$. Пусть $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $\rho(\cdot)$ весовые, т.е. положительные измеримые функции на I. Пусть $\mathcal{K}^+$, $\mathcal{K}^-$, H^+ и H^- интегральные операторы вида

$$\mathcal{K}^+f(x)=\int\limits_0^x K(x,s)f(s)ds,\quad \mathcal{K}^-f(x)=\int\limits_x^\infty K(t,x)f(t)dt,$$

$$H^+f(x)=\int\limits_0^x f(s)ds,\quad H^-f(x)=\int\limits_x^\infty f(s)ds,\quad x>0,$$

где $K(x,s)\geqslant 0$ при $x\geqslant s\geqslant 0$.

Рассмотрим аддитивные весовые неравенства

$$\|u\mathcal{K}^+f\|_q\leqslant C\left(\|\rho f\|_p+\|vH^+f\|_p\right),\quad f\geqslant 0, \tag{1}$$

$$\|u\mathcal{K}^-f\|_q\leqslant C\left(\|\rho f\|_p+\|vH^-f\|_p\right),\quad f\geqslant 0, \tag{2}$$

где $\|\cdot\|_p$ — обычная норма в $L_p(I)$, $1\leqslant p<\infty$.

В работе мы исследуем неравенства (1), (2), когда ядра операторов $\mathcal{K}^+$, $\mathcal{K}^-$, принадлежат к классам $\mathcal{O}_n^+$, $\mathcal{O}_n^-$, $n\geqslant 0$, введенные в [1].

Теорема 1. *Пусть $1<p\leqslant q<\infty$, $\varphi(0)=0$, $\rho^{-1}\in L_{p'}^{loc}(I)$, $v\in L_p(0,t)$, $t>0$ и ядро оператора $\mathcal{K}^+$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^-(\Omega)$, $n\geqslant 0$. Тогда неравенство (1) выполняется тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

$$E_1^+=\sup_{z>0}\left(\int\limits_z^\infty\left(\int\limits_0^z K^{p'}(x,s)d\varphi^{p'}(s)\right)^{\frac{q}{p'}}u^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}<\infty,$$

$$E_2^+=\sup_{z>0}\left(\int\limits_0^z\left(\int\limits_z^\infty K^q(x,s)u^q(x)dx\right)^{\frac{p'}{q}}d\varphi^{p'}(s)\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty.$$

При этом для наименьшей константы $C > 0$ в (1) имеет место соотношение $E_1^+ \approx E_2^+ \approx C$.

Теорема 2. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $\rho^{-1} \in L_{p'}^{loc}(I)$, $v \in L_p(t, \infty)$, $t > 0$ и ядро оператора $\mathcal{K}^-$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+(\Omega)$, $n \geqslant 0$. Тогда неравенство (2) выполняется тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

$$E_1^- = \sup_{z>0} \left(\int_z^\infty \left(\int_0^z K^q(x,s) u^q(s) ds \right)^{\frac{p'}{q}} d\left(-\psi^{p'}(x)\right) \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

$$E_2^- = \sup_{z>0} \left(\int_0^z \left(\int_z^\infty K^{p'}(x,s) d\left(-\psi^{p'}(x)\right) \right)^{\frac{q}{p'}} u^q(s) ds \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

При этом $E_1^- \approx E_2^- \approx C$, где $C > 0$ — наименьшая постоянная в (2).

Литература

1. *Oinarov R.* Ограниченность и компактность интегральных операторов вольтерровского типа // Сибирский математический журнал. — 2007. — Т. 48, № 5. —С. 1100–1115.

Additive weighted estimates of some classes integral operators on the cone of nonnegative functions

A. M. Abylayeva, A. O. Baiarystanov

L.N. Gumilev Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
abylayeva_ b@mail.ru, oskar_ 62@mail.ru

Неравенства типа Харди в многомерных областях с оценками костант

Ф. Г. Авхадиев

Казанский федеральный университет, Казань, Россия
favhadiev@ksu.ru

Рассматриваются неравенства типа Харди в многомерных областях Ω , т. е. открытых собственных подмножествах евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Через $\delta = \delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ обозначим функцию расстояния до границы области, а через $C_0^1(\Omega)$ — множество непрерывно дифференцируемых функций с компактными носителями в Ω. Нашей целью является получение точных или простых, явных оценок констант, возникающих в многомерных неравенствах типа Харди. В докладе на конференции будут представлены основные результаты в этом направлении, полученные в работах [1]– [9], а также нерешенные проблемы, обсуждаемые в этих работах.

1) Хорошо известно, что при $n \geqslant 1$ для выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенств

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 \, dx \ \geqslant \ \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{|f|^2}{\delta^2} \, dx \qquad \forall f \in C_0^1(\Omega), \tag{1}$$

причем постоянная $1/4$ является точной для любой выпуклой области. В [4] мы доказываем, в частности, что при $n \geqslant 3$ имеется семейство невыпуклых областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (включающее в себя шаровой слой), для которых верно неравенство (1) с той же постоянной.

2) В [2], [3], [5], [7] обоснован ряд новых неравенств типа Харди в форме Брезиса и Маркуса. Приведем один резкультат: если область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ выпукла, то $\delta_0(\Omega) = \sup\{\delta(x) : x \in \Omega\} < \infty$ и $\nu \in [0, 1/2]$,

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 \, dx \ \geqslant \ \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right) \int_\Omega \frac{|f|^2}{\delta^2} \, dx + \frac{\lambda_\nu^2}{\delta_0^2(\Omega)} \int_\Omega |f|^2 \, dx \qquad \forall f \in C_0^1(\Omega).$$

Здесь λ_ν – первый положительный корень уравнения Лямба $J_\nu(\lambda_\nu) + 2\lambda_\nu J'_\nu(\lambda_\nu) = 0$ для функций Бесселя. Константы при интегралах точны при любом $\nu \in [0, 1/2]$ для всех размерностей $n \geqslant 1$, причем $\lambda_0 = 0,940....$ Поскольку $\lambda_{1/2} = \pi/2$,как следствие получаем известные изопериметрические неравенства, принадлежащие Пуан- каре при $n = 1$, Хершу при $n = 2$, Пейну и Стакгольду при $n \geqslant 3$.

3) В работах [1], [6], [8], [9] получены новые неравенства типа Харди с явными оценками констант в многомерных областях – произвольного вида, но обладающих конечной геометрической характеристикой простого типа, например, конечным объемом, или внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$, или степенным граничным моментом.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-01-00762.

Литература

1. *Авхадиев Ф. Г.* Введение в геометрическую теорию функций. — Казань: Изд-во Казанского федерального университета, 2012.
2. *Avkhadiev F. G., Wirths K. J.* Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains // ZAMM. — 2007. — Vol. 87, № 8-9. — P. 632–642.
3. *Avkhadiev F. G., Wirths K. J.* Weighted Hardy Inequalities with Sharp Constants // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2010. — Vol. 31, № 1. — P. 1–7.
4. *Avkhadiev F. G., Laptev A.* Hardy Inequalities for Nonconvex Domains // International Mathematical Series "Around Research of Vladimir Maz'ya, I". Function Spaces. Laptev A. (Ed.). — 2010. — Vol. 11. — P. 1–12.
5. *Avkhadiev F. G., Wirths K. J.* Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2011. — Vol. 18. P. 723–736.
6. *Авхадиев Ф. Г., Насибуллин Р. Г., Шафигуллин И. К.* Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства // Изв. вузов. Матем. — 2011. — Т. 9. — С. 90–94.
7. *Avkhadiev F. G., Wirths K. J.* On the best constants for the Brezis-Marcus inequalities in balls // J. Math. Anal. Appl. — 2012. — Vol. 396. — P. 473–480.
8. *Авхадиев Ф. Г., Насибуллин Р. Г.* L^1-неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом и их обобщения // Сиб. матем. журнал (сдана в печать). — С. 1–10.
9. *Авхадиев Ф. Г., Шафигуллин И. К.* Оценки констант Харди при трубчатом расширении множеств и в областях с конечными граничными моментами // Матем. труды (сдана в печать). — С. 1–10.

Hardy type inequalities in multidimensional domains with estimates of constants

F. G. Avkhadiev

Kazan Federal University, Kazan, Russia
favhadiev@ksu.ru

О двухсторонних оценках норм элементов в суперрефлексивных пространствах Бесова

А. Н. Агаджанов

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
ashot_ran@mail.ru

Среди банаховых пространств важное место занимают пространства Бесова [1].

В докладе получены двусторонние оценки норм элементов в суперрефлексивных пространствах Бесова $B^s_{p,q}(R^n)$ [2] через лебеговы нормы последовательностей коэффицентов, возникающих при разложении этих элементов по нормированным базисам Шаудера в $B^s_{p,q}(R^n)$.

Лемма 1. *Пространство $B^s_{p,q}(R^n)$ при $1 < p < \infty, 1 < q < \infty$, $-\infty < s < +\infty$ является суперрефлексивным банаховым пространством, то есть на $B^s_{p,q}(R^n)$ может быть определена норма, которая одновременно является равномерно выпуклой и равномерно гладкой.*

Пусть $B^{-s}_{p',q'}(R^n)$ — пространство сопряженное пространству $B^s_{p,q}(R^n)$ обозначим через $\delta_{p,q,s}(\epsilon)$ и $\delta_{p',q',-s}(\epsilon)$ — модули выпуклости соответствующие равномерно выпуклым нормам $||\bullet||_{p,q,s}$ и $||\bullet||_{p',q',-s}$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = \frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1)$.

Лемма 2. *Для модулей выпуклости $\delta_{p,q,s}(\epsilon)$ при всех имеют место представления:*

1. $\delta_{p,q,s}(\epsilon) = 1-(1-(\frac{\epsilon}{2})^q)^{\frac{1}{q}}$ *при* $1 < p \leqslant 2$, $q \geqslant p'$;
2. $\delta_{p,q,s}(\epsilon) = 1-(1-(\frac{\epsilon}{2})^{p'})^{\frac{1}{p'}}$ *при* $1 < p \leqslant 2$, $p \leqslant q \leqslant p'$;
3. $\delta_{p,q,s}(\epsilon) = 1-(1-(\frac{\epsilon}{2})^{q'})^{\frac{1}{q'}}$ *при* $1 < p \leqslant 2$, $1 < q \leqslant p$;
4. $\delta_{p,q,s}(\epsilon) = 1-(1-(\frac{\epsilon}{2})^q)^{\frac{1}{q}}$ *при* $2 \leqslant p < \infty$, $p \leqslant q < \infty$;
5. $\delta_{p,q,s}(\epsilon) = 1-(1-(\frac{\epsilon}{2})^p)^{\frac{1}{p}}$ *при* $2 \leqslant p < \infty$, $p' \leqslant q \leqslant p$
6. $\delta_{p,q,s}(\epsilon) = 1-(1-(\frac{\epsilon}{2})^{q'})^{\frac{1}{q'}}$ *при* $2 \leqslant p < \infty$, $1 < q \leqslant p$.

Аналогичные представления имеют место и для модулей $\delta_{p',q',-s}(\epsilon)$. Пусть $\{\varphi_i\}$ — нормированный базис в $B^s_{p,q}(R^n)$, $\{\varphi^*_i\}$ — сопряженный нормированный базис в $B^{-s}_{p',q'}(R^n)$. Обозначим через d и d^* константы Гринблюма, соответствующие базисам φ_i и φ^*_i [3, 4].

На основе Леммы 1 и Леммы 2 доказана

Теорема 1. *Для нормы любого элемента $u = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i \in B^s_{p,q}(R^n)$ имеют место двусторонние оценки*

$$A^{-1}(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^\tau)^{1/\tau} \leqslant ||u||_{p,q,s} \leqslant A(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^t)^{1/t},$$

где $1 < t < \frac{\ln 2}{\ln \lambda}, 2 \leqslant \tau < \frac{\ln 2}{\ln \frac{2}{\lambda^*}}, \lambda = 2(1-\delta_{p,q,s}(d)), \lambda^* = 2(1-\delta_{p',q',-s}(d^*))$, A *– константа, вообще говоря, зависящая от* p, q, s *и* n.

Литература

1. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
2. Агаджанов А.Н. – Геометрия норм и неравенства в суперрефлексивных банаховых пространствах // ДАН. —2008. Т. 421, № 3. — С. 295–298.
3. Гринблюм М.М. Некоторые теоремы о базисе в пространствах типа (B) // ДАН. —1941. — Т. 31. — С. 428–432.
4. Гурарий В.И., Гурарий Н.И. О базисах в равномерно выпуклых и равномерно гладких банаховых пространствах // Изв. Академии наук СССР. Серия матем. — 1971. —Т. 35. — С. 210–215.

Bilateral estimates of the norms of elements in superreflexive Besov spaces

A. N. Agadzhanov

Institute of control problems named after B.A. Trapeznikov RAN
ashot_ran@mail.ru

Методы локализации линий разрыва возмущенной функции двух переменных

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Рассматривается задача локализации (определения положения) линий, на которых функция двух переменных $f(x, y)$ имеет разрыв первого рода; вне линий на функцию накладываются условия гладкости. Точная функция f неизвестна, а известны возмущённая функция f^δ и уровень погрешности измерений δ такие, что $\|f - f^\delta\|_{L_2} \leqslant \delta$. Ясно, что рассматриваемая задача *некорректно поставлена.* Для прикладных задач в различных постановках (см., например, [1, 2]) предложено большое количество алгоритмов, позволяющих локализовать линии разрыва. Теоретические результаты по исследованию методов усреднения можно найти в [3], [4].

Предлагается упрощенный теоретический подход: считается, что дополнительные условия на гладкость функции f и линии разрыва заданы в полосе $D = \{(x, y)\colon -\infty < x < +\infty, |y - \bar{y}| \leqslant \bar{\delta}\}$, где $\bar{\delta} > 0$ может быть как угодно мало; функция двух переменных $f(x, y)$ имеет разрывы первого рода, вообще говоря, по счетному числу гладких линий $\Gamma_i, i = 1, 2, \dots$. Предполагается, что линии Γ_i в полосе D заданы однозначными функциями $x = \gamma_i(y)$. Через x_i обозначены точки пересечения Γ_i с линией $y = \bar{y}$: $x_i = \gamma_i(\bar{y})$. Исследуется задача локализации точек x_i пересечения линий разрыва $\Gamma_i, i = 1, 2, \dots$, с линией $y = \bar{y}$ по функции f^δ и уровню погрешности δ.

Сначала рассматривается более простой случай конечного числа l линий разрыва. Построены методы локализации типа усреднения, которые определяют количество особенностей l и находят приближения x_i^δ для точек $x_i, i = 1, 2, \dots, l$. При дополнительных условиях на функцию f получены оценки точности аппроксимации $|x_i - x_i^\delta| \leqslant C\delta$.

В случае счетного числа линий разрыва считается, что у функции f имеется l линий с большими величинами скачка, а для остальных известно условие «малости». Считается, что большие разрывы имеют номера с первого по l. Методы и оценки предыдущего случая удается перенести на задачу локализации первых l разрывов.

Техника исследования существенно опирается на методы локализации разрывов первого рода зашумлённой функции одного переменного [5]. Однако, двумерность возмущения $f - f^\delta$ требует модификации методов и приводит к новым эффектам по сравнению со случаем функций одной переменной.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1022), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №12-01-00106).

Литература

1. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов. — М.: Мир, 2005.
2. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / Ред. Я. А. Фурман. — М.: Физматлит, 2002.
3. *Антонова Т. В.* Метод локализации линии разрыва приближенно заданной функции двух переменных // Сиб. журн. вычисл. матем. — 2012. — Т. XV, № 4. — С. 345–357.
4. *Агеев А. Л., Антонова Т. В.* Аппроксимация линий разрыва приближенно заданной функции двух переменных // Сиб. журнал инд. матем. — 2012. — Т. XV, №1(49). — С. 3–13.
5. *Агеев А. Л., Антонова Т. В.* Регуляризирующие алгоритмы выделения разрывов в некорректных задачах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2008. — Т. 48, № 8. — С. 1362–1370.

Localization method for lines of discontinues of perturbed function of two variables

A. L. Ageev, T. V.Antonova

Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, Russia,
ageev@imm.uran.ru, tvantonova@imm.uran.ru

Об оценках билинейной аппроксимации классов в пространстве Лоренца

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет, Караганда, Казахстан
akishev@ksu.kz

Пусть $\overline{x} = (x_1, ..., x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и числа $\theta_j, q_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, ..., m$. Через $L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ обозначим пространство Лоренца всех 2π периодических функций (см. [1]). $a_{\overline{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\bar{n},\bar{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$. Положим $\langle\bar{y},\bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$, $\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}) = \sum\limits_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}$,

$$\rho(\bar{s}) = \left\{\overline{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad 2^{s_j-1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j},\ j = 1, ..., m\right\},$$

$l_{\overline{p}}$ – пространство числовых последовательностей со смешанной нормой.

В пространстве Лоренца $\overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$ рассматривается аналог класса Никольского–Бесова–Аманова:

$$\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B = \left\{f \in \overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m) : \left\|\left\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\theta}}\right\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\overline{\tau}}} \leqslant 1\right\},$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $1 < p_j < +\infty$, $1 \leqslant \theta_j, \tau_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$.

Пусть $\bar{q}^{(1)} = (q_1^{(1)}, ..., q_m^{(1)})$, $\bar{q}^{(2)} = (q_1^{(2)}, ..., q_m^{(2)})$, $\bar{\bar{q}} = (\bar{q}^{(1)}, \bar{q}^{(2)})$, $\bar{\theta}^{(2)} = (\theta_1^{(2)}, ..., \theta_m^{(2)})$, $\bar{\theta}^{(3)} = (\theta_1^{(3)}, ..., \theta_m^{(3)})$, $\quad \bar{\bar{\theta}} = (\bar{\theta}^{(1)}, \bar{\theta}^{(2)})$ Рассмотрим $L^*_{\bar{\bar{q}},\bar{\bar{\theta}}}(I^{2m})$ – пространство 2π – периодических функций $f(\bar{x},\bar{y})$ на I^{2m} с конечной квазинормой $\|f\|^*_{\bar{\bar{q}},\bar{\bar{\theta}}}$.

Для функции $f \in L^*_{\bar{\bar{q}},\bar{\bar{\theta}}}(I^{2m})$ рассматривается наилучшее билинейное приближение порядка M:

$$\tau_M(f)_{\bar{\bar{q}},\bar{\bar{\theta}}} = \inf_{u_j(\bar{x}),v_j(\bar{y})} \|f(\bar{x},\bar{y}) - \sum_{j=1}^{M} u_j(\bar{x})v_j(\bar{y})\|_{\bar{\bar{q}},\bar{\bar{\theta}}},$$

где $u_j \in L^*_{\bar{q}^{(1)},\bar{\theta}^{(2)}}(I^m)$, $\quad v_j \in L^*_{\bar{q}^{(2)},\bar{\theta}^{(3)}}(I^m)$, $j = 1, ..., m$.

Оценкам порядка величин $\tau_M(F)_p$ в случае когда F класс Соболева W^r_p или Никольского H^r_p посвящены статьи Р.С. Исмагилова, В.Н. Темлякова, Э.С. Белинского, М. Бабаева, К.Т. Мынбаева, Д.Б. Базарханов. Точный порядок наилучшего билинейного приближения класса Никольского–Бесова–Аманова $S^r_{p,\theta}B$ установил А.С. Романюк (см. библиографию в [2]).

В докладе будут представлены оценки билинейных приближений классов в пространстве Лоренца. В частности

Теорема 1. *Пусть* $1 < p_j \leqslant 2 < q_j^{(1)} < +\infty$, $1 \leqslant \theta_j^{(1)}, \tau_j < \infty$, $j = 1, ..., m$, $r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant ... \leqslant r_m$. *Тогда*

1. Если $r_j = \frac{1}{p_j}, j = 1, ..., \mu \geqslant \nu$ *и* $r_j > \frac{1}{p_j}, j = \mu + 1, ..., m$, *то*

$$\tau_M(S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B)_{\bar{q}^{(1)},\infty} \leqslant CM^{-\frac{1}{2}}(\log(1+M))^{\sum\limits_{j=1}^{\mu}(1-\frac{1}{\tau_j})}.$$

2. Если $r_j > \frac{1}{p_j}, j = 1, ..., m$, *то*

$$\tau_M(S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B)_{\bar{q}^{(1)},\infty} \leqslant$$

$$\leqslant CM^{-(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}(\log(1+M))^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}.$$

3. Если $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j^{(1)}} < r_j < \frac{1}{p_j}$, $q_j^{(1)} < \theta_j$, $j = 1, ..., m$, *то*

$$\tau_M(S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B)_{\bar{q}^{(1)},\infty} \leqslant$$

$$\leqslant CM^{-\frac{q_1^{(1)}}{2}(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}(\log(1+M))^{q_1^{(1)}(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}(1-\frac{1}{\theta_j^{(2)}})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(1-\frac{1}{\tau_j})}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < p_j \leqslant 2 \leqslant q_j^{(1)} < +\infty$, $1 \leqslant \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)}, \theta_j^{(3)} < \infty$, $1 \leqslant q_j^{(2)} \leqslant +\infty$, $j = 1, ..., m$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\tau_M(S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B)_{\bar{\bar{q}},\bar{\bar{\theta}}} \asymp M^{-(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}(\log(1+M))^{(\nu-1)(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}.$$

Литература

1. *Blozinski A. P.* Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Soc. — 1981. — Vol. 263. — P. 146–167.
2. *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН, серия математическая. — 2006. — Т. 70, №2. — С. 69–98.

On estimates bilinear approximation of classes in Lorentz space

G. Akishev

Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan, akishev@ksu.kz

Алгебры почти-периодических функций, инвариантные относительно линейного отображения

А. Б. Антоневич*, **А. Н. Глаз**†

* *Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь;*
Университет в Белостоке, Белосток, Польша
antonevich@bsu.by

† *Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

Пусть задано отображение $\alpha : X \to X$ множества X. Замкнутая подалгебра A алгебры $B(X)$ ограниченных функций на X называется *инвариантной*, если из того, что $a \in A$ следует, что функция $a(\alpha(x))$ также принадлежит A. Рассматриваемые в работе вопросы связаны, в частности, с исследованием операторов взвешенного сдвига, имеющих вид $Bu(x) = a(x)u(\alpha(x))$. Пусть A_0 есть некоторая подалгебра алгебры $B(X)$. Известно [1], что свойства оператора B с коэффициентом $a_0 \in A_0$ описываются с использованием пространства максимальных идеалов $Sp(A)$ наименьшей замкнутой инвариантной подалгебры A, содержащей A_0. Возникает вопрос о структуре такой алгебры A, в зависимости от исходной алгебры A_0 и заданного отображения.

При этом наблюдается следующая закономерность: чем меньше поведение коэффициентов a_0 согласовано с отображением α, тем сложнее устроена алгебра A, и, соответственно, труднее построение пространства $Sp(A)$. С этой точки зрения представляют интерес выделение ситуаций, когда пространство $Sp(A)$ устроено сравнительно просто.

Для построения алгебры A может быть использована следующая конструкция. Пусть A_n есть алгебра, порожденная функциями $a(\alpha^k(x))$, где $a \in A_0, k = 0, 1, \ldots, n$. Тогда

$$A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \ldots$$

и замыкание объединения таких алгебр является искомой алгеброй:

$$A = \overline{\bigcup A_n}.$$

В рассматриваемой конструкции простым будем считать случай, когда цепочка алгебр A_n стабилизируется: при некотором N алгебра A_N инвариантна, тогда $A_n = A_N$ для $n \geqslant N$ и $A = A_N$.

В докладе получены условия стабилизации цепочки алгебр в случае, когда $X = \mathbb{R}^m$ и отображение α линейное: $\alpha(x) = Mx$, где M — заданная невырожденная матрица.

Работа выполнена при поддержке Национального научного центра (Польша), грант No DEC-2011/01/B/ST1/03838.

Если A_0 есть алгебра периодических непрерывных функций, то алгебры A_n состоят из почти-периодических функций и искомая алгебра A есть подалгебра алгебры $CAP(\mathbb{R}^m)$ всех непрерывных почти-периодических функций.

Среди подалгебр алгебры $CAP(\mathbb{R}^m)$ наиболее простыми являются квази-периодические алгебры. Подалгебра A называется *квази-периодической порядка* N, если спектр $Sp(A)$ гомеоморфен тору $\mathbb{T}^N$. Элементы такой подалгебры являются квази-периодическими функциями [2].

Сформулируем основной результат. По аналогии с определением целого алгебраического числа, матрицу M будем называть *целой алгебраической*, если существуют полином $P(t)$ с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, такой что $P(M) = 0$.

Теорема 1. *Пусть A_0 есть квази-периодическая подалгебра. Цепочка алгебр A_n стабилизируется тогда и только тогда, когда матрица M является целой алгебраической. В этом случае наименьшая замкнутая подалгебра A, содержащая A_0 и инвариантная относительно невырожденного линейного отображения $x \to Mx$ также является квази-периодической.*

Литература

1. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход. — Минск: Университетское, 1988.
2. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: МГУ, 1978.

Algebras of almost-periodic functions invariant with respect to linear map

A. B. Antonevich*, A. N. Glaz†

* *Belarussian State University, Minsk, Belarus*
University of Bialystok, Bialystok, Poland
antonevich@bsu.by

† *Belarussian State University, Minsk, Belarus*

О связи скорости убывания коэффициентов Фурье функции и ее гладкости

А. П. Антонов

Московский Государственный Университет, Москва, Россия
alt@land.ru

История вопроса подробно рассматривалась автором в работе [1].

Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $f(x_1, x_2) \in \mathbf{L}_p[0, 2\pi]^2$ и k_1, k_2 — пара натуральных чисел. Смешанным модулем гладкости порядка k_1 по первому аргументу и k_2 по второму аргументу в метрике $\mathbf{L}_p$ будем называть функцию $\omega_{k_1,k_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p = \sup\limits_{|h_1| \leqslant \delta_1, |h_2| \leqslant \delta_2} \left|\left|\Delta_{h_1}^{k_1}\left(\Delta_{h_2}^{k_2}(f)\right)\right|\right|_p$, где $\Delta_{h_1}^{k_1}(f) = \Delta_{h_1}^{1}\left(\Delta_{h_1}^{k_1-1}(f)\right)$, а $\Delta_{h_1}^{1}(f) = f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2)$. $\Delta_{h_2}^{k_2}(f)$ определяется аналогично для переменной x_2.

Определение 1. *Пусть $\alpha > 0$. Будем говорить, что функция ω принадлежит классу S_p^{α}, если она непрерывна и удовлетворяет следующим условиям : 1) $\lim\limits_{\delta \to 0+} \omega(\delta) = 0$; 2) $0 \leqslant \omega(\delta_1) \leqslant \omega(\delta_2)$ при $0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_2 \leqslant 1$; 3) $\frac{\omega(\delta_1)}{\delta_1^{\alpha}} \leqslant \frac{\omega(\delta_2)}{\delta_2^{\alpha}}$ при $0 < \delta_2 \leqslant \delta_1 \leqslant 1$; 4) $\int\limits_0^{\delta} \frac{\omega^p(t)}{t} dt = O(\omega^p(\delta))$ при $\delta \to 0+$; 5) существует постоянная $C > 0$, что для любого $0 < \delta < \frac{1}{2}$ верно $\omega(2\delta) < C\omega(\delta)$.*

Определение 2. *Пусть $\omega_j \in S_p^{\alpha_j}$, $j = 1, 2$. Обозначим $\mathbf{SH}_p^{\omega_1 \omega_2}$ — множество функций $f \in \mathbf{L}_p[0, 2\pi]^2$ таких, что найдутся $k_1 > \alpha_1$ и $k_2 > \alpha_2$, что $\omega_{k_1,k_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p = O(\omega_1(\delta_1) \cdot \omega_2(\delta_2))$ при $\delta_1, \delta_2 \to 0+$.*

Определение 3. *Последовательность a_{n_1,n_2} монотонно убывает по каждому направлению, если для всех натуральных n_1 и n_2 и для всех целых неотрицательных j_1 и j_2 верно $a_{n_1,n_2} \geqslant a_{n_1+j_1,n_2+j_2}$.*

Рассмотрим тригонометрический ряд вида

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1,n_2} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2, \tag{1}$$

где последовательность коэффициентов $\{a_{n_1,n_2}\}_{n_1=1,n_2=1}^{\infty,\infty}$ монотонно убывает по каждому направлению. Через $f(x_1, x_2)$ будем обозначать сумму данного ряда в тех точках, где он сходится.

Теорема 1. *Пусть $\frac{4}{3} < p < \infty$, $\alpha_j > 0$, $\omega_j \in S_p^{\alpha_j}$, $j = 1, 2$, функция $f(x_1, x_2) \in \mathbf{L}[0, 2\pi]^2$ и имеет ряд Фурье типа* (1). *Тогда для того,*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00043.

чтобы $f(x_1, x_2) \in \mathbf{SH}_p^{\omega_1\omega_2}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$a_{n_1,n_2} = O\left(\prod_{j=1}^{2} \frac{\omega_j\left(\frac{1}{n_j}\right)}{n_j^{1-\frac{1}{p}}}\right).$$

Литература

1. *Антонов А. П.* Гладкость сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Изв. вуз. Матем. — 2007. — № 4. — С. 21–29.

On the relations between the decreasing rate of the Fourier coefficients of the given function and its smoothness

A. P. Antonov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
alt@land.ru

Приближенное восстановление псевдодифференциальных операторов

Д. Б. Базарханов

ИМ& ММ, Алматы, Казахстан
dauren.mirza@gmail.com

Для $m \in \mathbb{N}$ пусть $\mathrm{z}_m = \{1, 2, ..., m\}$, $\mathbb{T}^m \equiv (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ — m–мерный тор; для $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ положим $xy = x_1y_1 + \cdots + x_my_m$, $|x| = |x_1| + \cdots + |x_m|$, $|x|_\infty = \max\{|x_\kappa| : \kappa \in \mathrm{z}_m\}$.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений соответственно; $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}_m(f)$ и $\check{f} \equiv \mathcal{F}_m^{-1}(f)$ — прямое и обратное преобразования Фурье $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$; $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ — пространство 1–периодических (по всем переменным) распределений, т.е. совокупность всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\langle f, \varphi(\cdot + \lambda)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и любых $\lambda \in \mathbb{Z}^m$. Хорошо известно, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$, если и только если $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \mathbb{Z}^m$, т.е. $\widehat{f} = 0$ на множестве $\mathbb{R}^m \backslash \mathbb{Z}^m$.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant m$, и вектор $\mathtt{m} = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$ с $|\mathtt{m}| = m$. Представим $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ в виде $x = (x^1, \ldots, x^n)$, где $x^\nu \in \mathbb{R}^{m_\nu}$, $\nu \in \mathrm{z}_n$.

Пусть, как обычно, $L_p(\mathbb{I}^m)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ — пространство измеримых функций $f : \mathbb{I}^m \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени p (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{I}^m$, со стандартной нормой $\|f \,|\, L_p(\mathbb{I}^m)\|$; здесь $\mathbb{I} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{T}\}$.

Пусть $\ell_q = \ell_q(\mathbb{N}_0^n)$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$ — пространство числовых последовательностей $(a_\alpha) = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ с (конечной) стандартной нормой $\|(a_\alpha) \,|\, \ell_q\|$; здесь $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Далее пусть $\ell_q(L_p(\mathbb{I}^m))(L_p(\mathbb{I}^m; \ell_q))$ — пространство функциональных последовательностей $(g_\alpha(x))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$, $x \in \mathbb{I}^m$, с конечной нормой

$$\|(g_\alpha) \,|\, \ell_q(L_p(\mathbb{I}^m))\| = \|(\|g_\alpha \,|\, L_p(\mathbb{I}^m)\|) \,|\, \ell_q\|,$$

$$(\|(g_\alpha) \,|\, L_p(\mathbb{I}^m; \ell_q)\| = \|\|(g_\alpha(\cdot)) \,|\, \ell_q\| \,|\, L_p(\mathbb{I}^m)\|).$$

Теперь введем ($\mathtt{m}$–кратное) разбиение единицы на $\mathbb{R}^m$. Выберем функции $\eta_0^\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{m_\nu})$ такие, что $0 \leqslant \widehat{\eta_0^\nu}(\xi^\nu) \leqslant 1$, $\xi^\nu \in \mathbb{R}^{m_\nu}$; $\widehat{\eta_0^\nu}(\xi^\nu) = 1$, если $|\xi^\nu|_\infty \leqslant 1$; $\widehat{\eta_0^\nu}(\xi^\nu) = 0$, если $|\xi^\nu|_\infty \geqslant 3/2$ $(\nu \in \mathrm{z}_n)$ и положим $\widehat{\eta^\nu}(\xi^\nu) \equiv \widehat{\eta_0^\nu}(2^{-1}\xi^\nu) - \widehat{\eta_0^\nu}(\xi^\nu)$; $\widehat{\eta_j^\nu}(\xi^\nu) \equiv \widehat{\eta^\nu}(2^{-j+1}\xi^\nu)$, $j \in \mathbb{N}$; тогда

$$\{\widehat{\eta_j^\nu}(\xi^\nu),\ j \in \mathbb{N}_0\}$$

— гладкое разбиение единицы (по «коридорам») на $\mathbb{R}^{m_\nu}$ $(\nu \in \mathrm{z}_n)$, а

$$\{\widehat{\eta}_\alpha(\xi) \equiv \prod_{\nu=1}^n \widehat{\eta_{\alpha_\nu}^\nu}(\xi^\nu),\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n\}$$

— ($\mathtt{m}$–кратное) гладкое разбиение единицы на $\mathbb{R}^m$. Наконец, введем операторы $\Delta_\alpha^{\eta\mathtt{r}} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и $\Delta_\alpha^{\eta\mathtt{t}} : \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m) \to \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ следующим образом:

$$\Delta_\alpha^{\eta\mathtt{r}}(f,x) = \mathcal{F}_m^{-1}(\,\widehat{\eta}_\alpha \widehat{f}\,)(x) = \eta_\alpha * f(x),$$

$$\Delta_\alpha^{\eta\mathtt{t}}(f,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \widehat{\eta}_\alpha(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\,\xi x}.$$

Определение. *Пусть* $s = (s_1,\ldots,s_n) \in (0,\infty)^n$, $1 \leqslant p,\ q \leqslant \infty$; $(\mathtt{i},\mathbb{I}) \in \{(\mathtt{r},\mathbb{R}),(\mathtt{t},\mathbb{T})\}$.

I. *Пространство типа Никольского–Бесова* $B^{s\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)$ *состоит из всех* функций $f \in L_p(\mathbb{I}^m)$, *для которых конечна норма*

$$\|\, f \,|\, B^{s\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{I}^m) \,\| \;=\; \|(2^{\alpha s}\Delta_\alpha^{\eta\mathtt{i}}(f,x)) \,|\, \ell_q(L_p(\mathbb{I}^m))\|.$$

II. *Пространство типа Лизоркина–Трибеля* $L^{s\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)$ $(p < \infty)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p(\mathbb{I}^m)$, *для которых конечна норма*

$$\|\, f \,|\, L^{s\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{I}^m) \,\| \;=\; \|(2^{\alpha s}\Delta_\alpha^{\eta\mathtt{i}}(f,x)) \,|\, L_p(\mathbb{I}^m;\ell_q)\|.$$

В докладе будут приведены оценки погрешности на единичных шарах пространств $B^{s\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)$ и $L^{s\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{I}^m)$ двух (линейного и нелинейного) методов приближенного восстановления псевдодифференциальных операторов типа произведения с символами из специальных классов по «конечной» спектральной информации о функции и операторе, а также обсуждены частные случаи, в которых эти оценки будут оптимальными по порядку.

Approximate recovery of pseudo-differential operators

D. B. Bazarkhanov

IM&MM, Almaty, Kazakhstan
dauren.mirza@gmail.com

О равносходимости разложений в тройной тригонометрический ряд и интеграл Фурье

И. Л. Блошанский, Д. А. Графов

Московский государственный областной университет, Москва, Россия
ig.bloshn@gmail.com, grafov.den@yandex.ru

Пусть 2π-периодическая (по каждому аргументу) функция $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $\mathbb{T}^N = [-\pi, \pi)^N$, $N \geqslant 2$, разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье: $f(x) \sim \sum c_k e^{ixk}$, и $S_n(x; f)$, $n \in \mathbb{Z}^N_+$, — прямоугольная частичная сумма этого ряда, и пусть функция $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$, $N \geqslant 2$, разложена в кратный интеграл Фурье: $g(x) \sim \int \widehat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$, и $J_\alpha(x; g)$, $\alpha \in \mathbb{R}^N_+$, — собственный интеграл Фурье.

Предположим, что $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^N$ и $g(x) = 0$ вне $\mathbb{T}^N$. Обозначим

$$R_\alpha(x; f) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g),$$

здесь $n = ([\alpha_1], \ldots, [\alpha_N]) \in \mathbb{Z}^N_+$ ($[t]$ - целая часть $t \in \mathbb{R}^1$). В [1] было показано: для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, разность $R_\alpha(x; f) \to 0$ при $\alpha \to \infty$ (т.е $\min\limits_{1 \leqslant s \leqslant N} \alpha_s \to \infty$) почти всюду (п.в.) на $\mathbb{T}^2$, и существует функция $f_0 \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geqslant 3$, такая, что $\overline{\lim\limits_{\alpha \to \infty}} |R_\alpha(x; f_0)| = +\infty$ всюду внутри $\mathbb{T}^N$.

Как известно, в классах L_p, $p > 1$, подпоследовательности частичных сумм кратного ряда Фурье, у которых некоторые компоненты вектора n являются элементами лакунарных [1] последовательностей, обладают лучшими свойствами сходимости п.в. по сравнению со всей последовательностью $S_n(x; f)$. Возникает вопрос, как ведет себя разность $R_\alpha(x; f)$, $N \geqslant 3$, если некоторые компоненты α_j вектора α являются элементами «лакунарных» последовательностей.

Определение. *Вещественная последовательность $\{\alpha^{(\lambda)}\}$, $\alpha^{(\lambda)} \in \mathbb{R}^1_+$, $\lambda = 1, 2, \ldots$, называется лакунарной, если последовательность натуральных чисел $\{n^{(\lambda)}\}$, $n^{(\lambda)} = [\alpha^{(\lambda)}]$, является лакунарной.*

Пусть $\Omega_{x_s\, x_t} \subset [-\pi, \pi)^2$ — произвольное (непустое) открытое множество в плоскости $(x_s,\, x_t)$, $1 \leqslant s < t \leqslant 3$. Обозначим

$$W_{x_s\, x_t} = \Omega_{x_s\, x_t} \times [-\pi, \pi). \tag{1}$$

Теорема 1. *Для любой вещественной лакунарной последовательности $\{\alpha_3^{(\lambda_3)}\}$, $\alpha_3^{(\lambda_3)} \in \mathbb{R}^1_+$, $\lambda_3 = 1, 2, \ldots$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^3)$,*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-01-00321.

[1] Последовательность $\{k^{(\lambda)}\}$, $k^{(\lambda)} \in \mathbb{Z}^1_+$, называется лакунарной, если $k^{(\lambda+1)}/k^{(\lambda)} \geqslant q > 1$, $\lambda = 1, 2, \ldots$.

$p > 1$, $f(x) = 0$ *на* $W_{x_1\,x_2}$,

$$\lim_{\alpha_1,\alpha_2,\lambda_3\to\infty} R_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3^{(\lambda_3)}}(x;f) = 0 \text{ почти всюду на } W_{x_1\,x_2}.$$

Результат теоремы 1 показывает, что если в трехмерном случае одна из компонент α_s $(1 \leqslant s \leqslant 3)$ «номера» $\alpha \in \mathbb{R}^3_+$ является вещественной лакунарной последовательностью, а функция $f(x)$ из класса $L_p(\mathbb{T}^3)$, $p > 1$, равна нулю на $W_{x_k x_l}$, $k, l \neq s$, то на этом «бруске» $W_{x_k x_l}$ имеет место равносходимость п.в. разложений функции f в тройной тригонометрический ряд и интеграл Фурье.

Следующие теоремы показывают, что теорема 1 не может быть усилена.

Теорема 2. *Существуют множество* $W_{x_1\,x_2}$ *вида* (1) *и функция* $f \in L_\infty(\mathbb{T}^3)$ *такие, что* $f(x) = 0$ *на* $W_{x_1\,x_2}$ *и для любой последовательности* $\{\alpha_3^{(\nu_3)}\}$, $\alpha_3^{(\nu_3)} \in \mathbb{R}^1_+$, $\alpha_3^{(\nu_3)} \to \infty$ *при* $\nu_3 \to \infty$,

$$\overline{\lim_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\nu_3\to\infty}} |R_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3^{(\nu_3)}}(x;f)| = +\infty \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^3 \setminus W_{x_1\,x_2}.$$

Теорема 3. *Существуют функции* $g(x)$ *и* $f(x)$, $g \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$, $f \in L_\infty(\mathbb{T}^3)$, $g(x) = f(x)$ *при* $x \in \mathbb{T}^3$, *такие, что для любой последовательности* $\{\alpha_3^{(\nu_3)}\}$, $\alpha_3^{(\nu_3)} \in \mathbb{R}^1_+$, $\alpha_3^{(\nu_3)} \to \infty$ *при* $\nu_3 \to \infty$,

1. $$\lim_{n_1,\,n_2,\,n_3\to\infty} S_{n_1,\,n_2,\,n_3}(x;f) = f(x) \text{ в каждой точке } \mathbb{T}^3,$$

2. $$\overline{\lim_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\nu_3\to\infty}} |J_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3^{(\nu_3)}}(x;g)| = +\infty \text{ всюду внутри } \mathbb{T}^3.$$

Заметим, что как в теореме 2, так и в теореме 3 последовательность $\{\alpha_3^{(\nu_3)}\}$ может быть лакунарной.

Литература

1. *Блошанский И. Л.* О равносходимости разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье // Матем. заметки. — 1975. — Т. 18, № 2. — С. 153–168.

Equiconvergence of expansions in the triple trigonometric Fourier series and integral

I. L. Bloshanskii, D. A. Grafov

Moscow State Regional University, Moscow, Russia
ig.bloshn@gmail.com, grafov.den@yandex.ru

О представлении полиномами функций на полукольце

Е. М. Вечтомов

Вятский государственный гуманитарный университет, Киров, Россия
vecht@mail.ru

Найдены все полукольца S, для которых любая функция $S \to S$ может быть представлена обобщенным полиномом над S от одной переменной.

Полукольцом называется такая алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, что сложение ассоциативно и коммутативно, умножение ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Если полукольцо S имеет нейтральный элемент 0 по сложению ($\forall a \in S \quad a + 0 = 0 + a = a$), являющийся мультипликативным нулем ($\forall a \in S \; a0 = 0a = 0$), то S называется *полукольцом с нулем*. Полукольцо с коммутативным умножением само называется *коммутативным*. Если полукольцо S обладает нейтральным элементом 1 по умножению, то S называется *полукольцом с единицей*. Заметим, что ассоциативные кольца являются полукольцами с нулем.

Для произвольного полукольца S обозначим через $S^*[x_1, \ldots, x_n]$ подполукольцо в полукольце S^{S^n} всех функций $S^n \to S$ с поточечными операциями, порожденное множеством $S \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$. При этом элементы $a \in S$ отождествляются с константами $S^n \to \{a\}$, а независимые переменные $x_1, \ldots, x_n$ рассматриваются как i-е проектирования, то есть $x_i(a_1, \ldots, a_n) = a_i$ при любых $a_1, \ldots, a_n \in S$ (для $i = 1, \ldots, n$). Функции из полукольца $S^*[x_1, \ldots, x_n]$ будем называть *полиномиальными* от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Полукольцо S назовем *функционально полным*, если $S^S = S^*[x]$, то есть всякая функция $S \to S$ полиномиальная.

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Любое функционально полное полукольцо является конечным кольцом.*

В доказательстве теоремы основным пунктом является доказательство того, что функционально полные полукольца обладают нулем.

Пусть S – конечное полукольцо с нулем 0 и с единицей 1, и $a \in S$. Обозначим через ϵ_a такое отображение $S \to S$, что $\epsilon_a(a) = 1$ и $\epsilon_a = 0$ на множестве $S \setminus \{a\}$.

Лемма 1. *Для любого конечного полукольца S с 0 и 1 всякая функция $S^n \to S, \quad n \in N$, представима однородным полиномом n-ой степени от переменных $\epsilon_a, \; a \in S$, с коэффициентами из S.*

Предложение 1. *Для всякого функционально полного полукольца S с единицей 1 имеет место равенство $S^{S^n} = S^*[x_1, \ldots, x_n]$ для любого натурального числа n.*

Работа выполнена при поддержке темплана ВятГГУ 2012 г., проект №1.1.05.

Предложение 2. *Если полукольцо S удовлетворяет равенству $S^{S^n} = S^*[x_1, \ldots, x_n]$ для некоторого натурального числа n, то S функционально полно.*

Теорема 2. *Произвольное полукольцо S функционально полно тогда и только тогда, когда S либо одноэлементное, либо двухэлементное кольцо с нулевым умножением, либо изоморфно полному матричному кольцу $M_n(\boldsymbol{F}_q)$ над конечным полем $\boldsymbol{F}_q$.*

Отметим, что для коммутативных полуколец с нулем эта теорема получена автором ранее.

Следствие 1. [1]. *Нетривиальное кольцо функционально полно тогда и только тогда, когда оно изоморфно кольцу $M_n(\boldsymbol{F}_q)$ для подходящих (однозначно определенных) натуральных чисел n и $q = p^m$.*

Следствие 2. *Любая функция $f : \mathbf{F}_q^n \to \mathbf{F}_q$ представима в виде полинома*

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\nolimits_{\alpha_1, \ldots \alpha_n} f(a_1, \ldots, a_n) \prod\nolimits_{i=1}^{n} (1 - (x_i - a_i)^{q-1})) = h.$$

При $n = 1$ полином h совпадает с интерполяционным полиномом Лагранжа, заданным элементами $a \in \mathbf{F}_q$ и соответствующими значениями $f(a)$ исходной функции f.

Литература

1. *Werner H.* Einfuhrung in die allegemeine Algebra. — Mannheim, Wien, Zurich: Bibliographisches Institut, 1978.

About representation with polynomials of functions on a semiring

E. M. Vechtomov

Vyatka State Humanities University, Kirov, Russia
vecht@mail.ru

Устойчивость орторекурсивных разложений по системе подпространств

В. В. Галатенко, Т. П. Лукашенко, В. А. Садовничий

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
vvgalatenko@yahoo.com, lukashenko@mail.ru, rector@rector.msu.ru

Орторекурсивные разложения по системе подпространств [1] могут быть определены следующим образом. Пусть H — пространство со скалярным произведением, $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система замкнутых подпространств H, P_n — оператор ортогонального проектирования на H_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Для элемента $f \in H$ определим индуктивно последовательности разлагающих элементов $\left\{\widetilde{f}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ и остатков разложения $\{r_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$. Положим $r_0(f) = f$; если для некоторого n уже определен остаток $r_n(f)$, положим $\widetilde{f}_{n+1} = P_{n+1}(r_n(f))$, $r_{n+1}(f) = r_n(f) - \widetilde{f}_{n+1}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_n$ называется орторекурсивным разложением элемента f по системе подпространств $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Орторекурсивные разложения по системе подпространств представляют собой естественное обобщение орторекурсивных разложений по системе элементов пространства [2]. В частности, если для всех натуральных n подпространство H_n совпадает с линейной оболочной вектора e_n, где $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортогональная система в H, то орторекурсивное разложение по системе подпространств $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ совпадает с разложением в классический ряд Фурье по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Для некоторых систем подпространств $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$, особенно важных для приложений (в том числе, для тактильной механорецепторной диагностики [3]), имеет место абсолютная устойчивость орторекурсивных разложений по этой системе к любому конечному числу ошибок в вычислении разлагающих элементов, то есть для любого натурального N орторекурсивное разложение каждого элемента $f \in H$ по системе подпространств $\{H_{N+n}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к разлагаемому элементу. Абсолютная устойчивость к любому конечному числу ошибок имеет место, в частности, для цепочек вложенных подпространств [4, 5], а также для подпространств, порожденных сжатиями и сдвигами функции с ненулевым средним [6]. Оказывается, что, как и в случае орторекурсивных разложений по системе элементов [7], в этом случае имеет место абсолютная устойчивость к более широкому классу ошибок. Для формулировки соответствующего результата определим индуктивно орторекурсивное

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (грант 11.G34.31.0054), Президента РФ (гранты НШ-979.2012.1, НШ-6406.2012.1) и РФФИ (проекты 11-01-00476, 11-01-00321).

разложение по системе подпространств с ошибками в вычислении разлагающих элементов, положив $r_0^e(f) = f$; $\widetilde{f}_{n+1}^e = P_{n+1}(r_n^e) + \xi_{n+1}$ (где ξ_{n+1} — некоторый вектор H), $r_{n+1}^e(f) = r_n^e(f) - \widetilde{f}_{n+1}^e$.

Теорема. *Если орторекурсивное разложение по системе подпространств $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно устойчиво к любому конечному числу ошибок в вычислении разлагающих элементов и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\| < \infty$, то для каждого $f \in H$ разложение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_n^e$ сходится в точности к f.*

В общем случае условие $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\| < \infty$ не может быть ослаблено, однако при естественном дополнительном ограничении $\xi_n \in H_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) это условие может быть заменено на условие $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|^2 < \infty$.

Литература

1. *Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Орторекурсивные разложения по подпространствам // Докл. РАН. — 2012. — Т. 445, № 2. — С. 135–138.
2. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестник МГУ. Сер. I. — 2001. — № 1. — С. 6–10.
3. *Соколов М. Э., Галатенко В. В., Бармин В. А.* Алгоритм для механорецепторного определения паталогического очага в легочной ткани // Интеграл. — 2012. — № 2 (64). — С. 12–15.
4. *Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О рекурсивных разложениях по цепочке систем // Докл. РАН. — 2009. — Т. 425, № 6. — С. 741–746.
5. *Словеснов А. В.* Рекурсивные разложения по цепочке подпространств // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, № 3. — С. 205–226.
6. *Политов А. В.* Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестник МГУ. Сер. I. — 2010. — № 1. — С. 3–7.
7. *Галатенко В. В.* Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т. 69, № 1. — С. 3–16.

Stability of orthorecursive expansions in a system of subspaces

V. V. Galatenko, T. P. Lukashenko, V. A. Sadovnichy

M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
vvgalatenko@yahoo.com, lukashenko@mail.ru, rector@rector.msu.ru

Модификации функций и коэффициенты Фурье

М. Г. Григорян

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения
gmarting@ysu.am

В докладе рассматривается поведение коэффициентов Фурье по классическим системам исправленной функции.

Литература

1. *Григорян М. Г.* Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация // Матем. Сборник. — 2012. — Т. 203, № 3. — С. 49–78.

Modifications of functions and Fourier coefficients

M. G. Grigoryan

Yerevan State University, Yerevan, Armenia
gmarting@ysu.am

О выборе пространств при моделировании уравнениями с частными интегралами

А. С. Калитвин, В. А. Калитвин

Липецкий государственный педагогический университет, Липецк, Россия
kalitvinas@mail.ru, kalitvin@gmail.ru

1. В [1] рассмотрены приложения уравнений вида

$$\lambda x = Kx + f \tag{1}$$

к изучению математических моделей механики сплошных сред, теории упругих оболочек и других проблем, где оператор K с частными интегралами определяется равенством

$$(Kx)(t,s)=\int_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+\int\int_D n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \tag{2}$$

в котором $T \subset R^m$, $S \subset R^n$ — компактные множества с непрерывной лебеговой мерой, $D = T \times S$, $t \in T$, $s \in S$, l, m и n — заданные измеримые функции на $D \times T$, $D \times S$ и $D \times D$ соответственно, а интегралы понимаются в смысле Лебега. При этом решения уравнений понимаются в различных смыслах, что приводит к изучению уравнения (1) и оператора (2) в различных пространствах функций.

«Естественными» для операторов с частными интегралами оказались пространства, которые позволяют учитывать свойства $x(t,s)$ по переменной t и переменной s, в частности, пространства $L^p(D)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, пространства $L^{p_1 p_2}(D)$ $(1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant \infty)$, банаховы идеальные пространства (БИП) со смешанной нормой, пространство $C(D)$ — непрерывных на D функций и другие пространства.

Однако, выбор изначально пространства не позволяет найти решения уравнения (1), не принадлежащие выбранному пространству. Например, в [2] приведено однородное линейное интегральное уравнение Вольтерра с частными интегралами и непрерывными ядрами, которое имеет только нулевое суммируемое на D решение и несуммируемое на D решение, принадлежащее $L^p(D)$ при $0 < p < 1$. В связи с этим в работе строятся пространства, содержащие несуммируемые функции, которые могут оказаться решениями уравнения (1).

2. Пусть K — действующий в $F = L^p(D)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ оператор (2) с положительными ядрами. Очевидно, что оператор K не действует в пространстве $E = L^p(D)$ $(0 < p < 1)$.

Предположим, что u_0 — положительная несуммируемая функция из E и $Ku_0 \in E$. Пусть E_{u_0} — множество функций из E, удовлетворяющих почти всюду на D неравенству $|x(t,s)| \leqslant \lambda u_0(t,s)$, где постоянная

Работа поддержана Минобрнауки России, проект №1.4407.2011.

λ зависит от x. E_{u_0} — БИП относительно нормы $\|x\|_{E_{u_0}} = \inf\{\lambda : |x(t,s)| \leqslant \lambda u_0(t,s), x \in E\}$ [1]. Через Z обозначим БИП относительно нормы $\|z\| = \inf\{\|u\|_F + \|v\|_{E_{u_0}} : z = u + v, u \in F, v \in E_{u_0}\}$. Тогда K — действующий в Z непрерывный положительный оператор.

3. Через $|K|$ обозначим оператор (2) с ядрами $|l(t,s,\tau)|$, $|m(t,s,\sigma)|$, $|n(t,s,\tau,\sigma)|$ вместо ядер $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$. В силу [1] оператор (2) действуюет в F и регулярен точно тогда, когда в F действует оператор $|K|$ [1]. Если K — регулярный оператор в F и $|K|u_0 \in E$, то K — регулярный оператор в БИП Z.

4. С применением интерполяционных теорем строятся семейства пространств, «естественных» для оператора (2) и уравнения (1).

Пусть $1 \leqslant p_i, q_i \leqslant \infty$ и оператор K действует из $L^{p_i}(D)$ в $L^{q_i}(D)$ $(i = 0, 1)$. По теореме М. Рисса оператор K действует из $L^p(D)$ в $L^q(D)$, где $1/p = \gamma/p_0 + (1-\gamma)/p_1,\ 1/q = \gamma/q_0 + (1-\gamma)/q_1, gamma \in (0,1)$.

Если теперь u_0 и u_1 — положительные несуммируемые функции из $L^{a_0}(D)$ и из $L^{a_1}(D)$ соответственно и $|K|u_0 \in L^{b_0}(D)$, $|K|u_1 \in L^{b_1}(D)$, где $0 < a_0, a_1, b_0, b_1 < 1$, то оператор $|K|$ действует из БИП $X = E_{u_0}(D) + E_{u_1}(D)$ в БИП $Y = E_{|K|u_0}(D) + E_{|K|u_1}(D)$, где БИП $E_{u_0}(D), E_{u_1}(D), E_{|K|u_0}(D)$ и $E_{|K|u_1}(D)$ определяются аналогично БИП E_{u_0}. Следовательно, оператор K действует из суммы пространств $L^p(D)$ и X в сумму пространств $L^q(D)$ и Y и непрерывен.

Литература

1. *Калитвин А. С.* Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.
2. *Калитвин А. С.* Об операторах и уравнениях Вольтерра с частными интегралами. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2012. — Воронеж: ВГУ, 2012. — С. 91–94.

On the spaces selection for modeling by equations with partial integrals

A. S. Kalitvin, V. A. Kalitvin

Lipetsk state pedagogical university, Lipetsk, Russia
kalitvinas@mail.ru, kalitvin@gmail.ru

Новые примеры функций Помпейю

Г. А. Калябин

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
gennadiy.kalyabin@gmail.com

А. Кёпке был первым, кто в 1887-89 построил строго возрастающую, всюду дифференцируемую на $I := [0, 1]$ функцию $f(x)$, производная которой обращается в 0 на всюду плотном подмножестве этого отрезка. Позже (1906) румынский математик Димúтрие Помпéйю, ученик Анри Пуанкаре, привел более простой пример [1] такой функции с **ограниченной** производной.

В дальнейшем, в работах А. Данжуа [2], А. Брукнера [3] и других, этому классу функций было усвоено название функций Помпéйю. В русско-язычной математической литературе пример Помпéйю впервые появился, по-видимому, в последнем издании известного сборника [4] (задача 3.11).

Автор доклада впервые увидел эту книгу в конце марта 2012. С научным направлением «функции Помпéйю» не были знакомы и математики Евразийского Национального Университета (г. Астана, РК) М. Отелбаев и Е. Нурсултанов, которые в августе 2011 сформулировали (как нерешенный) вопрос о существовании таких функций.

Нашей целью является построение *новых* примеров функций Помпéйю, более конструктивных и обеспечивающих равенство 0 производной на *произвольно заданном* счетном множестве.

Теорема 1. *Пусть γ_k — последовательность положительных чисел такая, что $\gamma_{k+1} > \gamma_k + \varepsilon_0, \varepsilon_0 > 0$. Пусть $X := \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$— произвольное счетное множество, плотное на I.*

Тогда функция $\varphi : I \to I$, задаваемая формулой:

$$\varphi(x) := \inf_{k \in \mathbb{N}} |x - x_k|^{1/\gamma_k}, \tag{1}$$

обладает свойствами:
(i) $\varphi(x_k) = 0$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$,
(ii) $\varphi(x) > 0$ *при почти всех* $x \in I$,
(iii) $\varphi(\cdot)$ *полунепрерывна сверху на* I,
(iv) $\varphi(\cdot)$ *непрерывна в точке* $x \in I$ *тогда и только тогда, когда* $varphi(x) = 0$*; в остальных точках* $\varphi(\cdot)$ *имеет разрыв второго рода.*
(v) *любая точка отрезка* I *есть точка Лебега функции* $\varphi(\cdot)$,
(vi) *следовательно, при всех* $x \in I \varphi(x)$ *является производной своего неопределенного интеграла Лебега*:

$$f(x) := \int_0^x \varphi(t)\, dt; \quad f'(x) = \varphi(x), \forall x \in I. \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-01-00744.

Определения упоминаемых в теореме 1 понятий «полунепрерывность сверху», «точка Лебега», можно найти в [5](гл. IX и XIV).

Замечание 1. Как показал еще сам Помпейю, если множество нулей производной $\varphi(x)$ везде дифференцируемой и строго возрастающей на I функции $f(x)$ всюду плотно на I, то оно обязательно имеет мощность континуума. Поэтому интерес представляет следующее уточнение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $Y := \{y_m\}_{m=1}^{\infty}$*– другое счетное множество, дизъюнктное со счетным множеством* X*; тогда существует такая функция Помпейю* $f(\cdot)$*, что* $f'(x) = 0,\ x \in X; f'(x) > 0,\ x \in Y$.

Мой дорогой учитель Лев Дмитриевич Кудрявцев во время доклада автора на Семинаре по теории функций МИАН в ноябре 2011, в котором описывались достаточно громоздкие функции с аналогичными свойствами, высказал пожелание о построения примеров, во-первых, более простых, а во-вторых, имеющих короткое и прозрачное доказательство (полные доказательства теорем 1 и 2 сейчас занимают вместе менее трех страниц).

Светлая память о Льве Дмитриевиче Кудрявцеве да сохранится в сердцах всех, знавших его!

Литература

1. *Pompeiu D.* Sur les fonctions dérivées // Math. Ann. 1906, **B. 63**. — P. 326–332.
2. *Denjoy A.* Sur les fonctions dérivées sommable // Bull. Soc. Math. France. 1915, **V. 43**. — P. 161– 248.
3. *Bruckner A.* Differentiation of Real Functions // Lecture Notes Math. 659 Springer Verlag, 1978.
4. *Макаров Б.М., Голузина М.Г, Лодкин А.А., Подкорытов А.Н.* Избранные задачи по вещественному анализу. — СПб., 2004.
5. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.

New examples of Pompeiu functions

G. A. Kalyabin

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
gennadiy.kalyabin@gmail.com

Граничные свойства преобразований Коши некоторых распределений и их приложения в комплексном анализе

Б. А. Кац

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия
katsboris877@gmail.com

Пусть φ есть распределение с компактным носителем S на комплексной плоскости. Его преобразование Коши есть голоморфная в $\overline{\mathbb{C}} \setminus S$ функция $\Phi(z)$, определяемая равенством

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \left\langle \varphi, \frac{1}{\zeta - z} \right\rangle, \tag{1}$$

где φ применяется к ядру Коши $\frac{1}{2\pi i(\zeta - z)}$ при $z \notin S$ как к функции переменной ζ.

Мы исследуем граничные свойства функции Φ на S в следующих предположениях. Пусть S есть замкнутая ориентированная неспрямляемая кривая на комплексной плоскости, а $F(z)$ – голоморфная в $\overline{\mathbb{C}} \setminus S$ и локально интегрируемая в окрестности S функция. Мы отождествляем ее с распределением

$$F : C_0^\infty \ni \omega \mapsto \iint F(\zeta)\omega(\zeta) d\zeta d\overline{\zeta}.$$

Лемма 1. *Если функция F ограничена и $\nu > d(S) - 1$, то*

$$\left| \left\langle \frac{\partial F}{\partial \overline{\zeta}}, \omega \right\rangle \right| \leqslant C\|\omega\|_\nu, \quad \omega \in C_0^\infty,$$

где $\|\cdot\|_\nu$ есть норма в пространстве функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем ν, положительная постоянная C не зависит от ω, а $d(S)$ есть верхняя метрическая размерность множества S (см., напр., [1]).

Эта лемма позволяет продолжить распределение $\frac{\partial F}{\partial \overline{\zeta}}$ до непрерывного функционала в пространствах Гельдера, который порождает семейство распределений вида $\varphi := f \frac{\partial F}{\partial \overline{\zeta}}$, где f пробегает прстранство Гельдера с показателем $\nu > d(S) - 1$.

Теорема 1. *Если функция F имеет граничные значения слева и справа $F^\pm(t)$ во всех точках кривой S, а функция f удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\nu > d(S)/2$, то преобразование Коши Φ построенного выше распределения φ также имеет граничные значения*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 12-01-00636-а, № 12-01-97015-р-поволжье-а.

слева и справа $\Phi^{\pm}(t)$ *во всех точках кривой* S*, причем* $\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = f(t)(F^{+}(t) - F^{-}(t)), \quad t \in S.$

Эта теорема позволяет установить разрешимость так называемой задачи о скачке (см., напр., [2]) на неспрямляемой кривой, улучшив при этом ранее известные условия ее разрешимости [3].

Литература

1. *Колмогоров А. Н, Тихомиров В. М.* $\varepsilon-$энтропия и емкость множеств в функциональных пространствах // УМН. — 1959. — Т. 14. — С. 3–86.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
3. *Кац Б. А.* Краевая задача Римана на неспрямляемой жордановой кривой // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 267, № 4. — С. 789—792.

Boundary properties of Cauchy transforms of certain distributions with applications in complex analysis

B. A. Kats

Kazan Federal University, Kazan, Russia
katsboris877@gmail.com

О скорости сходимости ряда Фурье в каждой точке

Г. Г. Кошелева

МИРЭА, Москва, Россия, gkosheleva@mail.ru

Ранее (см. [1]) автором был построен пример функции класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$, имеющей одинаковую скорость сходимости в каждой точке, и такой, что модули ее коэффициентов Фурье монотонно невозрастают. В данной заметке этот результат обобщается на классы Никольского, у которых определяющий их модуль непрерывности удовлетворяет условиям Бари–Стечкина.

Пусть $T = [-\pi, \pi]$, $t \in T$ и $x = e^{it}$. Через $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ обозначим последовательностей полиномов Рудина–Шапиро. Пусть $\omega(t)$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условиям Бари–Стечкина $(B - S)$, то есть

$$\int_0^u \frac{\omega(t)}{t} d\,t = O(\omega(u)) \quad \text{и} \quad u \int_0^u \frac{\omega(t)}{t^2} d\,t = O(\omega(u))$$

при $u \to {}_{+}0$.

Теорема. *Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условиям $(B - S)$, $\omega(1) \leqslant 1$ и функция*

$$f(t) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \omega(2^{-k}) 2^{-\frac{k}{2}} P_k(e^{it}) e^{i2^k t}.$$

Тогда $f(t) \in H^{\omega}(T)$, модули ее коэффициентов Фурье монотонно невозрастают и функция

$$\varphi(t) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{|f(t) - S_n(f;t)|}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)} \in (0, \infty)$$

при всех $t \in T$.

Литература

1. *Кошелева Г. Г.* Скорость сходимости ряда Фурье в каждой точке // Тезисы докладов 16-й Саратовской зимней школы, Саратов, 2012. — Саратов: Научная книга. — С. 98.

On the rate of convergence of Fourier series at every point

G. G. Kosheleva

MIREA, Moscow, Russia, gkosheleva@mail.ru

О поперечниках классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана

М. Р. Лангаршоев

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан
mukhtor77@mail.ru

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$. Известно [2], что аналитическая в единичном круге $U = \{z\in\mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $z = \rho e^{it}, 0 \leqslant \rho < 1$ принадлежит весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, если $\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho)|f(\rho e^{it})|^q d\rho dt\right)^{1/q} < \infty, 1 \leqslant q \leqslant \infty$, где $\gamma(\rho) \geqslant 0$ – суммируемая на $[0,1]$ функция.

Величина $E_n(f)_{B_{q,\gamma}} = \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}$ называется наилучшим приближением функции $f \in B_{q,\gamma}$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ комплексных полиномов степени $\leqslant n-1$. Гладкость функции $f \in B_{q,\gamma}$ характеризуем обобщенным модулем непрерывности $\Omega_m(f,t)_{2,\gamma} = \left\{\frac{1}{t^m}\int\limits_0^t\cdots\int\limits_0^t \|\Delta^m_{\overline{h}} f(\cdot)\|^2 dh_1\cdots dh_m\right\}^{1/2}$, где $t > 0$; $\overline{h} := (h_1, h_2, \cdots, h_m)$, $\Delta^m_{\overline{h}} = \Delta^1_{h_1}\circ\cdots\circ\Delta^1_{h_m}$. Всюду далее полагаем $\mathcal{B}^{(r)}_{q,\gamma} = \left\{f(z) \in B_{q,\gamma} : \|z^r f^{(r)}\|_{q,\gamma} < \infty\right\}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

В данной работе вводим в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(h) = \sup_{\substack{f\in\mathcal{B}^{(r)}_{2,\gamma} \\ z^r f^{(r)}\neq const}} \frac{2^{m/2}\alpha_{nr}E_n(f)_{2,\gamma}}{\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega^{2/m}_m\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{2,\gamma} dt\right)^{m/2}},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in R_+$ и $\alpha_{n,r} = n(n-1)\cdots(n-r+1)$.

Теорема 1. *Для произвольных $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in R_+$ имеет место равенство*

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(h) = \left\{1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right\}^{-m/2},$$

где $Si(t) = \int\limits_0^t x^{-1}\sin x dx$ – интегральный синус.

Пусть $\Phi(u)$ – произвольная непрерывная возрастающая при $u \geqslant 0$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для любых $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ и $h \in \mathbb{R}_+$ введем следующий класс функций

$$W_m^{(r)}(h,\Phi)=\left\{f\in\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}:\ \left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^{2/m}\left(z^rf^{(r)};t\right)dt\right)^{m/2}\leqslant\Phi(h)\right\}.$$

Также полагаем

$$\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*\overset{def}{=}\left\{1-\frac{\sin t}{t},\text{если } 0\leqslant t\leqslant t_*;\ 1-\frac{\sin t_*}{t_*},\text{если } t\geqslant t_*\right\},$$

где t_* – величина аргумента функции $\sin t/t$, при котором эта функция достигает на $\mathbb{R}_+$ своего наименьшего значения, то есть t_* – минимальный положительный корень уравнения $t=tgt$, $4,49<t_*<4,51$. Пусть $\mathfrak{M}$ – центрально-симметричное подмножество из $B_{2,\gamma}$. Следуя монографии [?], величины $b_n(\mathfrak{M},B_{2,\gamma})$, $d^n(\mathfrak{M},B_{2,\gamma})$, $d_n(\mathfrak{M},B_{2,\gamma})$, $\lambda_n(\mathfrak{M},B_{2,\gamma})$ и $\Pi_n(\mathfrak{M},B_{2\gamma})$ называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n-поперечниками.

Теорема 2. *Если мажоранта $\Phi(h)$ при любом $h\in(0,\pi/n]$ удовлетворяет ограничению*

$$\pi\Phi^{2/m}\left(\frac{\pi}{n}\right)\int\limits_0^{nh}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*dt\leqslant nh(\pi-Si(\pi))\Phi^{2/m}(h),\qquad(1)$$

то имеет место равенство

$$\sigma_n\left(W_m^{(r)}(\Phi,h),B_{2,\gamma}\right)=\frac{1}{\alpha_{nr}}\left\{2\left(1-\frac{Si(\pi)}{\pi}\right)\right\}^{-m/2}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\sigma_n(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n-поперечников. Условию (1) удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(t)=t^{\frac{mSi(\pi)}{\pi-Si(\pi)}}$.

Литература

1. *Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш.* О наилучшем приближение некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана // ДАН России. — 2007. — Т. 412, № 4. — С. 466–469.
2. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. — М.: МГУ, 1976.

On widths classes of analytical functions in weight Bergman's space

M. R. Langarshoev

Tajik national university, Dushanbe, Tajikistan
mukhtor77@mail.ru

Оптимальные вложения обобщенных потенциалов Рисса

А. В. Малышева

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
anamaly@yandex.ru

В данной статье рассматривается пространство потенциалов типа Рисса:

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) = \{u = G * f : f \in E(\mathbb{R}^n)\},$$

где E – перестановочно инвариантное пространство (ПИП), а G – ядра специального вида.

Теория банаховых функциональных пространств, ПИП, в частности, ассоциированных пространств изложена у К. Беннета и Р. Шарпли [1].

Всюду здесь $E = E(\mathbb{R}^n)$ есть ПИП, $E' = E'(\mathbb{R}^n)$ – ассоциированное ПИП, а пространства $\tilde{E} = \tilde{E}(\mathbb{R}_+), \tilde{E}' = \tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$ – их представления Люксембурга.

Мы используем результаты работы М.Л. Гольдмана об оптимальных вложениях потенциалов типа Рисса и типа Бесселя [2], в частности, критерий вложения пространств потенциалов в ПИП, сформулированный в терминах ограниченности оператора типа Харди.

В статье рассмотрен случай, когда в качестве базового пространства E выбраны пространства Лоренца, $1 < p < \infty$, сформулирована теорема об оптимальном вложении пространств обобщенных потенциалов в ПИП. Случай, когда в качестве базового ПИП выступают простанства $L_p(\mathbb{R}^n), 1 \leqslant p < \infty$, подробно описан у М.Л. Гольдмана и О.М. Гусельниковой [3]

Функция $\Phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу монотонных функций $\mathfrak{J}_n$, если для нее выполнены следующие условия:

1) Φ убывает и непрерывна на $(0, \infty)$;

2) $\exists c \in \mathbb{R}_+ : \int\limits_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1}d\rho \leqslant c \cdot \Phi(r)r^n,\ r > 0.$

Потенциалы $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ будем называть обобщенными потенциалами Рисса, при $G(x) \cong \Phi(\rho),\ \rho = |x| \in \mathbb{R}_+$.

Введем функцию $\phi(\tau) = \Phi\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$, где V_n – объем n-мерного единичного шара.

Теорема. Пусть $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$

Пусть $u \geqslant 0$ на $\mathbb{R}_+$, $u \in L_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$, а U определена следующим образом:

$$U(t) = \int\limits_0^t u(s)ds.$$

Положим, что

$$\upsilon(t) = \frac{t^{2p'} u(t) \phi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}, \quad V(t) = \int_0^t \upsilon(\tau) d\tau.$$

Кроме того, пусть

$$B = \sup_{r>0} \left(\int_0^r \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_r^\infty \frac{U^p(t)}{t^{2p} u^{\frac{p}{p'}}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Тогда оптимальное ПИП $X_0(\mathbb{R}^n)$ для вложения $H^G_{\Lambda^p(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$ имеет эквивалентную норму

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w)},$$

где

$$w(t) = \frac{t^{p+p'-1} V(t) \int\limits_t^\infty \tau^{-p'} \upsilon(\tau) d\tau}{\left(V(t) + t^{p'} \int\limits_t^\infty \tau^{-p'} \upsilon(\tau) d\tau \right)^{p+1}}.$$

Литература

1. *C. Bennett, R. Sharpley.* Interpolation of Operators // Pure Appl. Mathem. — 1988. — V. 129. — P. 1-93.
2. *Гольдман М. Л.* Перестановочно инвариантные оболочки обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса // Доклады РАН. — 2008. — Т. 423, № 1. — P. 151–155.
3. *Гольдман М. Л., Гусельникова О. М.* Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и типа Рисса. Часть 1. // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика». — 2011. — № 3. С. 4–16.

Optimal embeddings of Riesz type potentials

A. V. Malysheva

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
anamaly@yandex.ru

Не экстремальные соотношения между нормами высших производных рациональных функций

В. Р. Мисюк

Гроденский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь, misiuk@grsu.by, vmisuk@gmail.com

Пусть m_2 — плоская мера Лебега в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а E — m_2–измеримое множество в $\mathbb{C}$. Для $0 < p \leqslant \infty$ через $L_p(E)$ обозначим пространство Лебега комплексных функций f на E относительно плоской меры Лебега с обычной квазинормой $\|f\|_{L_p(E)}$ (нормой при $1 \leqslant p \leqslant \infty$). Именно, $f \in L_p(E)$, если

$$\|f\|_{L_p(E)} := \left(\int\limits_E |f(z)|^p \, dm_2(z)\right)^{1/p} < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(E)} := ess\sup_{z\in E} |f(z)| < \infty.$$

Как известно [1], для ограниченной на E рациональной функции r степени n имеем хорошо известное неравенство Е.П. Долженко

$$\int\limits_E |r'(z)|^2 \, dm_2(z) \leqslant \pi \, n \, \|r\|^2_{L_\infty(E)} \,. \tag{1}$$

Нами проведено обобщение неравенства (1) на пространства L_p и на высшие производные.

Теорема. *Пусть $0 < p \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{N}$ и $1/q > s/2 + 1/p$. Если r — рациональная функция степени n, принадлежащая $L_p(E)$, то* $|r^{(s)}\|_{L_q(E)} \leqslant c \, n^{\frac{s}{2}} \, \|r\|_{L_p(E)}$, где $c = c_1(s, p, q) \, [m_2(E)]^{\frac{1}{q} - \left(\frac{s}{2} + \frac{1}{p}\right)}$.

Литература

1. *Долженко Е. П.* Рациональная аппроксимация и граничные свойства аналитических функций // Матем. сб. — 1966. — Т. 69, № 4. — С. 498–524.

Not extremal relations between the norms of higher derivatives of rational functions

V. R. Misiuk

Grodensky State University named Yanka Kupala Grodno, Belarus misiuk@grsu.by, vmisuk@gmail.com

Работа выполнена при финансовой ГПНИ «Конвергенция».

Фреймовые свойства части системы экспонент в весовых классах Харди

Т. Р. Мурадов

Институт математики и механики НАН, Баку, Азербайджан
togrulmuradov@gmail.com

Рассматривается часть классической системы экспонент, изучается ее фреймовое свойство в весовых классах Харди в случае, когда, вообще говоря, вес может не удовлетворять условию Макенхаупта.

Базисные свойства классической системы экспонент $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z}$ (Z — целые числа) в пространствах Лебега $L_p\left(-\pi,\pi\right)$, $1\leqslant p<+\infty$ хорошо изучены и они освещены в известных монографиях [1]– [4]. Н.К. Бари в своей основополагающей работе [5] поставил вопрос о существовании нормированного базиса в L_2, который не является базисом Рисса. Первый пример показал К.И. Бабенко [6]. Он доказал, что вырождающейся система экспонент $\left\{\ |x|^{\alpha}\, e^{int}\right\}_{n\in Z}$ for $|\alpha|<\frac{1}{2}$ образует базис в $L_2\left(-\pi,\pi\right)$, но не является базисом Рисса при $\alpha\neq 0$. Эти результаты обобщил В.Ф. Гапошкин. Базисные свойства вырождающейся системы экспонент тесно связаны с аналогичными свойствами обычной системы экспонент в соответствующем весовом пространстве. Во всех перечисленных работах рассматриваются случаи, когда весь или же вырождающийся коэффициент удовлетворяет условию Макенхоупта (см. напр. [7]). Следует отметить, что эти соображения верны и относительно систем синусов и косинусов.

Следует отметить, что решение многих задач математической физики и механики методом Фурье требует изучение фреймовых свойств систем вида $\left\{\sin\left[\left(n+\beta\right)x+\gamma\right]\right\}_{n\in N}$ (N — натуральные числа) в весовых пространствах функций. Этот вопрос тесно связан с изучением аналогичного вопроса относительно системы экспонент $\left\{e^{i(n+\beta\, signn)t}\right\}_{n\in Z}$. Одним из методов изучения базисных свойств этой системы является метод краевой задачи теории аналитических функций. Этот метод требует изучения подобных свойств части рассматриваемой системы в весовых классах Харди. Настоящая работа посвящена изучению фреймовых свойств «половины» этой системы в весовых классах Харди.

Теорема 1. *Пусть имеют место неравенства*

$$-1<\alpha_0<p-1$$

Тогда система экспонент $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z_+}$ *образует базис в* ${}_{-1}L^{-}_{p,\rho}$, $1<p<+\infty$.

Работа выполнена при поддержке Фонда Науки Государственной Нефтяной Компании Азербайджанской Республики.

Литература

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, т. 1. — М.: Мир, 1965.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, т.2. — М.: Мир, 1965.
3. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. — М.: Мир, 1985.
4. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. — М.: Мир, 1985.
5. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.
6. *Бабенко К. И.* О сопряженных функциях // ДАН СССР. — 1948. — Т. 62, № 2. — С. 157–160.
7. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир, 1984.

Frame properties of a part of the system of exponents in Hardy weighted classes

T. R. Muradov

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS, Baku, Azerbaijan
togrulmuradov@gmail.com

Алгоритмическое доказательство теоремы об ограниченной обратимости: достижения и проблемы

С. Я. Новиков

Самарский Государственный Университет , Самара, Россия
nvks@samsu.ru

Spielman и Srivastava в [1] построили алгоритмическое доказательство теоремы Бургейна–Цафрири [2] об ограниченной обратимости. Современная формулировка этой теоремы такова.

Теорема. *Для каждого $\varepsilon > 0$, любого натурального числа n, и для произвольного линейного оператора $L:\ \ell_2^n \to \ell_2^n$ с $\|Le_i\| = 1$ для базиса ортов $\{e_i\}_{i=1}^n$, существует подмножество $\sigma \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ мощности*

$$|\sigma| \geqslant \varepsilon^2 \frac{n}{\|L\|^2}$$

такое, что для всех скаляров $\{a_i\}_{i\in\sigma}$ имеем

$$\left\|\sum_{i\in\sigma} a_i L e_i\right\|^2 \geqslant (1-\varepsilon)^2 \sum_{i\in\sigma} |a_i|^2.$$

Оригинальное доказательство теоремы использовало вероятностные методы и появление алгоритмического доказательства оказалось неожиданным. Создалось впечатление, что открыта дорога к решению многих давно стоящих проблем, в частности, к поставленной в 1959 году проблеме Кадисона-Зингера [3], имеющей к настоящему времени несколько десятков эквивалентных переформулировок.

Вот одна из них, близкая к теореме

Гипотеза. *Существует абсолютная константа $A > 0$ такая, что для каждого $B > 1$ найдется натуральное число $r = r(B)$, определяющее количество подмножеств следующего разбиения: для каждого натурального n и произвольного линейного оператора $L:\ \ell_2^n \to \ell_2^n$ с $\|L\| \leqslant B$ и $\|Le_i\| = 1$ для базиса ортов $\{e_i\}_{i=1}^n$, существует разбиение $\{A_j\}_{j=1}^r$, множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что для всех $j = 1, 2, \ldots, r$ и произвольных скаляров $\{a_i\}_{i\in A_j}$ имеем*

$$\left\|\sum_{i\in A_j} a_i L e_i\right\|^2 \geqslant A \sum_{i\in A_j} |a_i|^2.$$

Однако прошедшие со времени появления препринта [1] годы показали, что понадобится еще немало усилий для их решения.

Анализ работ Р. Вершинина [4], P. Casazza, G. Pfander [5], [6] показывает, что удалось, и что не удается получить после [1].

Литература

1. *Spielman D. A., Srivastava N.* An Elementary Proof of the Restricted Invertibility Theorem // Israel Journal of Mathematics. — 2012. — Vol. 190, № 1. — P. 83–91.
2. *Bourgain J., Tzafriri L.* Invertibility of Large Submatrices... // Israel Journal of Mathematics. — 1987. — Vol. 57. — P. 137–224.
3. *Kadison B., Singer I.* Extensions of Pure States // American Journal of Mathematics. — 1959. — Vol. 81. — P. 383–400.
4. *Vershynin R.* Coordinate Restrictions of Linear Operators on ℓ_2^n // `http://arxiv.org/abs/math/0011232`. — 2000.
5. *Casazza P., Pfander G.* Infinite dimensional restricted Invertibility // Journal of Functional Analysis. — 2012. — Vol. 263, № 12. — P. 3784–3803.
6. *Casazza P., Pfander G.* Analyzing the Algorithm for proving the restricted Invertibility Theorem // Preprint submitted to Elsevier, 2012.

Algorithm for proving the restricted invertibility theorem: progress and problems

S. Ya. Novikov

Samara State University , Samara, Russia
nvks@samsu.ru

Весовое неравенство Харди и осцилляторность полулинейного дифференциального уравнения второго порядка

Р. Ойнаров

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан, o_ryskul@mail.ru

В последнее более полувека многими авторами исследовано весовое неравенство Харди

$$\left(\int_0^\infty w(x)\left(\int_0^x f(s)ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\int_0^\infty \rho(t)f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \geqslant 0,$$

где w–неотрицательная, а ρ–положительная измеримые на $(0,\infty)$ функций.

Сводку полученных результатов и историю вопроса можно найти в [1]. Однако точное значение наилучшей постоянной $C > 0$ в (1) известно только, когда $p = q$ и w, ρ–степенные функции (см. [2, Теорема, с. 330]).

Здесь рассматривается неравенство (1) в случае $1 < p = q < \infty$ и $w(x) = \frac{u(x)}{(x+\omega)^p}$, где $\omega > 0$ и функции u, ρ удовлетворяют условиям: функций u, $\rho^{1-p'}$, $p' = \frac{p}{p-1}$ принадлежат $L_1(0,t)$, $t > 0$ и

$$\frac{1}{k}\int_0^{k\omega} \rho^{1-p'}(s)ds = \int_0^{\omega} \rho^{1-p'}(s)ds, \quad \frac{1}{k}\int_0^{k\omega} u(t)dt = \int_0^{\omega} u(t)dt > 0 \qquad (2)$$

для всех $k \geqslant 1$.

Очевидно, что условию (2) удовлетворяют периодические функции с периодом ω и постоянная функция.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и функции u, ρ удовлетворяют условию (2). Тогда для любого $l \geqslant 1$ выполнено неравенство*

$$\int_0^\infty u(x)\left(\frac{1}{x+l\omega}\int_0^x f(s)ds\right)^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p M_p \int_0^\infty \rho(t)f^p(t)dt, \quad f \geqslant 0,$$

где $M_p = \left(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega u(x)dx\right)\left(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \rho^{1-p'}(t)dt\right)^{p-1}$, *при этом постоянная* $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p M_p$ *наилучшая из возможных.*

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК, Грант № 1529/ГФ.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\left(\rho(x)|y'|^{p-2}y'\right)' + \mu\frac{u(x)}{x^p}|y|^{p-2}y = 0, \quad x > 0. \tag{3}$$

На основании Теоремы 1 имеем

Теорема 2. *Пусть выполнено условие Теоремы 1. Тогда уравнение (3) при $x = \infty$ (i)осцилляторно тогда и только тогда, когда $\mu > \left(\frac{p-1}{p}\right)^p M_p^{-1}$; (ii)неосцилляторно тогда и только тогда, когда $\mu \leqslant \left(\frac{p-1}{p}\right)^p M_p^{-1}$.*

Отметим, что когда функции u, ρ периодические с периодом ω, утверждение Теоремы 2, за исключением случая равенства, получено К.М. Шмидтом [3] при $p = 2$ и П. Хасилом [4] при $1 < p < \infty$. Но в обоих работах случай $\mu = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p M_p^{-1}$ отмечен как открытая проблема.

Литература

1. *Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E.* The Hardy Inequality. About its History and Some Related Result. — Pilzen: Vydavatelsky Servis Publishing House, 2007. — 162 p.
2. *Харди Г. Г., Литлвуд Д. Е.,Полиа Г.* Неравенства. — М.: КомКнига, 2006.
3. *Schmidt K. M.* Oscillation of the perturbed Hill equation and the lower spectrum of radially periodic Schrodinger operators in the plane // Proc. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 127. — P. 2367–2374.
4. *Hasil P.* Conditional oscillation of Half-linear differential equations with periodic coefficients // Arch. Math (BRNO). — 2008. — Vol. 44. — P. 119–131.

Weighted Hardy inequality and oscillation of half–linear second order differential equation

R. Oinarov

L. N. Gumilev Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
o_ryskul@mail.ru

О рядах фурье по нагруженным полиномам

Б. П. Осиленкер

Современная гуманитарная академия

Пусть S — нагруженное пространство со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)w(x)dx + \sum_{j=1}^{m} M_j f(x_j)g(x_j),$$

где $w(x)$ — положительная почти всюду весовая функция, $M_j > 0, x_j \in [a,b](j = 1, 2, ..., m)$. С помощью процесса ортогонализации Грама - Шмидта построим последовательность ортонормированных полиномов $q_n(x)\,(n = 0, 1, 2, ..) : \langle q_n, q_m\rangle = \delta_{nm}$.

Пространство S и полиномиальная система $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ в последние годы привлекают внимание многих исследователей, так как они используются в изучении задачи Штурма- Лиувилля с параметром в граничном условии, нагруженных интегральных уравнений и механических систем с сосредоточенными нагрузками. Одной из особенностей нагруженных систем является их поведение в точках $\{x_j\}_{j=1}^{m}$. Кроме того, в отличие от классических систем ортогональных полиномов их нагруженные аналоги в большинстве случаев являются собственными функциями дифференциальных операторов бесконечного порядка.

Каждой функции $f \in L_w^1[-1; 1]$, для которой существуют коэффициенты Фурье

$$c_k = \langle f, q_k\rangle = \int\limits_a^b f(x)q_k(x)w(x)dx + \sum_{j=1}^{m} M_j f(x_j)q_k(x_j),\ (k = 0, 1, 2, ...)$$

поставим в соответствие ряд Фурье по системе $\{q_n\}$:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k q_k(x)$$

В докладе будут изложены результаты о сходимости и линейных методах суммирования рядов Фурье по нагруженным ортонормированным полиномам.

Сформулируем полученные результаты на следующем примере.

Рассмотрим ортонормированные нагруженные полиномы Якоби $P_n^{\alpha,\beta;M,N}(x)$, $(n = 0, 1, 2, ...)$ для которых

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta;M,N}(x)P_m^{\alpha,\beta;M,N}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx+$$

$$LP_n^{\alpha,\beta;M,N}(1)P_m^{\alpha,\beta;M,N}(1)+MP_n^{\alpha,\beta;M,N}(-1)P_m^{\alpha,\beta;M,N}(-1)$$
$$=\delta_{nm},(m,n=0,1,2,...)\,(L>0,M>0)$$

Эта система была введена голландским математиком T. Koorwinder (1984 г.) и исследована во многих работах. В частности, было доказано (J. Koekoek, R. Koekoek, 2000 г.), что полиномы $P_m^{\alpha,\beta;M,N}(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению бесконечного порядка, за исключением случая, когда α и β — целые неотрицательные числа , при этом порядок уравнения равен $2\alpha+2\beta+6$.

Ряд Фурье функции $f\in L^1_{w_{\alpha,\beta}}[-1,1]$, $w_{\alpha,\beta}(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ $(\alpha,\beta>-1)$, по нагруженным полиномам Якоби функции имеет вид

$$f(x)\sim\sum_{m=0}^{\infty}\langle f,P_m^{\alpha,\beta;M,N}\rangle P_m^{\alpha,\beta;M,N}(x), \tag{1}$$

где

$$\langle f,P_m^{\alpha,\beta;M,N}\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)P_m^{\alpha,\beta;M,N}(x)w_{\alpha,\beta}(x)+Lf(1)P_m^{\alpha,\beta;M,N}(1)+$$
$$+Mf(-1)P_m^{\alpha,\beta;M,N}(-1) \tag{2}$$

Частные суммы ряда Фурье (1)–(2):

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)=\sum_{m=0}^{n}\langle f,P_m^{\alpha,\beta;M,N}\rangle P_m^{\alpha,\beta;M,N}(x).$$

Средние Чезаро (C,γ) порядка $\gamma>0$:

$$\delta_n^{(\gamma)}(f;x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{A_{n-m}^{\gamma}}{A_n^{\gamma}}\langle f,P_m^{\alpha,\beta;M,N}\rangle P_m^{\alpha,\beta;M,N}(x)$$

Теорема 1. *Пусть непрерывная функция f удовлетворяет условию Дини - Липшица на промежутке $[-1,1]$, тогда равномерно на каждом компакте $K\subset(-1,1)$ для ряда Фурье (1)–(2) функции выполняется*

$$\lim_{n\to\infty}S_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)=f(x)$$

Теорема 2. *Для непрерывной на $[-1,1]$ функции f имеет место соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}S_n^{(\alpha,\beta)}(f;1)=f(1),$$

при этом выполняется оценка

$$|f(1) - S_n^{(\alpha,\beta)}(f;1)| \leqslant C(\alpha,\beta;L,M)E_n(f),$$

где $E_n(f)$ — *наилучшее равномерное приближение на* $[-1,1]$ *функции* f *полиномами степени не выше* n, *постоянная* $C(\alpha,\beta;L,M) > 0$ *не зависит от* n.

Теорема 3. *Пусть для функции* $f \in L^1_{w_{\alpha,\beta}}(K)\,(K \subset (-1,1)$ — *компакт) выполняется условие* $f \in L^2_{w_{\alpha,\beta}}([-1,1] \setminus K)$. *Тогда почти всюду в* K *имеет место соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(\gamma)}(f;x) = f(x).$$

Отметим, что в классическом случае ($L = K = 0$) известны утверждения о расходимости ряда Фурье-Гегенбауэра (случай $\alpha = \beta$) для гладких функций f в точке $x = 1$ (В. М. Бадков, 1968 г.) и о несуммируемости в точке $x = 1$ методом Чезаро при $\gamma = \alpha + \dfrac{1}{2}$ (Г. Сегё, Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962).

Обращение преобразования Лапласа только по положительным действительным значениям

А. В. Павлов

МИРЕА, Москва, Россия
login11@umail.ru

Доказана теорема 1, из которой следует быстрая формула обращения преобразования Лапласа только по положительным действительным значениям (следствие 1):

$$\pi^2 S(t) = SIN^0 COS^0 LLS(x)(\cdot)(t), \quad t \in (0, \infty),$$

здесь, по определению,

$$F^0_{\pm} S(x)(\cdot)(v) = \int\limits_0^\infty e^{\pm ixv} S(x) dx, \quad v \in (-\infty, \infty),$$

$$LS(x)(\cdot)(v) = \int\limits_0^\infty e^{-vx} S(x) dx, \quad v \in [0, \infty);$$

$$SIN^0 S(x)(\cdot)(t) = \int\limits_0^\infty \sin tx S(x) dx,$$

$$COS^0 S(x)(\cdot)(t) = \int\limits_0^\infty \cos tx S(x) dx, \quad t \in [0, \infty).$$

$$\Omega S(x)(\cdot)(t) = \int\limits_{-\infty}^\infty (S(x-t)/x) dx, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Формула верна для относительно общего класса функций G теоремы 1, [1].

По определению функция $S(x) \in G$, если

$$S(0) = 0, \quad \int\limits_0^\infty |S(x)| dx < \infty, \quad \int\limits_0^\infty |d^2 S(x)/dx^2| dx < \infty,$$

и $S(p)$ регулярна в части плоскости $|p| > R$ при некотором положительном действительным $R > 0$, причем в этой части плоскости

$$|S(p)| < c/|p|, \quad |p| \to \infty, \quad c = const, \quad c < \infty.$$

Теорема 1.
Если $S(x) \in G$, то

$$LF_0^- S(ix)(\cdot)(t) = (-1/i)LLS(x)(\cdot)(t), \quad t \in (0, \infty),$$

$$F_0^- F_0^+ S(ix)(\cdot)(t) = iF_0^- LS(x)(\cdot)(t), \quad t \in (0, \infty).$$

Непосредственным следствием теоремы 1 является формула обращения преобразования Лапласа только по положительным действительным начениям, сформулированная в следствии 1.

Следствие 1.
Если функция $S(x)$ принадлежит классу G, то

$$\pi S(it) = SIN^0 LS(x)(\cdot)(t), t \in (0, \infty),$$

и для четной функции $S(-x) = S(x_, x \in (-\infty, \infty)$,

$$(\pi)^2 S(t) = SIN^0 COS^0 LLS(x)(\cdot)(t), \quad t \in (0, \infty),$$

Замечание. Условие четности $S(x)$ приведено для облегчения форулировок. От условия регулярности $S(p)$ можно избавиться,оставив в силе остальные условия класса G.

Теорема 2.
Пусть регулярная в некоторой открытой области, содержащей в себе произвольный непустой интервал I действительной оси ,функция $S(p) \in G$ представима в форме $S(p) = S_1(p) + S_2(p)$, где $S_1(p)$ регулярна в верхней части плоскости $Re\, p > 0$, $S_2(p)$ регулярна в нижней части плоскости $Re\, p < 0$; тогда

1. если обе функции непрерывны на всей действительной границе, то $\Omega\Omega S(x)(\cdot)(t) = CS(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, $C = const$;

2. если обе функции непрерывны на I, то из действительности $S(p)$ на I следует, что

$$Re\, S_1(x) = Re\, S_2(x),\ Im\, S_1(x) = -Im\, S_2(x),\ x \in (-\infty, \infty) \cap I,$$

и существует такая функция $s(x)$, $x \in [0, \infty)$, что $S_1(x) = F_0^+ s(t)(\cdot)(x)$, $x \in I$ (ввиду произвольности I существование такой функции $s(x)$ доказывается без использования аппарата решения задач Дирихле с помощью теоремы Римана о продолжении функции через часть действительной границы, [2]), причем обязательно $S_2(x) = F_0^- s(t)(\cdot)(x)$, $x \in I$.

Литература

1. *Павлов А.В.* Преобразование Фурье и формула обращения преобразования Лапласа. — М.: Мат. заметки, 2011. — Т.90, № 5. — С. 793–796.

2. *Lavrentev M. A.,Shabat B. V.* Methods of theory of functions of complex variable. — Moscow: Izd.Sc. — 1987. — 688 p.

The inversion formula of the conversion of Laplace by only the positive values of the real axis

A. V. Pavlov

MIREA, Moscow, Russia
login11@umail.ru

Два подхода к решению задачи векторной томографии.

А. П. Полякова

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
anna.polyakova@ngs.ru

Суть томографических (неразрушающих) методов состоит в многократных измерениях физического поля, "пропущенного" через объект исследования, и в дальнейшей математической обработке и интерпретации результатов. Конечной целью являются как можно более полные сведения о структуре и внутренних свойствах объекта. Наряду со скалярными свойствами объектов искомыми величинами являются векторные и тензорные поля. Математические формулировки задач восстановления векторных и тензорных полей возникли сравнительно недавно. Современные постановки используют аппарат интегральной геометрии векторных и тензорных полей на римановом многообразии [1].

Под термином «задача векторной томографии» в данной работе подразумевается следующая постановка. Пусть некоторая ограниченная область плоскости заполнена средой, с прямолинейным характером распространения лучей. В среде распределено некоторое векторное поле v. По известным продольным и (или) поперечным лучевым преобразованиям требуется найти векторное поле.

Предлагается численное решение задачи восстановления двумерного векторного поля с использованием двух различных алгоритмов. В обоих алгоритмах построение базисных последовательностей векторных полей основано на возможности представления соответствующих полей с использованием потенциалов.

Первый алгоритм основан на методе наименьших квадратов (МНК) с аппроксимирующей последовательностью, построенной с использованием двумерных B-сплайнов. При численной реализации этого алгоритма удалось значительно уменьшить время вычисления образов базисных элементов, пользуясь формулами, предложенными в [2].

Второй алгоритм основан на методе сингулярного разложения (SV-разложения) операторов лучевых преобразований векторных полей с базисами построенными с использованием гармонических функций и классических ортогональных полиномов. Суть метода заключается в том, что оператор представляется в виде ряда по сингулярным числам и базисным элементам в пространстве образов, тогда обратный оператор будет представлять собой ряд со схожей структурой, где задействованы прообразы этих базисных элементов и те же сингулярные числа. Решение задачи в скалярном случае хорошо известно, в то время как разложения операторов лучевых преобразований векторных полей появились сравнительно недавно [3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-07-00447-а, № 12-01-31178, СО РАН, проект № 2012-32.

Проведено всестороннее тестирование разработанных алгоритмов с целью сравнения точностей восстановления векторных полей с их использованием. Исследовано влияние на точность восстановления таких факторов, как гладкость восстанавливаемого векторного поля, уровень и характер шума, внесенного в исходные данные.

Литература

1. *Sharafutdinov V. A.* Integral Geometry of Tensor Fields. — Utrecht: VSP, 1994, 271 p.
2. *Полякова А. П.* О получении аналитических выражений для образов B-сплайнов при преобразовании Радона и их использовании в задачах скалярной томографии // Сиб. электрон. матем. изв. — 2010. — № 7. — С. 248–257.
3. *Derevtsov E. Yu., Efimov A. V., Louis A. K., Schuster T.* Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography // J. Inverse Ill-Posed Problems. — 2011. — Vol. 19, № 4–5. — P. 689–715.

Two approaches to the vector tomography problem.

A. P. Polyakova

Sobolev Institute of Mathematics of the SB RAS, Novosibirsk, Russia
anna.polyakova@ngs.ru

Полугрупповое свойство дробных интегралов и обращение преобразования Радона-Киприянова функций одного переменного и радиальных функций

О. И. Попова

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
olyaa.Popova@yandex.ru

В [1] рассматривалась задача обращения преобразования Радона-Киприянова K_γ для $\gamma \in (0,2)$ функций одного переменного. Здесь сообщается о подобных исследованиях для произвольных $\gamma > 0$. Преобразование Радона-Киприянова K_γ функции f, определенной в R_1, представим в виде $K_\gamma[f](\xi;p) = \int\limits_0^{+\infty} f(x)\mathcal{P}_x^\nu \delta(p - \langle x,\xi\rangle)x^\gamma dx$, где $\mathcal{P}_x^\nu$ оператор Пуассона, действующий по переменной x по формуле $\mathcal{P}_x^\nu f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\gamma/2)\,\Gamma(1/2)} \int\limits_0^\pi f(x\cos\alpha)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$, $\nu = \frac{\gamma-1}{2}$.

Лемма 1. *Пусть $f \in L_1^\gamma(0,\infty)$ финитная функция с носителем $\in \{|x| < a\}$, тогда ее K_γ-преобразование для всех $\gamma > 0$ представляется в виде правостороннего интеграла Римана-Лиувилля*

$$K_\gamma[f](\sqrt{q}\,) = I_{b-}^{\gamma/2} f_1(q)$$

от функции

$$f_1(q) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{2\sqrt{\pi}} f(\sqrt{q}).$$

Как известно (см. [2]), интеграл Римана-Лиувилля обладает полугрупповым свойством $I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$, поэтому утверждение леммы можно представить в виде

$$K_\gamma[f](\sqrt{q}\,) = I_{b-}^{[\gamma/2]} I_{b-}^{\{\gamma/2\}} f_1(q). \tag{1}$$

Также известно, что производная Римана-Лиувилля обращает оператор дробного интегрирования (см. [2]): для любой суммируемой функции ϕ и для любого α с $Re\,\alpha > 0$ справедливо равенство $\mathcal{D}_{b-}^\alpha\, I_{b-}^\alpha \phi = \phi$. Учитывая, что дробная производная тоже обладает полугрупповым свойством, имеем

$$f_1(x) = D^{[\gamma/2]} D_{b-}^{\{\gamma/2\}}\, I_{b-}^{\{\gamma/2\}} I_{b-}^{[\gamma/2]} f_1(x).$$

Тогда, из (1) и правила обращения интегралов целого порядка следует равенство

$$\left(\frac{d}{dp}\right)^l K_\gamma[f](\sqrt{p}) = (I_{b-}^{\{\gamma/2\}} f_1)(p), \quad l = \left[\frac{\gamma}{2}\right] + 1\,. \tag{2}$$

К формуле (2) можно применить формулу обращения интегралов дробного порядка. Тогда

$$f(x) = \frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} D_{b-}^{\{\gamma/2\}} \left(\left(\frac{d}{dp^2} \right)^l K_\gamma[f] \right)(x) \,.$$

Общий результат этих исследований представлен в следующем утверждении.

Теорема 1. *Обращение преобразования Радона-Киприянова K_γ для всех $\gamma > 0$ функции $f \in AC_{ev}([0,a])$ (одного переменного) можно записать в виде дробной производной Римана-Лиувилля.*

$$f(x) = \frac{(-1)^l \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(1 - \{\frac{\gamma}{2}\}\right)} \left(\frac{d}{2x\,dx} \right)^l \int\limits_x^a \frac{K_\gamma[f](t)\ t\,dt}{(t^2 - x^2)^{\{\frac{\gamma}{2}\}}}, \quad l = \left[\frac{\gamma}{2}\right] + 1 \,.$$

Сформулированные выше результаты легко переносятся на функции радиальные в $\mathbb{R}_n$ (т.е. на функции вида $f = f(|x|), x \in R_n$), благодаря формуле, представляющей преобразование Радона-Киприянова, где роль индекса γ играет число $n + \gamma - 1$. Сказанное справедливо и для классического преобразования Радона, поскольку это преобразование радиальной функции сводится к K_γ-преобразованию с $\gamma = n - 1$ одномерных функций (этот результат есть в работе [1] для $n = 2$ и $n = 3$). В этом случае имеют место равенства:

$$K_{n+\gamma-1}[f](\sqrt{p}) = I_{b-}^{[\frac{\gamma+n-1}{2}]} I_{b-}^{\{\frac{\gamma+n-1}{2}\}} f_1(p) \,.$$

Для радиальных функций получены все приведенные выше формулы с заменой индекса γ на индекс $n + \gamma - 1$.

Литература

1. *Ляхов Л. Н.* RK_γ-преобразование с $\gamma \in (0;2]$ весовых сферических средних функций. Соотношение Асгейрсона // ДАН. — 2011. — Т. 439, № 5. — С. 589–592.
2. *Самко С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

Semigroup property of fractional integrals and inverse Radon-Kipriyanov-transform of one-variable function and radial function

O. I. Popova

Voronezh State University, Voronezh, Russia
olyaa.Popova@yandex.ru

Весовые неравенства Харди в смешанных нормах

Д. В. Прохоров*, **В. Д. Степанов**†

* *Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия*
prohorov@as.khb.ru

† *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
vstepanov@sci.pfu.edu.ru

Обозначим через $\mathfrak{M}$ класс всех измеримых по Лебегу на $(0,\infty)$ функций, $\mathfrak{M}^+ := \{f \in \mathfrak{M} : f \geqslant 0\}$. Для измеримого по Лебегу $\Delta \subset (0,\infty)$, $q \in (0,\infty]$, $w \in \mathfrak{M}^+$, $f \in \mathfrak{M}$ положим

$$\|f\|_{L^q_w(\Delta)} := \left(\int_\Delta |f|^q w\right)^{\frac{1}{q}}, \ \|f\|_{L^\infty_w(\Delta)} := \operatorname*{ess\,sup}_{y\in(0,\infty)} w(y)|f(y)|.$$

Обозначим через I, J операторы интегрирования

$$(If)(x) := \int_0^x f, \ \ (Jf)(x) := \int_x^\infty f, \quad x \in (0,\infty), \ f \in \mathfrak{M},$$

и рассмотрим на конусе $\mathfrak{M}^+$ сублинейные операторы

$$(Tf)(x) := \|I(fv)\|_{L^q_w((x,\infty))}, \ \ (\mathcal{T}f)(x) := \|J(fv)\|_{L^q_w((0,x))},$$

$$(Sf)(x) := \|J(fv)\|_{L^q_w((x,\infty))}, \ \ (\mathcal{S}f)(x) := \|I(fv)\|_{L^q_w((0,x))},$$

где $v \in \mathfrak{M}^+$.

В работе характеризуются неравенства вида

$$\|Rf\|_{L^r_u(0,\infty)} \leqslant C\|f\|_{L^p_v(0,\infty)}, \ f \in \mathfrak{M}^+, \tag{1}$$

где $1 \leqslant p < \infty$, $0 < r < \infty$, $u \in \mathfrak{M}^+$, оператор R — один из операторов $T, \mathcal{T}, S, \mathcal{S}$. Данные неравенства условно можно назвать весовыми неравенствами Харди в смешанных нормах. Систематического исследования неравенств (1) не проводилось. Эти неравенства играют важную роль в теории пространств Морри [1, 2]. В работе [3] дается критерий выполнения (1) при $R = \mathcal{T}$. В настоящей работе универсальным методом, отличным от [3], мы решаем аналогичную задачу для всех неравенств (1). Кроме того, мы получаем существенное обобщение результатов из [4] для супремальных операторов, которое также дополняет недавние исследования [5–8].

Работа выполнена при финансовой поддержке ДВО РАН, проекты 12-I-ОМН-01, 12-II-СО-01М-002 и РФФИ, проекты 12-01-00524, 12-01-00554.

Литература

1. *Burenkov V. I., Gogatishvili A., Guliev V. S., Mustafayev R. Ch.* Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010. — Vol. 55, № 8–10. — P. 739–758.
2. *Burenkov V. I., Gogatishvili A., Guliev V. S., Mustafayev R. Ch.* Boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces // Potential Anal. — 2011. — Vol. 35. — P. 67–87.
3. *Gogatishvili A., Mustafayev R. Ch, Persson L.-E.* Some new iterated Hardy type inequalities // J. Function Spaces Appl. — 28 pp. (to appear).
4. *Gogatishvili A., Opic B., Pick L.* Weighted inequalities for Hardy-type operators involving suprema // Collect. Math. — 2006. — Vol. 57, № 3. — P. 227–255.
5. *Prokhorov D. V.* Inequalities for Riemann-Liouville operator involving suprema // Collect. Math. — 2010. — Vol. 61, № 3. — P. 263–276.
6. *Prokhorov D. V.* Lorentz norm inequalities for the Hardy operator involving suprema // Proc. Amer. Math. Soc. — 2012. — Vol. 140, № 5. — P. 1585–1592.
7. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* О супремальных операторах // Докл. АН. — 2011. — Т. 439, № 1. — С. 28–29.
8. *Stepanov V. D.* On a supremum operator. In: Spectral Theory, Function Spaces and Inequalities. New Technique and Recent Trends, Operator Theory: Advances and Applications. — 2012. — V. 219. — P. 233–242.

The weighted Hardy inequalities in mixed norms

D. V. Prokhorov[*], V. D. Stepanov[†]

[*] *Computing centre, Khabarovsk, Russia*
prohorov@as.khb.ru

[†] *Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia*
vstepanov@sci.pfu.edu.ru

Об одном классе тригонометрических рядов

Т. Н. Сабурова

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Москва, Россия
taniasab37@gmail.com

Рассмотрим лакунарный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2^k \pi x. \tag{1}$$

Пусть этот ряд сходится почти всюду к функции $f(x)$. Из теоремы Зигмунда следует (см. [1]), что тогда (1) — ряд Фурье по тригонометрической системе функции $f(x)$, и эта функция принадлежит классу L_2 (более того, она будет принадлежать всем классам L_p при любом $1 \leqslant p < \infty$ (см. [2])).

Рассмотрим далее ряд Фурье этой же функции $f(x)$ по системе Хаара

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \chi_m(x). \tag{2}$$

Он тоже будет почти всюду сходиться к функции $f(x)$.

Поскольку (1) и (2) — ряды Фурье одной и той же функции, то, естественно, поведение коэффициентов этих рядов должно быть взаимосвязанно. Эту связь проясняет следующая теорема:

Теорема 1. *Для того чтобы сходился ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m|}{\sqrt{m}}$.

Замечание 1. *Если ряд* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m|}{\sqrt{m}}$ *сходится, то функция* $f(x)$ *принадлежит так называемому двоичному классу Харди.*

Замечание 2. *Из результатов Ульянова П.Л. (см. [3]) следует, что если* $f(x)$ *принадлежит классу* $H_1^{\omega(\delta)}$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(\frac{1}{n})}{n} < +\infty$, *то* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m|}{\sqrt{m}} < +\infty$.

Замечание 3. *Доказательство Теоремы 1 опирается на ряд результатов, полученных автором ранее для базисов типа Фабера—Шаудера (см. [4]).*

Литература

1. *Zigmund A.* On the convergence of lacunary trigonometric series // FM. — 1930. — № 16. — С. 90–107.
2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М: Физматгиз, 1961.
3. *Ульянов П. Л.* О некоторых свойствах рядов по системе Хаара // Мат. заметки. — 1967. — Т. 1, № 1. — С. 17–24.
4. *Сабурова Т. Н.* О базисах в $C[0,1]$ типа Фабера—Шаудера // Теория функций и приближений: Тр.3–й Сарат.зимней школы. 1986г. — Саратов, 1988. Часть 3. — С. 44–46.

On some trigonometric series

T. N. Saburova

National University of Science and Technology "MISIS", Moscow, Russia
taniasab37@gmail.com

Неравенства разных метрик Никольского и Бернштейна для целых функций экспоненциального типа в пространствах Морри

Е. С. Смаилов

РГКП «Институт прикладной математики» КН МОН РК, Караганда, Казахстан, esmailov@mail.ru

В гармоническом анализе существенную роль играли неравенство С.Н. Бернштейна и неравенство разных метрик С.М. Никольского, установленные в пространствах Лебега для целых функций экспоненциального типа. Благодаря этим неравенствам получили развитие теория приближения в $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, посредством целых функций экспоненциального типа и теория вложения для пространств $H_p^r(\mathbb{R})$, $B_{p\theta}^r(\mathbb{R})$, где $r > 0$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant +\infty$ (см. [1]).

В последнее время бурно развивается теория функциональных пространств Морри, которая находит широкое применение в теории уравнений в частных производных. Поэтому считаем актуальным создать для пространств Морри теорию приближения целыми функциями экспоненциального типа, а затем с помощью аппарата теории приближения сформировать теорию вложения для данных пространств.

Через $\mathfrak{M}_{p,\nu}(\mathbb{R})$ обозначим совокупность целых функций экспоненциального типа $g_\nu \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\nu \geqslant 0$.

Пусть $0 < p \leqslant +\infty$ и $w(\rho)$ – неотрицательная измеримая на $(0, +\infty)$ функция. Множество всех измеримых на $(-\infty, +\infty)$ функций, для которых

$$\|f\|_{\mathcal{M}_p^w(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|w(\rho)\|f\|_{L_p(x-\rho,x+\rho)}\|_{L_\infty(0,\infty)} < \infty,$$

будем называть пространством Морри $\mathcal{M}_p^w(\mathbb{R})$ [2].

Пусть $0 < p \leqslant +\infty$. Через $\Omega_{p,\infty}$ обозначим совокупность неотрицательных, отличных от 0 функций w, измеримых на $(0, +\infty)$ и таких что для некоторого $t > 0$ выполняется

$$\|w(\rho)\|_{L_\infty(t,\infty)} < +\infty, \quad \|w(\rho)\rho^{\frac{1}{p}}\|_{L_\infty(0,t)} < +\infty.$$

Известно, что пространство Морри $\mathcal{M}_p^w(\mathbb{R})$ нетривиально тогда и только тогда, когда $w \in \Omega_{p,\infty}$.

Положим $w_\lambda(\rho) = \begin{cases} \rho^{-\lambda}, & \text{если } \rho \in]0,1], \\ 1, & \text{если } \rho \geqslant 1, \end{cases}$. Тогда для того, чтобы $w_\lambda(\rho) \in \Omega_{p,\infty}$ необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{p}$. В этом случае $\mathcal{M}_p^{w_\lambda}(\Omega) = M_p^\lambda(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < q < +\infty$, $0 \leqslant \eta_0 < \eta < \eta_1 < \frac{1}{p}$, $0 \leqslant \tau_0 < \tau < \tau_1 < \frac{1}{q}$ *и* $0 < \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + (\tau - \eta) < 1$. *Тогда для*

$g_\nu \in \mathfrak{M}_{p,\nu}(\mathbb{R})$ *справедливо неравенство:*

$$\|g_\nu\|_{\mathcal{M}_q^\tau(\mathbb{R})} \leqslant c_{p,q,\eta,\tau} \nu^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+(\tau-\eta)} \|g_\nu\|_{\mathcal{M}_p^\eta(\mathbb{R})}.$$

Здесь сомножитель $c_{p,q,\eta,\tau} > 0$ *зависит лишь от указанных параметров.*

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{p}$. *Тогда для любой целой функции экспоненциального типа* ν *из* $\mathfrak{M}_{p\nu}(\mathbb{R})$ *справедливо неравенство типа неравенства Бернштейна:*

$$\|g'_\nu\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R})} \leqslant \nu \|g_\nu\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R})}.$$

Литература

1. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969.
2. *Kufner A., Jonh O., Fuĉik S.* Function spaces. — Leyden: Noordhoff International Publishing, 1977.

Nikolskii's inequality of different metrics and Bernstein's inequality for entire functions of exponential type in Morrey spaces

E. S. Smailov

RSBSE "Institute of applied mathematics" of the Committee of Science of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan, Karaganda, Kazakhstan, esmailov@mail.ru

Наилучшее приближение тригонометрическими полиномами аналогов классов Никольского–Бесова с логарифмической гладкостью

С. А. Стасюк

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
stasyuk@imath.kiev.ua

Пусть L_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — пространство 2π-периодических функций f с конечной нормой

$$||f||_q = \left((2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^q \, dx\right)^{1/q}, \quad 1 \leqslant q < \infty,$$

$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|.$$

Для $r > 0$, $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ обозначим

$$SB^{0,r}_{p,\theta} := \left\{ f \in L_p : ||f||_{B^{0,r}_{p,\theta}} \leqslant 1 \right\},$$

где

$$||f||_{B^{0,r}_{p,\theta}} := \left(\sum_{s=0}^{\infty} ((s+1)^r ||\delta_s(f)||_p)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, 1 \leqslant \theta < \infty,$$

$$||f||_{B^{0,r}_{p,\infty}} := \sup_{s \geqslant 0} (s+1)^r ||\delta_s(f)||_p,$$

а

$$\delta_s(f) := \sum_{[2^{s-1}] \leqslant k < 2^s} \widehat{f}(k) e^{ikx}, \widehat{f}(k) := (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Классы $SB^{0,r}_{\infty,\theta}$ ($r > 0$, $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta < \infty$) являются аналогами классов Никольского–Бесова с логарифмической гладкостью, а при $p = \theta = \infty$ $SB^{0,r}_{\infty,\infty} \equiv LG^r$, где LG^r — классы, которые изучались Б. С. Кашиным и В. Н. Темляковым [1] с целью установления точных по порядку оценок некоторых аппроксимационных характеристик.

Пусть $t_m(x) := \sum\limits_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}$, где c_k — произвольные числа. Для $F \subset L_q$ положим

$$E_m(F)_q := \sup_{f \in F} \inf_{t_m} ||f - t_m||_q$$

— наилучшее приближение класса F тригонометрическими полиномами t_m.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant \theta < \infty$, $r > 1 - \frac{1}{\theta}$, *тогда*

$$E_m(SB^{0,r}_{\infty,\theta})_\infty \asymp (\log_2 m)^{-r+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < q \leqslant p \leqslant \infty$, $p \geqslant 2$, $q \neq \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $r > (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+$, *тогда*

$$E_m(SB^{0,r}_{p,\theta})_q \asymp (\log_2 m)^{-r+(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+},$$

где $a_+ = \max\{a; 0\}$.

В случае $p = \theta = \infty$ точные по порядку оценки величин $E_m(LG^r)_q$, соответствующие результатам теорем 1 и 2, известны [1].

Литература

1. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных // Теория функций, СМФН. — 2007. — Т. 25. — С. 58–79.

The best approach by trigonometrical polynoms of analogs of classes of Nikolsky–Besova with logarithmic smoothness

S. A. Stasyuk

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine, stasyuk@imath.kiev.ua

О взаимосвязи некоторых классов функций, определенных мультипликативными системами

З. Р. Сулейменова, А. Т. Сыздыкова

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан, zr-s2012@yandex.ru

В работе вводятся классы функций $B_{p,\theta}(\alpha)$ и $W_{p,\theta}(\alpha)$ и рассматривается взаимосвязь между ними.

Пусть $\psi_n(x)$ — мультипликативная система Прайса с образующей последовательностью $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $m_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$, определенная на соответствующей группе G (см. [1]).

Обозначим через

$$\omega(f, 1/m_n)_p = sup \left\| f(x \oplus h) - f(x) \right\|_p, \ 0 \leqslant h < 1/m_n$$

— модуль непрерывности функции $f \in L_p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, где $\oplus$ — операция сложения на группе G.

Пусть $\alpha(t)$ — измеримая неотрицательная на $[0,1]$ функция, суммируемая на $[\delta, 1]$ для любого $0 < \delta < 1$ и $\beta(n) = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} \alpha(t)dt$.

Через $B_{p,\theta}(\alpha)$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, обозначим класс функций

$$B_{p,\theta}(\alpha) = \left\{ f(x) \in L_p(G) : J_{p,\theta} = \left(\int\limits_0^1 \alpha(t)\omega^{\theta}(f,t)_p dt \right)^{1/\theta} < \infty \right\}.$$

При $\alpha(t) = 1/t^{r\theta+1}$ класс $B_{p,\theta}(\alpha)$ совпадает с пространством типа Бесова $B_{p,\theta}^{r}(\Phi)$.

Через $W_{p,\theta}(\alpha)$ обозначим класс функций $f(x) \in L_p(G)$, имеющих ряд Фурье по мультипликативной системе $\psi_n(x)$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(f)\psi_n(x)$, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(f)\beta^{1/\theta}(n)\psi_n(x)$ является рядом Фурье некоторой функции $\varphi(x) \in L_p(G)$.

Говорят, что функция $\alpha(t)$ удовлетворяет δ-условию, если существует постоянная C такая, что для всех $\delta : 0 < \delta < \delta_0$ справедливо неравенство:

$$\int\limits_{\delta}^{2\delta} \alpha(t)dt \leqslant C \int\limits_{2\delta}^{1} \alpha(t)dt.$$

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta = min(2,p)$, *а функция* $\alpha(t)$ *удовлетворяет* δ *- условию и пусть* $supp_n = N < \infty$. *Тогда имеет* *место включение:*

$$B_{p,\theta}(\alpha) \subset W_{p,\theta}(\alpha),$$

т. е., если $f(x) \in B_{p,\theta}(\alpha)$ *, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\beta^{1/\theta}(n)\psi_n(x)$$

есть ряд Фурье некоторой функции $\varphi(x) \in L_p(G)$ *. При этом справедливо неравенство*

$$\|\varphi\|_p \leqslant C_{p,\theta}\, J_{p,\theta}\,.$$

Теорема 2. *Пусть* $supp_n = N < \infty$, $1 < p < \infty$, $\theta = max(2, p)$, *а функция* $\alpha(t)$ *удовлетворяет* δ*-условию. Тогда*

$$W_{p,\theta}(\alpha) \subset B_{p,\theta}(\alpha).$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$J_{p,\theta} \leqslant C_{p,\theta}\left(\|\varphi\|_p + \|f\|_p\right).$$

Для тригонометрических рядов аналогичные результаты получены М.К. Потаповым (см. [2]). Только для тригонометрических рядов в теореме, аналогичной теореме 2, от функции $\alpha(t)$ потребовалось некоторое дополнительное условие. А теорема 2 нами доказывается без этого дополнительного условия.

Литература

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. — М.: Наука. — 1987, 343 с.
2. *Потапов М. К.* О взаимосвязи некоторых классов функций // Мат.заметки. — 1976. — Т. 2, № 4. — С. 361–372.

The relationship between some classes of functions defined by multiplicative system

Z. R. Suleimenova, A. T. Syzdykova

Gumilev Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
zr-s2012@yandex.ru

Ограниченность одного класса матричных операторов в весовых пространствах последовательностей

А. М. Темирханова*, **Р. Ойнаров***, **А. А. Калыбай**†

* *Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан, ainura-t@yandex.ru, o_ryskul@mail.ru*

† *КИМЭП, Алматы, Казахстан aigerimk@inbox.ru*

Пусть $1 < p, q < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Пусть $v = \{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительная, а $\omega_i = \{\omega_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, ...n-1$, $u = \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неотрицательные последовательности чисел, далее называемые весами.

Пусть $l_{p,v}$ — пространство последовательностей $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых конечна норма $\|f\|_{p,v} = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Для произвольной числовой последовательности $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ определим оператор S_{n-1} n-кратного сммирования с весами ω_i, $i = 1, 2, ...n-1$:

$$(S_{n-1})_i = \sum_{k_1=1}^{i} \omega_{1,k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \omega_{2,k_2} \cdots \sum_{j=1}^{k_{n-1}} f_j = \sum_{j=1}^{i} A_{n-1,1}(i,j) f_j, \qquad (1)$$

где $A_{n-1,1}(i,j)$ является элементом следующего семейства $A_{n,m}(i,j) = \sum\limits_{k_n=j}^{i} \omega_{n,k_n} \sum\limits_{k_{n-1}=k_n}^{i} \omega_{n-1,k_{n-1}} \cdots \sum\limits_{k_m=k_{m+1}}^{i} \omega_{m,k_m}$, $i \geqslant j \geqslant 1$ при $m \leqslant n$, если $n < m$, то $A_{n,m}(i,j) = 1$.

При $n = 1$ операторы S_{n-1} являются операторами Харди $(S_0 f)_i = \sum\limits_{j=1}^{i} f_j$ ограниченность которых из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ исследованы достаточно подробно [1–3] при всех значениях параметров.

В работе [4] получены необходимые и достаточные условия ограниченности оператора (1) из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ при $1 < p \leqslant q < \infty$.

В данной работе устанавливается критерий ограниченности операторов (1) из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ при $1 < q < p < \infty$, который оставался открытым с 2008 года.

Для $r = 0, 1, ..., n-1$ положим

$$A_r(n) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=i}^{\infty} A_{r,1}^q(j,i) u_j^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{k=1}^{i} A_{n-1,r+1}^{p'}(i,k) v_k^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \right.$$

Работа выполнена при поддержке Комитета науки МОН РК, проект № 1529/GF..

$$\times\Delta^{+}\left(\sum_{j=i}^{\infty} A^{q}_{r,1}(j,i)u^{q}_{j}\right)\Bigg)^{\frac{p-q}{pq}},$$

Теорема. *Пусть* $1 < q < p < \infty$, $n \geqslant 1$. *Тогда оператор (1) ограничен из* $l_{p,v}$ *в* $l_{q,u}$ *тогда и только тогда, когда*

$$A(n) = \max_{0\leqslant r\leqslant n-1} A_r(n) < \infty,$$

при этом для нормы $\|S_{n-1}\|$ *оператора (1) из* $l_{p,v}$ *в* $l_{q,u}$ *имеет место соотношение* $\|S_{n-1}\| \approx A(n)$.

Литература

1. *Bennett G.* Some elementary inequalities III // Quart. J. Math. Oxford Ser. — 1991. — Vol. 42, № 2. — P. 149–174.
2. *Braverman M. Sh, Stepanov V. D.* On discrete Hardy Inequality // Bull. London Math. Soc. — 1994. — Vol. 26. — P. 283–287.
3. *Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E.* The Hardy inequality. About its history and some related results. — Pilsen: Vydavatelsky Servis Publishing House, 2007.
4. *Oinarov R., Temirkhanova A. M.* Boundedness and compactness of a class of matrix operators in weighted sequence spaces // J. Math. Ineq. — 2008. — Vol. 2, № 4. — P. 555–570.

Boundedness of a certain class of matrix operators in weighted sequence spaces

A. M. Temirkhanova*, R. Oinarov*, A. A. Kalybai†

* *L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
ainura-t@yandex.ru, o_ryskul@mail.ru

† *KIMEP University, Almaty, Kazakhstan*
aigerimk@inbox.ru

Характер приближения модуля полиномами Бернштейна

И. В. Тихонов*, В. Б. Шерстюков†

* *ВМК МГУ, Москва, Россия, ivtikh@mail.ru*

† *НИЯУ «МИФИ», Москва, Россия, shervb73@gmail.com*

В классической теории аппроксимации важную роль играет вопрос о полиномиальных приближениях простейших негладких функций типа модуля. Так, в недавней работе [1] проведено подробное исследование полиномов Бернштейна

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, x^k\, (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

для функции $f(x) = |2x-1|$ на $[0,1]$. В силу свойства склеивания

$$B_{2m}(x) = B_{2m+1}(x), \quad m \in \mathbb{N},$$

достаточно рассматривать полиномы только с четными номерами. Особый интерес представляет поведение поточечного уклонения

$$R_{2m}(x) \equiv B_{2m}(x) - f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Его максимальное значение M_{2m} достигается при $x = 1/2$, т. е.

$$M_{2m} \equiv \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} R_{2m}(x) = R_{2m}(1/2).$$

Известно [2, 3], что

$$R_{2m}(1/2) = B_{2m}(1/2) = 2^{-2m}\, C_{2m}^m \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}, \quad m \to \infty.$$

Столь малая скорость приближения в точке $x = 1/2$ согласуется с общей теоремой Поповичу [2, 3]. До недавнего времени считалось, что картина приближения в остальных точках $x \in (0,\, 1)$ будет примерно такой же.

Оказывается, вне точки $x = 1/2$ характер приближения модуля полиномами Бернштейна является принципиально иным, и скорость приближения становится экспоненциальной. Точнее, при каждом $x \in (0,\, 1/2) \cup (1/2,\, 1)$ для любого $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\frac{M_{2m}}{2(m+1)}\, \frac{\big(q(x)\big)^{m+1}}{(2x-1)^2 + \dfrac{6x(1-x)}{m+2}} \leqslant R_{2m}(x) \leqslant \frac{M_{2m}}{2(m+1)}\, \frac{\big(q(x)\big)^{m+1}}{(2x-1)^2},$$

из которой следует асимптотика

$$R_{2m}(x) \sim \frac{2x(1-x)}{(2x-1)^2} \, \frac{\bigl(q(x)\bigr)^m}{m\sqrt{\pi m}}, \quad m \to \infty,$$

где $0 < q(x) \equiv 4x(1-x) < 1$. На некотором удалении от $x = 1/2$ двусторонняя оценка весьма точна и обеспечивает применимость асимптотики уже для достаточно малых m. При приближении к $x = 1/2$ оценка «портится» и дает содержательный результат лишь для больших номеров.

Отметим, кстати, что практическое вычисление полиномов $B_{2m}(x)$ с номерами $2m \geq 100$ представляет серьезные технические трудности (подробнее см. [1]).

Литература

1. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник Челябинского государственного университета. Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 15, № 26. — С. 6–40.
2. *Popoviciu T.* Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // Mathematica. — 1935. — T. 10. — C. 49–54.
3. *Rivlin T. J.* An Introduction to the Approximation of Functions. — Waltham, Toronto, London: Blaisdell Publ. Comp., 1969.

The module function approximation by Bernstein polynomials

I. V. Tikhonov*, V. B. Sherstyukov†

* *Moscow State University, Moscow, Russia, ivtikh@mail.ru*

† *National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia shervb73@gmail.com*

Критерий сходимости в точке по «взвешенным» многочленам Якоби

А. Ю. Трынин

Саратовский государственный университет, Саратов, Россия
tayu@rambler.ru, atrynin@gmail.com

Пусть $u_n(\theta) = (\sin\frac{\theta}{2})^{\alpha_n+\frac{1}{2}}(\cos\frac{\theta}{2})^{\beta_n+\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}(\cos\theta)$ – «взвешенные» многочлены Якоби, а $S_{\lambda_n}^{(\alpha_n,\beta_n)}(f,\theta) = \sum\limits_{k:\theta_{k,n}\in[0,\pi]} \frac{u_n(\theta)}{u_n'(\theta_{k,n})(\theta-\theta_{k,n})} f(\theta_{k,n})$ $(u_n(\theta_{k,n}) = 0)$. Договоримся считать, что функция $P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}$ при $\alpha_n > -1, \beta_n > -1$ есть классический многочлен Якоби, а в случае, когда выполняется хотя бы одно из условий $\alpha_n \leqslant -1$ или $\beta_n \leqslant -1$ $P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}$ — есть гипергеометрический ряд [1, (4.21.2)]. В обоих случаях используем стандартную нормировку [1, Гл. IV, §4.1, (4.1.1)].

Считаем, что последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_n \in \mathbb{R},\, \beta_n \in \mathbb{R},\, \alpha_n = o\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right),\, \beta_n = o\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right) \text{при} n \to \infty. \tag{1}$$

Пусть $f \in C[a,b]$, где $[a,b] \subset (0,\pi)$. Доопределим функцию f на отрезок $[0,\pi]$ до непрерывной функции F следующим образом

$$F(\theta) = \begin{cases} f(\theta) & \text{при} \theta \in [a,b], \\ 0 & \text{при} \theta \in [0,\pi] \setminus (\frac{3a}{4}, \frac{\pi+3b}{4}), \\ \text{линейная} & \text{при} \theta \in (\frac{3a}{4}, a) \text{и} (b, \frac{\pi+3b}{4}). \end{cases} \tag{2}$$

Исключив из рассмотрения тривиальный случай $f \equiv 0$, возьмём фиксированную положительнозначную последовательность $\{\vartheta_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям

$$\vartheta_n = o(1),\, \lim_{n\to\infty} \frac{\vartheta_n}{\omega(F,\frac{1}{n})} = \infty; \text{положим} \varepsilon_n = \exp\left\{-\frac{\vartheta_n}{\omega(F,\frac{1}{n})}\right\}. \tag{3}$$

Для любого натурального n и $\theta \in [a,b]$ обозначим через p, m_1 и m_2 такие целые числа, что имеют место соотношения

$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right] + 1, \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right],$$

$$\theta_{p,n} \leqslant \theta < \theta_{p+1,n}, \tag{4}$$

где номера k_1 и k_2 определяются из неравенств

$$\theta_{k_1-1,n} < \theta - \varepsilon_n \leqslant \theta_{k_1,n}, \quad \theta_{k_2,n} \leqslant \theta + \varepsilon_n < \theta_{k_2+1,n}.$$

Обозначим последовательности

$$\eta_n = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\frac{\frac14-\alpha_n^2}{4\sin^2\frac{a}{4}}+\frac{\frac14-\beta_n^2}{4\cos^2\frac{a}{4}}+\left(n+\frac{\alpha_n+\beta_n+1}{2}\right)^2}}{2\pi u_n'(\frac{a}{2})}, & \text{если } u_n(\frac{a}{2})=0, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{\frac{\frac14-\alpha_n^2}{4\sin^2\frac{a}{4}}+\frac{\frac14-\beta_n^2}{4\cos^2\frac{a}{4}}+\left(n+\frac{\alpha_n+\beta_n+1}{2}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\frac{\frac14-\alpha_n^2}{4\sin^2\frac{a}{4}}+\frac{\frac14-\beta_n^2}{4\cos^2\frac{a}{4}}+\left(n+\frac{\alpha_n+\beta_n+1}{2}\right)^2+\left(\frac{u_n'(\frac{a}{2})}{u_n(\frac{a}{2})}\right)^2}}, & \text{если } u_n(\frac{a}{2})\neq 0 \end{cases}$$

и

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi+(b-a)}{2\pi}\right)^2\left\{\frac{\frac14-\alpha_n^2}{4\sin^2\frac{a}{4}}+\frac{\frac14-\beta_n^2}{4\cos^2\frac{a}{4}}+\left(n+\frac{\alpha_n+\beta_n+1}{2}\right)^2\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть последовательности α_n, β_n удовлетворяют соотношениям (1), $f \in C[a,b]$, $[a,b]\subset(0,\pi)$. Доопределим функцию f до F на отрезке $[0,\pi]$ как в (2). Возьмём фиксированные положительнозначные последовательности $\{\vartheta_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяющие условиям (3). Числа m_1, m_2 и p выберем, чтобы выполнялись соотношения (4). Тогда равномерно по θ на $[a,b]$ справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\Bigg|F(\theta)-S_{\lambda_n}^{(\alpha_n,\beta_n)}(F,\theta)$$

$$-\eta_n u_n(\theta)\cdot\sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{F(\theta_{2m+1,\lambda_n})-2F(\theta_{2m,\lambda_n})+F(\theta_{2m-1,\lambda_n})}{p-2m}\Bigg| = 0, \quad (5)$$

где штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$, то сумма в (5) равна нулю.

Литература

1. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. — М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1962.

A criterion for the convergence at a point of "weighted" Jacobi polynomials

A. Yu. Trynin

Saraov State University, Saratov, Russia
tayu@rambler.ru, atrynin@gmail.com

Наилучшие квадратурные формулы для вычисления криволинейных интегралов некоторых классов функций и кривых

К. Тухлиев

Худжандский госуниверситет им. Б.Г.Гафурова, Худжанд, Таджикистан
Kamaridin.t54@mail.ru

В докладе рассматривается задача о приближенном вычислении криволинейных интегралов первого рода для классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности. Пусть функция $f(M) = f(x_1, \ldots, x_m)$ определена и интегрируема вдоль кривой $\Gamma \in R^m$ и

$$J(f;\, \Gamma) = \int\limits_{\Gamma} f(M) ds. \tag{1}$$

Предположим, что на кривой Γ установлено положительное направление так, что положение точки $M \in \Gamma$ определено длиной дуги $S = \overset{\smile}{AM}$, отсчитываемой от начальной точки A. Тогда Γ выразится параметрическими уравнениями $x_i = \varphi_i(s)$, $i = \overline{1, m}$; $0 \leqslant s \leqslant L$, а интеграл (1) запишется в виде

$$J(f;\, \Gamma) = \int\limits_{0}^{L} f(\varphi_1(s), \ldots,\, \varphi_m(s)) ds. \tag{2}$$

Всякая квадратурная формула вида

$$J(f;\, \Gamma) \equiv L_N(f;\, \Gamma; P, S) := \sum_{k=1}^{N} p_k f(\varphi_1(s), \ldots,\, \varphi_m(s)) ds \tag{3}$$

приближенного вычисления интеграла (2) задается векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^{N}$ и узлов $S = \{s_k : 0 = s_0 < \ldots < s_N = L\}$. Через $\mathcal{A}$ обозначим множество векторов (P, S), для которых формула (3) имеет смысл. Через $\mathfrak{N}_L$ обозначим множество кривых Γ, заданных параметрическими уравнениями $x_i = \varphi_i(s), i = \overline{1, m}$, длины которых $\leqslant L$, а через $\mathfrak{M}$ – класс функций $f(\varphi_1(s), \ldots,\, \varphi_m(s))$, определенных на кривых $\Gamma \in \mathfrak{N}_L$. Положим $|R_N(f;\, \Gamma; P, S)| = |J(f; \Gamma) - L_N(f;\, \Gamma; P, S)|$. За величину, характеризующую наибольшую погрешность формулы (3) на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_L$, примем величину $R_N(\mathfrak{M};\, \mathfrak{N}_L;\, P, S) = \sup\{\sup\{|R_N(f;\, \Gamma; P, S)| : \ f \in \mathfrak{M}\} : Gamma \in \mathfrak{N}_L\}$.

Требуется найти величину [1]

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{M};\, \mathfrak{N}_L) = \inf\{R_N(\mathfrak{M};\, \mathfrak{N}_L;\, P, S) : \ (P, S) \in \mathcal{A}\} \tag{4}$$

и указать вектор (P^*, S^*), реализующий точную нижнюю грань в (4).

Через $H^\omega := H^\omega[0, L]$ обозначим множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию $|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant \omega(|t' - t''|), forall\, t', t'' \in [0, L]$, где $\omega(\delta)$ – заданный модуль непрерывности, а через $\bar{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ обозначим класс кривых $\Gamma \subset R^m$, у которых координатные функции $\varphi_i(s) \in H^{\omega_i}$, $i = \overline{1, m}$. Пусть $\mathfrak{M}_\rho$ – класс функций $f(M)$ для любых двух точек $M', M'' \in \Gamma$, удовлетворяющих условию [2]

$$|f(M') - f(M'')| \leqslant \rho(M', M''),$$

где $\rho(M', M'')$ – евклидово расстояние между точками $M', M'' \in \Gamma$.

Теорема. *Среди всех квадратурных формул вида (3) с произвольными векторами коэффициентов и узлов (P, S) наилучшей на классе $\mathfrak{M}_\rho$ и кривых $\bar{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ является формула*

$$\int\limits_\Gamma f(M)ds = \frac{L}{N}\sum_{k=0}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{kL}{N}L\right), \ldots, \varphi_m\left(\frac{kL}{N}L\right)\right) + R_N(f;\Gamma),$$

где $x_i = \varphi_i(s)$ $(i = \overline{1, m})$ – параметрические уравнения кривой Γ, L – ее длина. При этом точная оценка погрешности наилучшей формулы на указанных классах функций и кривых равна

$$\mathfrak{N}_N(\mathfrak{M}_\rho,\, \bar{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^2(t)\ \right\}^{1/2} dt.$$

Литература

1. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. — М.: Наука, 1988.
2. *Корнейчук Н. П.* Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Матем. заметки. — 1968. — Т. 3, № 5. — С. 565–576.

Best quadrature formulas for calculate of curvilinear integral of some classes functions and curves

K. Tukhliev

Khujand State University by name B.G.Gafurov, Khujand, Tajikistan
Kamaridin.t54@mail.ru

Дифференцируемость в смысле L_p функций в весовых пространствах Соболева

А. И. Тюленев

Московский физико-технический институт, Москва, Россия
tyulenev-math@yandex.ru

Пусть фиксирован параметр p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Символом Ω будем обозначать произвольную ограниченную область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей либо все $\mathbb{R}^n$.

Будем называть весовой функцией (весом) функцию $\gamma : \Omega \to R_+$ такую, что

$$\gamma^{-1} \in L^{loc}_{p'}(\Omega). \tag{1}$$

Для функции $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ поволным $\|g|L_p(\Omega, \gamma)\| := \|g\gamma|L_p(\Omega)\|$. Символ $W^l_p(\Omega, \gamma)$ обозначим функциональное пространство Соболева на Ω с весом γ и нормой

$$\|f|W^l_p(\Omega, \gamma)\| := \sum_{|\alpha| \leqslant l-1} \|D^\alpha f|L_p(\Omega)\| + \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f|L_p(\Omega, \gamma)\|. \tag{2}$$

Лемма 1. *Пространство $W^l_p(\Omega, \gamma)$ банахово.* Заметим, что если условие (1) не выполнено, то пространство $W^l_p(\Omega, \gamma)$, вообще говоря, не является полным.

Определим подпространство $\widehat{W}^l_p(\Omega, \gamma)$ пространства $W^l_p(\Omega, \gamma)$ как замыкание множества $C^\infty(\overline{\Omega}) \bigcap W^l_p(\Omega, \gamma)$ по норме (2). Пусть фиксировано множество $E \subset \overline{\Omega}$, $\gamma(x_1, ..., x_n) = \widehat{\gamma}(r(x))$, где $r(x) := dist(x, E)$.

Будем говорить, что вес γ является p — допустимым для E, если для некоторого $\delta_0 \in (0, 1]$

$$N_{\gamma,p}(\delta_0) := \left\| [t^{\frac{n-1}{p}} \widehat{\gamma}]^{-1} | L_{p'}((0, \delta_0)) \right\| < \infty.$$

Пусть $f \in L_p(\Omega)$, $\delta\widetilde{B}^n_{x^{(0)}} := \delta B^n_{x^{(0)}} \bigcap \Omega$. Будем говорить, что f равномерно на Eдифференцируема k раз в смысле L_p, если для любой точки $x^{(0)} \in E$ существует многочлен $P^k_{x^{(0)}}[f]$степени не выше k такой, что

$$\sup_{x^{(0)} \in E} \frac{\|f - P^k_{x_0}[f]|L_p(\delta\widetilde{B}^n_{x^{(0)}})\|}{\delta^{k+\frac{n}{p}}} \to 0, \text{при} \delta \to 0.$$

Положим $\Omega = \Pi^n_d := B^d \times B^{n-d}$, $E = B^{n-d} = \{x = (x_1, ..., x_n) \in B^n : x_1 = ... = x_d = 0\}$.

Теорем 1. *Пусть вес γ является p-допустимым для E, $x^{(0)} \in E$. Тогда для любой функции $f \in \widehat{W}^l_p(\Pi^n_d, \gamma)$ существует многочлен*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-01-00744.

$P_{x^{(0)}}^{l-1-|\alpha'|}[D^{\alpha'} f]$ *степени не выше* $l-1-|\alpha'|$, *такой, что для любого (достаточно малого) числа* $\delta \in (0, \delta_0)$ *справедливо неравенство*

$$\left\| D^{\alpha'} f - P_{x^{(0)}}^{l-1-|\alpha'|}[D^{\alpha'} f] | L_p(\delta \widetilde{B}^n_{x^{(0)}}) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant M_p \delta^{l-1-|\alpha'|+\frac{n}{p}} N_{\gamma,p}(\delta) \left(\sum_{|\beta|=l-|\alpha'|} \| D^\beta D^{\alpha'} f | L_p(2\delta \widetilde{B}^n_{x^{(0)}}, \gamma) \| \right).$$

Константа M_p *не зависит ни от* f, *ни от* δ, *ни от* $x^{(0)}$. *Следовательно, для* $f \in \widehat{W}^l_p(\Pi^n_d, \gamma)$ *функция* $D^{\alpha'} f$ *равномерно дифференцируема* $l-1-|\alpha'|$*раз в смысле* L_p *на* E.

Будем считать известным определение класса $A_p(\mathbb{R}^n)$ (см. [3]).

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\gamma^p \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $x^{(0)} \in K$. *Если* $N_{\gamma,p}(\delta) = +\infty$ *для некоторого* $0 < \delta_0 < 1$,; *то найдется функция* $f \in \widehat{W}^1_p(\Pi^n_d, \gamma)$, *такая что* f *не является существенно ограниченной в окрестности точки* $x^{(0)}$.

Литература

1. *Hajlasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincare // Memoirs AMS. — Vol. 145, № 688. — P. 1–101.
2. *Bjorn J.* L_q-Differentials for weighted spaces // Michigan Math J. — 2000. — Vol. 47. — P. 151–161.
3. *Poulsen E. T.* Boundary values in function spaces // Math. Scand. — 1962. — Vol. 10, № 1. P. 45–52.

L_p — mean differentiability of functions in weighted sobolev spaces

A. I. Tyulenev

Moscow Istitute of Physics and Technology, Moscow, Russia
tyulenev-math@yandex.ru

Принцип двойственности в пространствах Соболева

Е. П. Ушакова

Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Хабаровск, Россия
elenau@inbox.ru

Пусть $p > 1$, $s > 1$ и весовые функции v_0 и v_1 такие, что $0 < v_0(x), v_1(x) < \infty$ для п.в. $x \in (0,\infty)$. Кроме этого, $v_0 \in L^s_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$ и $v_1 \in L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$. Предположим также, что $1/v_1 \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$. Пусть $\mathring{AC}(0,\infty)$ обозначает множество всех абсолютно непрерывных функций с компактными носителями в $(0,\infty)$ и $\mathring{W}^1_{p,s} \equiv \mathring{W}^1_{p,s}(v_0, v_1; (0,\infty))$ – замыкание $\mathring{AC}(0,\infty)$ по норме

$$\|f\|_{\mathring{W}^1_{p,s}} := \|fv_0\|_s + \|f'v_1\|_p.$$

В работе Р. Ойнарова [1] была найдена точная двусторонняя оценка функционала

$$J_p(g) := \sup_{0\neq f\in \mathring{W}^1_{p,p}} \frac{\int_0^\infty f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\|f\|_{\mathring{W}^1_{p,p}}} \quad (g \geqslant 0),$$

обеспечивающая так называемый принцип двойственности в пространствах Соболева $\mathring{W}^1_{p,p}$. Для получения этой оценки автором выполнялось построение непрерывных и строго возрастающих на $(0,\infty)$ функций a b, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\int_{a(x)}^x v_1^{-p'}(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{b(x)} v_1^{-p'}(t)\,\mathrm{d}t \quad (x > 0),$$

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} v_1^{-p'}(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} v_0^s(y)\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s}} = 1 \quad (x > 0).$$

Наш результат состоит в обобщении оценки для $J_p(g)$, полученной Р. Ойнаровым [1], на более общий функционал такого же типа в случае $\mathring{W}^1_{p,s}$. Чтобы сформулировать этот результат, положим

$$G_0(g) := \left(\int_0^\infty \left(\int_{b^{-1}(x)}^{a^{-1}(x)} g(t)\,\mathrm{d}t\right)^{s'} v_1^{-p'}(x) \left(\int_{a(x)}^{b(x)} v_1^{-p'}(y)\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{s'}{p'}-1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s'}},$$

Работа выполнена при поддержке Дальневосточного отделения Российской академии наук, проекты №№ 12-I-ОМН-01, 12-II-0-01М-005 и 12-II-СО-01М-002.

$$G_1(g) := \left(\int_0^\infty \left(\int_{b^{-1}(x)}^{a^{-1}(x)} g(t)\,\mathrm{d}t \right)^{p'} v_1^{-p'}(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p'}},$$

где a^{-1}, b^{-1} обратные функции к a, b и $p' = p/(p-1)$, $s' = s/(s-1)$. Рассмотрим величину

$$J_{p,s}(g) := \sup_{0 \neq f \in \mathring{W}^1_{p,s}} \frac{\int_0^\infty f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\|f\|_{\mathring{W}^1_{p,s}}}.$$

Теорема. *Предположим, что* $1 < p, s < \infty$ *и* $0 \leqslant g \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$.

(a) *Если* $p \geqslant s$, *то*

$$G_0(g) \ll J_{p,s}(g) \ll G_1(g)$$

(b) *В случае* $p \leqslant s$ *имеем:*

$$G_1(g) \ll J_{p,s}(g) \ll G_0(g) + G_1(g).$$

Литература

1. *Oinarov R.* Boundedness of integral operators from weighted Sobolev space to weighted Lebesgue space // Complex Var. Elliptic Equ. — 2011. — Vol. 56, № 1–2. — P. 1021–1038.

A duality principle in Sobolev spaces

E. P. Ushakova

Computing Centre of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia
elenau@inbox.ru

О приближении некоторых классов сверток в L_2

М. Ш. Шабозов

Институт математики АН Республики Таджикистан, Душанбе, Таджикистан, shabozov@mail.ru

Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство измеримых 2π-периодических действительных функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2[0,2\pi]} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

В докладе изложены некоторые результаты о наилучшей аппроксимации функций $f \in L_2$, представимых в виде свертки

$$f(x) = \Big(\mathcal{K} * \varphi\Big)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}(x-t)\varphi(t)dt, \tag{1}$$

где $\mathcal{K}$, $\varphi \in L_2$ — 2π-периодические функции с рядами Фурье

$$\mathcal{K}(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikt},\ \varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{ikt}. \tag{2}$$

Равенством $\omega_m(\varphi;\delta) = \sup\{\|\Delta_m^h(\varphi,\cdot) : |h| \leqslant \delta\}$, где $\Delta_m^h(\varphi,t) = \sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\varphi(t+kh)$ определим модуль непрерывности m-го порядка функции $\varphi \in L_2$. Пусть $\Im_{2n+1} = \Big\{T_n :\ T_n(t) = \sum\limits_{|k|\leqslant n} c_k e^{ikt}\Big\}$.

Символом

$$E_{n-1}(f) = \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\| :\ T_{n-1} \in \Im_{2n-1}\Big\}$$

обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_2$ подпространством $\Im_{2n-1}$.

При изучении аппроксимативных свойств свертки (1) вводим в рассмотрение экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\chi_{m,n,p}(q,h) := \sup_{\substack{\varphi\in L_2\\ \varphi\neq const}} \frac{2^m |a_n|^{-1} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(\varphi,t)q(t)dt\right)^{1/p}}, \tag{3}$$

где $m, n \in \mathbb{N}; 0 < p \leqslant 2; 0 < h \leqslant \pi/n; a_n := a_n(\mathcal{K})$ – n-ый коэффициент Фурье функции $\mathcal{K}$, определенный в первой формуле (2), $q(t) \geqslant 0$ – суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентная нулю функция.

Теорема. *Пусть коэффициенты $a_n := a_n(\mathcal{K})$ функции $\mathcal{K} \in L_2$ удовлетворяют условию*

$$|a_0| \neq 0,\ |a_k|k^{1/p} \geqslant |a_{k+1}|(k+1)^{1/p},\ 0 < p \leqslant 2.$$

Если весовая функция $q(t) \geqslant 0$ непрерывна на отрезке $[0, h]$, то при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $0 < h \leqslant \pi/n$ справедливо равенство

$$\chi_{m,n,p}(q, h) = \left(\int\limits_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} q(t)dt \right)^{-1/p}. \tag{4}$$

Существует свертка $f_0 := \Big(\mathcal{K} * \varphi_0\Big)$, у которой функция $\varphi_0 \in L_2$, $\varphi_0(t) \neq const$, реализует верхнюю грань в соотношении (3), равную правой части (4).

Даны приложения полученного результата в экстремальной задаче отыскания точных значений n-поперечников некоторых классов сверток, задаваемых усредненными с весом $q(t)$ значениями модулей непрерывности m-го порядка. В частном случае, когда $\varphi(t) \equiv f^{(r)}(t)$, $r \in \mathbb{N}$, $|a_n| = n^{-r}$ и $q(t) = \sin^\gamma nt$ получаем результаты [1–3].

Литература

1. *Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. — 2011. — Т. 90, № 5. — С. 764–775.
2. *Shabozov M. Sh., Yusupov G. A.* Widths of Certain Classes of Periodic Functions in L_2. // J. of Approxim. Theory. — 2012. — Vol. 164, № 1. — P. 869–878.
3. *Шабозов М. Ш.* О поперечниках периодических классов сверток в L_2 // ДАН Республики Таджикистан. — 2012. — Т. 55, № 4. — С. 273–280.

About approximations some classes convolution in L_2

M. Sh. Shabozov

Mathematical Institute of Academy of Sciences of Tajikistan Republic, Dushanbe, Tajikistan, shabozov@mail.ru

О поперечниках некоторых классов функций и наилучших линейных методах приближения в весовом пространстве Бергмана

М. Ш. Шабозов*, **М. С. Саидусайнов**†

* *Институт математики АН Республики Таджикистан, Душанбе, Таджикистан, shabozov@mail.ru*

† *Таджикский госуниверситет коммерции, Душанбе, Таджикистан smuqim@gmail.com*

Пусть $U_R \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ – круг радиуса $R \geqslant 1$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $A(U_R)$ – множество аналитических в U_R функций. Символом $H_{p,R},\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ R \geqslant 1$ обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U_R)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{H_{p,R}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|^p dt\right)^{1/p},\ 1 \leqslant p < \infty.$$

Через $L_p \overset{def}{=} L_p(U),\ 1 \leqslant p < \infty$ обозначим банахово пространство комплекснозначных в U функций f, имеющих конечную норму $\|f\|_{L_p} = \left(\frac{1}{2\pi}\iint_{(U)} |f(z)|^p dxdy\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho|f(\rho e^{it})|^p dtd\rho\right)^{1/p}$, где интеграл понимается в смысле Лебега. Пусть $\gamma(|z|)$ – неотрицательная измеримая в U функция. Через $L_{p,\gamma} \overset{def}{=} L_p(U,\gamma),\ 1 \leqslant p < \infty$ обозначим множество комплекснозначных в U функций f, для которых $\gamma^{1/p} \cdot f \in L_p(U)$ и $\|f\|_{L_{p,\gamma}} = \|\gamma^{1/p} f\|_{L_p}$. Под $B_{p,\gamma} \overset{def}{=} B_p(U,\gamma),\ 1 \leqslant p < \infty$ понимаем банахово пространство функций $f \in A(U)$ таких, что $f \in L_{p,\gamma}$. При этом $\|f\|_{B_{p,\gamma}} = \left(\int_0^1 \rho\gamma(\rho)M_p^p(f,\rho)d\rho\right)^{1/p}$. Для фиксированного натурального m и произвольного $R \geqslant 1$ полагаем

$$W_{p,R}^{(m)} = \left\{f : f^{(m)} \in H_{p,R}, |f^{(m)}\|_{H_{p,R}} \leqslant 1\right\}.$$

Для центрально-симметрического множество $\mathfrak{M}$, через $b_n(\mathfrak{M},X)$, $d^n(\mathfrak{M},X), d_n(\mathfrak{M},X), \delta_n(\mathfrak{M},X)$ обозначим соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский и линейный n-поперечники.

Требуется найти точные значения перечисленных выше n-поперечников классов $W_{p,R}^{(m)},\ R \geqslant 1,\ 1 \leqslant p < \infty,\ m \in \mathbb{N}$ в пространствах $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma}$. Конкретизируем экстремальные подпространства $L_n^*, L_*^n, \bar{L}_{n+1}$ и наилучший линейный метод приближения Λ^*. Для этого полагаем [1]:

$$L_n^* \overset{def}{=} \left\{\{z^j\}_{j=0}^{m-1},\ \left\{\left[R^{2(n-j)} - \frac{\alpha_{j,m}}{\alpha_{2n-j,m}} \cdot |z|^{2(n-j)}\right] \cdot z^j\right\}_{j=m}^{n=1}\right\},$$

$$\Lambda^*_{n-1}(f,z) \stackrel{def}{=} \sum_{j=0}^{m-1} c_j(f)z^j + \sum_{j=m}^{n-1} c_j z^j \left[1 - \frac{\alpha_{j,m}}{\alpha_{2n-j,m}} \cdot \left(\frac{|z|}{R}\right)^{2(n-j)}\right],$$

$$L^n_* \stackrel{def}{=} \left\{f \in B_{p,\gamma} : f^{(k)}(0) = 0,\ k = \overline{0, n-1}\right\},$$

$$\bar{L}_{n+1} \stackrel{def}{=} \mathcal{P}_n = \left\{p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ c_k \in \mathbb{C}\right\},$$

где $\alpha_{n,m} = n(n-1)\cdots(n-m+1),\ n \geqslant m.$

Теорема. *Пусть $R \geqslant 1,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$*

$$b_n(W^{(m)}_{p,R}; B_{p,\gamma}) = b_n(W^{(m)}_{p,R}; L_{p,\gamma}) = d^n(W^{(m)}_{p,R}; B_{p,\gamma}) =$$

$$= d^n(W^{(m)}_{p,R}; L_{p,\gamma}) = d_n(W^{(m)}_{p,R}; L_{p,\gamma}) = \delta_n(W^{(m)}_{p,R}; L_{p,\gamma}) =$$

$$= \sup\left\{\|f - \Lambda^*_{n-1}(f)\|_{L_{p,\gamma}} :\ f \in W^{(m)}_{p,R}\right\} =$$

$$= \begin{cases} R^{m-n}\alpha^{-1}_{n,m} \cdot \left(\int_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/p}, & n \geqslant m,\ 1 \leqslant p < \infty, \\ R^{m-n}\alpha^{-1}_{n,m}, & n \geqslant m,\ p = \infty. \end{cases}$$

При этом: 1) *в случае n-поперечников $d_n(W^{(m)}_{p,R}; L_{p,\gamma})$ и $\delta_n(W^{(m)}_{p,R}; L_{p,\gamma})$ подпространство L^*_n является экстремальным для класса $W^{(m)}_{p,R}$ в пространстве $L_{p,\gamma}$;* 2) *линейный непрерывный оператор Λ^*_{n-1} является наилучшим для класса $W^{(m)}_{p,R}$ линейным методом приближения в пространстве $L_{p,\gamma}$;* 3) *подпространство L^n_* будет экстремальным для n-поперечника $d^n(W^{(m)}_{p,R}; B_{p,\gamma})$;* 4) *подпространство $\bar{L}_{n+1} \equiv \mathcal{P}_n$ является экстремальным для $b_n(W^{(m)}_{p,R}; B_{p,\gamma})$.*

Литература

1. *Вакарчук С.Б, Шабозов М.Ш.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем.сборник. — 2010. — Т. 201, № 8. — С. 3-22.

On the widths of some classes of functions and the best linear methods in the weighted Bergman space

M. Sh. Shabozov*, M. S. Saidusaynov†

* *Mathematical Institute of Academy of Sciences of Tajikistan Republic, Dushanbe, Tajikistan, shabozov@mail.ru*

† *Tajik State University of Commerce, Dushanbe, Tajikistan smuqim@gmail.com*

Неравенства типа Джексона-Стечкина и поперечники классов функций из L_2

Г. А. Юсупов

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан
G_7777@mail.ru

Пусть $L_2[0,2\pi]$ пространство измеримых и суммируемых по Лебегу 2π-периодических действительных функций; $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$ — множество 2π-периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2; $E_{n-1}(f)$ — наилучшее приближение функции $f \in L_2$ тригонометрическими полиномами порядка $n-1$ в пространстве L_2; $\omega_m(f,t)$ — модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$ определяемый равенством

$$\omega_m(f,t) = \sup_{|h| \leqslant t} \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Big| \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(x+kh) \Big| \right\}.$$

В [1] введена экстремальная характеристика

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi,h) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt \right)^{1/p}}, \tag{1}$$

где $m,n \in \mathbb{N}; r \in \mathbb{Z}_+;\ 0 < h \leqslant \pi/n; \varphi(t) \geqslant 0$ — суммируемая на $[0,h]$ функция и для $0 < p \leqslant 2$ доказаны следующие неравенства

$$\left\{ \mathcal{A}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1} \leqslant \chi_{m,n,r,p}(\varphi,h) \leqslant \left\{ \inf_{n \leqslant k < \infty} \mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1},$$

где $\mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2} \left(k^{rp} \int\limits_0^h (1-\cos kt)^{mp/2} \varphi(t)dt \right)^{1/p}, \quad k \geqslant n.$

При вычислении точных значений n-поперечников классов функций в связи с точностью неравенства (1) возникает необходимость установления равенства

$$\inf_{n \leqslant k < \infty} \mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) = \mathcal{A}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi). \tag{2}$$

Нами доказано, что если выполнены все ограничении относительно параметров в определении величины (1) и выполнено неравенство $(rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geqslant 0$, то имеет место равенство (2).

Через $d_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $d^n(\mathfrak{M}, L_2)$, $b_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $\lambda_n(\mathfrak{M}, L_2)$ и $\pi_n(\mathfrak{M}, L_2)$ соответственно обозначим колмогоровский, гельфандовский, бернштейновский, линейный и проекционный n-поперечники множества $\mathfrak{M}$. Пусть

$$W_m(f^{(r)};\varphi)_{p,h} = \left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right)^{-1/p}$$

- среднее в p-ой степени значение модуля непрерывности порядка m от функции $f^{(r)}$ с весом $\varphi(t)$, где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < p \leqslant 2$, $0 < h \leqslant \pi$, а через $L_2^{(r)}(m, p, h; \varphi)$ обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых $W_m(f^{(r)};\varphi)_{p,h} \leqslant 1$. Следуя [2], положим

$$\mathbb{K}_{N,m,p,h}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) = \inf_{\Im_N \subset L_2} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E\left(f, \Im_N\right)_2}{W_m\left(f^{(r)};\varphi\right)_{p,h}}.$$

Теорема 2. *Пусть весовая функция φ, заданная на отрезке $[0, h]$, является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой. Если при некоторых $1/r < p \leqslant 2$, $r \geqslant 1$, $r \in \mathbb{N}$ и любых $t \in [0, h]$ выполнено неравенство $(rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geqslant 0$, то при всех $m, n \in \mathbb{N}$ и $0 < h \leqslant \pi/n$ справедливы равенства*

$$\mathbb{K}_{N,m,p,h}\left(L_2^{(r)}, L_2\right) = \delta_N\left(L_2^{(r)}(p, h, m; \varphi), L_2\right) =$$

$$= 2^{-m}n^{-r}\left\{\int\limits_0^h \varphi(t)dt\right\}^{1/p}\left\{\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p},$$

где $N = 2n-1$, $N = 2n$, $\delta_k(\cdot)$ — любой из перечисленных выше k-поперечников. Все k-поперечники реализуются частичными суммами ряда Фурье $S_{k-1}(f;t)$.

Литература

1. *Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. — 2011. — Т. 90, № 5. — С. 764–775.
2. *Есмаганбетов М. Г.* Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. — 1999. — Т. 65, № 6. — С. 816–820.

The inequalities of Jackson-Stechkin's type and widths of classes functions in L_2

G. A. Yusupov

Tajik National University, Dushanbe, Tadzhikistan, G_7777@mail.ru

Секция 2. Дифференциальные операторы и их приложения

On a special case of the Fredholm-type solvability for ordinary differential equations with integral conditions

K. A. Darovskaya

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
k.darovsk@gmail.com

In the study of differential operators with integral conditions nonlocal conditions were usually considered in the form of Stieltjes integrals containing the unknown function or its derivatives with certain weights (see [1–3]). The case where nonlocal conditions have the form of Riemann integrals turns out to be much more complicated [4]. In the latter case the integrals were usually considered only with unknown function without its derivatives. Sufficient conditions of the Fredholm-type solvability for an ODE of the second order with the mentioned integral conditions were obtained for the first time by Skubachevskii and Steblov in [5].

For the general case of Riemann integrals as boundary conditions, an ordinary differential operator of even order with boundary conditions containing derivatives of the unknown function shall be considered. In the present work, we consider a special case of such a problem. We prove an a priori estimate of solution and then, using it, we study the solvability of our problem.

References

1. *Picone M.* Equazione integrale traducente il piu generale problema lineare per le equation differentiali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine // Accad. Naz. Lincei Atti Convegni. — 1932. — Vol. 15, No 6. — P. 942–948.
2. *Shkalikov A. A.* On the basis property of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions // Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh. — 1982. — No 6. — P. 12–21.
3. *Il'in V. A. and Moiseev E. I.* An a priory estimate of solutions of the problem conjugate to a nonlocal boundary-value problem of the first kind // Differ. Uravn. — 1988. — V. 24, No 5. — P. 795–804.
4. *Krall A. M.* The development of general differential and general boundary systems // Rocky Mountain J. Math. — 1975. — No 5. — P. 493–542.
5. *Skubachevskii A. L. and Steblov G. M.* On the spectrum of a differential operator with nondense domain in $L_2(0,1)$ // Dokl. Ross. Akad. Nauk. — 1991. — Vol. 321, No 6. — P. 1158–1163.

This work was supported by RFBR, projects № 12-01-31454 and № 10-01-00395.

Approximate controllability of fractional nonlocal control dynamic inclusions

Amar Debbouche

Guelma University, Guelma, Algeria
amar_debbouche@yahoo.fr

In this talk, we establish the approximate controllability of a class of fractional control nonlocal delay functional differential inclusions in a Hilbert space. The results are obtained by using the fractional power of operators (i.e. the q–norm), multi-valued analysis, and Sadovskii's fixed point theorem. We introduce the notion of nonlocal-control condition. Furthermore, we present an appropriate set of sufficient conditions for the considered system to be approximately controllable. As an application that illustrates the main results, fractional partial nonlocal-control functional differential inclusion is also given.

References

1. *Deimling K.* Multivalued differential equations. — Berlin: De Gruyter, 1992.
2. *Pazy A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1983.
3. *Zhou Y., Jiao F.* Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations // Computers and Mathematics with Applications. — 2010. — Vol. 59. — P. 1063–1077.
4. *Dauer P. J., Mahmudov I. N.* Approximate controllability of semilinear functional equations in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2002. — Vol. 273. — P. 310–327.
5. *Debbouche A., Baleanu D.* Controllability of Fractional Evolution Nonlocal mpulsive Quasilinear Delay Integro- Differential Systems // Computers and Mathematics with Applications. — 2011. — Vol. 62. — P. 1442–1450.
6. *Debbouche A., Baleanu D.* Exact Null Controllability for Fractional Nonlocal Integrodifferential Equations via Implicit Evolution System // Journal of Applied Mathematics. — 2012. — Vol. 2012. — P. 1–17.
7. *Debbouche A., Baleanu D., Agarwal P. R.* Nonlocal Nonlinear Integro-Differential Equations of Fractional Orders // Boundary Value Problems. — 2012. — Vol. 2012, No 78. — P. 1–10

On stabilization of the Cauchy problem for parabolic equations with bounded coefficients in some classes of initial function

V. N. Denisov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
vdenisov2008@yandex.ru

For the bounded coefficients near grad of solutions, we obtain sharp sufficient conditions under which the solution of the Cauchy problem for parabolic equations stabilizes to zero uniformly on each compact K in R^N for any exponentially growing initial function.

On the half-space $\overline{D} = R^N \times [0, \infty)$, $N \geqslant 3$, consider the Cauchy problem

$$Lu \equiv \Delta u + (b, \nabla u) + c(x)u - u_t = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^N, \tag{2}$$

where

$$(b, \nabla u) = \sum_{i=1}^{N} b_i(x) u_{x_i}.$$

We assume that:

1) the coefficients of equation (1) are real, continuous in $\overline{D}$ and satisfy the Holder condition in any bounded sub domain Q of $\overline{D}$,

2) the coefficients $b_i(x)$ $(i = 1, \ldots, N)$ satisfy condition (B): there exists constant $B > 0$, such that

$$\sup_{R^N} \sum_{i=1}^{N} |b_i(x)| \leqslant B. \tag{3}$$

3) coefficient $c(x)$ satisfies condition (C): there exist $\alpha > 0$ and $k : 0 < k < 1/2$, such that

$$c(x) \leqslant -\alpha^2 \min(1, r^{-2k}), \quad r = \sqrt{x_1^2 +, \ldots, +x_N^2}. \tag{4}$$

4) the initial function $u_0(x)$ is continuous in R^N and satisfies the inequality

$$|u_0(x)| \leqslant M \exp\{a r^{1-2k}\}, \quad 0 < k < 1/2, \quad a > 0. \tag{5}$$

The solvability in the Tikhonov class [1, ch. 2, sect. 1.3] of problem (1), (2) and other Cauchy problems considered in the present paper follows,

This work was suppored by the Russian Foundation for Basic Research, project no.12-01-000-58.

for example, from [1]. Bellow, we will deal with classical solutions to the Cauchy problem (1), (2) from the Tikhonov class.

We will say that a solution to the Cauchy problem (1), (2) stabilizes at a point $x \in R^N$ if there exists the limit

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0, \tag{6}$$

If the limit (6) exists uniformly with respect to x on every compact set K in R^N, we will say that the solution stabilizes uniformly in x on any compact K in R^N.

For the survey of papers on the stabilization of solutions to parabolic equations, see [2].

Theorem 1. *Suppose that a function $u(x,\, t)$ is a solution to the Cauchy problem (1),(2), the initial function $u_0(x)$ satisfies condition (5), the coefficients $b_1(x), \dots, b_N(x)$ satisfy condition (B) and coefficient $c(x)$ satisfies condition (C) for*

$$q\alpha^2 > B(1-2k)a, \quad 0 < k < \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Then the limit (6) exist uniformly in x on every compact K in R^N.

In [3], the author considered the case when coefficients $b_i(x)$ are decreasing.

$$\sum_{i=1}^{N} |b_i(x)| \leqslant \frac{B}{1+r},$$

and obtained the prisies conditions for stabilization of corresponding Cauchy problem.

References

1. *Fridman A.*. Partial Differential Equation of Parabolic Type. — Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall, 1964,; Moscow: Mir,1968.
2. *Denisov V.N.*, On the Behaviour of Solutions of Parabolic Equations for Large Value of Time // Usp. Mat. Nauk. — 2005. — Vol. 60 (4). — P. 145–212. [Russ. Math. Surv. 60, 721-790, 2005].
3. *Denisov V.N.* Stabilization of the solution to the Cauchy problem for a Parabolic Equation with Nonzero Lower order coefficients in classes of increasing initial functions // Doklady Akadem. Nauk. — 2010. — Vol. 430, No 5. — P. 586–588; Doklady Mathem. — 2010. — Vol. 81, No 1. — P. 91–93.

Vector differential operators of infinite order on a space of exponential type entire functions

S. Gefter, T. Stulova

V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine
gefter@univer.kharkov.ua, stutestella@rambler.ru

Results concerning exponential type entire solutions of nonhomogeneous implicit linear differential equation in a Banach space are discussed. Here this results are presented from the point of view of the theory of vector differential operators of infinite order.

Let E be a complex Banach space and $\sigma > 0$. Consider the set E_σ of all entire E-valued functions $f(z)$ for which

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}(\|f\,(z)\|\ e^{-\sigma|z|}) < +\infty.$$

Then E_σ is the Banach space with respect to the norm

$$\|f\|_\sigma = \sup_{z\in\mathbb{C}}(\|f\,(z)\|\ e^{-\sigma|z|}).$$

For $0 < \sigma_0 \leqslant \infty$ we set $\widetilde{E}_{\sigma_0} = \bigcup\limits_{\sigma<\sigma_0} E_\sigma$. Then $\widetilde{E}_{\sigma_0}$ is the space of entire E-valued function of exponential type, that is less than σ_0 (if $\sigma_0 = \infty$, then $\widetilde{E}_\infty$ is the space of arbitrary functions of exponential type). We shall consider this space with the natural topology of inductive limit of Banach spaces.

Now let $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ be a formal power series, for which the coefficients are bounded linear operator on E. Consider the following differential operator of infinite order

$$\varphi\left(\frac{d}{dz}\right) f = \sum_{n=0}^{\infty} C_n f^{(n)}. \tag{1}$$

Theorem 1. *Let R be the radius of convergence of $\varphi(z)$. If $R \neq 0$ and $\sigma_0 = R$, then $\varphi\left(\frac{d}{dz}\right)$ is a continuous linear operator on the space $\widetilde{E}_{\sigma_0}$.*

Corollary 1. Let $T : E \to E$ be a bounded linear operator and let $\rho(T)$ is the spectral radius of T. Consider the following implicit nonhomogeneous differential equation

$$Tw' + g(z) = w, \tag{2}$$

where $g(z)$ is an entire E-valued function of exponential type σ. If $\sigma_0 = \frac{1}{\rho(T)}$ and $\sigma < \sigma_0$, then Equation (2) has a unique entire solution of exponential type σ, $w(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n g^{(n)}(z)$, and this solution continuously depends on g in the topology of the space $\widetilde{E}_{\sigma_0}$.

The following statement is some sort of a reverse statement to Theorem 1.

Theorem 2. *Let $\sigma_0 > 0$ and $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ be a formal power series with operator coefficients. If the series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n f^{(n)}(0)$ is convergent for all functions $f \in \widetilde{E}_{\sigma_0}$, then the radius of convergence of $\varphi(z)$ is not less than σ_0.*

References

1. *Gefter S., Stulova T.* On well-posedness of some operator differential equations in a space of entire functions of exponential type // Dokl. Akad. Nauk Ukrainy. — 2012. — No 9. — P. 7–12.

Reaction-diffusion equations containing hysteresis with diffusive thresholds

P. Gurevich

Free University Berlin, Berlin, Germany; Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
gurevichp@gmail.com

We suggest a prototype model that describes a population of two-phenotype species in a varying environment. The first key feature is that the species can switch between the two phenotypes whenever the environment achieves certain thresholds. Thus, the behavior of each specie is characterized by hysteresis (non-ideal relay). The second key feature is that the thresholds for each specie can change in time. Under the assumption that this change obeys the Gaussian distribution, we arrive at a system of reaction-diffusion equations for the density of the population and for environment variables with a right-hand side containing discontinuous hysteresis operators.

Up to our knowledge, this model is the first attempt to describe a system with fluctuating hysteresis thresholds by means of diffusion equations, where the role of the spatial variable is played by hysteresis threshold. In the talk, we formulate a theorem on the well-posedness of the problem and discuss emerging spatial patterns.

The results are obtained jointly with Dmitrii Rachinskii.

This work was supported by Collaborative Research Center 910 (Germany) and the Russian Foundation for Basic Research through grant 10-01-00395.

Spline computation for solving magnetohidrodynamics free convection flow

F. K. Hamasalh[*], G. Joseph[†], G. Najmadeen[‡]

[*] *Department of Mathematics, College of Science Education, University of Sulaimani*
faraidunsalh@gmail.com

[†] *College of Science Education, University of Duhok*
dr.joseph50@yahoo.com

[‡] *College of Science Education, University of Sulaimani, Kurdistan-Iraq*
najmhama61@gmail.com

In this study, we construct numerical algorithms for solving Magnetohidrodynamics free convection flow rate has been discussed in detail. It is observed that, for a nonlinear system of differential equation, the spline model of nine degree is used, effectiveness and accuracy of new method are presented. Several theorems relating the order of the ninth spline to the saturation of the estimator are proved. Some results on consisting are given and an application is solving to MHD system.

We present a ninth spline interpolation for one dimensional and given sufficiently smooth function $f(x)$ defined on $I = [a, b]$, and $\triangle_n : x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, denote the uniform partition of I with knots $x_i = a + ih$ where $i = 0, 1, ..., n-1$ and $h = \dfrac{b-a}{n}$ is the distance of each subintervals, and denoted the ninth spline by $S_\triangle(x)$ in [a, b] as:

$$\begin{aligned} s_0(x) &= y_0 + (x-x_0)y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2}y_0''+ \\ &+\frac{(x-x_0)^3}{6}y_0''' + \frac{(x-x_0)^4}{24}y_0^{(4)} + \frac{(x-x_0)^5}{120}y_0^{(5)}+ \\ &+(x-x_0)^6 a_{0,6} + \frac{(x-x_0)^7}{5040}y_0^{(7)} + (x-x_0)^8 a_{0,8} + (x-x_0)^9 a_{0,9} \end{aligned} \tag{1}$$

On the subintervals $[x_0, x_1]$ where $a_{i,j}$ $j = 5, 6, 7$ are unknowns to be determined.

Let us examine subintervals $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, ..., n-2$. By taking into account the interpolating conditions, we can write the expression, for $S_i(x)$ in the following form, see [1-2]

$$\begin{aligned} s_i(x) &= y_i + (x-x_0)a_{i,1} + \frac{(x-x_i)^2}{2}a_{i,2} + \frac{(x-x_i)^3}{6}a_{i,3}+ \\ &+\frac{(x-x)^4}{24}y_i^{(4)} + \frac{(x-x_i)^5}{120}y_i^{(5)} + (x-x_i)^6 a_{i,6}+ \\ &+\frac{(x-x_i)^7}{5040}y_i^{(7)} + (x-x_i)^8 a_{i,8} + (x-x_i)^9 a_{i,9} \end{aligned} \tag{2}$$

where $a_{i,j} = 1(1)(n-1)$, $j = 1,3,5,6,8,9$ are unknown values to be determine.

We proved that the following lemma and Theorems

Theorem 1. *Let $y(x)$ be the exact solution and $S(x)$ be a unique ninth spline function which is a solution of the problem (1). Then for $x \in [x_0, x_1]$, we have:*

$$||S_0^{(9-r)}(x) - y_0^{(9-r)}(x)|| \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} Ah^r w_9(f;h),\ r=9,\ \frac{49}{47232}\ h^r w_9(f;h),\ r=8 \\ Bh^r w_9(f;h),\ r=7,\ \frac{1823}{68880}\ h^r w_9(f;h),\ r=6 \\ \frac{125}{1148} h^r w_9(f;h),\ r=5,\ \frac{893}{2296}\ h^r w_9(f;h),\ r=4 \\ \frac{675}{574} h^r w_9(f;h),\ r=3,\ \frac{229}{82}\ h^r w_9(f;h),\ r=2 \\ \frac{182}{41} h^r w_9(f;h),\ r=1,\ \frac{135}{41}\ h^r w_9(f;h),\ r=0 \end{cases}$$

Where, $A = \frac{323324628002651}{57640752303423423488}$ $B = \frac{1551065516263567}{9223372036854775808}$, where $W_9(f;h)$ denotes the modules of continuity of $y^{(9)}$.

Lemma 1. *Let $y(x)$ be the exact solution assume y_i $i = 1,2,...,n-1$ then $|e_{i,1}| < c_i h^8 w_9(f;h)$ for $i = 1,...,n-1$, where $e_{i,1} = a_{i,1} - y_i'$,and c_i depend on the numbers of intervals.*

Lemma 2. *Let $y(x)$ be the exact solution assume y_i $i = 1,2,...,n-1$ then $|e_{i,3}| < c_i' h^6 w_9(f;h)$ for $i = 1,...,n-1$, where $e_{i,3} = 6a_{i,3} - y_i'''$,and c_i' depend on the numbers of intervals.*

Theorem 2. *Let $S(x)$ be a unique spline function of ninth degree where $y(x) \in C^9[0,1]$ the solution of (1). Then for $x \in [x_i, x_{i+1}]$; $i = 1,2,...,n-1$, the following error bounds are holds:*

$$||S^{(r)}(x) - y^{(r)}(x)|| \leqslant \begin{cases} \frac{h^9}{a}(ac_i + bc_i' + c)w_9(f;h),\ r=0 \\ \frac{h^8}{47232}(47232c_i + 23616c_i' + 49)w_9(f;h),\ r=1 \\ (h^7 c_i' + \frac{323324628002651}{57640752303423423488})w_9(f;h),\ r=2 \\ \frac{i}{68880} h^6(68880c_i + 1823)w_9(f;h),\ r=3 \\ \frac{893i}{2296} h^5 w_9(f,h);\ r=4 \\ \frac{125i}{1148} h^4 w_9(f,h);\ r=5 \\ \frac{675i}{574} h^3 w_9(f,h);\ r=6 \\ \frac{229i}{82} h^2 w_9(f,h);\ r=7 \\ \frac{182i}{41} h^1 w_9(f,h);\ r=8 \\ \frac{135i}{41} w_9(f,h);\ r=9 \end{cases}$$

$a = 36893488147419103232$, $b = 614891469126816900$, $c = 6204262065054268$.

Many problems in applied sciences and engineering are modeled as system of differential equations such as spring–mass systems, bending of beams, Magnetohidrodynamics free convection flow (MHD), chemical reactions and so forth can be formulated in terms of differential equations. Since the system of differential equations has wide application in scientific research, as we study convective flow in fluid saturated porous medium has been the subject of several resent papers. Therefore faster and accurate numerical solutions to this problem is very importance, see ([1]– [3], [5].)

There are several methods that can be used to solve the nonlinear problems numerically. A broad class of analytical solutions methods, such as Runge−Kutta of order six, Taylors series, Hirota's bilinear scheme and Hereman's method as [6]– [8], were used to handle these problems. However, some of spline approximation had been proposed by ([2], [4] solved the system of differential equations and some order initial value problems.

In the final secti9on, the nonlinear differential system of Magnetohidrodynamics free convection flow is presented and this problem is referred in [8] and [1]. The problems are tested to the efficiency of the development solutions, and to demonstrate its convergence computationally. The problems have been solved using our method with different values of step size h; it's tabulated in Tables 1. These show that our results are more accurate.

References

1. *Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.* The theory of splines and their applications. — New York, London: Academic Press, 1967.
2. *Al Bayati A. Y., Saeed R. K., Hama-Salh F. K.* The Existence, Uniqueness and Error Bounds of Approximation Splines Interpolation for Solving Second-Order Initial Value Problems // Journal of Mathematics and Statistics. — New York, 2009. — Vol. 5, No. 2. — P. 123–129.
3. *Eamail M. N., Fawzy Th., Ahmed M, Elmoselhi H. O.* Deficient spline function approximation to fourth order differential equations // Appl. Math. Modeling. — 1994. — Vol. 18, P. 658–664.
4. *Faraidun K. H.* Numerical Solution for Fifth Order Initial Value Problems Using Lacunary Interpolation // Journal of Duhok University. — 2010. — Vol. 13, No. 1. — P. 128–134.
5. *Jain M. K., Iyengar S.R.K., Jian R. K.* Numerical Methods for Scientific and Engineering Computation, fifth edition. — New Age International(P) Ltd, 2007.
6. *Hietarina J.* A Search for Bilinear Equations Passing Hirota's Three-Solition Condition. II mKdV-Type Bilinear Equations // Journal of Mathematical Physics. — 1987. — Vol. 28, No. 9. — P. 2094–2101.
7. *Lambert J. D.* Numerical Methods for Ordinary Differential Systems. — Chichester Wiley, 1991.
8. Ahammad M. U., Shirazul Hoque Mollah Md. Numerical study of MHD free convection flow and mass transfer over a stretching sheet considering Dufour and Sort.

The extended Sobolev scale and its applications to differential operators

V. A. Mikhailets, A. A. Murach

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine
mikhailets@imath.kiev.ua, murach@imath.kiev.ua

We outline recent results on elliptic differential operators acting between certain Hilbert function spaces of generalized smoothness [1–4]. These spaces form the extended Sobolev scale $\{H^{\varphi} : \varphi \in \mathrm{RO}\}$, where the function parameter $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$ runs over the class of all Borel measurable functions that are RO-varying at $+\infty$ in the sense of V. G. Avakumović. The latter property means that there exist numbers $a > 1$ and $c \geqslant 1$ such that $c^{-1} \leqslant \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leqslant c$ for each $t \geqslant 1$ and $\lambda \in [1, a]$; here a and c may depend on φ.

The extended Sobolev scale over $\mathbb{R}^n$ consists of the Hilbert spaces

$$H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) := \left\{ w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \, \|w\|_{\varphi}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle) \, |(Fw)(\xi)|^2 \, d\xi < \infty \right\}$$

and then is defined over Euclidean domains and smooth compact manifolds in the standard way. (As usual, $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, and Fw is the Fourier transform of a tempered distribution w.) Specifically, if $\varphi(t) \equiv t^s$ for a certain $s \in \mathbb{R}$, then H^{φ} is the Sobolev space $H^{(s)}$ of order s.

The extended Sobolev scale is distinguished by the following interpolation properties:

(i) This scale consists of all Hilbert spaces that are interpolation spaces with respect to couples of inner-product Sobolev spaces $\bigl[H^{(s_0)}, H^{(s_1)}\bigr]$, with $-\infty < s_0 < s_1 < \infty$;

(ii) Each space H^{φ}, with $\varphi \in \mathrm{RO}$, can be obtained by the interpolation with an appropriate function parameter of a certain couple $\bigl[H^{(s_0)}, H^{(s_1)}\bigr]$ of Sobolev spaces.

(iii) This scale is closed with respect to interpolation with function parameter.

The extended Sobolev scale contains the spaces $H^{\varphi} =: H^{s,\varphi_0}$, where $\varphi(t) \equiv t^s \varphi_0(t)$ for some $s \in \mathbb{R}$ and function φ_0 that varies slowly at $+\infty$ in the sense of J. Karamata. The logarithmic function, its iterations, and their arbitrary real powers are standard examples of φ_0. These spaces form the refined Sobolev scale, which is attached to the Sobolev scale by the parameter s because $H^{(s+\varepsilon)} \subset H^{s,\varphi_0} \subset H^{(s-\varepsilon)}$ for each $\varepsilon > 0$.

Due to their interpolation properties, the spaces H^{φ} and H^{s,φ_0} have important applications to elliptic pseudodifferential operators (PsDOs) and elliptic boundary-value problems (BVPs). Among these applications we indicate the following results:

– the Fredholm property of elliptic PsDOs acting on the extended Sobolev scale over a closed compact smooth manifold;

– equivalent norms in H^{φ} constructed with the help of certain functions of positive elliptic PsDOs;
– applications of the extended Sobolev scale to the spectral theory of elliptic self-adjoint (or normal) PsDOs; namely, sufficient conditions for convergence of spectral expansions almost everywhere or uniformly (the conditions are formulated in terms of regularity properties of functions expanded);
– the Fredholm property of general elliptic BVPs given in a bounded Euclidean domain with smooth boundary and considered on the upper part of the refined Sobolev scale;
– theorems on a priori estimates and local regularity of solutions to the elliptic BVPs;
– various general or individual theorems on the solvability of the elliptic BVPs considered on the two-sided refined Sobolev scale.

References

1. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. Kiev: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2010 [in Russian]. (Available on arXiv:1106.3214.)
2. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Elliptic problems and Hörmander spaces // Oper. Theory Adv. Appl. 2009. V. 191. P. 447–470. (arXiv:0904.0372)
3. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. — 2012. — Vol. 6, No 2. — P. 211–281. (arXiv:1206.6041)
4. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces for a couple of Sobolev spaces // Preprint, arXiv:1106.2049. — 14 pp.

About elliptic matrix operators on the extended Sobolev scale

A. A. Murach, T. Zinchenko

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine
murach@imath.kiev.ua, djanta@ukr.net

We discuss applications of certain function spaces of generalized smoothness to mixed-order elliptic systems given on a closed (and compact) C^∞-manifold Γ. These spaces form the extended Sobolev scale $\{H^\varphi(\Gamma) : \varphi \in \mathrm{RO}\}$ over Γ. Here RO is the class of all Borel measurable function parameters $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ such that $c^{-1} \leqslant \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leqslant c$ for every $t \geqslant 1$ and $\lambda \in [1,a]$, where the constants $a > 1$ and $c \geqslant 1$ does not depend on t and λ but depend on φ.

The Hilbert space $H^\varphi(\Gamma)$, with $\varphi \in \mathrm{RO}$, consists of all distributions on Γ that belong in local coordinates to the isotropic Hörmander space $\{w \in S'(\mathbb{R}^n) : \varphi(\langle\xi\rangle)\,(Fw)(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)\}$. Here $n := \dim\Gamma$, $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$, and Fw is the Fourier transform of w. The space $H^\varphi(\Gamma)$ does not depend (up to equivalence of norms) on a choice of local charts covering Γ. The extended Sobolev scale coincides with the class of all Hilbert spaces that are interpolation spaces with respect to the Sobolev Hilbert scale $\{H^{(s)}(\Gamma) : s \in \mathbb{R}\}$.

We consider mixed-order elliptic matrix differential operators on the extended Sobolev scale over Γ. The following results are obtained [1]:

- a theorem on the Fredholm property of the elliptic operators;
- new a priori estimates for solutions to the elliptic systems;
- theorems on the local regularity of the solutions;
- a new sufficient condition for the solutions to have continuous derivatives.

Uniformly elliptic matrix operators are investigated on the extended Sobolev scale over $\mathbb{R}^n$ as well [2].

References

1. *Zinchenko T. N.* Elliptic systems on the extended Sobolev scale // Dopov. Nats. Acad. Nauk. Ukr. — 2013. — No 3. [in Russian]
2. *Zinchenko T. N., Murach A. A.* Douglis–Nirenberg elliptic systems in Hörmander spaces // Ukrainian Math. J. — 2012. — Vol. 64, No 11. — P. 1477–1491. [in Russian]

On the Dirichlet and Neumann problems for parabolic non-divergence equations with coefficients measurable in time

A. I. Nazarov

Saint-Petersburg Department of Steklov Institute, Russia
and Saint-Petersburg State University, Russia
al.il.nazarov@gmail.com

We consider the Dirichlet problem for non-divergence parabolic equation with discontinuous in t coefficients in a half-space and in a wedge. The main result is weighted coercive estimates of solutions in anisotropic Sobolev spaces. We give an application of these results to linear and quasi-linear parabolic equations in a bounded domain. Here we consider the case of $C^{1,\delta}$-boundary, $\delta \in [0,1]$, as well as the case of domain with an edge or with a conical point.

Similar results are obtained for the oblique derivative problem.

The talk is based on joint papers with V.A. Kozlov.

References

1. *Kozlov V. A., Nazarov A. I.* The Dirichlet problem for non-divergence parabolic equations with discontinuous in time coefficients // Math. Nachr. — 2009. — Vol. 282, No 9. — P. 1220–1241.
2. *Kozlov V. A., Nazarov A. I.* The Dirichlet problem for non-divergence parabolic equations with discontinuous in time coefficients in a wedge // Preprint `http://arxiv.org/abs/1112.3031`. — 37 p.
3. *Kozlov V. A., Nazarov A. I.* Oblique derivative problem for non-divergence parabolic equations with discontinuous in time coefficients. — in preparation.

Partially supported by RFBR grant 12-01-00439.

Integro-differential operator in the mathematical modeling of diffraction problem on impedance grating

K. V. Nesvit

Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine
Kateryna.V.Nesvit@univer.kharkov.ua, nesvit.k@gmail.com

Surface impedance of metal is the one of the more important of physics characteristics which is definition of amplitudes and phases relations between electrical and magnetic fields on its surface. Thus, create of mathematic model of diffraction on impedance grating is actual.

In 2D a total electromagnetic field is represented as superposition of two independent fields: $\overrightarrow{E}\left(E_x,0,0\right)$, $\overrightarrow{H}\left(0,H_y,H_z\right)$ is the E polarization; and $\overrightarrow{E}\left(0,E_y,E_z\right), \overrightarrow{H}\left(H_x,0,0\right)$ is the H polarization. At that, a stationary Maxwell equations are led to two independent differential stationary wave equations. Surface of component of the requited field $E_x(y,z)$ or $H_x(y,z)$ corresponding is satisfy Helmholtz equation out of the strips, Sommerfeld radiation conditions in infinity and Meixner condition on edges of strips [1]-[4].

Case H polarization in the diffraction problem of monochromatic wave on impedance grating with pre-Cantor set of strips is considered in the present paper.

$$Strips^{(N)} = \left\{x \in \Re,\ y \in St^{(N)},\ z = 0\right\}, \quad St^{(N)} = \bigcup_{q=1}^{2^N} \left(a_q^N, b_q^N\right). \tag{1}$$

As showed in [1]– [4] the problem lead to two double integral equations:

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B_1^N(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0, \quad y \in CSt^{(N)} = R \backslash St^{(N)}, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\gamma(\lambda) + B\right) B_1^N(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = f_1^N(y), \quad y \in St^{(N)}, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B_2^N(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0, \quad y \in CSt^{(N)}, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B_2^N(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda + B \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_2^N(\lambda)}{\gamma(\lambda)+B} e^{i\lambda y} d\lambda = f_2^N(y), \quad y \in St^{(N)}. \end{cases} \tag{3}$$

Parametric representations of integro-differential operator [1], [2] and integral operator [1] had the form:

$$\begin{cases} F_1^N(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} B_1^N(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda, \\ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1^N(\xi)}{(\xi-y)^2} d\xi = - \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda|\, B_1^N(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \end{cases} \tag{4}$$

$$
\begin{cases}
F_1^N(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} B_1^N(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda, \\
\frac{i}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}\left(k\left|\xi - y\right|\right) F_1^N(\xi) d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{B_1^N(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} e^{i\lambda y} d\lambda.
\end{cases}
\tag{5}
$$

Double integral equations formula (2), (3) is led to boundary hypersingular integral equations (HSIE) on a system intervals and Fredholm equation of second kind with using the parametric representations formulas (4), (5) making the as well as in [4]:

$$
\begin{cases}
\frac{1}{\pi} \int\limits_{St^{(N)}} \frac{F_1^{(N)}(\xi)}{(\xi - y)^2} d\xi - \frac{k^2}{\pi} \int\limits_{St^{(N)}} \ln\left|\xi - y\right| F_1^{(N)}(\xi) d\xi + \\
+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{St^{(N)}} Q^{(N)}(y,\xi) F_1^{(N)}(\xi) d\xi = -f_1^{(N)}(y), \quad y \in St^{(N)}, \\
F_2^N(y) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{St^{(N)}} F_2^N(\xi) P(y,\xi) d\xi = f_2^N(y), \quad y \in St^{(N)},
\end{cases}
\tag{6}
$$

where $f_1^N(y), f_2^N(y), Q(y,\xi), P(y,\xi)$ is known functions.

Discrete mathematical model of these equations was created.

References

1. *Gandel' Yu. V.* Parametric Representations of Integral and Pseudodifferential Operators in Diffractions Problems // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. — Dnipropetrovsk, Ukraine, 2004. — P. 57–62.
2. *Gandel' Yu. V.* Boundary — Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models // Journal of Mathematical Sciences, Springer Science + Business Media, Inc., 2010. — Vol. 171, No. 1. — P. 74–88.
3. *Gandel' Yu. V., Dushkin V. D.* Mathematical models of two-dimensional diffraction problems: Singular integral equations and numerical methods of discrete singularities. Monograph. (Academy IF MIA of Ukraine, Kharkov, 2012) [in Russian].
4. *Gandel' Yu. V., Kravchenko V. F., Pustovoit V. I.* The scattering of electromagnetic waves by a thin superconducting strip Doklady Earth Sciences. — 1996. — V. 351, No 4. — P. 462–464.

Solvability of the first boundary-value problem for functional differential equations

D. Neverova

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
dneverova@gmail.com

We consider the solvability of the first boundary-value problem for functional differential equations with an arbitrary continuous right-hand side on a finite interval $(0, d)$ and the smoothness of solutions to such problems. This kind of problems have important applications such as the damping problem for a control system with aftereffect [1], the study of elastic deformations of multilayered plates and shells [2], etc. Together with these problems are closely associated differential equations with nonlocal boundary conditions, which arise in the plasma theory [3, 4]. The solutions of boundary-value problems for differential-difference equations have some fundamentally new properties. For example, smoothness of generalized solutions to the boundary-value problem for a differential-difference equation with the shifted argument in the higher derivative can be violated even for the infinitely differentiable right-hand side of the equation (see [4–6]).

We investigate the following differential-difference equation

$$-\frac{d^2}{dt^2}(R_0 u(t)) + \frac{d}{dt}(R_1 u(t)) + R_2 u(t) = f(t) \qquad (t \in (0, d))$$

with the homogeneous boundary condition

$$u(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R} \setminus (0, d)),$$

where R_i are difference operators defined by

$$R_i u(t) = \sum_{j=-m}^{m} b_{ij}(t) u(t + j) \qquad (i = 0, 1, 2).$$

Here m is an integer and $b_{ij}(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ are complex-valued functions.

It was proved that in the case of constant coefficients of difference operators the lack of shifts in the derivatives of the unknown function was necessary and sufficient for the existence of a classical solution provided that the problem had a weak solution (see [7]). We have proved the existence of classical solutions to the boundary-value problem for a differential-difference equation with an arbitrary continuous right-hand side also in the case of variable coefficients.

This work was supported by supported by RFBR grant project No. 12-01-31454.

References

1. *Krasovskii N. N.* Control Theory of Motion. — Moscow: Nauka, 1968 [in Russian].
2. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Differential equations with displaced arguments in stationary problems in the mechanics of a deformed body // Prikladnaya Mekhanika. — 1979. — Vol. 15. — P. 39-47; English transl. in Soviet Applied Mech. — 1979. — Vol. 15.
3. *Bitsadze A. V., and Samarskii A. A.* On some simple generalizations of linear elliptic boundary value problems // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1969. — Vol. 185. — P. 739-740; English transl. in Soviet Math. Dokl. — 1969. — Vol. 10.
4. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 1997.
5. *Kamenskii G. A., Myshkis A. D.* Formulation of boundary-value problems for differential equations with deviating arguments containing highest-order terms // Differentsial'nye Uravneniya. — 1974. — Vol. 10. — P. 409–418; English transl. in Differential Equations. — 1975. — Vol. 10.
6. *Kamenskii A. G.* Boundary value problems for equations with formally symmetric differential-difference operators // Differentsial'nye Uravneniya. — 1976. — Vol. 12. — P. 815–824; English transl. in Differential Equations. — 1977. — Vol. 12.
7. *Neverova D. A., Skubachevskii A. L.* Generalized and classical solutions of the boundary value problem for differential-difference equations // Doklady Akad. Nauk. — Vol. 447, No 2. — P. 143–147; English transl. in Doklady Mathematics. — Vol. 86, No 3.

About the traces of generelized solutions of differential-difference equations with degeneration

V. A. Popov

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
volodimir.a@gmail.com

Functional differential equations with degeneration in the case where the operator is a composition of a strongly elliptic differential operator and a degenerate differential operator were studied by Skubachevskii. He proved that such problems can be reduced to nonlocal boundary value problems, which have applications to the theory of plasma [2, 3].

In [1],Keldysh showed that elliptic differential equations with degenerations may be well posed even if one imposes no boundary conditions on a part of the boundary. There is a similar phenomenon in the theory of elliptic functional differential equations with degeneration [2, 3].

We consider functional differential equations which involve several degenerate difference operators. Unlike strongly elliptic functional differential equations, smoothness of generalized solutions to elliptic functional differential equations with degeneration can be violated [2, 3, 6, 7]. Moreover, generally speaking, generalized solution of such equation does not belong even to the Sobolev spaces of first order. A priori estimates were obtained in [4, 5].

In this work we obtained necessary and sufficient conditions of the existence for traces of generalized solutions on some parts of a boundary.

References

1. *Keldysh M. V.* On some cases of degeneration of elliptic type on the boundary of a domain // Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.). — 1951. — Vol. 77:2. — P. 181–183.
2. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel-Boston-Berlin: Birkhauser, 1997. [in English].
3. *Skubachevskii A. L.* Elliptic differential-difference equations with degeneration // Trudy Moskov. Matem. Obshtsh. — 1997. — Vol. 59. — P. 240–285; English transl. in Trans. of Moscow Math. Soc. — 1997. — Vol. 59.
4. *Popov V. A., Skubachevskii A. L.* Sectorial Differential Difference Operators with Degeneration // Doklady Mathematics. — 2009. — Vol. 80, No 2. — P. 716–719.
5. *Popov V. A., Skubachevskii A. L.* A priori estimates for elliptic differential-difference operators with degeneration // Journal of Mathematical Sciences. — Vol. 171, No 1. — P. 130–148.

This work was supported by the German-Russian Interdisciplinary Science Center (G-RISC) funded by the German Federal Foreign Office via the German Academic Exchange Service (DAAD) project No. M-2012b-5, Russian Foundation for Basic Research, project No. 12-01-00524, No. 12-01-31454.

6. *Popov V. A., Skubachevskii A. L.* Smoothness of generelized solutions of elliptic differential-difference equations with degeneration // Sovr. Math. Fund. Napravl. — 2011. — Vol. 39. — P. 130–140.
7. *Popov V. A., Skubachevskii A. L.* Smoothness of generalized solutions of elliptic difference-differential equations with degeneration near boundaries of subdomains // Russ. Math. Surv. — 2011. — Vol. 66. — P. 1204–1206. [in Russian]

On integral operators with the generalized hypergeometric functions

N. Virchenko

National Technical University of Ukraine "KPI", Kyiv, Ukraine, nvirchenko@hotmail.com

The important role played by special functions, particularly the hypergeometric function in solving numerous problems in mathematical physics, engineering and applied mathematics is well known.

Let us introduce the following integral operators with the $r-$generalized confluent hypergeometric function, with the (τ,β)- hypergeometric function:

$$(N^a_{c,\lambda}f)(x) \equiv x^\lambda \int\limits_0^\infty (xt)^{a-1}\ {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-xt)f(t)dt, \tag{1}$$

where $x>0, \tau,\beta \subset R, Rec > Rea > 0, \tau-\beta<1,\ r>0,\ {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(...)$ is the $r-$generalized confluent hypergeometric function [1]:

$${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x) = \frac{1}{B(a,c-a)}\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{xt}\ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\delta;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt, \tag{2}$$

where $Re\gamma > Re\delta > 0, \{\delta,\gamma\}\subset R,\ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(...)$ is (τ,β) — function:

$${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{1}{B(a,c-a)}\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\ {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c|c} (c;\tau); & \\ (c;\beta); & zt^\tau \end{array}\right]dt, \tag{3}$$

here ${}_1\Psi_1[...]$ is the generalized Fox-Wright function [2].

Some functional, differential, composition relations for these integral operators are proved.

Applications of (1) to the solving of the dual integral equations are given.

References

1. *Virchenko N.*,On the generalized confluent hypergeometric function and its application // J. "Fract. Calc. Appl. Anal." **9,** No 2 (2006), P. 101–108.
2. *Kilbas A.A. and Saigo M.*, **H-**Transforms. Chapman and Hall/CRC, 2004, 390 p.

Дробные степени операторов, отвечающих коэрцитивным задачам в липшицевых областях

М. С. Агранович*, **А. М. Селицкий**†

* *Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», Москва, Россия, magran@orc.ru*

† *Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия, selitsky@mail.ru*

Пусть Ω — ограниченная липшицева область в R^n $(n > 1)$, и пусть в ней задан матричный сильно эллиптический оператор в частных производных 2-го порядка, записанный в дивергентной форме. Обширная литература посвящена изучению дробных степеней такого оператора с условиями Дирихле, Неймана, а также со смешанными граничными условиями. Охвачены также операторы высших порядков.

Мы предлагаем новый абстрактный подход к этой проблематике, позволяющий существенно проще получить основные результаты и охватить новые операторы — классические граничные операторы на липшицевой границе Γ области Ω или ее части Γ_1.

Fractional Powers of Operators Corresponding to Coercitive Problems in Lipschitz Domains

M. S. Agranovich*, **A. M. Selitskii**†

* *Moscow Institute of Electronics and Mathematics of National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russia magran@orc.ru*

† *Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow, Russia selitsky@mail.ru*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-01-00277 и проект № 12-01-00524-а.

О регуляризации задачи Коши для уравнения Лапласа

Ш. А. Алимов*, Н. Н. Очилов*, В. В. Тихомиров†

* *Ташкентский филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Ташкент, Узбекистан*
sh_alimov@mail.ru, max074777@mail.ru

† *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, zedum@cs.msu.su*

В 1917 Жак Адамар, выступая в Цюрихе на конгрессе Швейцарского математического общества, утверждал, что граничная задача для дифференциального уравнения с частными производными правильно поставлена, если решение этой задачи существует и является единственным. В качестве неправильно (некорректно) поставленной задачи он привел свой знаменитый пример задачи Коши для уравнения Лапласа: решение может не существовать даже для сколь угодно гладких граничных данных. Как следствие, в случае, когда это решение существует, оно не может непрерывно зависеть от граничных данных, в то время как решение каждой правильно поставленной физической задачи должно непрерывно зависеть от результатов измерений. В данной работе рассматривается спектральный метод регуляризации задачи Коши для уравнения Лапласа.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область и пусть $\{\lambda_k\}$ и $\{v_k(x)\}$ собственных значений и собственных функций краевой задаче:

$$-\Delta v_k(x) = \lambda_k v_k(x),\ x \in \Omega, \quad v_k|_{\partial\Omega} = 0.$$

Рассмотрим в цилиндре $Q = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}: \ x \in \Omega,\ 0 < t < T\}$ уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

с граничным условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2}$$

и начальными условиями Коши

$$u(x,0) = \phi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Решение

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi, v_k) \cosh \sqrt{\lambda_k} t\ v_k(x). \tag{4}$$

Для $\alpha > 0$ регуляризованное решение определяется

$$u_\alpha(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi, v_k)\ \cosh \sqrt{\lambda_k} t\ e^{-\alpha\lambda_k t} v_k(x). \tag{5}$$

Задача состоит в том, чтобы оценить для $0 \leqslant t \leqslant T$ следующую сумму

$$R_\alpha(x,t,\phi) \equiv u(x,t) - u_\alpha(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi, v_k) \cosh \sqrt{\lambda_k} t \left[1 - e^{-\alpha\lambda_k t}\right] v_k(x). \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть* $0 \leqslant \tau \leqslant 1$*. Если* $u(x,t) \in W_2^{2\tau,0}(\Omega)$*, то*

$$\|u(x,T) - u_\alpha(x,T)\|_{L_2} \leqslant C\alpha^\tau |u(x,T)\|_{W_2^{2\tau}}. \tag{7}$$

1. Отметим, что в теореме 1, будем считать, что $\tau \leqslant 1$. В случае, если $\tau > 1$, то из оценки (13) что $f \equiv 0$ в Ω. Это процесс называется *насыщением* [4].

Теорема 2. *Предположим, что оценка (7) справедлива для некоторого* $\tau > 1$*. Тогда* $u(x,t) \equiv 0$ *для* $x \in \Omega$ *и* $0 \leqslant t \leqslant T$*.*

Теорема 3. Пусть $0 < \tau < 1$. Если функция f, определенная равенством (101), принадлежит пространству $W_2^{l,0}(\Omega)$, где

$$l \geqslant \frac{n}{2} + 4\tau, \tag{8}$$

то выполняется равномерная на каждом компакте $K \subset \Omega$ оценка:

$$u_\alpha(x,-T) = u(x,-T) + O(\alpha^\tau). \tag{9}$$

Литература

1. *Hadamard J.* Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Dover Phoenix editions. — New York: Dover Publications, [1923] 2003. — ISBN 978-0-486-49549-1.
2. *Tychonoff A. N.* On the stability of inverse problems, Doklady Akad. Nauk SSSR. — 1943. — Vol. 39 (5). — P. 195–198.
3. *Lavrentyev JM. M.* On Cauchy problem for the Laplace equation // Dokl. Akad. Nauk. — 1955. — Vol. 102, № 2. — P. 205–206, 1955.
4. *Il'in V. A.*. Spektralnaya Teoriya Diff. Oper, 2008.

On the regularization of the Cauchy problem for Laplace equation

Sh. A. Alimov*, N. N. Ochilov*, V. V. Tikhomirov†

* *Tashkent Branch of Moscow State Lomonosov University, Tashkent, Uzbekistan*
sh_alimov@mail.ru, max074777@mail.ru

† *Moscow State Lomonosov University, Moscow, Russia*
zedum@cs.msu.su

Математическое моделирование в задачах просветления оптики

И. А. Ахмедов, Ю. И. Худак

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики, Москва, Россия
ilzarka@gmail.com, hudak@mirea.ru

Работа посвящена математическому моделированию электромагнитных полей в многослойных магнитодиэлектрических системах (МДС). МДС имеют широкое применение в радиотехнике, оптике и геофизике (см., например, [1, 2]). Однако, решения многих задач для таких систем (см., например, [3–5]) мало изучены, даже при $N = 2, 3$.

В докладе развиваются элементы теории МДС, важные для задач просветления, синтеза диэлектрических зеркал и фильтров. Приведена теорема, описывающая решения классической задачи просветления для двухслойных МДС и дана математическая постановка задачи просветления в смысле Чебышева. Проведены исследования локализации нулей профилирующих функций двухслойных МДС и областей просветления таких систем.

Литература

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Физматлит, 1970.
2. *Кард П. Г.* Анализ и синтез многослойных интерференционных плёнок. — Таллин, Валгус, 1971.
3. *Akhmedov I. A., Hudak Yu. I.* Mathematical modeling for the purpose of anti-reflective optical systems // Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation (22–27 August 2011). — Vol. 1, V.I. Burenkov, M.L. Goldman, E.B. Laneev, V.D. Stepanov Editors, Moskow, Peoples' Friendship University of Russia, 2012. — P. 123–127.
4. *Худак Ю. И.* О задаче просветления в классической постановке // Доклады АН. — 2013. — Т. 448, № 5. — С. 1–4.
5. *Худак Ю. И.* О наилучшем однослойном просветляющем покрытии для интервала частот // ЖВМ и МФ. — 1990. — Т. 30, № 2. — С. 325–327.

Mathematical modeling for the purpose of anti-reflective optical systems

I. A. Akhmedov, Yu. I. Hudak

Moscow State Technical University Radiotechnics, Electronics and Automation Moscow, Russia
ilzarka@gmail.com, hudak@mirea.ru

Об ограниченности оператора Штурма–Лиувилля

Ш. Билал

Институт математики и математического моделирования
Алматы, Казахстан, bilal44@mail.ru

Рассматривается оператор $\mathcal{L}_p$, соответствующий уравнению Штурма–Лиувилля в L_p , $1 < p \leqslant \infty$:

$$\mathcal{L}_p y \equiv -(\rho(x)y'(x))' + \upsilon(x)y(x) = 0. \tag{1}$$

Существует $\mathcal{L}_p^{-1}$ и он ограничен в L_p, где $r(\cdot) \in L_q^{loc}$ неотрицательная функция. Введем

$$d_+(x) = \sup\left\{ d > 0 : \int\limits_x^{x+d} \rho^{-1}(s)ds \int\limits_x^{x+d} \upsilon(s)ds \leqslant 1\,, \quad [x, x+d) \subset J \right\},$$

$$d_-(x) = \sup\left\{ d > 0 : \int\limits_{x-d}^{x} \rho^{-1}(s)ds \int\limits_{x-d}^{x} \upsilon(s)ds \leqslant 1\,, \quad (x-d, x] \subset J \right\}.$$

$$\varphi_+(x) = \int\limits_x^{x+d_+(x)} \rho^{-1}(s)ds\,, \quad \varphi_-(x) = \int\limits_{x-d_-(x)}^{x} \rho^{-1}(s)ds.$$

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $(\rho, \upsilon) \in K_p(\delta, \gamma)$. *Тогда оператор* $r\mathcal{L}_p^{-1}$ *ограниченно действует из* L_p *в* L_q, $1 < p \leqslant q < \infty$ *тогда и только тогда, когда*

$$S_{p,q} = \sup_{x\in J}\Big[(\rho\varphi_-)^{1/p'}\Big(\int\limits_x^{x+\rho\varphi_-} r^q\Big(\frac{\varphi_-\varphi_+}{\varphi_- + \varphi_+}\Big)^q ds\Big)^{1/q} +$$

$$+(\rho\varphi_+)^{1/p'}\Big(\int\limits_{x-\rho\varphi_+}^{x} r^q\Big(\frac{\varphi_-\varphi_+}{\varphi_- + \varphi_+}\Big)ds\Big)^{1/q}\Big] < \infty. \tag{3}$$

праведлива оценка

$$C_1 S_{p,q} \leqslant \|r\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p\to q} \leqslant C_2 S_{p,q}. \tag{4}$$

Лемма 1. *Оператор* $r\mathcal{L}_p^{-1}$, $r(\cdot) \in L_q^{loc}$, *ограниченно действует из* L_p *в* L_q, $1 < p \leqslant q < \infty$ *тогда и только тогда, когда*

$$B_{p,q} = \sup_{x \in J} \Big(\|y_-\|_{p',(a,x)} \cdot \|ry_+\|_{q,(x,b)} \Big) + $$

$$+ \sup_{x \in J} \Big(\|y_+\|_{p',(x,b)} \cdot \|ry_-\|_{q,(a,x)} \Big) < \infty. \qquad (5)$$

При этом имеет место оценка

$$C_1 B_{p,q} \leqslant \|r\mathcal{L}_p^{-1}\|_{p \to q} \leqslant C_2 B_{p,q}\,. \qquad (6)$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда*

$$e^{-2\gamma p'} \rho(x)\varphi_+(x) y_+^{p'}(x) \leqslant \int_x^b y_+^{p'}(s)ds \leqslant \frac{y_+^{p'}(x)\rho(x)\varphi_+(x)}{1 - e^{-\delta(p'/2)}\gamma}\,. \qquad (10)$$

$$e^{-2\gamma p'} \rho(x)\varphi_-(x) y_-^{p'}(x) \leqslant \int_x^b y_-^{p'}(s)ds \leqslant \frac{y_-^{p'}(x)\rho(x)\varphi_-(x)}{1 - e^{-\delta(p'/2)}\gamma}\,. \qquad (11)$$

Теорема 2. *Пусть* $(\rho, v) \in K_p(\delta,\gamma)$ $1 < p \leqslant \infty$. *Тогда оператор* $r\mathcal{L}_p^{-1}$, $r(\cdot) \in C^{loc}(J)$, *ограниченно действует из* L_p *в* $L_\infty(J)$ *тогда и только тогда, когда*

$$S_p = \sup_{x \in J} \Big(r(x)\rho^{1/p'}(x)\varphi_-(x)\varphi_+(x) \frac{\varphi_+^{1/p'} + \varphi_-^{1/p'}}{\varphi_- + \varphi_+} \Big) < \infty\,.$$

The boundedness of the operator Sturm–Liouville

Sh. Bilal

Institute of mathematical and mathematical modeling Almaty, Kazakhstan, bilal44@mail.ru

Задача Коши для класса линейных нагруженных уравнений соболевского типа

Л. В. Борель

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
lidiya904@mail.ru

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ (т. е. линеен и непрерывен), $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ (линеен, замкнут и плотно определен). Рассмотрим задачу Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения соболевского типа

$$u(0) = u_0, \tag{1}$$

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)u(s)d\mu(s), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

где μ – функция ограниченной вариации на $[0,T]$. Решением задачи (1), (2) называется функция $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U})$, удовлетворяющая уравнению (2) на отрезке $[0,T]$ и начальному условию (1).

Для сильно (L,p)-радиального оператора M [1], оператор-функции $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$ и функции ограниченной вариации $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ определим при $T > 0$

$$F(T) = V_0^T(\mu)K(T)\|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})}\sum_{n=0}^{p+1}\max_{t,s\in[0,T]}\left(s\left\|\frac{\partial^n\mathcal{K}}{\partial t^n}(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}:\mathfrak{V})}\right)+$$

$$+V_0^T(\mu)\max_{k=0,1,\ldots,p}\|H^kM_0^{-1}(I-Q)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})}\sum_{n=0}^{p+1}\max_{t,s\in[0,T]}\left\|\frac{\partial^n\mathcal{K}}{\partial t^n}(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})}.$$

Здесь $K(T) = \max\{K, Ke^{aT}\}$, K, a – константы из определения сильной (L,p)-радиальности.

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $u_0 \in \mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^1$, $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0,T]\times[0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\frac{\partial^n\mathcal{K}}{\partial t^n}(0,s) \equiv 0$ при $n = 0,1,\ldots,p$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ – функция ограниченной вариации, $F(T) < 1$. Тогда существует единственное решение $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U})$ задачи* (1), (2).

Обозначения для операторов Q, L_1^{-1}, M_0^{-1}, H и подпространства $\mathfrak{U}^1$ можно найти в [1].

Частным случаем задачи (1), (2) является начально-краевая задача

$$z(x,0) = z_0(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{3}$$

$$z(0,t) = z_{xx}(0,t) = z(\pi,t) = z_{xx}(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,1], \tag{4}$$

для нагруженного псевдопараболического уравнения

$$-z_t(x,t) - z_{txx}(x,t) = z_{xx}(x,t) - 2z_{xxxx}(x,t) + cz(x,1) \tag{5}$$

в цилиндре $\Omega = (0,\pi) \times [0,1]$. Имеем $F(1) \geqslant |c| \left(\frac{17}{18} + \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$. Пусть $z_0 \in H^4(0,\pi)$ удовлетворяет условиям (4), $\int\limits_0^\pi z_0(x) \sin x dx = 0$,

$$|c| < \frac{18}{17 + 3\sqrt{2}}.$$

Тогда существует единственное решение $z \in C^1([0,1]; H^2(0,\pi))$ задачи (3)–(5).

Литература

1. *Федоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. — 2000. — Т. 12, № 3. — С. 173–200.

The Cauchy problem for a class of linear weighted Sobolev-type equations

L. V. Borel

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
lidiya904@mail.ru

О минимальных периодах решений функционально-дифференциальных уравнений высших порядков

Е. И. Бравый

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия
Bravyi@perm.ru

Рассмотрим периодическую краевую задачу для системы m функционально-дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = (Fx)(t), \quad t \in [0,T], \\ x^{(i)}(0) = x^{(i)}(T), \quad i = 0,\dots,n-1, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^m$, отображение $F : \mathbf{C}([0,T],\mathbb{R}^m) \to \mathbf{L}_\infty([0,T],\mathbb{R}^m)$ таково, что при некоторой константе L для каждой функции $x \in \mathbf{C}([0,T],\mathbb{R}^m)$ выполнено неравенство

$$\begin{gathered} \max_{i=1,\dots,m} \left(\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,T]} (Fx)_i(t) - \operatorname*{vrai\,inf}_{t\in[0,T]} (Fx)_i(t) \right) \leqslant \\ \leqslant L \max_{i=1,\dots,m} \left(\max_{t\in[0,T]} x_i(t) - \min_{t\in[0,T]} x_i(t) \right). \end{gathered} \tag{2}$$

Если $(Fx)(t) = f(x(\tau(t)))$, $t \in [0,T]$, при измеримой $\tau : [0,T] \to [0,T]$, то условие (2) эквивалентно липшицевости функции $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$: при всех y, $z \in \mathbb{R}^m$

$$\max_{i=1,\dots,m} |f_i(y) - f_i(z)| \leqslant L \max_{i=1,\dots,m} |y_i - z_i|. \tag{3}$$

Определим рациональные константы K_n равенствами

$$K_n = \begin{cases} \dfrac{(2^{n+1}-1)|B_{n+1}|}{2^{n-1}(n+1)!}, \text{если } n \text{ нечетное}, \\ \dfrac{|E_n|}{4^n n!}, \text{если } n \text{ четное}, \end{cases}$$

где B_n — числа Бернулли, E_n — числа Эйлера.

Теорема 1. *Если*

$$T \geqslant \frac{1}{(L\,K_n)^{1/n}}, \tag{4}$$

то периодическая задача (1) не имеет непостоянных решений.

Оценки (4) минимальных периодов являются точными: ни одна из констант K_n в теореме 1 не может быть уменьшена.

Имеет место рекуррентное соотношение

$$K_{n+1} = \frac{1}{8(n+1)} \sum_{k=0}^{n} K_k K_{n-k}, \quad n \geqslant 1,\ K_0 = 1,\ K_1 = 1/4.$$

Последовательность K_n имеет простую производящую функцию:

$$\frac{1}{\cos(t/4)} + \operatorname{tg}(t/4) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n t^n, \quad |t| < 2\pi.$$

Кроме того, $\lim_{n\to\infty} K_n (2\pi)^n = 4/\pi$. Имеем $K_1 = 1/4$, $K_2 = 1/32$, $K_3 = 1/192$, $K_4 = 5/6144$, $K_5 = 1/7680\ldots$

Точные константы в неравенстве (4) для систем автономных липшицевых обыкновенных дифференциальных уравнений определены в [1] для $n = 1$, [2] для $n \geqslant 1$ (в евклидовой норме), в [3] (для четных n и удовлетворяющих условию (3) функций f). Для уравнений с отклоняющимся аргументом $x^{(n)}(t) = f(x(\tau(t))$ при условии (3) наилучшие константы K_n вычислены только при $n = 1$ [4] и четных n [3] (в последнем случае константы были определены с помощью решений некоторой краевой задачи для уравнений n-го порядка).

Литература

1. *Yorke J.* Periods of periodic solutions and the Lipschitz constant // Proc. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 22. — P. 509–512.
2. *Mawhin J., Walter W.* A General Symmetry Principle and Some Implications // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1994. — Vol. 186 (3). — P. 778–798.
3. *Zevin A. A., Pinsky M. A.* Minimal periods of periodic solutions of some Lipschitzian differential equations // Applied Mathematics Letters. — 2009. — Vol. 22 (10). — P. 1562–1566.
4. *Зевин А. А.* Точные оценки периодов и амплитуд периодических решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Докл. АН. — 2007. — Т. 415, № 2. — С. 160–164.

On minimal periods of solutions of higher-order functional differential equations

E. I. Bravyi

State National Research Politechnical University of Perm, Perm, Russia
Bravyi@perm.ru

Метод формул Фейнмана для описания эволюционных систем

Я. А. Бутко

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия, yanabutko@yandex.ru

Доклад посвящён новому методу описания эволюции. Метод основан на представлении решения соответствующего эволюционного уравнения в виде формулы Фейнмана, т.е. в виде предела кратных интегралов при стремлении кратности к бесконечности. Такой подход к описанию эволюции применим к различным классам уравнений на разнородных геометрических структурах (см. [1]– [9] и ссылки в них). В некоторых случаях удаётся получить формулы Фейнмана, содержащие только интегралы от элементарных функций. Такие формулы пригодны для непосредственного вычисления решения, для аппроксимации переходных вероятностей случайных процессов, для компьютерного моделирования классической, стохастической и квантовой динамики. На докладе будут представлены формулы Фейнмана для решения различных задач. Планируется рассмотреть задачу Коши и задачу Коши–Дирихле для параболических уравнений и уравнений типа Шрёдингера в евклидовом пространстве и на римановом многообразии; задачу Коши для псевдо-дифференциальных уравнений, соответствующих случайным процессам феллеровского типа; формулы Фейнмана для аддитивных и мультипликативных возмущений динамики.

Пределы кратных интегралов в формулах Фейнмана как правило совпадают с функциональными интегралами по вероятностным мерам или псевдомерам фейнмановского типа.

Представления решений эволюционных уравнений с помощью функциональных интегралов по вероятностным мерам обычно называется формулами Фейнмана–Каца; такие представления позволяют исследовать рассматриваемую динамику методами стохастического анализа. Функциональные интегралы по псевдомерам фенмановского типа (интегралы Фейнмана по траекториям) являются важным объектом математического аппарата квантовой физики. Связь формул Фейнмана с функциональными интегралами позволяет получать новые формулы Фейнмана–Каца, вычислять функциональные интегралы (по бесконечномерным пространствам), находить новые соотношения между различными функциональными интегралами, устанавливать новые взаимосвязи между стохастическим анализом и квантовой механикой. В рамках доклада планируется обсудить формулы Фейнмана–Каца и интегралы Фейнмана, связанные с представленными формулами Фейнмана.

Некоторые из результатов получены совместно с О. Г. Смоляновым, Р. Шиллингом, М. Гротхаусом, Б. Бёттхером (см. [1]– [6]).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ МК-4255.2012.1, гранта Министерства образования и науки РФ 14.B37.21.0370, фонда DFG и программы Erasmus Mundus.

Литература

1. Böttcher B., Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G.. Feynman formulae and path integrals for some evolutionary semigroups related to τ-quantization // *Rus. J. Math. Phys.* **18** № 4 (2011), P. 387–399.
2. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations // *Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. Rel. Top.*, **15**, № 3 (2012), 26 pages, DOI: 10.1142/S0219025712500154.
3. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Hamiltonian Feynman–Kac and Feynman formulae for dynamics of particles with position-dependent mass // *Int. J. Theor. Phys.* **50** (2011), P. 2009–2018.
4. Butko Ya.A., Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman formulae for second order parabolic equations in bounded and unbounded domains // *Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. Rel. Top.* **13**, № 3 (2010), P. 377–392.
5. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Feynman formulae for Feller semigroups // *Dokl. Math.* **82**, № 2 (2010), P. 697–683.
6. Butko Ya.A., Grothaus M., Smolyanov O.G. Feynman formula for a class of second order parabolic equations in a bounded domain // *Dokl. Math.* **78**, № 1 (2008), P. 590–595.
7. Butko Ya.A. Feynman formulas and functional integrals for diffusion with drift in a domain on a manifold // *Math. Notes* **83**, № 3 (2008), P. 301–316.
8. Butko Ya.A. Function integrals corresponding to a solution of the Cauchy-Dirichlet problem for the heat equation in a domain of a Riemannian manifold // *J. Math. Sci.*, **151** № 1 (2008), P. 2629–2638.
9. Butko Ya.A. Functional integrals over Smolyanov surface measures for evolutionary equations on a Riemannian manifold // *Quant. Probab. White Noise Anal.* **20** (2007), P. 145–155.

The method of Feynman formulae for description of evolution systems

Ya. A. Butko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
yanabutko@yandex.ru

Оценки для некоторых дискретных операторов и связанные с ними дискретные уравнения

А. В. Васильев[*], В. Б. Васильев[†]

[*] *Белгородский государственный университет, Белгород, Россия*
alexvassel@gmail.com

[†] *Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия*
vladimir.b.vasilyev@gmail.com

Рассматривается дискретный аналог многомерного сингулярного интегрального оператора Кальдерона–Зигмунда следующего вида

$$u_h(\tilde{x}) \longmapsto \sum_{\tilde{y}\in\mathbf{Z}_h^m} K(\tilde{x}-\tilde{y})u_h(\tilde{y})h^m,\ \tilde{x}\in\mathbf{Z}_h^m, \tag{1}$$

где $K(x)$ – ядро Кальдерона–Зигмунда, $K(0) \equiv 0$, $\mathbf{Z}_h^m$ – целочисленная ($\mod h$) решетка в m-мерном пространстве $\mathbf{R}^m$, u_h – функция дискретного аргумента $\tilde{x} \in \mathbf{Z}_h^m$. С дискретным оператором (1) связаны различные типы дискретных уравнений как по всему «дискретному пространству» $\mathbf{Z}_h^m$, так и по дискретному полупространству $\mathbf{Z}_{h,\pm}^m = \{\tilde{x} \in \mathbf{Z}_h^m :\ \tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_m),\ \pm\tilde{x}_m > 0\}$. Ранее авторы рассматривали [1, 2] некоторые теоретические и численные аспекты решения дискретных уравнений

$$(aI + K_d)u_h = v_h,$$

где I – единичный оператор, a – постоянная, K_d – оператор (1), и связи между дискретными и континуальными уравнениями. В качестве функционального пространства выбиралось пространство $L_2(\mathbf{Z}_h^m)$. Однако для сравнения решений дискретного и континуального уравнения естественней использовать классы непрерывных функций. В связи с этим мы вводим дискретные аналоги пространств Гёльдера с весом [3], и в этих пространствах получаем оценку близости решений дискретного и континуального уравнений. Как установлено авторами, оператор (1) в таких дискретных пространствах Гёльдера с весом является линейным ограниченным оператором с нормой, не зависящей от шага решетки h.

Литература

1. *Васильев А. В., Васильев В. Б.* О дискретных свертках // Труды международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». — 2009. — Вып. 7. — С. 31–35.
2. *Васильев А. В., Васильев В. Б.* Численное решение некоторых классов двумерных сингулярных интегральных уравнений // Труды XV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей

в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011). — Харьков–Херсон, 13–18 июня 2011 г. — С. 108–111.
3. *Абдуллаев С. К.* Многомерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Гёльдера с весом // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 292, № 4. — С. 777–779.

Estimates for certain discrete operators and related discrete equations

A. V. Vasilyev*, **V. B. Vasilyev**†

* *Belgorod State University, Belgorod, Russia*
alexvassel@gmail.com

† *Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia*
vladimir.b.vasilyev@gmail.com

Об уточненной оценке резольвенты и позитивности одного класса матричных эллиптических операторов

М. Г. Гадоев, М. Н. Петрова

Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Мирный, Россия
gadoev@rambler.ru, sun1@mail.ru

В докладе речь идет об одном классе вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов A высшего порядка с сингулярными матричными коэффициентами, порожденных некоэрцитивными билинейными формами.

Оператор A рассматривается в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)^l$, где $\Omega \subset R^n$ — предельно-цилиндрическая область с нулевым радиусом на бесконечности (опр. см., например, [1]).

В работах [2]- [4] в случае, когда Ω — ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса, для достаточно больших по модулю $\lambda \in \mathbf{C}$, изменяющихся в некотором угле, получена оценка

$$\|(A-\lambda E)^{-1}\| \leqslant M|\lambda|^{-\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

В работе [5] установлена уточненная оценка резольвенты (1) оператора A с показателем 1 вместо $\frac{1}{2}$.

Отметим, однако, что случай, когда операторы заданы в неограниченной области, имеет свою специфику и в процессе исследования появляется ряд технических трудностей, которые неустранимы в общем случае. Поэтому появляется необходимость отдельно рассматривать специальные неограниченные области.

Авторам удалось получить уточненную оценку резольвенты для одного класса операторов и с ее помощью исследовать вопросы суммируемости в смысле Абеля–Лидского системы корневых вектор-функций и другие спектральные свойства оператора A.

Отметим, что ранее некоторые спектральные свойства других классов дифференциальных операторов, заданных в предельно-цилиндрической области, изучались в работе [6].

Литература

1. *Розенблюм Г. В.* // Проблемы мат.анализа. — Изд. ЛГУ, 1973. — № 4. — С. 95–106.
2. *Бойматов К. Х.* // Доклады РАН. — 1994. — Т. 339, № 1. — С. 5–10.
3. *Бойматов К. Х.* Функцион. анализ и его приложения. — 1995. — Т. 29, № 3. — С. 55–58.
4. *Бойматов К. Х., Исхоков С. А.* Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. — 1997. — Т. 214. — С. 107–134.
5. *Бойматов К. Х.* // Сибирский мат. журнал. — 2006. — Т. 47, № 1. — С. 46–57.

6. *Бойматов К. Х.* // Доклады АН СССР. — 1989. — Т. 308, № 1. — С. 11–14.

On improved estimate of resolvent and positivness of a class of matrix elliptic operators

M. G. Gadoev, M. N. Petrova

Polytechnic institute (branch) of North-Eastern Federal university named after M.K.Ammosov,Mirny, Russia
gadoev@rambler.ru, sun1@mail.ru

Псевдодифференциальные операторы и их приложения

Ю. В. Гандель

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина, Yuriy.V.Gandel@univer.kharkov.ua, yuriy.gandel@gmail.com

Функциональные пространства и псевдодифференциальные операторы [1]. Основные соотношения, спектральные свойства.

Обобщённые ряды и интегралы Фурье, параметрические представления псевдодифференциальных операторов [2, 3], индекс.

Сведение 2D краевых задач для уравнения Гельмгольца и 3D краевых задач для стационарных уравнений Максвелла к граничным интегродифференциальным уравнениям с использованием параметрических представлений псевдодифференциальных операторов [4, 5]. Приложение к задачам теории рассеяния и дифракции электромагнитных волн на периодических и плоскопараллельных структурах.

Литература

1. *Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полянская Т. С.* Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Ч. II. — Харьков: Изд. ХГУ, 1992.
2. *Gandel' Yu. V.* Parametric Representations of Integral and Psevdodifferential Operators in diffraction Problems // X International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Dnipropetrovsk, Ukraine. — 2004. — P. 57–62.
3. *Гандель Ю. В., Кононенко А. С.* Обоснование численного решения одного гиперсингулярного интегрального уравнения // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, № 9. — С. 1256–1262.
4. *Gandel' Yu. V.* Boundary-Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models // Journal of Mathematical Sciences. — Springer Science+Business Media, Inc., 2010. — Vol. 171, № 1. — P. 74–88.
5. *Гандель Ю. В., Мищенко В. О.* Псевдодифференциальные уравнения электромагнитной дифракции на плоскопараллельной структуре и их дискретная модель // Вестник Харьк. нац. ун-та: сб. науч. тр. (Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления»). — Харьков, 2006. — № 733, вып. 6. — С. 58–75.

Pseudodifferential operators and its applications

Yu. V. Gandel'

*Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine
Yuriy.V.Gandel@univer.kharkov.ua, yuriy.gandel@gmail.com*

Разрешимость задачи Шуолтера для одного класса полулинейных вырожденных эволюционных уравнений

П. Н. Давыдов, В. Е. Фёдоров

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
davydov@csu.ru, kar@csu.ru

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линеен и непрерывен), $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (линеен, замкнут и плотно определен). Известно, что при условии (L,p)-ограниченности оператора M существует нетривиальный проектор $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ вдоль ядра единицы разрешающей аналитической группы линейного уравнения $L\dot{u}(t) = Mu(t)$ на образ единицы (см. [1]), который далее обозначается через $\mathfrak{U}^1$. Для полулинейного вырожденного эволюционного уравнения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + N(t, u(t)), \tag{1}$$

где $N : U \to \mathfrak{F}$ — нелинейный оператор, U – открытое множество из $\mathbb{R} \times \mathfrak{U}$, рассмотрим так называемую обобщенную задачу Шоуолтера

$$Pu(t_0) = u_0. \tag{2}$$

Решением задачи (1), (2) на отрезкее $[t_0, t_1]$ назовем такую функцию $u \in C^1([t_0, t_1];\mathfrak{U})$, удовлетворяющую условию (2), что при всех $t \in [t_0, t_1]$ пара $(t, u(t)) \in U$, $u(t) \in \mathrm{dom} M$ и справедливо равенство (1).

Теорема 1. *Пусть оператор M $(L, 0)$-ограничен, множество $V = U \cap (\mathbb{R} \times \mathfrak{U}^1)$ открыто в $\mathbb{R} \times \mathfrak{U}^1$, сужение оператора $N : U \to \mathfrak{F}$ на множество V непрерывно по t, локально липшицево по u, $N(t, u) = N(t, Pu)$ при всех $u \in \mathfrak{U}$. Тогда для любых $(t_0, u_0) \in V$ существует такое $t_1 \in (t_0, T]$, что задача (1), (2) имеет единственное решение на $[t_0, t_1]$.*

Используем эту теорему для исследования разрешимости начально-краевой задачи для системы уравнений

$$(1 - \chi\nabla^2)v_t(x, t) = \nu\nabla^2 v(x, t) - (v \cdot \nabla)v(x, t) - r(x, t), \ (x, t) \in \Omega \times [0, T], \tag{3}$$

$$\nabla \cdot v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \tag{4}$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \tag{5}$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

моделирующей течение вязкоупругой несжимаемой жидкости [2]. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $n \leqslant 4$, $T > 0$. Параметр $\chi \in \mathbb{R}$ характеризует упругие свойства жидкости, а параметр $\nu \in \mathbb{R}_+$ — её вязкие свойства. Вектор-функции $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ (вектор скорости жидкости), $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ (градиент давления) неизвестны.

Введем обозначения $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$. Замыкание $\mathfrak{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot v = 0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ – через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Будем использовать также обозначение $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$. Обозначим через $\mathbb{H}_\pi$ ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, через $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ – соответствующие ортопроекторы.

В пространстве $\mathfrak{L}$ рассмотрим оператор $A = \Sigma\nabla^2$. Как известно, оператор A, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет вещественный, отрицательный, дискретный, конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ [3].

Формулой $N(v, r) = (v \cdot \nabla)v$ зададим оператор N, действующий из $\mathbb{H}_\sigma^2$ в пространснтво $\mathbb{L}_2$ при $n \leqslant 4$ в силу теоремы вложения Соболева. Учитывая уравнение несжимаемости (4), положим $\mathfrak{U} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathfrak{F} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$. Тогда формулами

$$L = \begin{pmatrix} I - \chi A & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\nabla^2 & \mathbb{O} \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} \nu A & \mathbb{O} \\ \nu\Pi\nabla^2 & -I \end{pmatrix}$$

определяются операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Если $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, то $\ker L = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$. В таком случае выполняются все условия теоремы 1, условие (2) эквивалентно условию (6) и задача (3)–(6) локально разрешима.

Литература

1. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht etc.: VSP, 2003.
2. *Осколков А. П.* Начально краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — Т. 179. — С. 126–164.
3. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961.

Showalter problem solvability for a class of semilinear degenerate evolution equations

P. N. Davydov, V. E. Fedorov

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
davydov@csu.ru, kar@csu.ru

О некоторых свойствах решений уравнений соболевского типа

Т. Е. Денисова

Московский городской психолого-педагогический университет, Москва, Россия, tdenissova@mail.ru, DenisovaTE@mgppu.ru

Как известно, первая начально-краевая задача

$$D_t^2 \Delta u(t, x, y) + D_2^2 u(t, x, y) = 0, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_1, \quad D_t u\big|_{t=0} = u_2, \quad u\big|_{[0,\,T]\times\partial\Omega} = 0 \quad \forall T \in \mathbb{R}^+ \tag{2}$$

для уравнения Соболева (1) не является корректно (по Адамару) поставленной в том смысле, что ее решение не зависит непрерывным образом от границы области. Это особенность уравнений (и систем уравнений) математической физики, не разрешенных относительно старшей производной по времени [1].

В [2] была предпринята попытка изучить поведение решения такой задачи для уравнений соболевского типа

$$D_t^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x) \cdot D_j u(t,x)) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} D_k(b_{kl}(x) \cdot D_l u(t,x)) = 0 \tag{3}$$

(предполагается, что в замыкании $\bar{\Omega}$ пространственной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ коэффициенты уравнения (3) бесконечно дифференцируемы, симметричны и обладают свойством равномерной эллиптичности).

Решение задачи (3), (2) ищется в пространстве

$$\{C_t^N(\mathbb{R}^+) \,\big|\, \exists m \in \mathbb{N}:\ D_t^k u \in W_2^m(\Omega) \ \text{ при } t \in \mathbb{R}^+\},$$

причем $N \geqslant 3$. Известно [3], что в этом случае решение существует и единственно.

Напомним, что идея предложенного метода исследования состоит в следующем: сначала на основе некоторого функционального пространства (в докладе это весовое пространство Соболева $W^N_{p,\,\alpha}(\mathbb{R}^+)$) определяется пространство функций одной переменной, содержащее осциллирующие функции; затем, исходя из соответствующих пространств Соболева, строятся некоторые пространства функций многих переменных, потом доказывается теорема о следах для этих двух типов пространств. Такой подход позволяет исследовать свойства решения задачи (3), (2) в пространственной области с минимально гладкой (определяемой требованиями соответствующих теорем вложения) границей.

Устанавливается, что поведение таких решений в каждой точке пространственной области зависит от того, какой рост имеет норма решения в некотором пространстве Соболева. Требование, чтобы этот рост был не выше степенного:

$$\left\| D_t^k u,\ W_2^m(\Omega') \right\| = O(t^{m-1} + 1), \tag{4}$$

является, в силу соответствующих теорем вложения, достаточным условием принадлежности решения некоторому пространству, содержащему осциллирующие функции. Показано, что с течением времени решение задачи (3), (2) не может монотонно расти.

Предложенный метод исследования свойств решения может быть применен к достаточно широкому классу уравнений; он позволяет рассматривать с единой точки зрения задачи, решения которых допускают оценку (4). Особый интерес представляет вопрос об описании классов уравнений, к которым может быть применен указанный метод. В частности, рассматриваемый подход обобщается на уравнения соболевского типа как с постоянными, так и с переменными (по пространственным, а также по всем переменным) коэффициентами.

Литература

1. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Т.I. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал «Гео» Изд-ва СО РАН, 2003. — С. 448–463.
2. *Денисова Т. Е.* Асимптотическое поведение решения первой начально-краевой задачи для уравнений соболевского типа с точки зрения осцилляции // Диф. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 2. — С. 196–206.
3. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга, 1998, 436 с.

Certain properties of Sobolev-type equations

T. E. Denisova

Moscow State University of Psychology & Education,
Moscow, Russia, tdenissova@mail.ru, DenisovaTE@mgppu.ru

Напряженное состояние пластического слоя с переменной по толщине прочностью

В. Л. Дильман, Т. В. Карпета

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия
dilman49@mail.ru

Неоднородные слои встречаются в сварных соединениях. Исследованию напряженного состояния и прочности неоднородных соединений посвящена обширная литература (см., например, [1, 2]). Напряженное состояние неоднородного пластического слоя определяется системой уравнений, состоящей из уравнений равновесия и условия пластичности Мизеса:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}=0; \tag{1}$$

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4Z^2(y); \tag{2}$$

$$\{(x;y): x\in[-1;1];\ y\in[-\varkappa;\varkappa]\}. \tag{3}$$

Здесь x и y — безразмерные координаты точек слоя, сечение которого — прямоугольник (3), $\varkappa$ — половина толщины слоя (длина слоя принята равной двум), σ_x, σ_y и τ_{xy} — безразмерные напряжения, функция $Z(y)$ — четная непрерывно-дифференцируемая функция, монотонная на $[0;\varkappa]$, характеризующая распределение прочностных свойств по толщине слоя (функция неоднородности слоя), $Z(0)=1$, $Z(\varkappa)=K_l$.

Система уравнений (1), (2) на характеристиках (интегральных кривых уравнений $dy/dx=\lambda_i$, $i=1;2$) имеет вид:

$$\frac{d(\sigma_x+\nu_i)}{dy}=\frac{\partial(\nu_i-f)}{\partial y}, \quad i=1;2, \tag{4}$$

$$\lambda_1=\frac{1-\tau_{xy}/Z}{\sqrt{1-(\tau_{xy}/Z)^2}}, \quad \lambda_2=\frac{-1-\tau_{xy}/Z}{\sqrt{1-(\tau_{xy}/Z)^2}},$$

$$\nu_i(\tau_{xy})=\sqrt{Z^2-\tau_{xy}^2}\pm Z\arcsin\frac{\tau_{xy}}{Z}$$

(знак плюс соответствует $i=1$, минус — $i=2$).

Пусть

$$\Delta=\frac{1}{Z}\int\limits_0^y Z'\left(\frac{1}{2}\frac{\tau_{xy}^2}{Z^2}\pm\frac{1}{3}\frac{\tau_{xy}^3}{Z^3}+\frac{3}{8}\frac{\tau_{xy}^4}{Z^4}+\dots\right)dy.$$

Интегрируя (4) вдоль характеристик, получим на каждой характеристике

$$\sigma_x+\nu_i+\mathrm{const}=-Z(1+\Delta). \tag{5}$$

Лемма. *Пусть всюду в слое* $\tau_{xy} < \alpha$. *Если* $K_l < 1$, *то* $|\Delta| \leqslant \dfrac{|K_l - 1|\alpha^2}{2K_l(1 - K_l\alpha)}$; *если* $K_l > 1$, *то* $|\Delta| \leqslant \dfrac{|K_l - 1|\alpha^2}{2(1 - \alpha)}$.

Например, если $\alpha = 0.3$, то при $K_l = 1.2$ $|\Delta| \leqslant 0.013$, а при $K_l = 0.8$ $|\Delta| \leqslant 0.022$.

Рассматривая случай небольшой механической неоднородности, можно, в силу леммы, (5) заменить на приближенные равенства $\sigma_x + \nu_i + Z = \mathrm{const}$ вдоль характеристик. Левая часть такого равенства является приближенным инвариантом Римана для системы уравнений (1), (2). Пусть γ — острый угол наклона характеристики к оси OX, $\theta = \gamma - \pi/4$.

Теорема. *Пусть точки* K, L, M *и* N *образуют (криволинейный) прямоугольник из характеристик. Тогда с точностью, определяемой леммой,*

$$Z(K)\theta(K) - Z(L)\theta(L) = Z(N)\theta(N) - Z(M)\theta(M) \tag{6}$$

При переходе от одной характеристики к другой одного семейства вдоль характеристики другого семейства изменение величин $Z \cdot (\gamma - \pi/4)$ *не зависит от того, по какой характеристике другого семейства совершается переход.*

При постоянной функции Z равенство (6) приводит к первой теореме Генки.

Литература

1. *Дильман В. Л., Остсемин А. А.* Напряженное состояние пластического слоя с переменной прочностью по толщине // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2000. — № 1. — С. 141–148.
2. *Дильман В. Л.* Напряженное состояние и прочность неоднородной пластической полосы с дефектом в более прочной части // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2010. — № 2. — С. 89–102.

The stress state of plastic layer with a variable thickness strength

V. L. Dilman, T. V. Karpeta

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia
dilman49@mail.ru

Условия квантования на римановых поверхностях и спектральные серии несамосопряженных операторов

А. И. Есина*, **А. И. Шафаревич**†

* *Институт проблем механики РАН, Москва, Россия, esina_anna@list.ru*

† *Московский государственный университет, Москва, Россия, shafarev@yahoo.com*

Хорошо известно, что квазиклассические спектральные серии самосопряженных операторов, соответствующих интегрируемым классическим системам, вычисляются из условий квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова — условий целочисленности интегралов от заданной 1-формы по всем циклам лиувиллева тора. Выполнение этих условий гарантирует существование канонического оператора Маслова на лиувиллевом торе, при помощи которого строится формальная асимптотика собственного значения и собственной функции, т.е. пара $\{\psi(x), \lambda\}$, приближенно (с заданной точности по квазиклассическому параметру) удовлетворяющая спектральному уравнению. В свою очередь, отсюда автоматически следует, что число λ приближает с той же точностью точку спектра рассматриваемого оператора.

В несамосопряженном случае ситуация существенно другая. Во-первых, классический гамильтониан, как правило, оказывается комплексным и для описания спектральных серий вместо лиувиллевых торов следует рассматривать комплексные инвариантные многообразия. Во-вторых, наличие формальной асимптотики собственного значения (т.н. точки псевдоспектра), вообще говоря, не влечет существования близкой к этому значению точки спектра.

В докладе описана квазиклассическая асимптотика спектра несамсосопряженного оператора в ряде частных случаев — одномерный оператор Шредингера с комплексным периодическим потенциалом, оператор индукции на двумерной поверхности вращения и на трехмерном Sol-многообразии. Асимптотика вычисляется из условий квантования на римановых поверхностях — комплексных множествах постоянной энергии. В отличие от самосопряженного случая, требуется целочисленность интеграла от голоморфной формы только по одному циклу — разные циклы описывают разные серии собственных значений. Сами собственные числа концентрируются в малой окрестности графа на комплексной плоскости.

Quantization Conditions on Riemannian Surfaces and Spectral Series of Non-Selfadjoint Operators

A. I. Esina*, **A. I. Shafarevich**†

* *Institute for Problems in Mechanics, Moscow, Russia, esina_anna@list.ru*

† *Moscow State University, Moscow, Russia, shafarev@yahoo.com*

Некоторые представления вектор-функций и их применение к исследованию полей в неоднородных средах

А. А. Жидков, А. В. Калинин, В. Е. Молодкина, А. А. Тюхтина

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия
avk@mm.unn.ru

Различные представления функций, основанные на них теоремы вложения пространств дифференцируемых функций [1–4] нашли многочисленные применения в теории дифференциальных уравнений с частными производными. В частности, интегральные представления для функций и вектор-функций могут быть использованы при доказательстве L_p-оценок для норм, известных в литературе под названием неравенств Корна [4, 5].

В настоящей работе рассматриваются некоторые новые представления вектор-функций через дифференциальные операции векторного анализа. На основании данных представлений доказываются неравенства, связывающие скалярное произведение вектор-функций и нормы их роторов и дивергенций в пространствах Лебега. Полученные оценки для скалярных произведений векторных полей обобщают ряд известных неравенств, и могут быть использованы при исследовании физических полей в неоднородных средах. В качестве приложений доказанных оценок исследуется корректность постановок краевых задач для стационарной системы уравнений Максвелла и начально-краевых задач для квазистационарных приближений системы уравнений Максвелла в неоднородных средах в терминах напряжённости магнитного поля и в терминах векторного магнитного потенциала при различных калибровочных соотношениях [6].

Литература

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975. 480 с.
3. *Буренков В. И.* Интегральные представление С.Л. Соболева и формула Тейлора // Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1973. — Т. 131. — С. 210–225.
4. *Решетняк Ю. Г.* Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн. — 1971. — Т. 12, № 2. — С. 420–432.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011) и гранта Правительства Российской Федерации (договор №11.G34.31.0048).

5. *Решетняк Ю. Г.* Об интегральных представлениях дифференцируемых функций. Дифференциальные уравнения с частными производными. — Новосибирск: Наука, 1980. — С. 173–187.
6. *Калинин А. В.* Оценки скалярных произведений векторных полей и их применение в математической физике. — Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2007. — 319 с.

Some representations of vector-functions and their application for studying of fields in heterogeneous domains

A. A. Zhidkov, A. V. Kalinin, V. E. Molodkina, A. A. Tyukhtina

N. I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia
avk@mm.unn.ru

Специальные функции математической физики

В. И. Заляпин

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия, vladimzal@gmail.com

I. Рассмотрим случайное блуждание ξ в $\mathbb{R}^{n+k}$, задаваемое однородной переходной функцией

$$P\{x,y\} = P\{0, x-y\} = \begin{cases} p_i & x-y = e_i, \\ 0, & x-y \neq e_i, \end{cases} \quad i = 1,2,\dots,n+k, \qquad (1)$$

где e_i – система базисных ортов. Рандомизуем это случайное блуждание пуассоновским процессом, параметр которого без ограничения общности можно считать равным единице.

Пусть $A = (a_{ij}),\ i = 1,2,\dots,k,\ j = 1,2,\dots,n+k$ – матрица с целочисленными элементами, $m \in \mathbb{R}^k$ –целочисленный вектор. Положим $x \sim y \Leftrightarrow\ \exists m:\ x - y = mA$. Обозначим через $\mathcal{R}_n^k(A)$ совокупность классов эквивалентности $\mathcal{H}_y(A) = \{x \in \mathbb{R}^{n+k} : \exists m:\ x = y + mA\}$.

Случайное блуждание (1) индуцирует случайное блуждание в $\mathcal{R}_n^k(A)$, при этом

$$P\{\xi \in \mathcal{H}_y(A)\} = e^{-t}\mathcal{G}_y(tp),\ p = \{p_1,\dots,p_{n+k}\}.$$

Здесь $\mathcal{G}_y(z)$ – функции пуассоновского блуждания (Ф.П.Б.) [1].

II. Рассмотрим группу комплексных матриц $\mathcal{T}$ с элементами

$$t(\varphi, z) = \begin{pmatrix} e^{-\varphi} & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $e^{-\varphi}$ – диагональная матрица с элементами $e^{-\varphi_i}, i = 1,2,\dots,n+k, A\varphi = 0,\ z \in \mathbb{C}^{n+k}$ – вектор-столбец.

Теорема 1. *Матричные элементы неприводимых (не обязательно унитарных) представлений группы $\mathcal{T}$ выражаются через функции пуассоновского блуждания.*

Примеры. 1). $A = (1,1)$, Ф.П.Б. – модифицированные функции Бесселя, группа $\mathcal{T}$ – группа гиперболических движений плоскости $\mathbb{C}^2$.

2). $A = (1,1,\dots,1)$, Ф.П.Б. – функции Люстерника (обобщенные цилиндрические функции), группа $\mathcal{T}$ – группа сверхгиперболических движений $\mathbb{C}^{n+1}$.

III. Источником асимптотик для ФПБ служат предельные теоремы теории вероятностей.

Например, классические асимптотики для бесселевых функций получаются из следующих простых соображений: если $p_\lambda(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ – пуассоновское распределение, то известно, что при $\lambda \gg 1,\ \lambda - k =$

$o(\sqrt{\lambda})$ оно аппроксимируется нормальным. Сответственно, вероятности $\mathsf{P}\{\xi(\mathsf{t}) \in \mathsf{H}_{\mathsf{x}}^{\mathsf{A}}\}$ аппроксимируются нормальными.

Для функций Люстерника (в т.ч. для модифицированных функций Бесселя) может быть на этом пути получен аналог асимптотики Виленкина–Цукермана:

Теорема 2. *Пусть* $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $d(x) = \frac{1}{\sum_1^n \frac{1}{x_i}} \left(1 - \frac{1}{\sum_1^n \frac{x_{n+1}}{x_i}}\right)$, *тогда при* $\sum x_i \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$\mathcal{G}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \prod x_i \sum \frac{1}{x_i}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_1^n \frac{L_j(x,k)}{x_j}\right).$$

Здесь $L_j(x,k) = \left(x_j - x_{n+1} - k_j - d(x)\sum_1^n \frac{x_j - x_{n+1} - k_j}{x_j}\right)^2$.

Литература

1. *Заляпин, В.И., Люстерник Л.А.* О системе функций пуассоновского блуждания // ДАН СССР. — 1972. – Т. 207, № 1. — С. 29–31.
2. *Григорьев С.А.* Асимптотические разложения функций Люстерника // Вестник ЮУрГУ. — 2002. — № 3(12). — С 11–18

Special functions of mathematical physics

V. I. Zalyapin

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia
vladimzal@gmail.com

Минимальный период и максимальный показатель Ляпунова решений липщицевых дифференциальных уравнений

А. А. Зевин

ИТСТ Трансмаг НАН Украины, Днепропетровск, Украина
zevin@westa-inter.com

Рассматривается уравнение

$$x^{(r)} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

с заданной константой Липшица L. Требуется на множестве его решений найти решения с минимальным периодом T_* и максимальным показателем Ляпунова λ_* .

Первый результат такого рода получен Йорком в статье [1], где установлено, что в случае $r = 1$ и эвклидовой нормы $T_* = 2\pi/L$. Таким же способом для четных r в [2] найдено

$$T_* = \frac{2\pi}{L^{1/r}}. \tag{2}$$

Доказательства указанных результатов применимы только для эвклидовой нормы.

В [3] показано, что в банаховом пространстве $T_* = 6/L$ при $r = 1$. Там же поставлен ряд вопросов о возможной величине T_* для норм в $\mathbb{R}^n$, отличных от эвклидовой; до последнего времени они оставались открытыми. Первый результат такого рода получен в [4], где для супремумной нормы найдено такое же значение $T_* = 2\pi/L$. Следующий общий результат установлен в [4],

Теорема 1. *При $r = 2q$ и любой векторной норме минимальный период определяется формулой (2). Эта величина достигаются в системе $x^{(2q)} = (-1)^q Lx$.*

В докладе показано, что для нечетных $r = 2q - 1$ формула (2) справедлива, если векторы (x_1, x_2) и $(-x_2, x_1)$ при всех x_1, x_2 имеют одинаковую норму (для известных норм это условие выполняется). Решение достигается в системе

$$x_1^{(r)} = (-1)^q Lx_2, \quad x_2^{(r)} = -(-1)^q Lx_1, \quad x_i^{(r)} = 0, \quad i = 3, \ldots, n.$$

Решение задачи о максимальном показателе Ляпунова (рассматриваемой в такой постановке, по-видимому, впервые) дается следующей теоремой

Теорема 2. *Для любой векторной нормы $\lambda_* = L^{1/r}$. Решение достигается в системе $x^{(r)} = Lx$.*

При заданной функции $f(x)$ найденные значения T_* и λ_* дают, соответственно, нижнюю и верхнюю границу периодов и показателей

Ляпунова; при этом более точные оценки достигаются в метрике с меньшим значением L. В этой связи установлены некоторые неравенства, связывающие значения L для различных норм; в частности, доказано, что для функций вида $f(x) = V_x(x)$ минимальную величину имеет евклидова константа L.

Литература

1. *Yorke J.* Periods of periodic solutions and the Lipschitz constant // Proc. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 22. — P. 509–512.
2. *Mawhin J. Walter W.* A general symmetry principle and some implications // JMAA. — 1994. — Vol. 186. — P. 778–798.
3. *Busenberg S. Fisher D. Martelli M.* Minimal periods of discrete and smooth orbits // Amer. Math.Monthly. — 1989. — Vol. 96. — P. 5–17.
4. *Зевин А. А.* Точная оценка амплитуд периодических решений липшицевых дифференциальных уравнений // Доклады РАН. — 2008. — Т. 421, № 6. — С. 733–37.
5. *Зевин А. А.* Минимальный период решений липшицевых дифференциальных уравнений в векторном пространстве с произвольной нормой // Доклады РАН. — 2012. — Т. 444, № 6. — С. 602–604.

Minimum period and maximum Lyapunov exponent of solutions of Lipschitz differential equations

A. A. Zevin

ITST Transmag, NAS of Ukraine, Dnepropetrovsk, Ukraine
zevin@westa-inter.com

Некоторое обобщение теории псевдопараболических вариационных неравенств

М. А. Зироян*, **А. А. Петросян**†

* *Российский государственный социальный университет, Москва, Россия*

† *Ереванский государственный университет, Ереван, Армения*
krakadil@msn.com

В работе рассматривается задача вариационных неравенств для некоторых операторов включающих в себя класс псевдопараболических операторов. Приведена соответствующая слабая задача, теоремы о однозначной разрешимости соответствующей слабой задачи и нектотрые условия обеспечивающие гладкость их решений.

Многие краевые и начально-краевые задачи для эллиптических, параболических и псевдопараболических дифференциальных уравнений приводят к изучению задач вариационных неравенств соответствующего типа (см. [1] — Фучик). Основные преимущества этого подхода:

Из решений задач вариационных неравенств требуется меньшей гладкости, упрощая теоремы существования и единственности.

Вариационная формулировка задачи делает возможным рассматривать их в различных функциональных пространствах используя теорию функционального анализа. Становится возможным применение численных методов, для которых получаются результаты сходимости приближенных решений, при меньших предположениях.

Если существуют классические решения дифференциальных уравнений, то они совпадают с решениями вариационных неравенств (противное утверждение, вообще говоря, не верно).

Эллиптические вариационные неравенства (см. [2] — Лионс): Пусть V — рефлексивное банахово пространство а$K \in V$ — непустое, замкнутое и выпуклое множество.

Классическая зада вариационных неравенств для операторов эллиптического типа состоит в следующем: Для заданного оператора $A : V \to V'$ и функционала $f \in V'$

$$u \in K, (Au, v-u) \geqslant (f, v-u), \forall v \in K \tag{1}$$

Теорема 1. *Если множество $K \subset V$ ограничено и $A : K \to V'$ псевдомонотонный оператор, то для любого $f \in V'$ существует решение вариационного неравенства (1).*

Теорема 2. *Если множество не ограничено и псевдомонотонный и коэрцитиный оператор, то для любого существует решение вариационного неравенства (1).*

Параболические вариационные неравенства (см. [2] — Лионс): Пусть V — рефлексивное банахово пространство, $T > 0$ а $K \subset L_2(0,T;V)$ — непустое, замкнутое и выпуклое множество. Определим еще и область определения оператора u как $D = \{u \in L_2(0,T;V)\dfrac{du}{dt} \in L_2(0,T;V), u(0) = u_0\}$.

Классическая зада вариационных неравенств для операторов параболического типа состоит в следующем:

Для заданного оператора $A : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V')$ и функционала $f \in L_2(0,T;V')$ требуется найти

$$u \in K \cap D,\ \left(\frac{du}{dt}, v-u\right) + (Au, v-u) \geqslant (f, v-u),\ \forall v \in K \qquad (2)$$

Упростим задачу (2) так, чтобы усливие $u \in D$ не требовалось: Пусть u — решение вариационного неравнства и $v \in K \cap D$. Тогда имеет место

$$\left(\frac{dv}{dt}, v-u\right) + (Au, v-u) - (f, v-u) =$$

$$= \left(\frac{d(v-u)}{dt}, v-u\right) + \left(\frac{du}{dt}, v-u\right) + (Au, v-u) - (f, v-u) =$$

$$= \int_0^T \left(\frac{d(v-u)}{dt}, v-u\right)_v dt =$$

$$\frac{1}{2}||v(T) - u(T)||_V^2 - \frac{1}{2}||v(0) - u(0)||_V^2 \geqslant 0.$$

Или u является решением следующей «слабой» задачи

$$(\frac{dv}{dt}, v-u) + (Au, v-u) \geqslant (f, v-u),\ \forall v \in K \cap D.$$

Как видно из последнего неравенства, область определения u расширяестя: в «слабой» задаче требуется $u \in K$ вместо $u \in K \cap D$. Переформулируем постановку «слабой» задачи: Для заданного оператора $A : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V')$ и функционала $f \in L_2(0,T;V')$ требуется найти решение задачи

$$\begin{cases} u \in K \\ \left(\dfrac{dv}{dt}, v-u\right) + (Au, v-u) \geqslant (f, v-u),\ \forall v \in K \cap D \end{cases} \qquad (3)$$

Теорема 3 *Если $A : K \to V'$ псевдомонотонный и коэрцитиный оператор, то для любого $f \in L_2(0,T;V')$ существует решение вариационного неравенства (3).*

При строгой монотонности оператора A, неравенство (3) допускает единственное решение.

При достаточной гладкости, решение «слабой» задачи (3) является решением и для параболического вариационного неравенства (2).

Литература

1. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1988.
2. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.

Some Generalization of the theory of pseudoparabolic variational inequalities

M. A. Ziroyan*, A. A. Petrosyan†

* *Russian State Social University, Moscow, Russia*
zirmanya@mail.ru zirmanya@mail.ru

† *Yerevan State University, Yerevan, Armenia*
krakadil@msn.com

Аттрактор полуявной проекционно-разностной схемы для бароклинной модели общей циркуляции атмосферы

В. М. Ипатова

МФТИ, Долгопрудный, Россия
ipatval@mail.ru

Пусть E — полное метрическое пространство, $\mathcal{T}$ – нетривиальная подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$ вещественных чисел, $\mathcal{T}_+ = \mathcal{T} \cap [0, +\infty)$ – полугруппа неотрицательных элементов из $\mathcal{T}$. Например, $\mathcal{T}_+ = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ для систем с непрерывным временем, $\mathcal{T}_+ = \mathbb{Z}_+\tau = \{0, \tau, 2\tau, \ldots\}$, где $\tau > 0$, для систем с дискретным временем. Пусть при всех $h \in \mathcal{T}_+,\ t \in \mathcal{T}_+,\ t \geqslant h$ на E определены непрерывные операторы $U(t, h) : E \to E$ такие, что $U(t, s)U(s, h) = U(t, h) \forall t, s, h \in \mathcal{T}_+ : t \geqslant s \geqslant h$. Тройку $\{U, \mathcal{T}_+, E\}$ будем называть полупроцессом. Рассмотрим семейства операторов $U_f(t, h)$, функционально зависящие от символа $f = f(t)$, где под $f(t)$ подразумеваются зависящие от времени коэффициенты и члены в правой части уравнения. Пусть F – некоторое множество символов. Множество всех полупроцессов $\{U_f, \mathcal{T}_+, E\}$ таких, что $f \in F$, будем называть семейством полупроцессов (СПП) и обозначать как $\{U_f, \mathcal{T}_+, E, F\}$. Равномерным аттрактором СПП называется его наименьшее замкнутое равномерно притягивающее множество [1, 2]. Равномерный аттрактор СПП будем для краткости называть просто *аттрактором.*

Предполагается, что атмосфера разбита по высоте на два слоя, первому слою соответствуют значения давления от 0 до 500 мб, а второму – от 500 до 1000 мб. Рассматривается двухслойная квазигеострофическая модель общей циркуляции атмосферы [3–5], основными переменными которой являются баротропная и бароклинная составляющие функции тока. Передполагается, что правые части уравнений модели зависят от времени. Доказывается, что СПП, порождаемое моделью, имеет компактный аттрактор. Уравнения модели проектируются на инвариантные подпространства оператора Лапласа-Бельтрами $\mathcal{H}^N = \cup_{n=1}^N \mathcal{H}_n$, где $\mathcal{H}_n$ – собственное подпространство, отвечающее собственному значению $\lambda_n = n\,(n+1)$. Для аппроксимации по времени используется полуявная конечно-разностная схема с шагом $\tau > 0$, в которой все нелинейные члены берутся с предыдущего временного слоя, т.е. учитываются явно. Предполагается, что при изменении τ и N выполняется неравенство $\tau\lambda_N^3 \leq C$ с некоторой положительной константой C.

Построенная проекционно-разностная схема не обладает свойством глобального притяжения, однако удается показать, что при достаточно малых шагах сетки возникает локальный аттрактор схемы, область притяжения которого бесконечно расширяется по мере стремления параметра дискретизации к нулю. Исследуется сходимость схемы в

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.1901.

выбранных функциональных пространствах. На основании теоремы 1.3 из [6] доказывается, что при $\tau + 1/N \to 0$ аттрактор схемы лежит в сколь угодно малой окрестности истинного аттрактора модели.

Литература

1. *Chepyshov V. V., Vishik M. I.* Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. — 1994. — Vol. 73. — P. 279–333.
2. *Ипатова В. М.* Об аттракторах аппроксимаций неавтономных эволюционных уравнений // Математический сборник. 1997. — Т. 188, № 6. — С. 47–56.
3. *Дымников В. П., Филатов А. Н.* Основы математической теории климата. — М.: ВИНИТИ, 1994.
4. *Ипатова В. М.* Задача инициализации для модели общей циркуляции атмосферы // Труды МФТИ. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 121–130.
5. *Ипатова В. М.* Об аттракторе неявной проекционно-разностной схемы для двухслойной модели общей циркуляции атмосферы с зависящей от времени правой частью // Нелинейный мир. — 2012. — Т. 10, № 8. — С. 515–527.
6. *Ипатова В. М.* О равномерных аттракторах явных аппроксимаций // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 4. — С. 574–583.

Attractor of a semiexplicit projection-difference scheme for the baroclinic atmospheric general circulation model

V. M. Ipatova

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia
ipatval@mail.ru

Об аналоге первой краевой задачи для некоторых нелинейных уравнений

С. А. Исхоков, М. Ш. Ганиев

Институт математики АН РТ, Душанбе, Таджикистан
sulaimon@mail.ru, g-murod@mail.ru

Систематическое изучение функциональных пространств со степенным весом было начато Л.Д.Кудрявцевым [1]. Им было найдено необходимое и достаточное условие для существования следа у любой функции из таких пространств на m-мерном куске границы области. На основе полученных результатов по теоремам вложения в этой работе вариационным методом исследовалась разрешимость первой краевой задачи для самосопряженных эллиптических уравнений второго порядка, вырождающихся на границе ограниченной области. Затем в работе [2] Л.Д.Кудрявцев усовершенствовал классический вариационный метод решения краевых задач для уравнений с частными производными на случай вырождающихся эллиптических уравнений в неограниченной области. В нашем докладе обсуждается вариационный метод исследования первой краевой задачи для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, вырождающихся на неограниченных многообразиях.

Пусть R_n — n-мерное евклидово пространство, m — натуральное число меньше n и $\mathfrak{M}$ — неограниченное C^0-многообразие размерности $m < n$, удовлетворяющее условию конуса (определение см., например, в [3] или [4]). Пусть $\Omega = R_n \setminus \mathfrak{M}$, $\rho(x) = dist\{x, \mathfrak{M}\}$ и функция $\sigma(t) \in C^\infty(0, +\infty)$ такая, что $0 \leqslant \sigma(t) \leqslant 1$ для всех $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, $\quad \sigma(t) \equiv 0$ при $t \geqslant 1$ и $\sigma(t) = 1$ для всех $t \in (0; \frac{1}{2}]$. Для двух вещественных чисел α, β определим функцию $\varphi_{\alpha,\beta}(x) = \sigma(\rho(x))\rho^{-\alpha}(x) + (1 - \sigma(\rho(x)))\rho^{\beta}(x) \quad (x \in \Omega)$.

Пусть $p \in (1, +\infty)$ и пусть r — натуральное число. Символом $W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)$ обозначим пространство функций $u(x)\,(x \in \Omega)$ с конечной нормой

$$\|u; W^r_{p;\alpha,\beta,\gamma}(\Omega)\| = \Big\{ \sum_{|k|=r} \int_\Omega \varphi^p_{\alpha,\beta}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx + \int_\Omega \varphi^p_{\alpha,\gamma}(x)|u(x)|^p dx \Big\}^{1/p}.$$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{p;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(\Omega)$ замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^r_{p;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(\Omega)$.

Задача D. Для заданных $F \in \Big(W^r_{p;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(\Omega)\Big)^*$ и $\Psi(x) \in W^r_{p;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(\Omega)$ требуется найти обобщенное решение $U(x)$ уравнения

$$Lu \equiv \sum_{|k|\leqslant r} (-1)^{|k|} \left(a_k(x) \left| u^{(k)}(x) \right|^{p_k - 2} u^{(k)}(x) \right)^{(k)} = F, \quad x \in \Omega \qquad (1)$$

из $W^r_{p;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(\Omega)$, удовлетворяющее условию

$$U(x)-\Psi(x)\in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{p;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(\Omega).$$

Предполагается, что коэффициенты $a_k(x)$ уравнения (1) удовлетворяют условиям:

I) $p_k=p\geqslant 2$ при $|k|=0,\quad |k|=r$ и существуют положительные числа c_1, c_2 такие, что

$$c_1\,\varphi^{\,p}_{\alpha,\,\gamma}(x)\leqslant a_k(x)\leqslant c_2\,\varphi^{\,p}_{\alpha,\,\gamma}(x)\quad (x\in\Omega)\quad \text{при}\quad |k|=0,$$

$$c_1\,\varphi^{p}_{\alpha,\,\beta}(x)\leqslant a_k(x)\leqslant c_2\,\varphi^{p}_{\alpha,\,\beta}(x)\quad (x\in\Omega)\quad \text{при}\quad |k|=r.$$

II) $2\leqslant p\leqslant p_k<\infty$ при $1\leqslant |k|\leqslant r-1$ и существуют положительные числа c_3, c_4 такие, что

$$c_3\,\varphi^{\,p_k}_{\alpha_k,\,\beta_k}(x)\leqslant a_k(x)\leqslant c_4\,\varphi^{\,p_k}_{\alpha_k,\,\beta_k}(x)\quad (x\in\Omega),$$

где α_k, β_k — вещественные числа, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_k\leqslant r+\alpha-|k|-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_k}\right)(n-m),\quad \beta_k\leqslant \beta-r+|k|+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_k}\right)(n-m).$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* I), II) *и пусть* $\alpha_k<(n-m)/p_k,\quad \beta_k+r-|k|-1<-(n-m)/p_k$ *для всех* $k:\ 1\leqslant |k|\leqslant r-1$.

Тогда для любого $F\in \left(W^{\,r}_{p;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(\Omega)\right)^*$ *и любой функции* $\Psi(x)\in W^{\,r}_{p;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(\Omega)$ *существует единственное решение* $U(x)$ *задачи* D.

Доказана оценка нормы решения $U(x)$ задачи D через норм функционала F и функции $\Psi(x)$.

Литература

1. *Кудрявцев Л. Д.* // Труды МИАН СССР, 1959. — Т. 55. — С. 1–182.
2. *Кудрявцев Л. Д.* // Изв. АН СССР, 1967. — Т. 31, № 5. — С. 1179–1199.
3. *Бойматов К. Х.* // Доклады РАН, 1994. — Т. 339, № 6. — С. 727–731.
4. *Исхоков С. А., Тарасова Г. И.* // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. — 2006. — Т. 6, № 2. — С. 43–49.

On an analogue of a boundary value problem of the first kind for some nonlinear equations

S. A. Iskhokov, M. Sh. Ganiev

Institute of mathematics TAS, Dushanbe, Tajikistan
sulaimon@mail.ru, g-murod@mail.ru

О разрешимости вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной формой

С. А. Исхоков, Т. П. Константинова

Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Мирный, Россия
sulaimon@mail.ru, Konct-tua@mail.ru

Работа Л.Д. Кудрявцева [1] положила начало исследованиям разрешимости обобщенных краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений методами функционального анализа и теории вложения весовых функциональных пространств. Использованная в этой работе идея позже обобщалась и развивалась многими авторами (см., например, [2]– [4] и имеющиеся там ссылки). В нашем докладе обсуждается вопрос о распространении этого метода на случай вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных полуторалинейными формами, которые могут не удовлетворять условию коэрцитивности.

Пусть Ω – ограниченная область в R^n, граница которой является замкнутым $(n-1)$-мерным многообразием $\partial\Omega$; $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$; r – натуральное, α – вещественные числа. Символом $W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ обозначим пространство всех функций $u(x)$ $(x \in \Omega)$, имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные порядка r со следующей нормой

$$\left\|u; W^r_{2,\,\alpha}(\Omega)\right\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_\Omega \rho^{2\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^2 dx + \int_\Omega |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (1)$$

Символом $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\,\alpha}(\Omega)$ обозначим замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (1), а символом $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\,\alpha}(\Omega)\right)'$ – пространство антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2,\,\alpha}(\Omega)$.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_\Omega \rho^{2\alpha}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx.$$

Предполагается, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ непрерывны в $\overline{\Omega}$, существуют числа c, $\varepsilon > 0$ и непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $\gamma(x)$ такие, что

$$\left| arg \left\{ \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \right\} \right| < \pi - \varepsilon,$$

$$Re\Big\{\gamma(x)\sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l\Big\} \geqslant c|\xi|^{2r}$$

для всех $x \in \Omega$, $\quad \xi \in R^n$; функция $arg\, z$ принимает значения на отрезке $(-\pi, \pi]$.

Задача D_λ. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}\,{}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ требуется найти решение $U(x) \in \overset{\circ}{W}\,{}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$ уравнения

$$B[U,v] + \lambda \int_\Omega U(x)\overline{v(x)}dx = \langle F, v\rangle \quad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

Теорема. *В сделанных выше предположениях существует число $\lambda_0 \geqslant 0$ такое, что при $\lambda \geqslant \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}\,{}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)'$ существует единственное решение $U(x)$ и при этом справедлива оценка*

$$\left\|U;\, W^{\,r}_{2,\alpha}(\Omega)\right\| \leqslant M \left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}\,{}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|,$$

где число $M > 0$ не зависит от λ и F.

Аналогичный результат установлен и для дифференциальных уравнений, младшие коэффициенты которых принадлежат некоторым L_p-пространствам со степенным весом.

Литература

1. *Кудрявцев Л. Д.* // Труды МИАН СССР. — 1959. — Т. 55. — С. 1–182.
2. *Никольский С. М., Лизоркин П. И., Мирошин Н. В.* // Известия вузов. Математика. — 1988. — № 8. — С. 4–30.
3. *Исхоков С. А., Кужмуратов А. Я.* Доклады РАН. — 2005. — Т. 403, № 2. — С. 165–168.
4. *Исхоков С. А.* // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 2. — С. 201–216.

On solvability of the variational Dirichlet problem related with a noncoercive form

S. A. Iskhokov, T. P. Konstantinova

Polytechnic institute (branch) of North-Eastern Federal university named after M.K. Ammosov, Mirny, Russia
sulaimon@mail.ru, Konct-tua@mail.ru

Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре

В. В. Карачик

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия
karachik@susu.ru

Рассмотрим однородную задачу Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре

$$\Delta^k u(x) = f(x),\, x \in S; \quad \frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}_{|\partial S} = \varphi_i(s),\, s \in \partial S, \quad i = \overline{1,k}, \tag{1}$$

где $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, а ν – единичный вектор внешней нормали к ∂S. В работе [1] при $f = 0$ была рассмотрена более общая краевая задача, содержащая многочлены высокого порядка от нормальных производных в граничных условиях. Была доказана теорема о разрешимости этой краевой задачи и о представлении решения. Частным случаем теоремы из [1] является следующее утверждение.

Теорема 1. *Решение задачи Неймана (1) при $\varphi_i \in C^{k-i}(\partial S)$, $i = \overline{1,k}$ и $f = 0$ существует тогда и только тогда, когда для любого вектора b_k – решения уравнения $N_k^T(0)b_k = 0$ выполнено условие*

$$\int_{\partial S} (b_k^1 \varphi_1 + \cdots + b_k^k \varphi_k)\, ds = 0,$$

где $b_k = (b_k^1, \ldots, b_k^k)$, $N_k(\lambda) = \big((\lambda + 2j - 2)^{[i]}\big)_{i,j=\overline{1,k}} \cdot C$, $t^{[k]} = t(t-1)\ldots(t-k+1)$ – факториальная степень, а $C = \big((-1)^i \binom{j}{i}\big)_{i,j=\overline{0,k-1}}$, причем $\binom{j}{i} = 0$ когда $j < i$.

Нормируем числа b_k^s при $s = \overline{1,k}$ и $k \in \mathbb{N}$ так, что $b_k^1 > 0$ и $|b_k^k| = 1$ и расположим их в виде треугольника B наподобие треугольника Паскаля. Строки треугольника будем нумеровать нижним индексом $k \in \mathbb{N}$, а косые строки, параллельные левой стороне будем нумеровать верхним индексом $s \in \mathbb{N}$, но $s \leqslant k$

$$B = \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & -1 & & \\ & b_3^1 & & b_3^2 & & b_3^3 & \\ b_4^1 & & b_4^2 & & b_4^3 & & b_4^4 \\ & & & \cdots & & & \end{array}.$$

Установлено, что элементы b_k^s треугольника B определяются равенством

$$b_k^s = (-1)^{s+1} \binom{2k-s-1}{s-1} \frac{(2k-2s+1)!!}{(2k-2s+1)},$$

а сам треугольник B выглядит следующим образом

$$B = \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & & 1 \quad -1 & & & \\ & & & 3 \quad -3 \quad 1 & & & \\ & & & 15 \quad -15 \quad 6 \quad -1 & & & \\ & & & 105 \quad -105 \quad 45 \quad -10 \quad 1 & & & \\ & & & 945 \quad -945 \quad 420 \quad -105 \quad 15 \quad -1 & & & \\ & & & \cdots \quad b_{k+1}^s = (2k-s)b_k^s - b_k^{s-1} \quad \cdots & & & \end{array}.$$

При $f(x) \neq 0$ доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Решение задачи Неймана (1) при $\varphi_i \in C^{k-i}(\partial S)$, $i = \overline{1,k}$ и полиномиальной $f(x)$ существует тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\int_{\partial S} (b_k^1 \varphi_1 + \cdots + b_k^k \varphi_k)\, ds = \frac{1}{(2k-2)!!} \int_S (|x|^2 - 1)^{k-1} f(x)\, dx, \qquad (2)$$

где b_k^s – элементы треугольника B.

Задача Неймана для бигармонического уравнения в единичном шаре была исследована в [2]. При $k = 2$ из (2) мы получаем условия ее разрешимости.

Литература

1. *Карачик В. В.* Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре // Сибирский математический журнал. — 1991. — Т. 32, № 5. — С. 51–58.
2. *Karachik V. V., Turmetov B. Kh., Bekaeva A.* Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2012. — Vol. 81, No. 3. — P. 487–495.

On solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the polyharmonic equation in the unit ball

V. V. Karachik

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia, karachik@susu.ru

Краевая задача для гиперболического уравнения с нелокальным по времени условием

С. В. Кириченко

Самарский государственный университет путей сообщения, Самара, Россия
svkirichenko@mail.ru

В области $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$, где $l, T < \infty$, рассмотрим гиперболическое уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t). \tag{1}$$

и поставим следующую **задачу 1**: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее нелокальным условиям

$$\int_0^T H_i(t)u(x,t)dt = 0 \quad (i = 1; 2) \tag{2}$$

и граничным данным

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{3}$$

Функции $c(x,t)$, $f(x,t)$ заданы в $\overline{Q}_T$, $H_i(t)$ заданы для всех $t \in [0,T]$.

Заметим, что условия (2) представляют собой нелокальные интегральные условия I рода, поэтому стандартные методы исследования начально-краевых задач здесь не применимы. Для доказательства разрешимости поставленной задачи сначала сведем условия (2) к нелокальным условиям II рода.

Лемма. *Если $\Delta = H_1(0)H_2'(0) - H_2(0)H_1'(0) \not\equiv 0$, $H_i(t) \in C^2(\overline{Q}_T)$, $H_i(T) = H_i'(T) = H_i''(T) = 0$, то условия (2) эквивалентны нелокальным условиям второго рода*

$$\begin{cases} u(x,0) + \displaystyle\int_0^T M_1(x,t)u(x,t)dt = g_1(x), \\ u_t(x,0) + \displaystyle\int_0^T M_2(x,t)u(x,t)dt = g_2(x), \end{cases} \tag{4}$$

где $M_i(x,t)$ выражаются через $H_i(t)$, $H_i'(t)$, $H_i''(t)$ и $c(x,t)$.

На следующем шаге покажем, что нелокальная задача (1), (3), (4) эквивалентна задаче с классическими начальными условиями, но для нагруженного уравнения. Для этого введена новая неизвестная функция

$$v(x,t) = u(x,t) - w(x,t), \tag{5}$$

где $w(x,t) = g_1(x) + tg_2(x) - \int\limits_0^T M_1(x,t)u(x,t)dt - t\int\limits_0^T M_2(x,t)u(x,t)dt,$

Задача 2. Найти в Q_T решение уравнения

$$v_{tt} - v_{xx} + c(x,t)v + \int\limits_0^T P(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau + 2\int\limits_0^T N_x(x,t,\tau)u_x(x,\tau)d\tau -$$

$$- \int\limits_0^T N_\tau(x,t,\tau)u_\tau(x,\tau)d\tau = G(x,t), \tag{6}$$

удовлетворяющее условиям

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \tag{7}$$

$$v(x,0) = v_t(x,0) = 0, \tag{8}$$

где функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ связаны соотношением

$$v(x,t) = u(x,t) + \int\limits_0^T N(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau - g(x,t). \tag{9}$$

Функции $M_i(x,t), g_i(x), N(x,t,\tau), P(x,t,\tau), G(x,t)$ выражаются через заданные функции.

Доказательство разрешимости задачи 2 проводится стандартными методами, которые базируются на априорных оценках в пространстве Соболева и методе Галеркина.

The boundary problem for hyperbolic equation with a nonlocal conditions in time

S. V. Kirichenko

Samara state university of railway transport, Samara, Russia
svkirichenko@mail.ru

Об одной краевой задаче для дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля дробного порядка

Е. А. Ларионов, Т. С. Алероев

Московская государственная академия коммунального хозяйства и строительства, Москва, Россия, aleroev@mail.ru

В $L_2(0,1)$ рассмотрим ограниченный линейный оператор

$$A_\varepsilon u = \frac{1}{\Gamma(2+\varepsilon)}\left[\int\limits_0^x (x-t)^{1+\varepsilon}u(t)dt - \int\limits_0^1 x^{1+\varepsilon}(1-t)^{1+\varepsilon}u(t)dt\right].$$

Введем обозначения

$$M_\varepsilon u(x) = \int\limits_0^x (x-t)^{1+\varepsilon}u(t)dt, \quad N_\varepsilon u(x) = \int\limits_0^1 x^{1+\varepsilon}(1-t)^{1+\varepsilon}u(t)dt,$$

$$M_0 u(x) = \int\limits_0^x (x-t)u(t)dt, \quad N_0 u(x) = \int\limits_0^1 x(1-t)u(t)dt.$$

Очевидно, что $A_\varepsilon u = M_\varepsilon u(x) - N_\varepsilon u(x)$; $A_0 u = M_0 u(x) - N_0 u(x)$.

Изучим оператор A_ε методами теории возмущений. Как и в [1] считаем, что оператор A_0 является невозмущенным, а оператор A_ε возмущенным. С помощью раствора между этими операторами, в [1] был проведен спектральный анализ оператора A_ε. В частности, было показано, что оператор A_ε непрерывен в равномерной (операторной) топологии для всех $\varepsilon > 0$. Идеи этой работы были использованы в работах Э. Кофманна (см., в частности, [3])для изучения нелинейных операторов дробного дифференцирования. Как и в работах [1]– [2] для оператора A_ε получим представление

$$A_\varepsilon u = A_0 u + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + ... + \varepsilon^n A_n + ... \tag{1}$$

Для получения представления (1) поступим следующим образом: изучим разность операторов $(A_\varepsilon - A_0)$, что равносильно $(M_\varepsilon - M_0)$ и $(N_\varepsilon - N_0)$. Введем обозначения: ядро оператора M_ε обозначим символом $K_\varepsilon(x,t)$, а ядро оператора M_0 обозначим символом $K_0(x,t)$. Очевидно, что

$$K_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} (x-t)^{1+\varepsilon}, \ t < x \\ 0, \ t \geqslant x \end{cases} \qquad K_0(x,t) = \begin{cases} (x-t), \ t < x \\ 0, \ t \geqslant x \end{cases}$$

Аналогично, ядра операторов N_ε и N_0 обозначим символами $\widetilde{K}_\varepsilon(x,t)$ и $\widetilde{K}_0(x,t)$ соответственно, где

$$\widetilde{K}_\varepsilon(x,t) = x^{1+\varepsilon}(1-t)^{1+\varepsilon}, \quad \widetilde{K}_0(x,t) = x(1-t).$$

Очевидно, что $(A_0 - A_\varepsilon)u = (M_0 - M_\varepsilon)u - (N_0 - N_\varepsilon)u$. Ясно, что

$$(M_0 - M_\varepsilon)u = \int\limits_0^1 [K_0(x,t) - K_\varepsilon(x,t)]u(t)dt,$$

причем

$$K_0(x,t) - K_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} (x-t)[1-(x-t)^\varepsilon], \ t < x \\ 0, \ t \geqslant x \end{cases}$$

Так как

$$a^x = e^{x\ln a} = 1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + ..., \ |x| < \infty, \ a > 0 \tag{2}$$

то

$$M_\varepsilon u = \int\limits_0^1 K_0(x,t)u(t)dt + \varepsilon\int\limits_0^1 K_1(x,t)u(t)dt + \tag{3}$$

$$+\varepsilon^n \int\limits_0^1 + \varepsilon^2 \int\limits_0^1 K_2(x,t)u(t)dt + ... + K_n(x,t)u(t)dt + ...$$

где

$$K_n(x,t) = \begin{cases} \frac{x(1-t)\ln^n(x-t)}{n!}, \ t < 1 \\ 0, \ t \geqslant 1 \end{cases}$$

$n = 1; 2; 3; ...$ Точно также, можно получить представление вида (3) и для оператора N_ε

$$N_\varepsilon u = \int\limits_0^1 \widetilde{K}_0(x,t)u(t)dt + \varepsilon\int\limits_0^1 \widetilde{K}_1(x,t)u(t)dt + \tag{4}$$

$$+\varepsilon^2 \int\limits_0^1 \widetilde{K}_2(x,t)u(t)dt + ... + \varepsilon^n \int\limits_0^1 \widetilde{K}_n(x,t)u(t)dt + ...$$

$$\widetilde{K}_n(x,t) = \begin{cases} \frac{x(1-t)\ln^n(1-t)}{n!}, \ t < 1 \\ 0, \ t = 1 \end{cases}$$

$n = 1; 2; 3; \ldots$ Таким образом, формально имеем представление (1)

$$A_\varepsilon u = A_0 u + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots + \varepsilon^n A_n + \ldots$$

где $A_0 = M_0 - N_0, A_1 = M_1 - N_1, \ldots, A_n = M_n - N_n, \ldots$

Таким образом, в гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$ рассматривается ограниченный линейный оператор A_ε, аналитический зависящий от комплексного оператора ε в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$;

$$A_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k.$$

(Сходимость понимается как сходимость по норме).

Теорема 1. *Пусть* $|\varepsilon| < \frac{3}{2}$. *Тогда, ряд (1) образует голоморфное семейство типа* (A) *[4].*

Теорема. 2 *Пусть* $|\varepsilon| < \dfrac{1}{\frac{16}{3} + \frac{4}{\pi^2}}$, *тогда первое собственное число* $\lambda_1(\varepsilon)$ *оператора* A_ε *а.) Простое. в.) Положительное. с.) Справедливы соотношения*

$$|\lambda_1(0) - \lambda_1(\varepsilon)| = \left|\lambda_1(\varepsilon) - \frac{1}{\pi^2}\right| \leqslant \frac{3}{\pi^2}\left[|\varepsilon|\left(\frac{16}{3} + \frac{4}{\pi^2}\right)\right]^2$$

$$|\varphi_1(0) - \varphi_1(\varepsilon)| = |\varphi_1(\varepsilon) - \sin x\pi| \leqslant \frac{1}{2}\left[|\varepsilon|\left(\frac{16}{3} + \frac{4}{\pi^2}\right)\right]^2.$$

Литература

1. *Aleroev T. S.* On a boundary value problem for a fractional-order differential operator // Differentsial'nye Uravneniya. — 1998. — Vol. 34, № 1. — P. 126.
2. *Aleroev T. S., Aleroeva H. T.* Ning-Ming Nie, and Yi-Fa Tang. Boundary Value Problems for Differential Equations of Fractional Order // Mem. Differential Equations Math. Phys. — 2010. — Vol. 49. — P. 19–82.
3. *Kaufmann E.* Positive solutions of a boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. — 2008. — № 3. — P. 1–11; `http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/`
4. *Cato T.* The theory of indignation of linear operators, 1972.

On one boundary value problem for differential operators of Storm-Liouville type of fractional order

E. A. Larionov, T. S. Aleroev

Moscow State Academy of a Municipal Services and Construction, Moscow, Russia, aleroev@mail.ru

Сингулярное ультрагиперболическое уравнение

Л. Н. Ляхов, И. П. Половинкин, Э. Л. Шишкина

Воронежский гос. университет, Воронеж, Россия
lyakhov@box.vsi.ru,polovinkin@yandex.ru

Классическое ультрагиперболическое уравнение имеет вид $\Delta_x u(x,y) = \Delta_y u(x,y)$, где Δ_x и Δ_y операторы Лапласа одной размерности n (см. [1]).

Пусть $\gamma_i \geqslant 0$ и $B_{\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$ — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя. Роль операторов Лапласа в наших исследованиях играет оператор $\Delta_\gamma=\sum_{i=1}^m B_{\gamma_i}$, рассматриваемый в

$$R_m^+=\{x\in R_m;\ x_1>0,\dots,x_m>0\}.$$

Пусть $x' \in R_{m'}$, $x'' \in R_{m''}$. Уравнение вида

$$(\Delta_{\gamma'})_{x'} u(x',x'')=(\Delta_{\gamma''})_{x''} u(x',x''), \tag{1}$$

где m' и m'' натуральные числа, будем называть *сингулярным ультрагиперболическим уравнением.*

Пусть T^h многомерный обобщённый сдвиг с векторным шагом h порядка $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ (см. [2]), при $\gamma_i = 0$ соответствующий обобщённый сдвиг — обычный сдвиг на шаг h_i. Рассматриваемое в этой работе *весовое сферическое среднее, порождённое многомерным обобщённым сдвигом* (в.сф. среднее), имеет вид

$$M_r^\gamma f(x)=\frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma}\int\limits_{S_1^+(n)} T^{ry} f(x) y^\gamma d\omega,\ |S_1^+(n)|_\gamma=\int\limits_{S_1^+(n)}\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dS.$$

Пусть $u(x',x'') \in C^2(R_{m'}^+ \times R_{m''}^+)$, четная по каждой из переменных. По каждой из групп переменных x' и x'' возьмём весовые сферические средние по частям единичных сфер $S_1^+(m')$ и $S_1^+(m'')$ с центрами в началах координат в $\overline{R_{m'}^+}$ и $\overline{R_{m''}^+}$ соответственно; координаты векторов сдвига в $\overline{R_{m'}^+}$ и $\overline{R_{m''}^+}$ обозначим соответственно через $y = (y_1,...,y_{m'})$ и через $z = (z_1,...,z_{m''})$. Положим

$$(M_r^{\gamma'} u)(y,z;r)=\frac{1}{|S_1^+(m')|_\gamma}\int\limits_{S_1^+(m')} T_y^{r\xi} u(y,z)\ \xi^\gamma\, dS(\xi),$$

$$(M_s^{\gamma''} u)(y,z;s)=\frac{1}{|S_1^+(m'')|_\gamma}\int\limits_{S_1^+(m'')} T_z^{s\zeta} u(y,z)\ \zeta^\gamma\, dS(\zeta).$$

Следующий результат, является распространением хорошо известной теоремы Асгейрссона на сингулярное ультрагиперболическое уравнение.

Теорема. *Если* $m'+|\gamma'|=m''+|\gamma''|$ *и функция* $u(x',x'')$ *удовлетворяет уравнению (1), то «двойное» в.сф. среднее* $(M_r^{\gamma'}M_s^{\gamma''}u(x',x''))(y,z;r,s)$ *не зависит от точек* y *и* z *в* $\overline{R^+_{m'}}$ *и* $\overline{R^+_{m''}}$ *соответственно и*

$$M_r^{\gamma'}M_s^{\gamma''}u=M_s^{\gamma'}M_r^{\gamma''}u. \tag{2}$$

Справедливо обратное утверждение: всякая функция

$$u(x',x'')\in C^2(R^+_{m'}\times R^+_{m''}),$$

четная по каждой из своих переменных, с условием (2), выполненным для всякой точки $(y,z)\in R^+_{m'}\times R^+_{m''}$ *и для всяких* $r>0$ *и* $s>0$, *удовлетворяет уравнению (1) в* $R^+_{m'}\times R^+_{m''}$.

Отметим также, что нами изучена задача Коши для уравнения (1) и получена структура её решения.

Литература

1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир. 1964. — С. 830.
2. *Ляхов Л. Н.* Фундаментальные решения сингулярных дифференциальных уравнений с D_B−оператором Бесселя // Тр. МИАН. — 2012. – Т. 278. — С. 148–160.
3. *Половинкин И. П.* Теоремы о среднем для волновых уравнений и уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дис. … канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 1992.

Singular Ultrahyperbolic Equation

L. N. Lyakhov, I. P. Polovinkin, E. L. Shishkina

Voronezh State University, Voronezh, Russia
lyakhov@box.vsi.ru,polovinkin@yandex.ru

Приближенное решение одной задачи для уравнения Шредингера с чисто мнимым коэффициентом в нелинейной части этого уравнения

Н. М. Махмудов

Нахичеванский государственный университет, Нахичевань, Азербайджан
nuralimaxmudov@rambler.ru

В данной работе исследуются приближенное решение задачи оптимального управления о минимизации функционала:

$$J(v) = \|\psi_1 - \psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{1}$$

на множестве

$$V \equiv \left\{ v = v(x) : \; v \in W_2^1(0,\ l), \; |v(x)| \leqslant b_0, \overset{\circ}{\forall} x \in (0, l), \; \left\| \frac{dv}{dx} \right\|_{L_2(0,l)} \leqslant b_1 \right\}$$

при условиях

$$i\frac{\partial \psi_p}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x^2} - a(x)\psi_p - v(x)\psi_p + ia_1|\psi_p|^2\psi_p = f_p(x,\ t), \quad (x,\ t) \in \Omega, \tag{2}$$

$$\psi_p(x,\ 0) = \phi_p(x), \quad x \in (0,\ l), \; p = 1,\ 2, \tag{3}$$

$$\psi_1(0,\ t) = \psi_1(l,\ t) = 0, \; t \in (0,\ T), \tag{4}$$

$$\frac{\partial \psi_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0,T), \tag{5}$$

где $i^2 = -1,\ l > 0,\ T > 0,\ a_0 > 0,\ a_1 \geqslant 0,\ b_0 > 0,\ b_1 > 0$ – заданные числа, $\Omega = (0,\ l) \times (0,\ T)$, $a(x)$ – ограниченная, измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$0 < \mu_0 \leqslant a(x) \leqslant \mu_1, \; \overset{\circ}{\forall} x \in (0,\ l), \; \mu_0,\ \mu_1 = const > 0, \tag{6}$$

а функции $\phi_k = \phi_k(x),\ f_k = f_k(x,\ t),\ k = 1,\ 2$ – являются заданными и удовлетворяют условиям:

$$\phi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l), \quad \phi_2 \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l), \quad \frac{d\phi_2(0)}{dx} = \frac{d\phi_2(l)}{dx} = 0, \tag{7}$$

$$f_k \in W_2^{0.1}(\Omega), \quad k = 1, 2. \tag{8}$$

Функция $v(x,t)$ является кванто-механическим потенциалом в уравнении Шредингера (2) с чисто мнимым коэффициентом в нелинейной части этого уравнения. Функционалы типа (1) изучены в работах Лионса, Искендерова, Якубова и Махмудова [1]– [4] и др.

В данной работе рассматривается вопрос о применении разностного метода к решению задачи оптимального управления для уравнения Шредингера с чисто мнимым коэффициентом в нелинейной части уравнения с квадратичным критерием качества, когда множество допустимых управлений состоит из ограниченно измеримых функций, имеющих квадратично суммируемые производные.

Литература

1. *Искендеров А.Д.* О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики // ДАН СССР. — 1984. — Т. 274, № 3. — С. 531–533.
2. *Искендеров А.Д., Махмудов Н.М.* Оптимальное управление квантомеханической системой с критерием качества Лионса // Изв. АНА, Сер. физ.-тех. матем. наук. — 1995. — Т. XVI, № 5-6. — С. 30–35.
3. *Ягубов Г.Я.* Разностный метод решения задачи оптимального управления коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера с интегральным критерием качества по границе области // В сб.: «Проблемы матем. модел. и опт. управления». — Баку, 2001. — С. 37–48.
4. *Mahmudov N.M.* Existence and uniqueness of the solution of an optimal control problem for a Schrodinger equation with pure imaginary coefficient in the non-linear part of the equation // Azerbaijan National Academy of Sciences. Transactions issue mathematics series of physical-technical & mathematical science, 2007. — Vol. XXVII, № 7 cild. — P. 109–117.

The approached decision of one problem for the equation of Shredingera c in purely imaginary factor in a nonlinear part of this equation

N. M. Maxmudov

The Nakhichevan State University, Nakhichevan, Azerbaijan
nuralimaxmudov@rambler.ru

Сингулярные интегральные уравнения в классах Н.И.Мусхелишвили

А. В. Мерлин

Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова, Чебоксары, Россия, merlina@cbx.ru

В настоящей статье рассматривается сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, решения которого ищутся в классе Н.И. Мусхелишвили. Классическая теория решения подобных уравнений к настоящему моменту времени достаточно хорошо разработана и подробно изложена в известных монографиях Гахова Ф.Д. и Мусхелишвили Н.И. [1, 2].

В нашей работе предлагается иной способ решения указанного уравнения, состоящий в его сведении к уравнению того же типа, но решение которого ищется в классе функций, имеющих в узлах Мусхелишвили Н.И. неинтегрируемые особенности первого порядка. Идея преобразования такого уравнения может быть проиллюстрирована на любом виде сингулярного интегрального уравнения.

Мы для такой иллюстрации выбрали характеристическое сингулярное интегральное уравнение, заданное на гладком замкнутом контуре, не проходящем через бесконечно удаленную точку комплексной плоскости, и решение которого ищется в произвольно фиксированном классе Н.И. Мусхелишвили:

$$a(t)\phi(t) + b(t)\cdot\frac{1}{\pi\cdot i}\int\limits_L \frac{\phi(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad t \in L - \{t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n\} \quad (1)$$

Узлы t_j фиксируют класс Н.И.Мусхелишвили, в котором ищется решение $\phi(t)$ с.и.у.(1) и в котором берётся правая часть $f(t)$. Коэффициенты уравнения (1) $a(t), b(t)$ могут иметь в узлах выбранного класса Н.И.Мусхелишвили разрывы первого рода и на любой замкнутой дуге контураL , не содержащей узлов t_j, удовлетворяют условию Гёльдера. Как обычно, уравнение (1) является уравнением нормального типа.

В уравнении (1) сделаем замену искомой функции по формуле

$$\phi(t) = \frac{\psi(t)}{\varpi(t)}, \quad (2)$$

где через $\omega(t)$ обозначено произведение $\omega(t) = \prod\limits_{k=0}^{n}(t - t_k)$. Из соотношения (2) следует, что $\psi(t)$ необходимо является гельдеровой функцией на контуре. После несложных тождественных преобразований уравнение (1) приобретает вид

$$a(t)\psi(t) + b(t)(\frac{1}{\pi\cdot i}\int\limits_L \frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau - t} - \sum_{k=0}^{n}\omega_k(t)\cdot\frac{1}{\pi\cdot i}\int\limits_L \frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau - t_k}) = F(t), \quad (3)$$

где $\omega_k(t) = \prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n} \frac{t-t_j}{t_k-t_j}, \quad F(t) = f(t)\omega(t)$.

Здесь функция $F(t)$ является гельдеровой и обращается в нуль во всех отмеченных узлах t_j. Уравнение вида (3) рассматривалось автором в ряде публикаций. Оно сводится к эквивалентной краевой задаче Римана для аналитических функций посредством введения вспомогательной кусочно-аналитической функции $\Phi(z)$ в виде интеграла типа Коши с плотностью в виде искомой функции $\psi(t)$: $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\cdot i}\int\limits_L \frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau-z} - \sum\limits_{k=0}^{n} \omega_k(z)\frac{1}{2\pi\cdot i}\int\limits_L \frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau-t_k}$. Краевое условие задачи Римана имеет при этом следующий вид:

$$\Phi^+(t) = \frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)}\Phi^-(t) + \frac{F(t)}{a(t)-b(t)}, \tag{4}$$

Где предельные значения функции $\Phi(z)$ связаны точечными условиями

$$\Phi^+(t_k) = 0, \quad \Phi^-(t_k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, ..., n \tag{5}$$

И строить решение задачи нужно в классе функций, имеющих полюс порядка n в бесконечно удалённой точке $z = \infty$.

Такая задача автором решена: найдено общее решение, указаны условия её разрешимости и подсчитано число линейно-независимых решений.

Теперь решение $\psi(t)$ сингулярного интегрального уравнения (3) находится через скачок решения краевой задачи (4)–(5) по формуле

$$\psi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t). \tag{6}$$

Наконец , решение исходного сингулярного интегрального уравнения (1) Получаются подстановкой функции (6) в формулу (2). Непосредственно показывается, что решение уравнения (1), построенное в настоящей статье совпадает с решением, построенным в монографиях [1, 2].

Литература

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М: Наука, 1970. — 640 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М: Наука, 1968. — 513 с.

Singular integral equation in the class N.I. Mushelischvili

A. V. Merlin

Chuvash State University named after I.N.Ulyanov, Cheboksary, Russia
merlina@cbx.ru

Дифференциальные уравнения и д.-операторы, испытывающие вырождение порядка

Л. Г. Михайлов

Институт математики АН РТ., г. Душанбе, Таджикистан

1. Вырождение порядка систем в полных дифференциалах. Названными системами (в полярных координатах) являются

$$r \cdot U'_r = \rho(r, \varphi),\ U'_r = q(r, \varphi),\ \rho, q \in C^m,\ m = 2 \tag{1}$$

Теорема 1. *Если областью является круг* $D : |z| \leqslant R$, *а* D_0 *— выколотый круг, то при выполнении необходимого условия совместности* $\rho'_\varphi = r \cdot q_r$ $\quad (N)$ *существует решение (1) (при* $q_0 \neq 0$ *многозначное), представимое формулой*

$$U(r, \varphi) = c + \rho_0 \cdot \ln r + q_0 \cdot \varphi + \tilde{U}(r, \varphi), \tag{2}$$

где $c = const.$, $\tilde{U}$*−регулярна, а* ρ_0, q_0*− значения при* $r = 0$ *коэффициентов Тейлоровских разложений по степеням* r . Аналогичный результат будет получен также далее. 2. Вырождающееся д. у. второго порядка.

$$-r^2 \cdot \Delta U + v^2 \cdot U = q(r, \varphi) \tag{3}$$

Всякое его решение из $C^2(D_0) \cap C(\overline{D})$в круге D_0 представимо формулой

$$U(r, \varphi) = \sum_{\kappa=0}^{+\infty} A_\kappa \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{\gamma_\kappa} \cdot e^{i\kappa\varphi},\ A_\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(Re^{i\alpha}) \cdot e^{-i\kappa\alpha} \cdot \alpha\alpha,\ \gamma_\kappa^2 = \kappa^2 + \gamma^2, \tag{4}$$

1^0. Всякое решение однородного д.у. (3_0) обращается при $r = 0$ в нуль, порядок которого совпадает с одним из чисел $v_\kappa, \kappa = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

2^0. Если $U(r, \varphi)$решение (3_0) на всей плоскости E и если оно ограничено, то необходимо $U(r, \varphi) \equiv 0$ (теорема Лиувилля).

3^0. Решение первой краевой задачи существует, единственно и даётся (в круге) формулой типа Пуассона.

4^0. Выписывается формула представления для частного решения неоднородного уравнения. Аналогичные результаты получены для обобщений системы Коши–Римана.

Differential equations and on-operators experiencing degeneration of order

L. G. Mikhailov

Institute of Mathematics of the RT., Dushanbe, Tadzhikistan

Просветляющие покрытия при наклонном распространении

А. В. Митин*, Ю. И. Худак*, В. В. Тихомиров†

* *Ташкентский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова, Ташкент, Узбекистан, sh_alimov@mail.ru, max074777@mail.ru*

† *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, zedum@cs.msu.su*

Рассматриваются плоскослоистые магнитодиэлектрические среды (МДС), в которых распространяются плоские электромагнитные волны, линейно поляризованные (см. [1]) под некоторым углом по отношению к слоистой системе, для которых справедливы уравнения Максвелла и материальные уравнения в простейшей форме.

В продолжение направления, заданного работой [2], ищутся оптимальные характеристики просветляющего слоя в случае изменения частоты излучения в заданном диапазоне. В частности (см. [3]), изучается возможность однослойного равномерного по частоте просветления при «наклонном падении» волны.

Литература

1. *Born M., Wolf E.* “Principles of Optics” 7th ed. — Cambridge, 2002.
2. *Худак Ю. И.* О наилучшем однослойном просветляющем покрытии для интервала частот // ЖВМиМФ. — 1990. — Т. 30, № 2. — С. 325–327.
3. *Hudak Yu. I., Mitin A. V.* The anti-reflective coating for the oblique incidence of light, PROGRESS IN ANALYSIS. // Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation (22–27 August 2011). — Vol. 1 / V.I. Burenkov, M.L. Goldman, E.B. Laneev, V.D. Stepanov Editors. — Moskow, Peoples’ Friendship University of Russia, 2012. — P. 128–137.

Antireflective coating at oblique propagation

A. V. Mitin*, Yu. I. Hudak*, V. V. Tikhomirov†

* *Tashkent Branch of Moscow State Lomonosov University, Tashkent, Uzbekistan sh_alimov@mail.ru, max074777@mail.ru*

† *Moscow State Lomonosov University, Moscow, Russia zedum@cs.msu.su*

Групповой анализ одного класса квазилинейных псевдопараболических уравнений

А. В. Панов, В. Е. Фёдоров

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
gjd@bk.ru, kar@csu.ru

Рассматривается квазилинейное уравнение вида

$$\alpha u_t - u_{txx} = f(u), \tag{1}$$

где α и $f = f(z)$ – постоянный и функциональный параметры, $u = u(t,x)$ – неизвестная функция. Данное уравнение, при $f(z) = e^z$ или $f(z) = ze^{z^2}$, описывает физические явления в полупроводниках при учёте дебаевской экранировки и учёте источников свободных зарядов [1]. В случае $f(z) = z^3$ уравнение описывает квазистационарные процессы в полупроводниках при наличии стационарного распределения источников тока свободных зарядов [1], а при $f(z) = z$ получается уравнение стратификации объемного заряда в полупроводнике [1]. Теорией полупроводников не ограничивается область применения уравнений такого класса. Например, при $f(z) = z - az^3$ получается известное уравнение Хоффа, описывающее выпучивание двутавровой балки.

Для данного класса уравнений были найдены группы преобразований эквивалентности [2], ядро основных алгебр Ли, спецификации параметров, дающие расширение основной алгебры Ли [3].

Теорема 1. *Базис ядра основных алгебр Ли уравнения* (1) при $\alpha \neq 0$ состоит из операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Теорема 2. *Базис ядра основных алгебр Ли уравнения* (1) в случае $\alpha = 0$ состоит из операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2t\frac{\partial}{\partial t}.$$

Теорема 3. *Генераторы однопараметрических групп преобразований эквивалентности имеют вид*

$$X_1 = c_1(\alpha)\frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = c_2(\alpha)\frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = c_3(\alpha)\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4 = c_4(\alpha)\left(x\frac{\partial}{\partial x} - 2\alpha\frac{\partial}{\partial \alpha} - 2f\frac{\partial}{\partial f}\right),$$

$$X_5 = c_5(\alpha)\left(u\frac{\partial}{\partial u} + f\frac{\partial}{\partial f}\right), X_6 = c_6(\alpha)\left(t\frac{\partial}{\partial t} - f\frac{\partial}{\partial f}\right).$$

Используя группы преобразований эквивалентности удалось найти спецификации параметра f, при которых ядро групп симметрий уравнения расширяется.

Теорема 4. *Базис основной алгебра Ли уравнения* (1) в случае $\alpha \neq 0,\ f(z) = e^z$ состоит из операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial u}.$$

В случае функции f линейного или экспоненциального вида и при $\alpha = 0$ алгебра симметрий уравнения бесконечномерна. При f линейной и $\alpha \neq 0$ алгебра также бесконечномерна.

Литература

1. *Свешников А. Г.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. — М.: Физматлит, 2007.
2. *Мелешко С. В.* Групповая классификация уравнений двумерных движений газа // Прикладная математика и механика. — 1994. — Т. 58, № 4. — С. 56–62.
3. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

Group analysis of a some class quasilinear pseudoparabolic equations

A. V. Panov, V. E. Fedorov

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
gjd@bk.ru, kar@csu.ru

Построение функций Грина для одной сингулярной системы дифференциальных уравнений

В. Ю. Приходько, Н. С. Чекалкин

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), Москва, Россия
prikhodi@mail.ru, chekalkin@rambler.ru

Рассматривается система линейных сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений для вектора $V(z)$

$$\frac{dV}{dz} = D(z)V + g(z), \qquad -1/2 < z < 1/2, \tag{1}$$

возникающая в динамической теории колебаний тонкостенных упругих оболочек. Компонентами вектора $V(z)$ являются нормированные гармоники Фурье вектора смещений-напряжений оболочки см. [1, 2]. Вектор-функция g описывает гармоники внешней поверхностной нагрузки, действующей на оболочку. В настоящей работе рассматривается вариант нагрузки, описываемой точечной силой, пропорциональной δ-функции Дирака.

Размерность системы (1) зависит от типа физической задачи. Для безмоментных оболочек $n = 2$, для оболочек теории типа Лява, в осесимметричном случае, $n = 6$. Эти варианты детально исследованы в работах см. [2, 3]. В настоящей работе рассматриваются системы с $n = 4$, возникающие в задачах дифракции волн на вытянутых телах. В этом случае матрица системы может быть записана в блочном виде

$$D = \begin{Vmatrix} Q & T \\ R & -Q^t \end{Vmatrix},$$

где Q, R, T — (2×2)-матрицы, все элементы матриц зависят от геометрии оболочки.

Система уравнений (1) является системой сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя особыми граничными точками $z = \pm 1/2$, являющимися полюсами оболочки. Поэтому, для корректной постановки сингулярной краевой задачи, в особых точках следует задать граничные условия, выделяющие для каждой из особых точек двухпараметрические семейства решений. Далее возможно применение методов локального устойчивого переноса граничных условий из особых точек и сведение сингулярной краевой задачи к задаче без особенностей на укороченном интервале.

Тип особой точки краевой задачи определяется геометрией полюсов оболочки, причем геометрия полюсов может давать как регулярную, так и иррегулярную особые точки. Для переноса краевых условий из особых точек требуется конкретный выбор геометрии оболочек.

Рассмотрим, например, случай симметричных особых точек сфероидальной оболочки, срединная поверхность которой описывается уравнением $F(z) = d\left(1/4 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}$, d — максимальный диаметр оболочки. Матрица коэффициентов системы (1) в этом случае, при $z \to \mp 1/2$, имеет особенности типа полюса

$$D(z) = \frac{D_0^{\mp}}{1/2 \pm z} + O\left(\left(1/2 \pm z\right)^{-1/2}\right),$$

где постоянные матрицы $D_0^{\mp}$ не зависят от геометрических характеристик сфероида, а зависят от номера гармоники m и коэффициента Пуассона ν

$$Q_0^{\mp} = \frac{\nu}{2}\left\| \begin{matrix} \mp 1 & -m \\ m & \mp 1 \end{matrix} \right\|, \quad T_0^{\mp} = \left\| \begin{matrix} \left(1-\nu^2\right)/2 & 0 \\ 0 & 1+\nu \end{matrix} \right\|,$$

$$R_0^{\mp} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 1 & -m \\ -m & m^2 \end{matrix} \right\|.$$

Применяя развитый см. [2] метод переноса краевых условий из особых точек, получаем несингулярную краевую задачу на более коротком отрезке $z^- \leqslant z \leqslant z^+$. Например, для нулевой гармоники получаем $l/2 \pm z^{\mp} < \varepsilon^2 / \left(4\left(1-\varepsilon^2\right)\right)$, где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр (отношение осей сфероида), краевые условия в точках $z^{\mp}$ можно записать в виде

$$M^{\mp} V(z^{\mp}) = 0, \tag{2}$$

где $M^{\mp}$ — (2×4)-матрицы, зависящие в случае сфероида, только от коэффициента ν. Тогда система (1), при отсутствии вынуждающих сил, является задачей на собственные значения с краевыми условиями (2), и может быть записана в виде

$$J\frac{dV}{dz} + SV = \lambda PV, \qquad -1/2 < z < 1/2, \tag{3}$$

где матрица $J = \left\| \begin{matrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{matrix} \right\|$, E — единичная (2×2)-матрица, $\lambda P - S = \left\| \begin{matrix} -T & Q^t \\ Q & R \end{matrix} \right\|$, P — диагональная матрица, λ — параметр, пропорциональный квадрату частоты колебаний. Для полученной регуляризованной краевой задачи (2), (3) справедливы теоремы об ортогональности собственных функций гамильтоновых систем см. [4], с весом $A(z)F(z)$, где $A = \sqrt{1 + \varepsilon^2 F'^2}$, и теоремы о разложении по системам собственных функций. Таким образом, при помощи соотношений ортогональности, получаются разложения типа Гильберта—Шмидта для столбцов тензора Грина исходной краевой задачи.

Литература

1. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1979.
2. *Абрамов А. А., Конюхова Н. Б., Парийский Б. С., Курочкин С. В., Приходько В. Ю.* Численные исследования осесимметричных свободных колебаний в вакууме и в сжимаемой среде вытянутой цилиндрической оболочки с полусферическими куполами. Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1993. — Т. 33, № 10. — С. 1550–1580.
3. *Конюхова Н. Б., Парийский Б. С., Приходько В. Ю.* Резонансное излучение вытянутой сфероидальной оболочки // Акуст. журн. — 1997. — Т. 43. — № 4. — С. 508–513.
4. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир, 1968.

Construction of Green's functions for a singular system of differential equations

V. Yu. Prikhod'ko, N. S. Chekalkin

Moscow Institute of Radio Engineering, Electronics and Automation (Technical university), Moscow, Russia
prikhodi@mail.ru, chekalkin@rambler.ru

К теории одного класса модельного линейного интегрального уравнения Вольтерра с граничными сингулярными ядрами

Н. Раджабов

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан
nusrat38@mail.ru

Пусть $\Gamma = x : a < x < b$ множество точек на вещественной оси. На Γ рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \int\limits_a^x \left[\sum_{k=1}^{n} p_k \ln^{k-1}\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right] \frac{\varphi(t)}{t-a} dt = f(x), \tag{1}$$

где $p_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ – заданные постоянные, $f(x)$ – заданная функция и $\varphi(x)$ – искомая функция.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $\varphi(x) \in C(\overline{\Gamma})$, $\varphi(a) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$\varphi(x) = [o(x-a)^{\varepsilon}]\,, \varepsilon > 0 \text{ при } x \to a.$$

Изучением интегрального уравнения (1), при $p_2 = p_3 = \cdots = p_n = 0$ и при $p_3 = p_4 = \cdots = p_n = 0$, посвящено [1,2]. Проблеме исследования одномерных и многомерных интегральных уравнений типов Вольтерра с граничными и внутренними сингулярными точками сингулярными областями посвящено [3,4].

Целью настоящей работы является исследование уравнение (1) при $n \geqslant 3$.

Теорема 1. *Пусть в интегральном уравнение (1) $n = 3$, параметры $p_j (1 \leqslant j \leqslant 3)$ такие, что корни алгебраического уравнения $\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + 2p_3 = 0$ вещественные, разные и положительные. Функция $f(x) \in C(\overline{\Gamma})$, $f(a) = 0$ с асимптотическим поведением*

$$f(x) = o\left[(x-a)^{\delta_1}\right], \delta_1 > \lambda, \lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \text{ при } x \to a.$$

Тогда интегральное уравнение (1) в классе функций $\varphi(x) \in C(\overline{\Gamma})$, обращающиеся в нуль в точке $x = a$ всегда разрешимо и его общее решение содержит три произвольные постоянные и дается формулой

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{3} (x-a)^{\lambda k} c_k + \frac{1}{\Delta_0} \int\limits_a^x \left[\sum_{k=1}^{3} \lambda_k^3 \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\lambda_k}\right] \frac{f(t)}{t-a} dt,$$

где

$$\Delta_0 = \lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_3\lambda_1^2 - \lambda_2\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_2^2,$$

$c_k (1 \leqslant k \leqslant 3)$ *– произвольные постоянные.*

Замечание 1. *Утверждение подобное теоремы 1, получено при $n = 3$ и всевозможных случаях корней алгебраического уравнения $\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + 2p_3 = 0$.*

Замечание 2. *Интегральному уравнению (1) в общем случае, соответствует следующее алгебраическое уравнение*

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + 2!\lambda^{n-3} + 3!p_4\lambda^{n-4} + \cdots + (n-1)p_n = 0$$

Интегральное уравнение (1) изучено также в некоторых общих случаях.

Литература

1. *Rajabov N.* Volterra type Integral Equation with Boundary and Interior Fixed Singularity and Super-singularity Kernels and Their Application. — Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. — 282 p.
2. *Rajabov N.* About New Class of Volterra Type Integral equations with boundary Singularity in Kernels / In books "Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory: Contributions from AMAT 2012". — USA: Springer. — P. 341–360.
3. *Раджабов Н.* Многомерное интегральное уравнение вольтерровского типа с сингулярными граничными областями в ядрах // Докл. АН России. — 2011. — Vol. 437, № 2. — С. 1–3.
4. *Раджабов Н., Раджабова Л.* Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. — Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing. — 2012. — 502 p.

To theory one class modeling Linear Volterra type Integral equation with boundary singular kernels

N. Rajabov

Tajik national university, Dushanbe, Tajikistan
nusrat38@mail.ru

О простейшем параболическом уравнении с D_B оператором Бесселя

Л. Б. Райхельгауз

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
jikol_85@mail.ru

Пусть γ — фиксированное положительное число и $B_\gamma = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{d}{dx}$ — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя. Рассмотрим следующий линейный сингулярный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dt} - L(D_B) = H, \quad L(D_B) = \sum_{\alpha \leqslant 2m} a_\alpha\, D_B^\alpha,$$

$$D_B^\alpha = \begin{cases} B_\gamma^{\alpha/2}, & \alpha = 2k, \\ \frac{d}{dx} B_\gamma^{(\alpha-1)/2}, & \alpha = 2k+1, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Пусть, также, $\delta(t)$-дельта распределение Дирака, а $\delta_\gamma(x)$-дельта распределение Дирака-Киприянова (см. книгу [1]), действие которого на функцию f, непрерывную в окрестности начала координат и интегрируемую с весом x^γ, $\gamma > 0$, определяется формулой

$(f\,,\,\delta_\gamma)_\gamma = \int_0^\infty f(x)\,\delta_\gamma(x)\,x^\gamma\,dx = f(0)$.

Фундаментальным решением оператора H будем называть четную по переменной x функцию $\mathcal{E}(x,t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$H\mathcal{E}(x,t) = \delta_\gamma(x)\delta(t). \tag{1}$$

Решение уравнения (1) найдено применением *полного преобразования Фурье–Бесселя* следующего вида (введено И.А. Киприяновым и В.В. Катраховым в [2]; мы используем уточненное определение из работы [3])

$$\mathcal{F}_B[f](\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[j_\nu(x\xi) - i\frac{x\,\xi}{2(\nu+1)} j_{\nu+1}(x\xi) \right] f(x)\,x^\gamma\,dx\,. \tag{2}$$

Здесь $\nu = \frac{\gamma-1}{2}$ (при этом $\nu{>}0$), а j_ν — j-функция Бесселя (см. [1]). В образах этого преобразования уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{ev}[u](\xi,t)}{\partial t} - L(i\,\xi)\mathcal{F}_{ev}[u](\xi,t) = \delta(t),$$

где $\mathcal{F}_{ev}$ — четная составляющая преобразования (2): $\mathcal{F}_{ev}[f] = \widehat{f}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} j_\nu(x,\xi)\,f(x)\,x^\gamma\,dx$. Предполагая оператор L — B-эллиптическим (т.е. его символ $L(i\xi)$ не равен нулю вне начала координат, см. [1]), получим

$$\mathcal{F}_{ev}[\mathcal{E}](\xi\, t) = \Theta(t)\, e^{L(i\xi)t}, \qquad \Theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geqslant 0, \end{cases}$$

Обратное (четное) преобразование Фурье-Бесселя имеет вид $\mathcal{F}_{ev}^{-1}[f] = \frac{1}{2^\gamma\,\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\mathcal{F}_{ev}[f]$, В результате применения этого преобразования (на множестве $[0,\infty)$), получим следующее представление фундаментального решения уравнения (1):

$$\mathcal{E}(x,t) = \mathcal{F}_{ev}^{-1}\left[\Theta(t)\, e^{L(i\xi)t}\right](x,t). \tag{3}$$

В качестве примера применения формулы (3) рассотрим следующее сингулярное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta_B \mathcal{E} = \delta_\gamma(x)\delta(t), \tag{4}$$

где $\Delta_B {=} \sum_{i=1}^n B_i {+} \Delta'$, $\Delta' {=} \sum_{i=n+1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $B_i {=} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} {+} \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$. Предполагая решение этого уравнения радиальным по пространственным переменным, применим в (4) сферическое преобразование координат $x{=}r\theta$, $|\theta|{=}1$. В результате уравнение (4) примет вид уравнения (1): $\frac{\partial \mathcal{E}(r,t)}{\partial t} - a^2 B_{r,N+|\gamma|-1}\mathcal{E}(r,t) = \delta_{N+|\gamma|-1}(r)\delta(t)$, где N — размерность пространственных переменных, $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$. Теперь для применения преобразования (2) достаточно считать, что $\gamma_i > -1$, $N{+}|\gamma|{-}1{>}0$. Формула (3) при $L(i\xi) = -|\xi|^2$ дает следующее решение

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\Theta(t)\;\, t^{-\frac{N+|\gamma|}{2}}\;\, e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{2^{N+|\gamma|-n}\;\pi^{\frac{N-n}{2}}\;\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}.$$

Заметим, что если принять $\gamma = 0$ (или $\nu = -1/2$), то $\mathcal{E}_0(x,t) = \Theta(t)\frac{t^{-\frac{N}{2}}\; e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi})^N}$, что совпадает с фундаментальным решением классического оператора теплопроводности.

Литература

1. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. —М.: Наука, 1997. — С. 200.
2. *Киприянов И. А., Катрахов В. В.* Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов / И.А. Киприянов, В.В. Катрахов // Мат. сб. — 1977. — Т. 104. — № 1. — С. 49–68.

3. *Катрахов В. В., Ляхов Л. Н.* Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов // Дифференц. уравнен. — 2011. — Т. 17, № 5. — С. 681–695.
4. *Райхельгауз Л. Б.* Полное преобразование Фурье–Бесселя и сингулярные дифференциальные уравнения с D_B-оператором Бесселя. — Воронеж: ВГУ, 2011. Автореф. кандидат. диссерт.

About the elementary parabolic equation with D_B Bessel's operator

L. B. Raykhelgauz

Voronezh State University, Voronezh, Russia
jikol_85@mail.ru

Об аналоге функции Коши для обобщенного уравнения с несколькими отклонениями аргумента

В. И. Родионов

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
rodionov@uni.udm.ru

Обобщаются результаты работ [1,2]. В [2] показано, что семейство уравнений с отклоняющимся аргументом $x(t) - \lambda \int_\alpha^t x(F(\cdot))\,dq = f(t)$ вложимо в семейство уравнений $x(t) - \int_\alpha^t (dQ * x) = f(t)$, где F-интегральный оператор $x(t) \to \int_\alpha^t (dQ * x)$ тесно связан с косым умножением $*$, действующим в алгебре, порожденной отклоняющей функцией $F:\ D \to D$ (где $D \doteq [a,b]$ – фиксированный отрезок). В работе [2] построен аналог функции Коши для F-интегрального уравнения.

Пусть $\alpha, t \in D$, $x, q_i, f \in \mathrm{C}(D,\mathbb{R})$, $F_i \in \mathrm{C}(D,D)$, $i = 1,\ldots,r$, – непрерывные функции, причем q_i имеют ограниченное изменение. Семейство уравнений с отклонениями $F_i:\ D \to D$

$$x(t) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \int_\alpha^t x(F_i(\cdot))\,dq_i = f(t), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

вложимо в семейство Ф-интегральных уравнений

$$x(t) - \int_\alpha^t (dQ * x) = f(t), \tag{2}$$

где оператор $x(t) \to \int_\alpha^t (dQ * x)$ тесно связан с косым умножением $*$, действующим в специальной алгебре, порожденной полугруппой Ф, порожденной в свою очередь алгебраическими эндоморфизмами $\varphi_1,\ldots,\varphi_r:\ (\varphi_i x)(\cdot) = x(F_i(\cdot))$. (Для Ф-интеграла мы оставляем то же обозначение, что и для F-интеграла.) Построен аналог функции Коши, исследованы его свойства, получены сопутствующие соотношения. Введено понятие сопряженного Ф-интегрального уравнения. Дано представление в форме Коши для решений уравнения (2) и Ф-сопряженного к нему. Доказана сходимость решений уравнений (величины λ_i выполняют роль спектральных параметров).

Значительный интерес к матрицам Коши для линейных функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) обусловлен тем обстоятельством, что в теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений однозначно разрешима начальная задача, причем ее решение представимо в интегральной форме Коши. Уместно также отметить, что и другие семейства ФДУ имеют глубокие аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями в тех случаях, когда однозначно разрешима начальная задача (или краевая задача), а решение представимо в интегральной форме Коши. Здесь, однако, типична ситуация, когда матрица Коши теряет некоторые важные специфические свойства матрицы Коши обыкновенного дифференциального уравнения, например, нарушается тождество $C(t,\tau) = X(t)\,X^{-1}(\tau)$, связывающее между собой матрицу Коши и фундаментальную матрицу.

Уравнение (1) (а также уравнения из работ [1, 2]) относится к семейству линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, причем все отклонения F_i действуют из отрезка D в себя. Это специфическое обстоятельство позволяет отказаться от задания начальной функции и ограничений вида $F_i(t) \leq t$. В настоящей работе мы определяем процедуру построения фундаментального решения $X(\cdot)$ уравнения (2) (и, в частности, уравнения (1)) и обнаруживаем, что относительно нового умножения $*$ оно обратимо, т. е. существует $Y(\cdot)$ такое, что $X(\cdot) * Y(\cdot) = e$. Полученное соотношение позволяет определить произведение $C(t,\tau) \doteq X(t) * Y(\tau)$, которое при некоторых дополнительных условиях на параметры уравнения обладает всеми характерными свойствами функции Коши.

Таким образом, также как и в работах [1, 2], в задаче с «искривленным» временем за счет введения нового «искривленного» умножения $*$ и ассоциированного с ним псевдоинтегрального оператора восстановлено тождество $C(t,\tau) = X(t) * X^{-1}(\tau)$, и мы предполагаем, что и другие семейства ФДУ допускают подобные преобразования.

Литература

1. *Родионов В. И.* Аналитическое решение линейного функционально-дифференциального уравнения с линейным отклонением аргумента // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, № 4. — С. 616–626.
2. *Родионов В. И.* Аналог функции Коши для обобщенного уравнения с отклоняющимся аргументом // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 10. — С. 1352–1362.

An analogue of the Cauchy function for the generalized equation with a few deviations of argument

V. I. Rodionov

Udmurt State University, Izhevsk, Russia
rodionov@uni.udm.ru

О задаче Соболева с нелокальными условиями

А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
antonsavin@mail.ru, sternin@mail.ru

Рассмотрим вложение $X \subset M$, где M — гладкое замкнутое многообразие, а X — его гладкое замкнутое подмногообразие. Предположим дополнительно, что на M задано гладкое действие группы G. При этом, мы не предполагаем, что подмногообразие X инвариантно относительно действия.

Для эллиптического оператора D на M рассматривается *задача Соболева с нелокальными условиями*:

$$\begin{cases} Du \equiv f \mod X, \\ Bu = h \quad \text{на } X. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь u, f — функции на M, h — функция на X, а сравнение рассматривается по модулю подпространства функций (распределений) с носителем на подмногообразии X. Наконец, оператор B, определяющий нелокальное граничное условие на X в задаче (1), имеет вид:

$$B = \sum_{g \in G} B_g T_g, \tag{2}$$

где B_g — псевдодифференциальный оператор на M, $T_g u(x) = u(g^{-1}(x))$ — оператор сдвига, отвечающий диффеоморфизму $g : M \to M$, $g \in G$. Предполагается, что коэффициенты B_g отличны от нуля только для конечного числа элементов g.

В случае, когда оператор B не содержит операторов сдвига, задача (1) есть классическая задача Соболева (см. [1]), а её исследование сводится к исследованию эллиптичности некоторого псевдодифференциального оператора на подмногообразии X. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы получить условия, обеспечивающие фредгольмовость задачи (1) в соответствующих пространствах Соболева для широкого класса действий групп.

Мы сводим задачу (1) к оператору на подмногообразии. Оказывается, однако, что оператор на подмногообразии не имеет вида (2), и он требует отдельного рассмотрения. Мы исследуем получаемый оператор, в частности, устанавливаем условие фредгольмовости, вычисляем его индекс. Как следствие, получаем условие фредгольмовости и индекс исходной задачи (1).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00577.

Литература

1. *Стернин Б. Ю.* Относительная эллиптическая теория и проблема С.Л. Соболева // Докл. АН СССР. — 1976. — Т. 230, № 2. — С. 287–290.

On the Sobolev problem with nonlocal conditions

A. Yu. Savin, B. Yu. Sternin

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
antonsavin@mail.ru, sternin@mail.ru

Асимптотические формулы для фундаментальной системы решений оператора Дирака с суммируемым потенциалом

А. М. Савчук

МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия
artem_savchuk@mail.ru

Рассматривается дифференциальное выражение

$$l_Q(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + Q\mathbf{y}$$

в пространстве $H = L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi] \ni \mathbf{y}$, где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_3(x) & -q_1(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

а функции q_j, $j = 1, 2, 3$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0,\pi]$ и комплекснозначными. В докладе мы сформулируем асимптотические формулы для фундаментальной системы решений векторного уравнения $l_Q(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y}$. Остаточные члены в этих формулах имеют вид $\int_0^x q_j(t)\sin(2\lambda t)dt$ и $\int_0^x q_j(t)\cos(2\lambda t)dt$. Такой вид остаточных членов позволит нам получать асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций операторов Дирака, порожденных выражением l_Q и краевыми условиями в различных шкалах функциональных пространств для потенциала Q.

Доклад основан на результатах работы [1])

Литература

1. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом // Дифф. уравнения. — 2013. — № 5.

Asymptotic formulae for fundamental system of Dirac operator with summable potential

A. M. Savchuk

Moscow State Lomonosov University, Moscow, Russia
artem_savchuk@mail.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00705.

Асимптотические формулы для собственных функций оператора Дирака с комплекснозначным потенциалом и теоремы равносходимости

И. В. Садовничая

МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия
ivsad@yandex.ru

Рассматривается оператор L_Q, порожденный дифференциальным выражением

$$l_Q(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + Q\mathbf{y}$$

в пространстве $H = L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi] \ni \mathbf{y}$, где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_3(x) & -q_1(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

а функции q_j, $j = 1, 2, 3$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0, \pi]$ и комплекснозначными, и краевыми условиями $y_1(0) = y_1(\pi) = 0$. На основе асимптотических формул для фундаментальной системы решений оператора (см. [1]) выводятся подробные асимптотики для системы собственных и присоединенных функций оператора и для биортогональной системы.

В случае $q_j \in L_2[0, \pi]$ изучается вопрос о равномерной на $[0, \pi]$ равносходимости разложений некоторой функции $f \in H$ в ряды по собственным функциям оператора L_Q и оператора L_0, порожденного дифференциальным выражением $l_0(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}'$ и теми же краевыми условиями.

Литература

1. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом // Дифф. уравнения. — 2013. — № 5.

Asymptotic formulae for eigenfunctions of Dirac operator with a complex-valued potential and equiconvergence theorems

I. V. Sadovnichaya

Moscow State Lomonosov University, Moscow, Russia
ivsad@yandex.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00705.

Об одном аналоге периодических краевых задач для оператора Лапласа в шаре

М. А. Садыбеков, Б. Х. Турметов

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
makhmud-s@mail.ru, turmetovbh@mail.ru

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : r = |x| < 1\}$ — единичный шар, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ — единичная сфера. Обозначим $\partial\Omega_+ = \partial\Omega \cap \{x \in R^n : x_1 \geq 0\}$, $\partial\Omega_- = \partial\Omega \cap \{x \in R^n : x_1 \leqslant 0\}$, $I = \partial\Omega \cap \{x \in R^n : x_1 = 0\}$. Каждой точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ сопоставим *«противоположную»* ей точку $x^* = (-x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n) \in \Omega$, где $\alpha_j, j = 2, ..., n$ принимают одно из значений ± 1. Очевидно, что если $x \in \partial\Omega_+$, то $x^* \in \partial\Omega_-$.

Рассмотрим следующие два типа задач ($k = 1, 2$).

Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ удовлетворяющую в Ω уравнению Пуассона

$$-\Delta u(x) = f(x), \ x \in \Omega, \tag{1}$$

а на его границе — краевым условиям

$$u(x) - (-1)^k u(x^*) = \tau(x), \ x \in \partial\Omega_+, \tag{2_k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x) + (-1)^k \frac{\partial}{\partial r} u(x^*) = \mu(x), \ x \in \partial\Omega_+, \tag{3_k}$$

где $\tau(x) \in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega_+)$, $\mu(x) \in C^\varepsilon(\partial\Omega_+)$ и $f(x) \in C^\varepsilon(\overline{\Omega})$, $0 < \varepsilon < 1$.

Эти задачи являются аналогами классических периодических краевых задач. При $k = 1$ задачу будем называть *антипериодической краевой задачей*, а при $k = 2$ — *периодической*.

Очевидно, что необходимым условием существования решения из класса $C^1(\bar{\Omega})$ является выполнение при $(0, x_2, ..., x_n) \in I$ условий согласования:

$$\tau(0, x_2, ..., x_n) + (-1)^k \tau(0, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_j}(0, x_2, ..., x_n) + (-1)^k \frac{\partial \tau}{\partial x_j}(0, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n) = 0, \ j = \overline{1, n}, \tag{5}$$

и

$$\mu(0, x_2, ..., x_n) - (-1)^k \mu(0, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n) = 0, \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C^\varepsilon(\bar{\Omega})$, $\tau(x) \in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega_+)$, $\mu(x) \in C^\varepsilon(\partial\Omega_+)$, $0 < \varepsilon < 1$, и выполнены условия согласования (4)-(6). Тогда решение задачи* (1), (2_1), (3_1) *существует, единственно и представляется в виде: $u(x) =$*

$$= \int_\Omega G_1(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega_+} \frac{\partial G_1(x, y)}{\partial n_y} \tau(y) ds_y + \int_{\partial\Omega_+} G_1(x, y) \mu(y) ds_y,$$

где $G_1(x, y)$ *— функция Грина антипериодической задачи* $(1),\ (2_1),\ (3_1)$*:*

$$G_1(x, y) = \frac{1}{2}\left[G_D(x, y) + G_D(x, y^*) + G_N(x, y) - G_N(x, y^*)\right],$$

а $G_D(x, y)$ *и* $G_N(x, y)$ *-функции Грина задач Дирихле и Неймана соответственно.*

Единственность решения задач обосновывается применением принципа экстремума.

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in C^{\varepsilon}(\bar{\Omega})$, $\tau(x) \in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega_+)$, $\mu(x) \in C^{\varepsilon}(\partial\Omega_+)$, $0 < \varepsilon < 1$ *, и выполнены условия согласования (4)–(6). Тогда для разрешимости задачи* $(1),\ (2_2),\ (3_2)$ *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_{\Omega} f(y) ds_y = \int_{\partial\Omega_+} \mu(y) ds_y.$$

Если решение существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$u(x) =$

$$= \int_{\Omega} G_2(x, y) f(y) ds_y - \int_{\partial\Omega_+} \frac{\partial G_2(x, y)}{\partial n_y} \tau(y) ds_y + \int_{\partial\Omega_+} G_2(x, y) \mu(y) ds_y,$$

где $G_2(x, y)$ *— функция Грина периодической задачи, которая определяется равенством*

$$G_2(x, y) = \frac{1}{2}\left[G_D(x, y) - G_D(x, y^*) + G_N(x, y) + G_N(x, y^*)\right] + Const.$$

Теорема 3. *Задачи* $(1), (2_k), (3_k)$ *являются самосопряженными.*

Дана методика построения всех собственных значений и собственных функций задач.

An analogue of the periodic boundary value problems for the Laplace operator in a ball

M. A. Sadybekov, B. Kh. Turmetov

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
makhmud-s@mail.ru, turmetovbh@mail.ru

О существование решение дискретной задачи оптимального управления для линейных сосредоточенных систем со специальным критерием качества

В. И. Салманов

Нахичеванский государственный университет, Нахичевань, Азербайджан
salmanovvuqar@rambler.ru

В этой работе изучается вопрос существования решения дискретной задачи оптимального управления для линейных сосредоточенных систем со специальным критерием качества типа функционала Лионса.

Исследуются задачу оптимального управления о минимизации функционала

$$J(u) = \|x_0(\cdot,\ u) - x_T(\cdot,\ u)\|^2_{L_2^{(n)}(0,\ T)} \tag{1}$$

на множестве $U \equiv \left\{u = u(t):\ u \in L_2^{(m)}(0,\ T),\ \|u\|_{L_2^{(m)}(0,\ T)} \leqslant b_0\right\}$ при условиях:

$$x_p{}'(t) = A(t)\,x_p(t) + B(t)\,u(t) + f(t), \quad p = 0,\ T,\ 0 < t < T, \tag{2}$$

$$x_0(0) = x_0, \quad x_T(T) = x_T, \tag{3}$$

где $T > 0$, $b_0 > 0$ – заданные числа, x_0, x_T – заданные векторы, $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ – матрица порядка $n \times n$, $B(t) = \{b_{ik}(t)\}$ – матрица порядка $n \times m$, $f(t) = (f_1(t),\ f_2(t),\ \ldots,\ f_n(t))^T$ – вектор-столбец.

Функционалы типа (1) изучены в работах Лионса, Искендерова, Якубова и Махмудова [1]– [4] и др.

Рассматривается вопрос о применении разностного метода к решению задачи оптимального управления для линейных сосредоточенных систем со специальным критерием качества.

Изучено вопрос существования решения дискретной задачи (4)–(7) и доказано что, дискретная задача оптимального управления (4)–(7) имеет хотя бы одно решение [5]– [6].

Литература

1. *Искендеров А.Д.* О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики // ДАН СССР. — 1984. — Т. 274, № 3. — С. 531–533.
2. *Искендеров А.Д., Махмудов Н.М.* Оптимальное управление квантомеханической системой с критерием качества Лионса // Изв. АНА, Сер. физ.-тех. матем. наук. — 1995, Т. XVI, № 5–6. — С. 30–35.
3. *Ягубов Г.Я.* Разностный метод решения задачи оптимального управления коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера с интегральным критерием качества по границе области // В сб.:

«Проблемы матем. модел. и опт. управления». — Баку, 2001. — С. 37–48.
4. *Mahmudov N.M.* Existence and uniqueness of the solution of an optimal control problem for a Schrodinger equation with pure imaginary coefficient in the non-linear part of the equation // Azerbaijan National Academy of Sciences. Transactions issue mathematics series of physical-technical & mathematical science. — 2007. — Vol. XXVII, № 7 cild. — P. 109–117.
5. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.
6. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1979.

About existence the decision of a discrete problem of the optimum мanagements for the linear concentrated systems with the special criterion of quality

V. I. Salmanov

The Nakhichevan State University, Nakhichevan, Azerbaijan
salmanovvuqar@rambler.ru

Решение линейного уравнения Россби

А. А. Свидлов

Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия,
svidlov@mail.ru

В геофизической гидродинамике изучаются планетарные волны, возникновение и распространение которых обусловливается вращением Земли. Эволюция этих волн описывается уравнением Россби [1]:

$$\Delta u_t + u_{x_1} = f, \quad x \in Q,\ t > 0, \tag{1}$$

где $Q \subset \mathbb{R}^n$ — область течения, $n = 2$. Решение u уравнения (1) является функцией тока течения, т.е. физическую скорость $v = (v_1, v_2)$ можно определить следующим образом $v_1 = u_{x_2}$, $v_2 = -u_{x_1}$. Уравнение (1) имеет смысл рассматривать и для других размерностей n.

В настоящей работе предложена наиболее простая и естественная обобщенная постановка для случая ограниченной области течения, допускающая к тому же построение эффективных приближенных методов.

Добавив к уравнению (1) начальное условие

$$u(0) = u_0 \tag{2}$$

и граничное условие

$$u|_{\partial Q} = 0, \tag{3}$$

получим первую начально-краевую задачу для уравнения Россби (1)–(3).

Будем считать, что область $Q \subset \mathbb{R}^n$ ограничена, ∂Q — кусочно-гладкая поверхность, $u_0 \in H_0^1(Q)$, $T \in (0, +\infty]$, $f \in C\big([0,T); L_2(Q)\big)$.

Обобщенным решением задачи (1)–(3) назовем функцию

$$u \in C^1\big([0,T); H_0^1(Q)\big),$$

удовлетворяющую равенству (2) и при любом $t \in (0,T)$ интегральному тождеству

$$\int_Q \big(\nabla u_t(x,t)\nabla h(x) - u_{x_1}(x,t)h(x)\big)dx = -\int_Q f(x,t)h(x)dx$$

для любой функции $h \in H_0^1(Q)$.

Автор выражает глубокую признательность Бирюку А.Э., Дроботенко М.И. и Кожевникову В.В. за обсуждения результатов работы и советы, которые помогли сделать её лучше.

Теорема 1. *Обобщенная постановка задачи (1)–(3) эквивалентна задаче Коши*

$$\begin{cases} u_t(t) = \Delta^{-1}\left(f(t) - \dfrac{\partial}{\partial x_1} u(t)\right), \textit{при всех} t \in [0, T), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Здесь $\Delta^{-1} : L_2(Q) \to H_0^1(Q)$ — оператор, который ставит в соответствие правой части ψ обобщенное решение φ задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \psi \text{в} Q, \\ \varphi|_{\partial Q} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Из теоремы 1 сразу следует однозначная разрешимость первой начально-краевой задачи.

Теорема 1 позволяет естественным образом строить алгоритмы приближенного решения различной точности по t. Наибольшую сложность при нахождении приближенного решения, особенно в областях сложной конфигурации, представляет численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона (4), причем, должна быть мала как погрешность численного решения, так и ее производная по x_1 в норме $L_2(Q)$. Для этого использовался метод точечных потенциалов [2]. Были проведены численные эксперименты, которые подтвердили теоретические результаты о сходимости.

Вторая начально-краевой задача для уравнения Россби достаточно серьезно отличается от первой. Во-первых, обобщенное решение задачи существует не для любой функции u_0 в начальном условии, а только если u_0 выбрана из некоторого подпространства. Во-вторых, это решение еще и не единственно. Но все-таки результаты относительно существования обобщенного решения можно получить и для этой задачи [3].

Литература

1. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
2. *Дроботенко М. И., Игнатьев Д. В.* Метод точечных потенциалов для уравнения Лапласа // Экологический вестник научных центров ЧЭС. — 2007. — № 1. — С. 5–9.
3. *Свидлов А. А.* О второй начально-краевой задаче для уравнения Россби в ограниченной области // Экологический вестник научных центров ЧЭС. — 2009. — № 3. — С. 80–84.

Solving linear Rossby equation

A. A. Svidlov

Kuban State University, Krasnodar, Russia, svidlov@mail.ru

О разрешимости дискретной задачи оптимального управления для уравнения Шредингера со квадратично суммируемым потенциалом, зависящим от времени

К. И. Сеидова

Нахичеванский государственный университет, Нахичевань, Азербайджан
seidovakonul@rambler.ru

В данной работе исследуются вопросы разрешимости дискретной задачи оптимального управления для уравнения Шредингера со квадратично суммируемым потенциалом, зависящим от времени Рассмотрено задача оптимального управления о минимизации функционала:

$$J\,(v) = \|\psi\,(\cdot,\ T) - y\|^2_{L_2(0,\ l)} \tag{1}$$

на множестве $V \equiv \left\{ v = v\,(t) :\ v \in L_2\,(0,\ T)\,,\ \|v\|_{L_2(0,T)} \leqslant b_0 \right\}$ при условиях

$$i\frac{\partial \psi}{\partial\, t} + a_0\frac{\partial^2 \psi}{\partial\, x^2} - a\,(x)\,\psi - v\,(t)\,\psi = f\,(x,\,t)\,,\quad (x,\,t) \in \Omega, \tag{2}$$

$$\psi\,(x,\,0) = \phi\,(x)\,,\quad x \in (0,\ l)\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial\psi(l,t)}{\partial x} = 0,\quad t \in (0,T) \tag{4}$$

где $i^2 = -1,\ a_0 > 0,\ b_0 > 0,\ l > 0,\ T > 0$ – заданные числа, $a\,(x)$ ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$0 < \mu_0 \leqslant a\,(x) \leqslant \mu_1,\ \left|\frac{da\,(x)}{dx}\right| \leqslant \mu_2,\ \overset{\circ}{\forall}\, x \in (0,\ l) \tag{5}$$

$\mu_j > 0,\ j = 0,\ 1,\ 2$ – заданные числа; а $\phi\,(x)\,,\ f\,(x,\ t)\,,\ y\,(x)$ удовлетворяют условиям

$$\phi \in W_2^2\,(0,\ l)\,,\ \phi'\,(0) = \phi'\,(l) = 0 \tag{6}$$

$$f \in W_2^{2,\,0}\,(\Omega)\,,\ \frac{\partial f\,(0,\ t)}{\partial x} = \frac{\partial f\,(l,\ t)}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

$$y \in W_2^1\,(0,\ l)\,, \tag{8}$$

Функция $v(x,t)$ является кванто-механическим потенциалом в уравнении Шредингера (2) со квадратично суммируемым потенциалом, зависящим от времени .

Функционалы типа (1) изучены в работах Лионса, Искендерова, Якубова и Махмудова [1]– [4] и др.

В данной работе изучается вопрос разрешимости дискретной задачи оптимального управления для уравнения Шредингера с квадратично суммируемым потенциалом, зависящим от времени. При этом к рассмотренной задаче оптимального управления применяется разностный метод [1]– [4] и устанавливается оценка для решения разностной схемы для рассматриваемой задаче. Используя эту оценки доказывается существование решения дискретной задачи оптимального управления.

Литература

1. *Искендеров А. Д.* О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики // ДАН СССР. — 1984. — Т. 274, № 3. С. 531–533.
2. *Искендеров А. Д., Махмудов Н. М.* Оптимальное управление квантомеханической системой с критерием качества Лионса // Изв. АНА, сер. физ.-тех. матем. наук. — 1995. — Т. XVI, № 5–6. — С. 30–35.
3. *Ягубов Г. Я.* Разностный метод решения задачи оптимального управления коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера //!/ Сб.: «Математическое моделирование и автоматизированные системы». — Баку, 1990. — С. 53–60.
4. *Махмудов Н. М.* Разностный метод решения задачи оптимального управления кванто-механической системой с функционалом Лионса // Труды ИММ АН Азербайджана. — 1997. — Т. VII (XV). — С. 79–82.

About resolvability of a discrete problem of optimum control For the equation of Shredingera with квадратично the summarised In potential, time-dependent

K. I. Seidova

The Nakhichevan State University, Nakhichevan, Azerbaijan
seidovakonul@rambler.ru

Интегральные тождества соленоидальных векторных полей и их приложения к уравнениям Эйлера и Навье–Стокса на плоскости

В. И. Семенов

Балтийский федеральный университет, Калининград, Россия
visemenov@rambler.ru

Классическое разложение пространства $L_2(R^n)$ векторных полей в прямую сумму подпространств соленоидальных и потенциальных полей дает пример простейшего интегрального тождества.

С.Ю. Доброхотовым и А.И. Шафаревичем в [1] в системе уравнений Навье–Стокса для решений задачи Коши в пространстве R^3 приведена серия новых и интересных интегральных тождеств, которая позднее была распространена Л. Брандолезе на произвольную размерность (см. [2]). Наконец, автором в [3] указаны принципиально иная серия интегральных тождеств, имеющих ковариантную форму, и их приложения к уравнениям Эйлера и Навье–Стокса. Сейчас эта серия дополняется новыми тождествами, которые в плоском случае дают наилучшие оценки для вторых производных обобщенных решений в задаче Коши на плоскости для уравнений Эйлера и Навье–Стокса. Оптимальность этих оценок из классических результатов В.И. Юдовича, Ж. Лионса и О.А. Ладыженской не следует.

Литература

1. *Доброхотовов С. Ю.,Шафаревич А. И.* О поведении на бесконечности поля скоростей несжимаемой жидкости // Изв.РАН. Механика жидкости и газа. — 1996. — № 4. — С. 38–42.
2. *Brandolese L.* On the localization of symmetric and asymmetric solutions of the Navier–Stokes equations in R^n // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. I. — 2001. — Vol. 332. — P. 125–130.
3. *Семенов В. И.* Некоторые общие свойства соленоидальных векторных полей и их приложения к уравнениям Эйлера и Навье–Стокса на плоскости

Integral identities for solenoidal vector fields and its applications to the 2d Euler and Navier–Stokes equations

V. I. Semenov

Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia
visemenov@rambler.ru

Разрывные решения дифференциальных уравнений с последействием

А. Н. Сесекин

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
sesekin@list.ru

Рассматривается следующая задача Коши

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), v(t)) + Q(t, x(t))\dot{x}(t-\tau) +$$
$$+B(t, x(t))\ \dot{v}(t), \quad x(t) = \varphi(t),\, t \in [t_0 - \tau, t_0]. \tag{1}$$

Здесь $t \in [t_0, \vartheta]$, $x(t)$ и $v(t)$ соответственно n- и m-вектор функции времени, $f(t, x, y, v)$ — n-вектор функция и $Q(t, x)$, $B(t, x)$ соответственно $n \times n$ и $n \times m$ матрицы-функции, $v(\cdot) \in BV_m[t_0, \vartheta]$, где $BV_m[t_0, \vartheta]$ обозначает Банахово пространство m-мерных вектор-функций ограниченной вариации, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание, $\varphi(t)$ — начальная $n-$вектор-функция ограниченной вариации.

Особенностью уравнения (1) является то, что в правой части уравнения (1) содержатся некорректные операции умножения разрывных функций на обобщенные.

Выберем две последовательности абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, поточечно сходящиеся к $v(t) \in BV_m[t_0, \vartheta]$ и $\varphi(t) \in BV_m[t_0, \vartheta]$ соответственно. Будем предполагать, что решение задачи Коши (1) существует для любых абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$ и $\varphi_k(t)$ (вариации функций $v(t)$ и $v_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ предполагаем равномерно ограниченными). Пусть $x(t) = x_k(t)$ —решение задачи Коши (1) при $v(t) = v_k(t)$, $\varphi(t) = \varphi_k(t)$.

Вектор-функцию ограниченной вариации $x(t)$ будем называть *аппроксимируемым решением* задачи Коши (1), если $x(t)$ — поточечный предел последовательности $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, порожденной последовательностью $v_k(t), \varphi_k(t)$, и $x(t)$ не зависит от выбора $v_k(t)$ и $\varphi_k(t)$.

Теорема 1. *Предположим, что существуют частные производные $\partial b_{ij}/\partial x_\nu$ элементов матрицы-функции $B(\cdot, \cdot)$ и $\partial q_{ij}/\partial x_\nu$ элементов матрицы-функции $Q(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющие условиям:*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial b_{ij}(t, x)}{\partial x_\nu} b_{\nu l}(t, x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial b_{il}(t, x)}{\partial x_\nu} b_{\nu j}(t, x),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial q_{i\mu}(t, x)}{\partial x_\nu} q_{\nu \eta}(t, x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial q_{i\eta}(t, x)}{\partial x_\nu} q_{\nu \mu}(t, x),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial q_{i\mu}(t, x)}{\partial x_\nu} b_{\nu l}(t, x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial b_{il}(t, x)}{\partial x_\nu} q_{\nu \mu}(t, x)$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00356.

(условия Фробениуса) $i,\mu,\eta = 1,2,\ldots,n$; $j,l = 1,2,\ldots,m$. Тогда для всякой вектор-функции ограниченной вариации $v(t)$ существует аппроксимируемое решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее интегральному уравнению

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f\big(\xi, x(\xi), x(\xi-\tau)\big)\,d\xi + \int_{t_0}^{t} Q\big(\xi, x(\xi)\big)\,dx^c(\xi) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} B\big(\xi, x(\xi)\big)\,dv^c(\xi) + \sum_{t_i \leqslant t,\, t_i \in \overline{\Omega}_-} \overline{S}\big(t_i, x(t_i-0), \Delta x(t_i-0)\big) +$$

$$+ \sum_{t_i < t,\, t_i \in \overline{\Omega}_+} \overline{S}\big(t_i, x(t_i), \Delta x(t_i-\tau+0)\big) +$$

$$+ \sum_{t_i \leqslant t,\, t_i \in \Omega_-} S\big(t_i, x(t_i-0), \Delta v(t_i-0)\big) + \sum_{t_i \leqslant t,\, t_i \in \Omega_+} S\big(t_i, x(t_i-0), \Delta v(t_i+0)\big)$$

Здесь $v^c(\xi)$ и $x^c(\xi)$ — непрерывные составляющие функций ограниченной вариации $v(\xi)$ и $x(\xi)$ соответственно,

$$\overline{S}(t, x(t), \Delta x(t-\tau)) = z(1) - x(t),\ \dot z(\xi) = Q(t, z(\xi))\Delta x(t),\ z(0) = x(t),$$

$$S(t, x(t), \Delta v) = z(1) - x(t),\ \dot z(\xi) = B(t, z(\xi))\Delta v(t),\ z(0) = x(t),$$

$\Omega_-(\Omega_+)$ — множество точек левых (правых) разрывов $v(t)$. $\overline{\Omega}_-(\overline{\Omega}_+)$ — множество точек левых (правых) разрывов начальной функции $\varphi(t)$ и точек Ω_-, Ω_+, сдвинутое вправо на конечное число запаздываний (целое для точек Ω_-, Ω_+) τ, при этом эти точки попадают в $[t_0, \vartheta]$.

Литература

1. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы: Модели и приложения. — М.: Наука, 1991.
2. *Сесекин А. Н., Фетисова Ю. В.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространстве функций ограниченной вариации // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2009. — Т. 15, № 4. — С. 227–233.
3. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Applied Theory of Functional Differential Equations. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.

Discontinuous solutions of differential equations with time delay

A. N. Sesekin

Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia
sesekin@list.ru

Спектры частот периодических и непериодических линейных дифференциальных уравнений третьего порядка

М. В. Смоленцев

МГУ им. М.В.ЁЛомоносова, Москва, Россия
smihvic@rambler.ru

Во множестве дифференциальных уравнений вида

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0; \infty),$$

с ограниченными непрерывными строками коэффициентов

$$a \equiv (a_1, \ldots, a_n) \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$$

(отождествляемыми с соответствующими уравнениями) выделим подмножество $\mathcal{P}^n$, состоящее из уравнений с *периодическими коэффициентами.*

Зададим *частоту (нулей)* [1] функции $y \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ формулой

$$\nu(y) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t} \nu(y, t),$$

где $\nu(y, t)$ – число нулей функции y, принадлежащих промежутку $(0; t]$. Назовем *спектром частот* уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ множество всех частот его ненулевых решений. Значение частоты, принадлежащее спектру уравнения, назовем *существенным* [2], если оно принимается на решениях, начальные значения которых содержат множество положительной меры в $\mathbb{R}^n$.

Следующие теоремы усиливают некоторые результаты доклада [3].

Теорема 1. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ существует уравнение $a \in \mathcal{P}^3$, спектр частот которого содержит не менее N существенных значений.*

Теорема 2. *Существует уравнение $a \in \mathcal{E}^3$, спектр частот которого содержит счетное множество существенных значений.*

Замечание. Утверждения теорем 1, 2 нельзя распространить на уравнения второго порядка [1].

Следующая теорема усиливает как результат доклада [3], так и результаты работы [4].

Теорема 3. *Существует уравнение $a \in \mathcal{P}^3$, спектр частот которого содержит отрезок.*

Литература

1. *Сергеев И. Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. — 2006. — Вып. 25. — С. 249–294.

2. *Сергеев И. Н.* Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 11. — С. 1661–1662.
3. *Смоленцев М. В.* О спектрах частот периодического и непериодического линейного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 6. — С. 909.
4. *Горицкий А. Ю., Фисенко Т. Н.* Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 4. — С. 479–486.

The spectra of frequencies of the periodic and non-periodic linear differential equations of third order

M. V. Smolentsev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
smihvic@rambler.ru

Методы понижения размерности систем дифференциальных уравнений

В. А. Соболев[*], Е. А. Тропкина[†]

[*] *Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королева (национальный исследовательский университет), Самара, Россия*
hsablem@gmail.com

[†] *Самарский государственный университет, Самара, Россия*
elena_ a.85@mail.ru

Во многих областях естествознания широко используются нелинейные дифференциальные уравнения. Стремление к более точному математическому описанию физических явлений, как правило, приводит к усложнению уравнений и увеличению их порядка. Лишь немногие из нелинейных уравнений, описывающих реальные физические процессы, допускают точное решение.

Необходимость повышения точности расчета сложных систем при одновременном снижении объема аналитических и численных вычислений делает актуальной разработку достаточно универсальных и эффективных методов упрощения дифференциальных систем с быстрыми и медленными переменными. Одним из способов решения таких проблем является применение методов понижения размерности систем дифференциальных уравнений.

При этом от редуцированной системы требуется чтобы она: описывала основные черты рассматриваемого явления; содержала минимальное число переменных и реакций; при малом изменении параметров и слабом расширении системы (добавлении высших производных или новых членов с малыми коэффициентами), решения менялись мало.

Доклад посвящен изложению следующих методов редукции систем дифференциальных уравнений: метод интегральных многообразий, итерационный, ILDM (см. [1, 2, 4–6]) и CSP-метод (см. [7]).

В качестве примеров рассмотрены две модели энзимной кинетики: кооперативное явление и система «фермент–субстрат–ингибитор». А также приведен сравнительный анализ результатов, полученных после применения вышеуказанных методов к этим моделям.

Литература

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990. — С. 208.
2. *Соболев В. А., Щепакина Е. А.* Редукция моделей и критические явления в макрокинетики. — М.: Физматлит, 2010.
3. *Fehrst A.* Enzyme structure and mechanisms, 2nd edition / Ed. by W.F. Freeman. — New York, 1975.
4. *Roussel M. R., Fraser S. J.* Geometry of of the steady-state approximation: Perturbation and accelerated convergence method // J. Chem. Phys. — 1990. — Vol. 93. — Pp. 1072–1081.

5. *Соболев В. А., Тропкина Е. А.* Асимптотические разложения медленных инвариантных многообразий и редукция моделей химической кинетики // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, № 1. — С. 81–96.
6. *Тропкина Е. А.* Итерационный метод приближенного построения интегральных многообразий медленных движений // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2010. — № 4(78). — С. 78–88.
7. *Lam S. H.* Using CSP to understand complex chemical kinetics // Combustion Science and Technology. — 1993. — Vol. 89. — Pp. 375–404.

Dimension reduction method to systems of differential equations

V. A. Sobolev*, E. A. Tropkina†

* *Samara State Aerospace University (National Research University), Samara, Russia, hsablem@gmail.com*

† *Samara State University, Samara, Russia*
elena_ a.85@mail.ru

Разрешимость вырожденных линейных эволюционных уравнений с памятью

О. А. Стахеева

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
osta@csu.ru

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ линеен и непрерывен (коротко, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$), а оператор $M : D_M \to \mathfrak{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathfrak{U}$ (для краткости обозначим $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$), облсть определения D_M оператора M снабжена нормой его графика. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1}$$

для уравнения соболевского типа с памятью

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int_0^t \mathcal{K}(s)u(t-s)ds + f(t), \tag{2}$$

где $\{\mathcal{K}(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}) : t \geqslant 0\}$ — заданное семейство оператор-функций, $f : [0, +\infty) \to \mathfrak{F}$.

Решением задачи (1), (2) на полуинтервале $[0, T)$, $T \in (0, +\infty]$, называется функция $u \in C^1((0, T); \mathfrak{U}) \cap C((0, T); D_M) \cap C([0, T); \mathfrak{U})$, удовлетворяющая условию (1) и уравнению (2) на $(0, T)$.

Пусть $\ker\, L \neq \{0\}$, оператор M сильно (L, p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда существуют проекторы P и Q на пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно (см. [1]). Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im} Q$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ ($\mathrm{dom} M_k = \mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0, 1$. Тогда оператор $H = M_0^{-1} L_0$ нильпотентен степени не больше p. Введем также обозначение $\sigma^L(M)$ для множества таких $\mu \in \mathbb{C}$, при которых не существует оператора $(\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$.

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L, p)-секториален,* $\sup\{\mathrm{Re}\mu : \mu \in \sigma^L(M)\} < 0$, $\mathcal{K} \in C([0, +\infty); \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}))$, *для всех* $t \geqslant 0$ $\mathrm{im}\, \mathcal{K}(t) \subset \mathfrak{F}^1$, *существует такое* $\alpha \in (0, 1)$, *что при любом* $T > 0$ $Qf \in C^\alpha([0, T]; \mathfrak{F})$, $(I - Q)f \in C^{p+1}([0, +\infty); \mathfrak{F})$, $u_0 \in \mathfrak{U}$,

$$(I - P)u_0 = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} ((I - Q)f)^{(k)}(0).$$

Тогда при некотором $T_0 > 0$ *существует единственное решение задачи* (1), (2) *на полуинтервале* $[0, T_0)$. *Если оператор-функция* $Q\mathcal{K} : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ *ограничена, то решение задачи* (1), (2) *существует и единственно на всей полуоси* $[0, +\infty)$.

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно $(L,0)$-секториален,* $\sup\{\mathrm{Re}\mu : \mu \in \sigma^L(M)\} < 0$, $\mathcal{K} \in C([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}))$, *для всех* $t \geqslant 0$ $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(t)$, *существует такое* $\alpha \in (0,1)$, *что при любом* $T > 0$ $Qf \in C^\alpha([0,T];\mathfrak{F})$, $(I-Q)f \in C^1([0,+\infty);\mathfrak{F})$,

$$(I-P)u_0 = -M_0^{-1}(I-Q)f(0).$$

Тогда при некотором $T_0 > 0$ *задача* (1), (2) *имеет единственное решение на полуинтервале* $[0,T_0)$. *Если оператор-функция* $Q\mathcal{K} : [0,+\infty) \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *ограничена, то решение задачи* (1), (2) *существует и единственно на всей полуоси* $[0,+\infty)$.

Литература

1. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht etc.: VSP, 2003.

Solvability of degenerate linear evolution equations with memory

O. A. Stakheeva

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
osta@csu.ru

Групповая классификация одного обобщения линейного уравнения Колмогорова

В. И. Стогний, И. Н. Копась, Ю. Н. Маркитанов

Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина
valeriy_stogniy@mail.ru, innak@inet.ua, yurmark@rambler.ru

Линейное уравнение Колмогорова имеет вид [1]

$$u_t - u_{xx} + xu_y = 0, u = u(t,x,y). \qquad (1)$$

С использованием методов группового анализа дифференциальных уравнений [2] в работе [3] исследованы симметрийные свойства и найдена максимальная алгебра инвариантности уравнения (1), операторы которой имеют вид:

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_x + t\partial_y,$$
$$X_4 = 2t\partial_t + x\partial_x + 3y\partial_y - 2u\partial_u,$$
$$X_5 = -t^2\partial_t - (tx+3y)\partial_x - 3ty\partial_y + (x^2+2t)u\partial_u,$$
$$X_6 = t\partial_x + \frac{1}{2}t^2\partial_y - \frac{1}{2}xu\partial_u,$$
$$X_7 = \frac{1}{2}t^2\partial_x + \frac{1}{6}t^3\partial_y + \frac{1}{2}(y-tx)u\partial_u,$$
$$X_8 = u\partial_u,\ X_\infty = \beta(t,x,y)\partial_u.$$

В последнем операторе функция β есть произвольное решение уравнения (1). При использовании операторов инвариантности в [3] построены точные решения уравнения (1).

Рассмотрим следующее обобщение линейного уравнения Колмогорова

$$u_t - u_{xx} + A(x)u_y = 0, \qquad (2)$$

где $A(x)$ — произвольная гладкая функция.

Уравнение (3), в свою очередь, является частным случаем двумерного уравнения Фоккера-Планка, полное исследование симметрийных свойств которого еще не проведено. Таким образом, возникает вопрос: существует ли среди уравнений вида (2) уравнения с нетривиальными симметрийными свойсвами?

Используя метод Ли–Овсянникова [2], проведена групповая классификация уравнения (2) и получены все значения $A(x)$, для которых уравнение имеет нетривиальные симметрийные свойства. Для некоторых полученных уравнений решена задача симметрийной редукции, а ряд редуцированных уравнений проинтегрированы и построены точные решения уравнения (2).

Литература

1. *Kolmogoroff A. N.* Zufallige Bewegungen (Zur Theorie der Brownischen Bewegung) // Ann.Math.— 1934. — Vol. 35, № 2. — P. 116–117.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
3. *Спічак С. В., Стогній В. І., Копась І. М.* Симетрійний аналіз і точні розв'язки лінійного рівняння Колмогорова — Наукові Вісті НТУУ «КПІ».—2011. — № 4. — С. 93–97.

Group classification of a generalization of linear Kolmogorov equation

V. I. Stogniy, I. N. Kopas', Yu. N. Markitanov

National Technical University of Ukraine «KPI » , Kiev, Ukraine
valeriy_stogniy@mail.ru, innak@inet.ua, yurmark@rambler.ru

Условия коэрцитивности функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями

А. Л. Тасевич

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
atasevich@gmail.com

Пусть B_r – круг радиуса r. Рассмотрим следующее функционально-дифференциальное уравнение в B_r :

$$A_R u(x) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(R_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(R_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right) = f(x), \qquad (1)$$

$$R_i u(x_1, x_2) = a_{i0} u(x_1, x_2) + a_{i1} u\left(\frac{x_1}{q}, p x_2\right) + a_{i,-1} u\left(q x_1, \frac{x_2}{p}\right). \qquad (2)$$

Здесь p, $q > 1$; коэффициенты $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $(i = 1, 2; j = 0, \pm 1)$; функция $f(x) \in L_2(B_r)$. Будем продолжать функцию $u(x)$ нулем перед применением к ним операторов R_i, $i = 1, 2$.

Уравнение (1)–(2) будем называть сильно эллиптическим в $\overline{B_r}$, если $\exists c_1 > 0, c_2 \geqslant 0$, что для всех $u \in C_0^\infty(B_r)$ выполнено неравенство типа Гординга

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(B_r)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{W_2^1(B_r)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(B_r)} \qquad (3)$$

Теорема 1. *Уравнение (1)–(2) является сильно эллиптическим в области $\overline{B_r}$ тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Re} \sum_{i=1}^{2} \left(\xi_i^2 \left(a_{i0} + a_{i1}\lambda + a_{i,-1}\frac{1}{\lambda}\right)\right) > 0.$$

при $|\lambda| = \sqrt{\frac{q}{p}}$, $|\xi| = 1$.

Значение неравенства типа Гординга определяется тем, что для рассматриваемого уравнения оно обеспечивает фредгольмову разрешимость, дискретность и секториальную структуру спектра задачи Дирихле. Также сильно эллиптический оператор удовлетворяет гипотезе Т. Като о квадратном корне из m-аккретивного оператора (см. [1]). Для дифференциально-разностных уравнений проблема нахождения алгебраического эквивалента неравенству (3) была решена А.Л. Скубачевским [2], а для функционально-дифференциальных уравнений с изотропными сжатиями — Л.Е. Россовским [3], [4].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00395, № 12-01-31454.

Литература

1. *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
2. *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations // J. Diff. Equat. — 1986. — Т. 63, № 3. — С. 332–361.
3. *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений // Мат. зам. — 1996. — Т. 59, № 1. — С. 103–113.
4. *Россовский Л. Е.* Об одном классе секториальных функционально-дифференциальных операторов // Дифф. ур. — 2012. — Т. 48, № 2. — С. 227–237.

Coerciveness conditions for the functional-differential equations with orthotropic contractions

A. L. Tasevich

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
atasevich@gmail.com

Критерий ε-управляемости вырожденной линейной эволюционной системы

В. Е. Фёдоров, М. В. Плеханова

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
kar@csu.ru, mariner79@mail.ru

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{U}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линейный и непрерывный из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$), $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линейный, замкнутый, плотно определенный в $\mathcal{X}$, действующий в $\mathcal{Y}$), $B : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$, $y : [0,T] \to \mathcal{Y}$. Рассмотрим задачу исследования ε-управляемости систем, динамика которых описывается уравнением

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + y(t). \tag{1}$$

Некоторые частные результаты при постоянном операторе B и с нулевой функцией y были получены в работах [1, 2].

Сильным решением задачи Коши $x(0) = x_0$ для уравнения (1) называется вектор-функция $x \in W_q^1(0,T;\mathcal{X})$, $q \geqslant 1$, если она удовлетворяет начальному условию, почти всюду на $(0,T)$ $x(t) \in \mathrm{dom} M$ и выполняется равенство (1).

Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален [3] и выполняются условия

$$B \in C^1([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})),\ (I-Q)B \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})),\ T > 0, \tag{2}$$

$$y \in W_q^1(0,T;\mathcal{Y}), \quad (I-Q)y \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y}), \quad T > 0,\, q \geqslant 1. \tag{3}$$

Обозначим

$$H_\partial(x_0,y) \equiv \Big\{u \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y}) : (I-P)x_0 =$$

$$= -\sum_{k=0}^{p}(M_0^{-1}L_0)^k M_0^{-1}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(0)u^{(l)}(0) + y^{0(k)}(0)\right)\Bigg\},$$

где $B_0 \equiv (I-Q)B$, $y^0 \equiv (I-Q)y$. О существовании проекторов P, Q, подпространств $\mathcal{X}^0$, $\mathcal{X}^1$ и операторов L_0, L_1, L_1^{-1}, M_0, M_0^{-1}, M_1 в случае сильной (L,p)-радиальности оператора M см. в [3]. Там же показано, что оператор $L_1^{-1}M_1$ порождает (C_0)-непрерывную полугруппу операторов, которую мы обозначим $\{X^t \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \geqslant 0\}$.

Говоря об ε-управляемости системы, описываемой некоторым уравнением, будем через $x(T;x_0;u)$ обозначать значение в момент времени T сильного решения задачи Коши для этого уравнения с начальным значением x_0 и функцией управления u.

Система (1) называется ε-управляемой за время $T > 0$, если для любых $x_0 \in \mathrm{dom} M$, $\tilde{x} \in \mathcal{X}$, $\varepsilon > 0$ существует такое управление $u \in H_\partial(x_0,y)$, что $\|x(T;x_0;u) - \tilde{x}\|_{\mathcal{X}} \leqslant \varepsilon$.

Пусть $D \subset \mathcal{X}$. Через span$D$ будем обозначать линейную оболочку множества D, а через $\overline{\mathrm{span}}D$ – ее замыкание в пространстве $\mathcal{X}$.

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален и выполняются условия* (2), (3). *Тогда система* (1) *ε-управляема за время T в том и только в том случае, когда выполняется условие*

$$\mathrm{span}\left\{\mathrm{im}\sum_{k=l}^{p}\frac{k!(M_0^{-1}L_0)^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(0),\ l=0,\dots,p\right\}=\mathrm{dom}M_0,$$

$$\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im}X^{T-s}L_1^{-1}QB(s),\ s\in[0,T]\}=\mathcal{X}^1.$$

Отсюда в случае постоянной оператор-функции B нетрудно получить следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $B(t)\equiv B_1$ для всех $t\in[0,T]$ и выполняются условия* (3). *Тогда система* (1) *ε-управляема за время T в том и только в том случае, когда*

$$\mathrm{span}\{\mathrm{im}(M_0^{-1}L_0)^kM_0^{-1}(I-Q)B_1,\ k=0,1,\dots,p\}=\mathrm{dom}M_0,$$

$$\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im}X^sL_1^{-1}QB_1,\ s\in[0,T]\}=\mathcal{X}^1.$$

Литература

1. *Федоров В. Е., Рузакова О. А.* Управляемость линейных уравнений соболевского типа с относительно p-радиальными операторами // Изв. вузов. Математика. — 2002. — № 7. — С. 54–57.
2. *Рузакова О. А., Федоров В. Е.* Об ε-управляемости линейных уравнений, не разрешенных относительно производной в банаховых пространствах // Вычислит. технологии. — 2005. — Т. 10, № 5. — С. 90–102.
3. *Федоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. — 2000. — Т. 12, № 3. — С. 173–200.

Controllability criteria for degenerate linear evolution system

V. E. Fedorov, M. V. Plekhanova

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
kar@csu.ru, mariner79@mail.ru

Формулы регуляризованных следов для нагруженных уравнений

И. Д. Цопанов

Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ, Россия, 55tsopanovig@gmail.com

Рассматривается операторный пучок вида

$$N_\lambda = A - Q_0 - \lambda Q_1 - \lambda^2 I, \tag{1}$$

где A – неограниченный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H с компактной резольвентой. Относительно операторов Q_0 и Q_1 предполагается, что они A-конечномерное, т.е. имеют вид $Q_j = P_j A$, где P_j – ограниченные конечномерные операторы: $P_j = \sum_{l=1}^{n_j}(\cdot, \varphi_l^j)\psi_l^j$ $(j = 0, 1)$, I – единичный оператор в H. К (1) применима теория, развитая в [1]. Такие пучки возникают, например, при решении методом Фурье начально-краевых задач для нагруженных уравнений (см. [2, 3]) вида

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial^2 t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial^2 x} + \sum_{i=1}^{\nu} a_i(x) u(t, x_i) + \sum_{j=1}^{\mu} b_j(x) \frac{\partial u(t, z_j)}{\partial t}.$$

Формулами регуляризованных следов для пучка (1) будем называть соотношения вида

$$\sum_k (\mu_k^s - \eta_k^s - c_k(s)) = F(s), \tag{2}$$

где μ_k и ν_k – собственные значения пучков N_λ и $A_\lambda = A - \lambda^2 I$ соответственно, s – натуральный параметр, $c_k(s), F(s)$ – вычисляемые величины. В левой части (2) знак суммы означает суммирование, возможно, с некоторой расстановкой скобок, причем, способ расстановки скобок зависит от поведения спектра оператора A. Впервые формула регуляризованного следа при $s = 1$ для относительно конечномерного возмущения самосопряженного неограниченного оператора с достаточно общими условиями на разреженность его спектра была получена в работе [4]. В работе [5] были получены регуляризованные следы при $s > 1$для относительно конечномерного возмущения в виде рекуррентных формул. Здесь представлена формула регуляризованных следов для операторных пучков (1).

Теорема 1. *Пусть функция распределения спектра $N(r)$ оператора A такова, что* $\varliminf\limits_{r\to\infty} N(r)/r^\alpha < \infty\, (0 < \alpha \leqslant 1/2)$. *Пусть при* $2N+1 \leqslant s \leqslant 2(N+1)$ *выполнены условия «гладкости»* $(\psi) \in D(A^{(N+1)})$, *тогда верна формула регуляризованного следа* (2).

В частности, если $x_0,\ x_1 \in (0,\pi)$ и $A = -y''(x) + q(x)y(x), (0 < x < \pi), y(0) = y(\pi) = 0,\ N_\lambda y = A - a(x)y(x_0) - \lambda\, b(x)y(x_1) - \lambda^2\, y(x)$, то при $a(x), b(x) \in D(A)$

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{m=1}^{N_\nu}(\mu_m - \eta_m) = -b(x_1), \lim_{\nu\to\infty}\sum_{m=1}^{N_\nu}(\mu_m^2 - \eta_m^2) = b^2(x_1) - 2a(x_0).$$

Если $a(x), b(x) \in D(A^2)$, то

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{m=1}^{N_\nu}(\mu_m^3 - \eta_m^3) = -b^3(x_1) - 3[-b''(x_1)q(x_1)b(x_1)] + 3a(x_1)b(x_0).$$

Литература

1. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. — 1971. — Т. 26, № 4. — С. 15–41.
2. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения // Дифференц. ур-ния. — 1983. — Т. 19, № 1. — С. 86–94.
3. *Анохин Ю. А., Торстко А. Б., Дамешек Л. Ю. и др.* Математические модели и методы управления крупномасштабным водным объектом. — Новосибирск: Наука, 1987.
4. *Садовничий В. А., Любишкин В. А.* Конечномерные возмущения дискретных операторов и формула следов // Функ. анализ и его прилож. — 1986. — Т. 20, № 3. — С. 55–65.
5. *Любишкин В. А., Цопанов И. Д.* О новых формулах следов для операторов с дискретным спектром // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Механика. — 1987. № 6. — С. 22–25.

Regularized trace formulas for loaded equations

I. D. Tsopanov

South Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia, 55tsopanovig@gmail.com

О свойствах колец дифференциальных и интегродифференциальных операторов

В. Ф. Чистяков, Е. В. Чистякова

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия, chist@icc.ru,elena.chistyakova@icc.ru

Рассматривается множество операторов

$$\mathcal{M}_\infty = \{\mathcal{S}_{m,l} := \Lambda_m + \mathcal{V} + \Theta_l\}, \tag{1}$$

где $\Lambda_m x = \sum_{j=0}^{m} A_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^j x,\ m \geqslant 0, \Theta_l x = \sum_{j=0}^{l} B_j(t) x^{(j)}(\alpha),\ l \geqslant 0,$

$$\mathcal{V}x = \int_{\alpha}^{t} K(t,s)x(s)ds,\ t \in T = [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}^1.$$

Здесь $A_j(t),\ B_j(t),\ K(t,s)$ – $(n \times n)$-матрицы, определенные на T и $T \times T$ соответственно, $A_m(t),\ B_l(t) \not\equiv 0,\ t \in T$, $x \equiv x(t)$ – n-мерная вектор-функция, $A_j(t) \in \mathbf{C}^\infty(T),\ B_j(t) \in \mathbf{C}^\infty(T),\ K(t,s) \in C^\infty(T \times T)$, где $\mathbf{C}^\infty(.)$ — пространства бесконечно-дифференцируемых функций с соответствующими областями определения. Специальным образом оговорен вид оператора $\mathcal{S}_{m,l}$ с отрицательными значениями индексов m, l. Множество операторов (1), замкнуто относительно операций сложения и умножения в пространстве $C^\infty(T)$. Иначе говоря, для любых операторов $\mathcal{S}_{m,l}, \mathcal{S}_{k,p} \in M_A$ найдется оператор $\mathcal{S}_{q,\nu}$ такой, что

$$(\mathcal{S}_{k,p} * \mathcal{S}_{m,l})x = \mathcal{S}_{q,\nu}x\ \forall x \in C^\infty(T),$$

где $* = \{+, \circ\}$ Операция сложения связана с операцией умножения в $\mathcal{M}_\infty$ законами дистрибутивности, то есть множество (1) с введенными в нем операциями является некоммутативным кольцом с единицей [1]. Роль единицы играет тождественный оператор.

Получены условия на операторы из кольца $\mathcal{M}_\infty$, образующие полугруппу относительно операции умножения и имеющие левый обратный оператор из этого кольца.

Литература

1. *Курош А. Г.* Общая алгебра. — М.: Наука, 1974.

On some properties for differential and integral differential operators rings

V. F. Chistyakov, E. V. Chistyakova

Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Russia chist@icc.ru, elena.chistyakova@icc.ru

Работа поддержана грантом РФФИ № 11-01-00639.

Обзор случаев интегрируемости в многомерной динамике твердого тела в неконсервативном поле

М. В. Шамолин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская Федерация
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Предлагаемая работа представляет собой обзор по полученным ранее, а также новым случаям интегрируемости в динамике четырехмерного (а также n-мерного) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Вид силового поля заимствован из пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. Последнее значительно отличается от работ по интегрируемости уравнений движения многомерного тела в поле сил консервативном. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с так называемой переменной диссипацией с нулевым средним [1]– [5].

Задача поиска полного набора трансцендентных (в смысле комплексного анализа) первых интегралов систем с диссипацией является достаточно актуальной, и ей было ранее посвящено множество работ. Введен в рассмотрение новый класс динамических систем, имеющих периодическую координату. Благодаря наличию в таких системах нетривиальных групп симметрий, показано, что рассматриваемые системы обладают переменной диссипацией, означающей, что в среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация в системе равна нулю, хотя в разных областях фазового пространства в системе может присутствовать как подкачка энергии извне, так и ее рассеяние. На базе полученного материала проанализированы динамические системы, возникающие в динамике четырехмерного (а также многомерного) твердого тела в неконсервативном поле. В результате обнаружен ряд случаев интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Изучаются неконсервативные системы, для которых методика исследования, например, гамильтоновых систем, вообще говоря, неприменима. Таким образом, для таких систем необходимо в некотором смысле «в лоб» интегрировать основное уравнение динамики.

Работа также посвящена развитию качественных методов в теории неконсервативных систем, возникающих, например, в таких областях науки, как динамика твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой, теория колебаний и др. В принципе, данный материал может быть интересен как специалистам по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, динамики твердого тела, так и механики жидкости и газа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00020-а.

Литература

1. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. — 2000. — Т. 375, № 3. — С. 343–346.
2. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Экзамен, 2007.
3. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Издание 2-е, переработанное и дополненное. — М.: Экзамен, 2007.
4. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, № 3. — С. 3–237.
5. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, № 4. — С. 3–229.

Review of cases of integrability in dynamics of multi-dimensional rigid body in a nonconservative field

M. V. Shamolin

Lomonosov Moscow State University, Russian Federation
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля

О. А. Швейкина

Москва, Россия, olgashveyk@gmail.com

В пространстве $L_2[0,\pi]$ изучается оператор Штурма–Лиувилля $L = -\frac{d^2}{dx^2}+q(x)$ с граничными условиями различных типов. Предполагается, что потенциал $q(x) = u'(x)$, $u(x) \in L_2[0,\pi]$. Операторы такого вида были определены в работе [1]. В работах [1]– [2] было доказано, что оператор L фредгольмов с индексами (0,0), полуограничен, имеет чисто дискретный спектр.

Рассматривается вопрос о равномерной на всем отрезке $[0,\pi]$ равносходимости разложения некоторой функции $f \in L_2[0,\pi]$ в ряд по системе собственных и присоединенных функций опрератора L с ее разложением в ряд Фурье по тригонометрической системе.

Теорема. *Рассмотрим оператор L, действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$, с граничными условиями Дирихле–Неймана, потенциал которого удовлетворяет условиям: $q(x) = u'(x)$, где комплекснозначная фнукция $u(x) \in l_2[0,\pi]$. Пусть $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – система собственных и присоединенных функций оператора L, $\{w_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – биортогональная к ней. Для произвольной функции $f \in L_2[0,\pi]$ обозначим $c_n = (f(x), w_n(x))$, $c_{n,0} = \sqrt{2/\pi}(f(x), \sin(n-1/2)x)$. Тогда имеет место равномерная на всем отрезке $[0,\pi]$ равносходимость разложения f в ряд по системе $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и по системе синусов.*

Скорость равносходимости характеризуется следующей оценкой:

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} c_n y_n(x) - \sum_{n=1}^{m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_{n,0} \sin(n-1/2)x \right\|_C \to 0, m \to \infty.$$

Аналогичные теоремы справедливы и для других типов краевых условий.

Литература

1. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. зам. — 1999. — Т. 66, № 6. — С. 897–912.
2. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами – распределениями // Труды ММО. — 2003. — Т. 64. — С. 159–219.

Uniform convergence of expansions in series eigenfunctions of the Sturm–Liouville

O. A. Shveykina

Москва, Russia, olgashveyk@gmail.com

Секция 3. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики

On the Ricci flow on generalized Wallach spaces

N. A. Abiev*, A. Arvanitoyeorgos†, P. Siasos†, Yu. G. Nikonorov‡

* *Taraz State University after M.Kh. Dulaty, Taraz, Kazakhstan*
abievn@mail.ru

† *University of Patras, Rion, Greece*
arvanito@math.upatras.gr, petroblues@yahoo.gr

‡ *South Mathematical Institute of V.S.C. RAS, Vladikavkaz, Russia*
nikonorov2006@mail.ru

This talk is devoted to the study of the normalized Ricci flow for invariant Riemannian metrics on generalized Wallach spaces (see pp. 6346-6347 of [1] and [2] for the definition and detailed discussions). The equation $\dfrac{\partial g}{\partial t} = -2\operatorname{Ric}_g + 2g\frac{S_g}{n}$ for the normalized Ricci flow on such spaces reduces to the system of ODE of the following type

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1,x_2,x_3),\ \frac{dx_2}{dt} = g(x_1,x_2,x_3),\ \frac{dx_3}{dt} = h(x_1,x_2,x_3), \qquad (1)$$

where $x_i = x_i(t) > 0$, $i = 1,2,3$, are the parameters of invariant metrics,

$$f(x_1,x_2,x_3) = -1 - a_1x_1\left(\frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2}\right) + x_1B,$$

$$g(x_1,x_2,x_3) = -1 - a_2x_2\left(\frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3}\right) + x_2B,$$

$$h(x_1,x_2,x_3) = -1 - a_3x_3\left(\frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3}\right) + x_3B,$$

$B = \left(\frac{1}{a_1x_1} + \frac{1}{a_2x_2} + \frac{1}{a_3x_3} - \left(\frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_1x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2}\right)\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)^{-1}$ and a_i, $i = 1,2,3$, are some real numbers from the interval $(0, 1/2]$.

The forth author supported in part by the State Maintenance Program for the Leading Scientific Schools of the Russian Federation (grant NSh-921.2012.1) and by Federal Target Grant "Scientific and educational personnel of innovative Russia" for 2009-2013 (agreement no. 8206, application no. 2012-1.1-12-000-1003-014).

It is easy to check that the volume $V = x_1^{1/a_1} x_2^{1/a_2} x_3^{1/a_3}$ is the first integral of the system (1). Therefore, we can reduce it to the system of two differential equations on the surface $V \equiv 1$ of the type

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \tilde{f}(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = \tilde{g}(x_1, x_2), \tag{2}$$

where $\tilde{f}(x_1, x_2) \equiv f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))$, $\tilde{g}(x_1, x_2) \equiv g(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))$, $\varphi(x_1, x_2) = x_1^{-\frac{a_3}{a_1}} x_2^{-\frac{a_3}{a_2}}$.

It was proved in [2], that every generalized Wallach space admits at least one Einstein invariant metric. Later in [3] a detailed study of invariant Einstein metrics was developed for all generalized Wallach spaces. In particular, it was proved that there are at most four Einstein metrics (up to homothety) for every such space.

It should be noted that invariant Einstein metrics with $V = 1$ correspond to singular points of (2). There is some interest to determine the types of singularity of such points, and our investigations concern this problem for some special cases of the parameters a_1, a_2, and a_3.

In the case $a_1 + a_2 + a_3 = 1/2$, there are exactly four invariant Einstein metrics [3]. We have proved that each of them is either a unstable node or a saddle of (2). In the case $a_1 = a_2 = b$, $a_3 = c$ with $D := 1 - 4(1 - 2c)(b + c) > 0$, there are two singular points of (2) of the type $(2(b+c)q, 2(b+c)q)$, where $q = \left((2(b + c))^{-2/b} \mu^{-1/c}\right)^{1/(2b^{-1}+c^{-1})}$ and $\mu = 1 \pm \sqrt{D}$ [3]. For $\mu = 1 + \sqrt{D}$, we have proved that only the following types of singularities are possible: stable nodes, saddles or saddle-nodes.

It would be interesting to continue this study, in particular, in the cases $D = 0$ and $D > 0$, $\mu = 1 - \sqrt{D}$. Note that for $a_1 = a_2 = a_3 = 1/4$ (a special subcase of $D = 0$) the linear part of the system (2) vanishes.

References

1. *Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavskii V. V.* Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // Journal of Mathematical Sciences (New York). — 2007. — Vol. 146, No. 7. — P. 6313–6390.
2. *Nikonorov Yu. G.* On a class of homogeneous compact Einstein manifolds // Siberian Math. J. — 2000. — Vol. 41, No 1. — P. 168–172.
3. *Firsov E. V., Lomshakov A. M., Nikonorov Yu. G.* Invariant Einstein metrics on three-locally-symmetric spaces // Siberian Adv. Math. — 2004. — Vol. 14, No 3. — P. 43–62.

Maximum principles in some elliptic equations

M. Almahameed

Department of Mathematics, Irbid National University, Irbid, Jordan
al_mahameed2000@yahoo.com

We discuss and prove maximum principles for some elliptic partial differential equations, we also give some applications to the maximum principle.

Probabilistic approach to nonlinear PDEs and systems of PDEs

Ya. Belopolskaya

St.Petersburg State University for Architecture and Civil Engineering, St.Petersburg, Russia
yana.belopolskaya@gmail.com

We present some recent results concerning viscosity solutions of the Cauchy problem for a system of nonlinear parabolic equations w.r.t a vector function $u(s,x) = (u_1(s,x), \ldots, u_{d_1}(s,x))$, $x \in R^d$, $s \in [0,T]$ constructed via stochastic approaches. Consider the Cauchy problem for a parabolic system of the form

$$\frac{\partial u_l}{\partial s} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} F^{ij}(x,u)\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j,k=1}^{d}\sum_{m=1}^{d_1} C^j_{lm} A_{kj}\nabla_k u_m + \sum_{m=1}^{d_1} c_m u_m + \tag{1}$$

$$g_l(x,u,A^*\nabla u) = 0, \quad u(T,x) = u_0(x),$$

where $A^*A = F$ and A, C, c depend on x, u and ∇u. We consider two probabilistic approaches to investigation of nonlinear parabolic equations and system. To this end we consider a Wiener process $w(t) \in R^d$ defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ and a stochastic system of the form

$$d\xi(t) = A(\xi(t), u(t,\xi(t))dw(t), \quad \xi(s) = x \in R^d, \tag{2}$$

$$d\eta(t) = c(\xi(t), u(t,\xi(t)))\eta(t)dt + C(\xi(t), u(t,\xi(t)))(\eta(t), dw(t)), \tag{3}$$

$$\eta(s) = h \in R^{d_1},$$

$$\langle h, u(s,x)\rangle = E_{s,x,h}[\langle \eta(T), u_0(\xi(T))\rangle + \int_s^T \langle \eta(\theta), u_0(\xi(\theta))\rangle d\theta]. \tag{4}$$

The relation (5) is an extension of a well known Feynmann-Kac formula for solution of the Cauchy problem for a parabolic equation. Under some assumptions on coefficients of (2)–(4) and the function u_0 which can be find in [1], [2], one can prove that the function $u(s,x)$ defined by this system is a classical solution of (1).

Another extension of the Feynmann–Kac formula is based on the BSDE theory (see [3], [4]). To describe it we consider a system of stochastic equations

$$d\xi(t) = a(\xi(t), y(t))dt + A(\xi(t), y(t))dt, \tag{6}$$

$$dy = -G(\xi(t), y(t), z(t))dt + z(t)dw(t), \quad y(T) = \langle h, \Gamma^*(T)u_0(\xi(T))\rangle, \tag{7}$$

where $y(t) = \langle \eta(t), u(t,\xi(t))\rangle = \langle h, \Gamma^*(t)u(t,\xi(t))\rangle$, $G(\xi(t), y(t), z(t)) = \langle h, \Gamma^*(t)g(t,\xi(t), y(t), z(t))\rangle$. A solution of the system (6), (7) is a triple of

This work was supported by Grant RFBR, project No. 12-01-00457.

progressively measurable stochastic processes $\xi(t) \in R^d, y(t) \in R, z(t) \in R^d$ such that with probability 1

$$\xi(t) = x + \int_s^t A(r, \xi(r), y(r))dw(r), \tag{8}$$

$$y(t) = \zeta + \int_t^T G(\xi(r), y(r), z(r))dr - \int_t^T \langle z(r), dw(r)\rangle, \tag{9}$$

where $\zeta = \langle h, \Gamma^*(T)u_0(\xi(T)\rangle$ and the following estimates hold

$$E[sup_{t\in[0,T]}\|\xi(t)\|^2 < \infty,\ E[sup_{t\in[0,T]}\|y(t)\|^2 < \infty,\ E\int_0^T \|z(t)\|^2 dt < \infty.$$

Theorem 1. *Assume $A(x,u)$, $c(x,u)$, $C(x,u)$ as well as $g(x,u,z)$ and $u_0(x)$ are Lipschitz continuous in all arguments and have a sublinear growth. Then there exists a unique solution of the system (6),(7).*

Theorem 2. *Let assumptions of theorem 1 hold. Then the function $u(s,x)$ defined by $\langle h, u(s,x)\rangle = y(s)$ is a viscosity solution of the Cauchy problem (1).*

One can extend this approach to a fully nonlinear parabolic systems [5].

References

1. *Belopolskaya Ya., Dalecky Yu.* Investigation of the Cauchy problem for systems of quasilinear equations via Markov processes // Izv. VUZ Matematika. — 1978. — Vol. 246, No 12. — P. 6–17.
2. *Belopolskaya Ya., Dalecky Yu.* Stochastic equations and differential geometry. — Berlin: Kluwer, 1999.
3. *Peng S.* Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations // Stoch. and Stoch. Rep. — 1991. — Vol. 37. — P. 61–74.
4. *Pardoux E.* Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic pdes of second order // In Stochastic Analysis and Relates Topics: The Geilo Workshop. — Birkhäuser, 1996. — P. 79–127.
5. *Belopolskaya Ya., Woyczynski W.* Probabilistic approach to viscosity solutions of the Cauchy problem for systems of fully nonlinear parabolic equations // “Zap. nauchn. sem. POMI”. — Vol. 396 “Probability and statistics. 17” 2011. — P. 31–66. [in Russian]

Chaotic dynamics and its applications to electronic systems

P. Galajda junior*, **P. Galajda**†

* *Technical University of Kosice, Kosice, Slovakia, pavol.galajda@tuke.sk*

† *Professor Emeritus, Kosice, Slovakia, pgalajda@zoznam.sk*

In recent years chaos engineering has attracted much interest in the academic and industrial worlds. In fact the continuous pursuit of both methodological and technological innovation has led to the realization that common linear models of real systems suffer from severe limitations. In particular, they preclude the exploitation of phenomena whose complexity may be an intrinsic advantage in cryptography, spread spectrum communication, noise generation, human gait, digital image watermarking, etc. Today the potential of chaos engineering is recognized worldwide with research groups actively working on this topic in every part of the globe. Historically, several achievements were fundamental for the acceptance of chaos engineering as a field worthy of attention and exploitation.

The first was the implementation and characterization in the early eighties of several electronic circuits exhibiting chaotic behaviour. Many different circuits have been proposed up to date. This brought chaotic systems from mathematical abstraction into the core of electronic engineering [1].

The second historical event in the path leading to chaos exploitation was the observation in the early nineties that two chaotic systems can synchronize under suitable conditions if one of them is driven by at least one component of the first one. This suggested that chaotic signals could be used for communication, where their noise-like broadband nature could improve disturbance rejection as well as security [2].

Another and fundamental step was the awareness of the engineering community that chaotic systems enjoy a mixed deterministic and stochastic nature. This had been known since at least the early seventies, and advanced methods from that theory have been recently incorporated in the tools of chaos engineering [3, 4]. At the code level, discrete-time chaotic systems can be used to generate spreading codes for Direct Sequence (DS) Spread Spectrum (SS) systems. At the signal level, continuous-time chaotic systems can be used to generate wideband carriers for digital modulation schemes or to design chaos-based True Random Number Generator (TRNG) for cryptographic applications. It has been known that human joints also exhibit chaotic characteristics during gait and that the recorded data of human gait possesses properties typical for deterministic chaotic systems.

Following this evolution, the aim of this contribution is to present the state of the art in the application of chaos in electrical engineering as electronics, digital communication and security as well as for implementation of the chaos theory approach also for the improvement of mobility in elderly people where a statistical approach is adopted.

Deterministic dynamical systems can produce a number of different steady state behaviour including DC, periodic, and chaotic solutions. Chaotic systems are characterized by "sensitive dependence on initial conditions"; a small perturbation eventually causes a large change in the state of the system. Equivalently, chaotic signals decorrelate rapidly with themselves. The autocorrelation function of a chaotic signal has a large peak at zero and decays rapidly. Thus, while chaotic systems share many of the properties of stochastic processes, they also possess a deterministic structure.

>From the application point of view the important property of chaotic signals is that they are non-periodic wideband signals that can be generated by very simple circuitry. This means that continuous-time chaotic systems can be used to generate wideband signals for chaos-based analog and digital communication and cryptographic systems as well as to many other applications.

References

1. *Spany V., Galajda P., et al.* Chua's singularities: Great miracles in circuit theory. International // Journal of Bifurcation and Chaos (IJBC). — 2010. — Vol. 20, No 10. — P. 2993–3006.
2. *Kennedy M. P., et al.* Chaotic Electronics in Telecommunications. — CRC Press LLC, Boca Raton London, New York, Washington D.C., 2000).
3. *Drutarovsky M., Galajda P.* A robust chaos-based true random number generator embedded in reconfigurable switched-capacitor hardware. Models and applications of chaos theory in modern sciences. — Enfield, USA: Science Publishers, 2011.
4. *Simsik D., Galajdova A., Drutarovsky M., Galajda P., Pavlov P.* Wearable non-invasive computer controlled system for improving of seniors gait // International Journal of Rehabilitation Research. — 2009. — Vol. 32, Suppl. 1. — P. 35.

Equations and inclusions with mean derivatives and their applications to mathematical physics

Yu. Gliklikh

Voronezh State University, Voronezh, Russia
yeg@math.vsu.ru

The notion of mean derivatives was introduced by E. Nelson in 60-th years of XX century for the needs of the so-called Nelson's stochastic mechanics (a version of quantum mechanics). Later a lot of other applications of equations with mean derivatives to some branches of science were found. The inclusions with mean derivatives arise in problems with control or in the case of motion in complicated media (see, e.g. [1, 2]).

The classical Nelson mean derivatives (forward, backward, symmetric, etc.) give information on the drift of stochastic process. Later (see, e.g., [2]) by a slight modification of some Nelson's idea, a new mean derivative called quadratic, was introduced that was responsible for the diffusion coefficient of the process. After that it became in principle possible to recover a process from its mean derivatives.

Note that the natural analogue of the physical velocity of deterministic processes is the so-called current velocity (symmetric mean derivative). It also should be pointed out that different versions of second order mean derivatives are involved into description of various processes of mathematical physics.

In the talk we present a brief introduction into the theory of equations and inclusions with mean derivatives as well as the following new applications to mathematical physics (see details in [2–7]):

– Mechanical systems with random perturbations and with control.
– Description of motion of deterministic viscous fluid via equations with mean derivatives on the groups of diffeomorphisms.
– Description of motion of a quantum particle in the classical gauge field in the language of stochastic mechanics.
– Existence of solutions of equations and inclusions with current velocities.
– Description of measurement of dynamically distorted signals with noise.
– Optimal control of equations with mean derivatives (in particular, optimal control of a portofolio with several assets).

References

1. *Gliklikh Yu. E.* Global and stochastic analysis in the problems of mathematical physics. — Moscow: KomKniga, 2005 (in Russian).
2. *Gliklikh Yu. E.* Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics. — London: Springer-Verlag, 2011.

This work was supported by RFBR, project No. 12-01-00183.

3. *Gliklikh Yu. E.* Solutions of Burgers Reynolds and Navier-Stokes equations via stochastic perturbations of inviscid flows // Journal of nonlinear mathematical physics. — 2010. — Vol. 17. Suppl. 1. — P. 15–29.
4. *Gliklikh Yu. E., Vinokurova N. V.* On the description of motion of a quantum particle in the classical gauge field in the language of stochastic mechanics // Communications in Statistics — Theory and Methods. — 2011. — Vol. 40, No 19–20. — P. 3630–3640.
5. *Gliklikh Yu. E., Makarova A. V.* On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities // Applicable Analysis. — 2012. — Vol. 91, No 9. — P. 1731–1739.
6. *Gliklikh Yu. E.* Investigation of Leontieff type equations with white noise by the method of mean derivatives of stochastic processes // Vestnik of South Ural State University. — 2012. — No 27 (286). — P. 24–34 (in Russian).
7. *Gliklikh Yu. E., Zheltikova O. O.* On existence of optimal solutions for stochastic differential inclusions with mean derivatives // Applicable Analysis. — 2012. — DOI:10.1080/00036811.2012.753588. — P. 1–11.

Asymptotic comparison principle and it's application for singularly perturbed problems

N. N. Nefedov

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
nefedov@phys.msu.ru

For some cases of initial boundary value problem for the equation

$$\varepsilon^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, \nabla u, x, \varepsilon), \quad x \in \mathcal{D} \subset R^N,\, t > 0, \tag{1}$$

which plays important role in many applications and is called reaction-diffusion-advection equation we state the conditions which imply the existence of contrast structures - solutions with internal layers. Particularly the cases when equation (1) is semilinear or quasylinear are considered. Among others we discuss the following problems:

1.Existence and Lyapunov stability of stationary solutions.

2. The analysis of local and global domain of stability of the stationary contrast structures.

3. The problem of stabilization of the solution of initial boundary value problem.

Our investigations are based on asymptotic method of differential inequalities and recent development of general scheme of this method will be presented. This scheme uses so-called positivity property of the operators producing formal asymptotics and is based on some recent extensions of Krein-Ruthman theorem.

On the base of our approach we present some recent results for new classes of problems:

1. Solutions with boundary layers with singular boundary conditions

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, \nabla u, x, \varepsilon), \quad x \in \mathcal{D} \subset R^N,\, t > 0,\\
&\frac{\partial u}{\partial n} = h(x)/\varepsilon, \quad x \in \partial\mathcal{D},\, t > 0,
\end{aligned}$$

2. Solutions with boundary and internal layers

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, \varepsilon\nabla u, x, \varepsilon), \quad x \in \mathcal{D} \subset R^N,\, t > 0,\\
&u = h(x), \quad x \in \partial\mathcal{D},\, t > 0,
\end{aligned}$$

3. Solutions with internal layers

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \Delta u - \vec{A}(u, x)\nabla u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, x, \varepsilon), \quad x \in \mathcal{D},\, t > 0,\\
&u = h_i(x), \quad x \in \partial\mathcal{D}_i,\, i = 1, 2,\, t > 0.
\end{aligned}$$

This work is supported by RFBR..

The results of the work is a further development of the results of papers [1]– [4].

References

1. Vasilieva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N. “Contrast structures in singularly perturbed problems” // *Fundamentalnaja i prikladnala matematika.* — 1998. — Vol. 4, No. 3. — 799–851. — (in russian)
2. Nefedov N.N. The Method of Differential Inequalities for Some Classes of Nonlinear Singularly Perturbed Problems with Internal Layers // *Differ. Uravn.* — 1995. — Vol. 31, No 7. — P. 1142–1149.
3. Vasileva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N. Singularly Perturbed problems with Boundary and Internal Layers // Proceedings of the Steklov Institute of Mathmatics. — 2010. — Vol. 268. — P. 258–273.
4. Nefedov N.N., Nikitin A.G., Petrova M.A., Recke L. Moving fronts in integro-parabolic reaction-diffusion-advection equations // *Differ. Uravn.* — 2011. — Vol. 47, No 9. — P. 1–15 (Differentialnie Uravn. — T. 47, No 9. — C. 1305–1319 (in russian)).

Improvement iterative methods for solving nonlinear equations

Rostam K. Saeed, Fuad W. Khthr

Salahaddin University/Erbil – College of Science – Department of Mathematics, Erbil, Iraq, rostamkarim64@uni-sci.org

In this paper, we present a new five and ten-order iterative method for solving nonlinear equations. The new method is an improvement of the Sebah and Gourdon method. The efficiency of the method is tested on several numerical examples. It is observed that the method is comparable with the well-known existing methods and in many cases gives better results.

CONVERGENCE ANALYSIS

In this paper we consider the convergence analysis of iterative technique given by Algorithm 1 and Algorithm 2 by the following theorems respectively:

Theorem 1. Assume that the function $f : I \longrightarrow R$ for an open interval I has a simple root $\alpha \in I$. If $f(x)$ is sufficiently smooth on the neighborhood of the root α, then the iterative method defined by Algorithm 1 converges of order five.

Theorem 2. Assume that the function $f : I \longrightarrow R$ for an open interval I has a simple root $\alpha \in I$. If $f(x)$ is sufficiently smooth on the neighborhood of the root α, then the iterative method defined by Algorithm 2 converges of order ten.

References

1. *Sebah P., Gourdon X.* Newton's method and high order iterations, 2001. Available from: `computation.free.fr/Constants/constant.htm`.
2. *Abbasbandy S.* Improving Newton-Raphson method for nonlinear equations by modified Adomian decomposition method // Appl. Math. compute. — 2003. — Vol. 145. — P. 887–893.
3. *Homeier H.H.H.* On Newton-type methods with cubic convergence // J. Comput. Appl. Math. — 2005. — Vol. 176. — P. 425–432.
4. *Chun C.* Iterative methods improving Newton's method by decomposition, method // Comput. Math. Appl. — 2005. — Vol. 50. — P. 1559–1568.
5. *Noor M.A.* Some iterative methods for solving nonlinear equations using homotopy perturbation method // International journal of computer Mathematics. — 2010. — Vol. 87(1). — P. 141–149.

Study of the equilibrium of the pendant drop

E. A. Shcherbakov, M. E. Shcherbakov

Kuban State University, Krasnodar, Russia
echt@math.kubsu.ru

Let $\Im_H$ be a class of axisymmetrical surfaces generated by the curves whose natural parameterizations are twice differentiable in a generalized sense. We suppose that symmetry's axis of the surface from the class $\Im_H$ is orthogonal to the plane P. On the class $\Im_H$ we consider the functional

$$F = F(S) := \sigma \cdot A + \sigma \cdot l_p \cdot \Xi - \beta \cdot \sigma \cdot \int\limits_{S^\bullet} dS + \lambda \cdot \sigma \cdot V +$$

$$+ \iiint\limits_W \Gamma \cdot \rho \cdot dV + \mu \cdot \sigma \cdot H(S),$$

$$\Xi := 2\pi \int\limits_0^L \left\{ -\sqrt{1 - \dot{y}^2} \int\limits_0^{\dot{y}} \left(\arcsin \sigma + \sigma \cdot \sqrt{1 - \dot{\sigma}^2} - \frac{\pi}{2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 - \dot{\sigma}^2\right)^{-\frac{3}{2}} d\sigma + E_0 \sqrt{1 - \dot{y}^2} \right\},$$

$$H(S) := \|H\|^2_{2,S} = \int\limits_S H^2 dS < \infty.$$

Here the symbol A denotes the area of the surface S, $S^\bullet$ – the disc inside of the line L of the intersection between S and P, W – the domain comprised between S and P, V-its volume and H denotes the mean curvature H of an admissible surface. We suppose the function Γ to be continuous and non negative and the numbers $E_0, l_p, \beta, \lambda, \mu, \rho, \sigma$ – non negative.

Theorem. There exists a surface $S_e \in \Im_H$ delivering a minimal value to the functional F over the class $\Im_H$ whose mean and gauss curvatures H, K satisfy the following equation

$$\mu \cdot \Delta_S H + 2\mu \cdot H \cdot \left(H^2 - K\right) + 2 \cdot H + l_p K = \lambda + \frac{1}{\sigma} \cdot \Gamma \cdot \rho$$

Here Δ_S denotes the Laplace-Beltrami operator of the surface S. The problem of this type arises in the study of the equilibrium state of the pending drop when intermediate layer and its flexural rigidity are taken into account. In our study we obtain also new condition for the contact angle between S and P.

Nonexistence of positive solutions to semilinear elliptic inequalities for polyharmonic operators

B. B. Tsegaw

Department of Mathematical analysis and Theory of functions, Peoples' Friendship University of Russia,Russia, 117198, Moscow, Street. Miklehua Maklaya, 6

In this paper, we study the higher-order semilinear elliptic partial differential inequality involving polyharmonic operator:

$$(-\triangle)^k u(x) \geqslant |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q(x),\ x \in \Omega \setminus \{0\}$$

$$u(x) \geqslant 0, \quad x \in \Omega \setminus \{0\}$$

where $k \geqslant 1, q > 1$ and $\Omega \subset \Re^n$ is a bounded domain. The purpose of this paper is to establish conditions on values of α_i, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$ for the nonexistence of nontrivial positive solution to this problem.

The main tools are a priori estimates and integral inequalities. Using the test function method, we derive first a priori estimates for solutions of the inequality based on integral inequalities and on the weak formulation of the problem with an optimal choice of test functions and then we formulate the nonexistence condition of the solution of the problem.

Key words: Semilinear elliptic inequalities, polyharmonic operators, a priori estimates and nonexistence.

§1. Introduction

Let $\Omega \subset \Re^n$ be a bounded domain and consider a semilinear elliptic partial differential inequality involving polyharmonic operators.

$$\begin{aligned} (-\triangle)^k u(x) \geqslant |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q(x),\ & x \in \Omega \setminus \{0\} \\ u(x) \geqslant 0, \qquad & x \in \Omega \setminus \{0\} \end{aligned} \tag{1}$$

where $\Omega \subset \Re^n$ be a bounded domain $k \geqslant 1, q > 1, \alpha_i \in \Re, \forall i = 1, 2, \cdots, n$ and $(-\triangle)^k(.)$ denotes a polyharmonic operator.

The aim of this paper is to formulate the conditions on the values of $\alpha_i, \forall i = 1, 2, \cdots, n$ for the nonexistence of nontrivial positive solutions to problem (1). To prove the nonexistence theorems for this problem we use the approach developed by E. Mitidieri and S.I. Pohozaev (see [1]). Their approach proposed a method of test functions that allows one to obtain global and local solvability criteria for differential equations and inequalities in some function classes for a wide range of operators, including higher order operators that do not obey comparison and maximum principles. This method allows us to consider weak solutions in obtaining a priori estimates for solutions by an algebraic analysis of the integral form of the inequality based on the weak formulation of the problem with a special (optimal) choice of test functions and scaling argument.

Denote by $\Omega_\varepsilon := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \setminus \{0\} : |x_i| \leqslant \varepsilon, \forall i = 1, 2, \cdots, n\}$ for $\varepsilon > 0$. To establish a priori estimates of the solution of an inequality

(1), we put into its weak formulation parameter dependent nonnegative test functions of the type:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi_0^\lambda\left(\frac{x_1}{R}\right)\varphi_0^\lambda\left(\frac{x_2}{R}\right)\cdots\varphi_0^\lambda\left(\frac{x_n}{R}\right), \ R > 0 \quad (2)$$

with $0 < \lambda \in \Re$ large enough (which can be specified later) and $\varphi_0 \in C_0^{2k}(R_+; [0,1])$ such that

$$\varphi_0(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leqslant |s| \leqslant 1 \\ 1 & \text{if } 2 \leqslant |s| \leqslant 3 \\ 0 & \text{if } |s| \geqslant 4 \end{cases} \quad (3)$$

where $R > 0$ is small enough such that

$$\Omega_{4R} := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \setminus \{0\} : |x_i| \leqslant 4R, \forall i = 1, 2, \cdots, n\} \subset \Omega \setminus \{0\}$$

After having obtained a priori estimates for solutions of problem (1) with a scaling argument $x = R\xi$ using the optimal test function of this type, we pass to a limit for $R \to 0$ yields a contradiction to assumed properties of the solution.

We will use the following estimate in the proof of the nonexistence theorem (which will be stated later) for problem (1).

Lemma: For $r > 1$ and the test function φ defined in (2) with $\lambda > 2kr$ the following inequality holds.

$$\left|(-\triangle)^k\varphi(x)\right|^r \varphi^{1-r}(x) \leqslant C(\lambda, r)R^{-2kr}, \quad x \in \Omega \setminus \{0\} \quad (4)$$

Proof: Put

$$\xi := \frac{x_i}{R}, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

Then from (2) for the derivative $(-\triangle)^k\varphi(x)$, we have the expression

$$(-\triangle)^k\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{2k}\varphi(x)}{\partial x_i^{2k}} = C_1(\lambda)R^{-2k}\sum_{i=1}^n \Phi_i \frac{\partial^{2k}\varphi_0(\xi)}{\partial \xi_i^{2k}}$$

where:

$$C_1(\lambda) := \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-2k), \quad \Phi_j := \varphi_0^{\lambda-2k}(\xi_j)\prod_{i=1, i\neq j}^n \varphi_0^\lambda(\xi_i).$$

Then it follows that

$$\left|(-\triangle)^k\varphi(x)\right|^r \varphi^{1-r}(x) = \left|C_1(\lambda)R^{-2k}\sum_{i=1}^n \Phi_i \frac{\partial^{2k}\varphi_0(\xi_i)}{\partial \xi_i^{2k}}\right|^r \left(\prod_{i=1}^n \varphi_0^\lambda(\xi_i)\right)^{1-r}$$

$$\leqslant C_2(\lambda,r)R^{-2kr}\left(\sum_{i=1}^{n}\Phi_i^r\left|\frac{\partial^{2k}\varphi_0(\xi_i)}{\partial\xi_i^{2k}}\right|^r\right)\prod_{i=1}^{n}\varphi_0^{\lambda(1-r)}(\xi_i)$$
$$= C_2(\lambda,r)R^{-2kr}\sum_{i=1}^{n}\Psi_i\left|\frac{\partial^{2k}\varphi_0(\xi_i)}{\partial\xi_i^{2k}}\right|^r$$

where:

$$C_2(\lambda,r):=C_1^r(\lambda),\quad \Psi_j:=\varphi_0^{\lambda-2kr}(\xi_j)\prod_{i=1,i\neq j}^{n}\varphi_0(\xi_i).$$

But by the choice of φ_0 for any $\xi_i : 1\leqslant|\xi_i|\leqslant 2$ and $3\leqslant|\xi_i|\leqslant 4, i=1,2,\cdots,n$, we have

$$\sum_{i=1}^{n}\Psi_i\left|\frac{\partial^{2k}\varphi_0(\xi_i)}{\partial\xi_i^{2k}}\right|^r = C_3<\infty$$

Hence set $C(\lambda,r):=C_3C_2(\lambda,r)$ and we complete the proof of Lemma.

□

§2. Statement of the result and its proof

Let $\Omega\subset\Re^n$ be a bounded domain and consider problem (1) in $\Omega\setminus\{0\}$. Now for $R>0$ we shall use the notation

$$\Omega_R:=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega\setminus\{0\}:|x_i|\leqslant R,\,\forall i=1,2,\cdots,n\}$$

Suppose that problem (1) has a nontrivial positive solution in the sense of the following definition.

Definition: A function $L^2_{loc}(\Omega\setminus\{0\};\Re_+)$ is called a weak nonnegative solution of problem (1) if and only if for each nonnegative test function $\Psi\in C_0^{2k}(\Omega\setminus\{0\};\Re_+)$ the following integral inequality holds:

$$\int_{\Omega\setminus\{0\}}|x_1|^{\alpha_1}|x_2|^{\alpha_2}\cdots|x_n|^{\alpha_n}u^q(x)\Psi(x)\,dx\leqslant\int_{\Omega\setminus\{0\}}(-\triangle)^k u(x)\Psi(x)\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\int_{\Omega\setminus\{0\}}u(x)(-\triangle)^k\Psi(x)\,dx \tag{5}$$

provided that all integrals are supposed to exist.

Our goal is to prove the following result.

Theorem: Let $q>1, k$ is a natural number and suppose that the following inequality holds

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\leqslant-2k,\quad \alpha_i<0\quad\forall i=1,2,\cdots,n$$

Then problem (1) does not have nonnegative nontrivial solution in $\Omega \setminus \{0\}$.

Proof: Suppose to the contrary. Assume that there exist positive solutions u to problem (1). Let $\Psi \in C_0^{2k}(\Omega \setminus \{0\}; \Re_+)$ be any standard cut-off function such that

$$\left|(-\triangle)^k \Psi(x)\right|^{q'} \Psi^{1-q'}(x) \in L^q_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$$

with $q' = \frac{q}{q-1}$

In order to estimate the integral on the right-hand side of inequality (5), we apply Holder's inequality:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus\{0\}} & |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q(x)\Psi(x)\, dx \leqslant \\ &\leqslant \int_{\Omega\setminus\{0\}} u(x) \left|(-\triangle)^k \Psi(x)\right| \, dx = \\ &= \int_{S(\Psi)} u(x) \left|(-\triangle)^k \Psi(x)\right| \, dx \leqslant \\ \leqslant & \left(\int_{S(\Psi)} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q(x)\Psi(x)\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \times \\ \times & \left(\int_{S(\Psi)} \frac{\left|(-\triangle)^k \Psi(x)\right|^{q'}}{\left(\Psi(x) |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n}\right)^{q'-1}} \, dx \right)^{\frac{1}{q'}}\end{aligned} \tag{6}$$

where: $S(\Psi) := Supp(\left|(-\triangle)^k \Psi\right|)$

Then it follows

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus\{0\}} & |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q \Psi \, dx \leqslant \\ \leqslant & \int_{S(\Psi)} \frac{\left|(-\triangle)^k \Psi\right|^{q'}}{\left(\Psi |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n}\right)^{q'-1}} \, dx\end{aligned} \tag{7}$$

Now choose the nonnegative test function $\Psi = \varphi \in C_0^{2k}(\Omega \setminus \{0\}, [0,1])$ which satisfies (2) and (3) with $\lambda > 2kq'$. The size of whose support depends on a parameter $R > 0$. Since it is known that $supp(\varphi) = \Omega_{4R} \setminus \Omega_R$

, inequality (7) takes the form:

$$\int_{\Omega_{4R}\setminus\Omega_R} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q \varphi \, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\Omega_{4R}\setminus\Omega_R} \frac{\left|(-\triangle)^k \varphi\right|^{q'}}{\left(\varphi |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n}\right)^{q'-1}} \, dx$$

Then by the Lemma with $r = q'$, we obtain

$$\begin{gathered}
\int_{\Omega_{4R}\setminus\Omega_R} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q \varphi \, dx \leqslant \\
\leqslant C(\lambda, q') \int_{\Omega_{4R}\setminus\Omega_R} R^{-2kq'} \varphi^{1-q'} \left(|x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n}\right)^{1-q'} \, dx \leqslant \\
\leqslant C(\lambda, q') \int_{\Omega_{4R}\setminus\Omega_R} R^{-2kq'} R^{\gamma} \, dx = \\
= C(\lambda, q') R^{\gamma - 2kq'} \int_{\Omega_{4R}\setminus\Omega_R} dx
\end{gathered} \tag{8}$$

where: $\gamma := \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)(1 - q')$

Now restricting the range of integration in the left hand side of inequality (8) by $\Omega_{3R} \setminus \Omega_{2R}$, where $\varphi \equiv 1$, by virtue of (2) and (3) we obtain

$$\begin{gathered}
\int_{\Omega_{3R}\setminus\Omega_{2R}} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q \, dx \leqslant \\
\leqslant \int_{\Omega_{4R}\setminus\Omega_R} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q \varphi \, dx \leqslant \\
\leqslant C(\lambda, q') R^{\gamma - 2kq'} \int_{\Omega_{4R}\setminus\Omega_R} dx
\end{gathered} \tag{9}$$

But on $\Omega_{3R} \setminus \Omega_{2R}$

$$\begin{gathered}
\int_{\Omega_{3R}\setminus\Omega_{2R}} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q \, dx \geqslant \\
\geqslant \inf_{\Omega_{3R}\setminus\Omega_{2R}} u^q(x) \int_{\Omega_{3R}\setminus\Omega_{2R}} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} \, dx \geqslant \\
\geqslant \inf_{\Omega_{3R}\setminus\Omega_{2R}} u^q(x) (3R)^{\beta} \int_{\Omega_{3R}\setminus\Omega_{2R}} dx
\end{gathered} \tag{10}$$

where: $\beta := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. By combining (9) and (10), we obtain

$$\inf_{\Omega_{3R}\setminus\Omega_{2R}} u^q(x) \leqslant \int_{\Omega_{3R}\setminus\Omega_{2R}} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} \, dx \leqslant C(\lambda, q', n) R^{\gamma - 2kq' - \beta}$$

This implies that

$$\inf_{\Omega_{3R}\setminus\Omega_{2R}} u(x) \leqslant C(\lambda, q', n) R^{\frac{\gamma - 2kq' - \beta}{q}} = C(\lambda, q', n) R^{\frac{-(\beta+2k)}{q-1}} \tag{11}$$

Since $q > 1, \beta := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < -2k$ by the condition of the theorem, the right hand side of inequality (11) tends to zero as $R \to 0_+$ which leads to a contradiction to the strong maximum principle.

Thus, in this case $u \equiv 0$ in $\Omega \setminus \{0\}$.

Next consider the critical case $\beta := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -2k$. Then the integral on the right hand side of inequality (7) is uniformly bounded as $R \to 0_+$. Thus we have

$$\begin{gathered} \int_{\Omega\setminus\{0\}} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q \varphi \, dx \leqslant \\ \leqslant \int_{S(\varphi)} \frac{\left|(-\triangle)^k \varphi\right|^{q'}}{\left(\varphi |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n}\right)^{q'-1}} \, dx = \\ = C_0 < \infty \end{gathered} \tag{12}$$

where: C_0 is independent of R, and $S(\varphi) := supp(\left|(-\triangle)^k \varphi\right|)$. Then since $S(\varphi) := supp(\left|(-\triangle)^k \varphi\right|) \subset ((\Omega_{2R} \setminus \Omega_R) \cup (\Omega_{4R} \setminus \Omega_{3R}))$, by the general theory of Lebesgue integral and inequality (12), we have

$$C(R) := \int_{S(\varphi)} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q \varphi \, dx \to 0, \quad \text{as} \quad R \to 0_+ \tag{13}$$

we apply Holder's inequality to the second term of the right hand side of inequality (5) for $\Psi = \varphi$ gives

$$\begin{gathered} \int_{\Omega\setminus\{0\}} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q \varphi \, dx \leqslant \\ \leqslant \left(\int_{S(\varphi)} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q \varphi \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \times \\ \times \left(\int_{S(\varphi)} \frac{\left|(-\triangle)^k \varphi\right|^{q'}}{\left(\varphi |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n}\right)^{q'-1}} \, dx \right)^{\frac{1}{q'}} \end{gathered} \tag{14}$$

Then by combining (12), (13) and (14), we have

$$\int_{\Omega\setminus\{0\}} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q \varphi \, dx \leqslant C_0^{\frac{1}{q'}} C^{\frac{1}{q}}(R) \to 0, \quad \text{as} \quad R \to 0_+$$

Then it follows that

$$\int_{\Omega\setminus\{0\}} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} u^q \varphi \, dx \to 0$$

This leads to a contradiction. Thus $u \equiv 0$ in $\Omega \setminus \{0\}$, this completes the proof of the theorem.

References

1. *E. Mitidieri, S. I. Pohozaev* A priori Estimates and the Absence of Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations and Inequalities // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics — 2001. — Vol. 234.
2. *E. I. Galakhov* On Higher Order Elliptic and Parabolic Inequalities with Singularities on the Boundary // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2010. — Vol. 269.
3. *Galakhov E.,I.* Some Nonexistence Results for Quasilinear Elliptic Problems // J. Math. Anal.Appl. — 2000. — Vol. 252.

О принципе максимума для уравнений Навье–Стокса

А. Ш. Акыш

Институт математики и математического моделирования
Алматы, Казахстан, akysh41@mail.ru

Из системы уравнений Навье-Стокса(УНС) выведено нелинейное уравнение параболического типа для плотности кинетической энер- гии и выявлено важное свойство этого уравнения – принцип максимума. С помощью последнего показана справедливость принципа максимума и для УНС, что с математической точки зрения является ключевым. На основе чего доказано однозначная разрешимость слабых и существование сильных решений задачи для УНС в целом по времени $t \in [0, T]$, $\forall T < \infty$. Эти результаты подытожены и доведены до математической строгости в работах [1–3]. Задача для УНС относительно скорости $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ и давления P запишется

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{U} + (\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathrm{div}\mathbf{U} = 0, \tag{1a}$$

$$\mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{U}(t, \mathbf{x})\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{1b}$$

где $\mathbf{x} \in \Omega \subset R_3$; Ω — выпуклая область, $\partial\Omega$ — граница ее, $t \in [0, T]$, $T < \infty$; $\mathbf{f}$ и $\mathbf{\Phi}$ — вектор-функции соответственно внешних сил и начальных данных; $0 < \mu$ — динамический коэффициент вязкости; $\mathring{\mathbf{J}}(\Omega)$ — пространство соленоидальных векторов; $W^1_{2,0}(\Omega)$ — соболевское пространство функций равных нулю на $\partial\Omega$.

Из системы уравнений (1a) при $\mathbf{f} = 0$ получено нелинейное уравнение параболического типа для плотности кинетической энергии $E = \frac{1}{2}(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)$:

$$\mathbb{L}E \equiv \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \Delta E + \mu \sum_{\alpha=1}^{3} |\nabla U_\alpha|^2 + (\nabla E, \mathbf{U}) + (\nabla P, \mathbf{U}) = 0. \tag{2}$$

В работах [1–3] доказаны утверждения:

Теорема 1. *Пусть $\bar{Q} = [0, T] \times \bar{\Omega}$ — цилиндрическая область в пространстве переменных $t, \mathbf{x}$. Функции $(\mathbf{U}, E) \in C(\bar{Q}) \cap C^2(Q) \wedge P \in C^1(Q)$ удовлетворяют уравнениям(1a), (2).Тогда функция $E(t, \mathbf{x})$ принимает свой максимум в цилиндре $\bar{Q}$ на нижнем основании $\{0\} \times \bar{\Omega}$ или на его боковой поверхности $[0, T] \times \partial\Omega$, т. е.*

$$E(t, \mathbf{x}) \leqslant \max\Big\{ \sup_{t=0 \bigwedge \mathbf{x} \in \bar{\Omega}} E(t, \mathbf{x}), \sup_{t \in [0,T] \bigwedge \mathbf{x} \in \partial\Omega} E(t, \mathbf{x}) \Big\} = C - const.$$

Теорема 2. *Если вектор-функций* $\mathbf{f}$, $\mathbf{\Phi}$ *удовлетворяют условиям:*

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\bar{Q}) \cap \mathring{\mathbf{J}}(Q); \quad \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{J}}(\Omega), \tag{3}$$

то для решений $\mathbf{U}(t,\mathbf{x})$*задачи (1) справедлива оценка:*

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{C}(\bar{Q})} \leqslant \|\mathbf{\Phi}\|_{\mathbf{C}(\bar{\Omega})} + T\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C}(\bar{Q})} \equiv A_1, \|\mathbf{U}\|_{\mathbf{C}(\bar{Q})} = \max_{1\leqslant\alpha\leqslant 3} \sup_{\bar{Q}} |U_\alpha(t,\mathbf{x})|.$$

Теорема 3. *Если входные данные* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{\Phi}$ *удовлетворяют требованиям (3), тогда задача (1) имеет единственное слабое обобщенное решение* $\mathbf{U}$ *и* P *соответственно из пространств*

$$\mathbf{U} \in \mathbf{C}(\bar{Q}) \cap \mathbf{L}_\infty\big(0,T;\mathbf{L}_2(\Omega)\big) \cap \mathbf{L}_2\big(0,T;\mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega)\big) \cap \mathring{\mathbf{J}}(Q);$$

$$P \in L_2\left(0,T;W^1_2(\Omega)\right) \wedge \left(\int_\Omega P\mathbf{dx} = 0,\ \forall t \in [0,T]\right)$$

Теорема 4. *Если входные данные задачи (1) удовлетворяют требованиям (3) и* $\partial\Omega \in C^2$, *тогда у задачи (1) существует единственное сильное обобщенное решение* $\mathbf{U}$ *и* P *из пространств*

$$\mathbf{U} \in \mathbf{W}^{2,1}_{2,0}(Q) \cap \mathring{\mathbf{J}}_\infty(Q);\ P \in L_2\big(0,T;W^2_2(\Omega)\big) \wedge \left(\int_\Omega P\mathbf{dx} = 0,\ \forall t \in [0,T]\right),$$

удовлетворяющие уравнениям (1a) почти всюду в Q.

Литература

1. *Акыш А. Ш.* О принципе максимума для уравнений Навье–Стокса // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. Алматы. — Наука, 2011. — № 3. — С. 69–72.
2. *Akysh A. Sh.* The maximum principle of юhe Navier–Stokes equation // Вестник КарГУ им. академика Е. А. Букетова. — 2012. — № 2(66). — С. 4–16. — `http://www.ksu.kz/`
3. *Akysh A. Sh.* The maximum principle of юhe Navier-Stokes equation USA. — 2012. — arXiv.org: 1204.2668v [math-ph]. — 16 page.

On a maximum principle for Navier-Stokes equations

A. Sh. Akysh

Institute of mathematical and mathematical modeling
Almaty, Kazakhstan, akysh41@mail.ru

Групповой анализ уравнений эйконала для анизотропной среды

А. В. Боровских

МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия
bor.bor@mail.ru

Приводятся результаты группового анализа анизотропных уравнений эйконала

$$g^{ij}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}=1, \qquad x\in\mathbb{R}^n \tag{1}$$

($\psi(x)$ – неизвестная функция, $g^{ij}(x)$ – некоторая матрица, интерпретируемая как реализация контравариантного тензора). Определяющую роль в структуре группы симметрий играет геометрическая структура риманова пространства с метрикой

$$ds^2=g_{ij}(x)dx^i dx^j. \tag{2}$$

Группа симметрий уравнения (1), помимо движений и растяжений метрики (2), может содержать еще одну подгруппу, наличие которой определяется разрешимостью уравнения

$$S_{,ij}+KSg_{ij}=0, \tag{3}$$

(*уравнения однородности*), где K — некоторая константа. Переход к системе координат, связанной с решениями этого уравнения, приводит к специальным формам римановой метрики (2), которые образованы присоединением к метрике риманова пространства постоянной кривизны метрики еще одного риманова пространства (вообще говоря непостоянной кривизны) с помощью конструкции вида

$$ds^2=\hat{g}_{ij}(\hat{x})d\hat{x}^i d\hat{x}^j+G^2(\hat{x})\tilde{g}_{ij}(\tilde{x})d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j. \tag{4}$$

Форму (4) римановой метрики (а также и соответствующее риманово пространство) мы будем называть *сочленённой.* В случае сочленённой метрики, для которой соответствующая метрическая форма

$$\hat{g}_{ij}(\hat{x})d\hat{x}^i d\hat{x}^j+G^2(\hat{x})d\theta^2$$

определяет риманово пространство постоянной кривизны, мы будем говорить, что соответствующее уравнение эйконала отвечает *полуоднородной* среде. Если же вся метрика (2) имеет постоянную кривизну, мы будем говорить, что уравнение эйконала задано в *однородной* среде.

Представление метрики в виде (4) связано с двумя аспектами: во-первых, с возможностью редуцировать интегрирование уравнения (1) во всем пространстве к интегрированию уравнений в подпространствах,

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00155.

его составляющих, и во-вторых, с возможностью найти решения в каждом подпространстве. Решение второго вопроса практически целиком зависит от того, является ли соответствующее подпространство римановым пространством постоянной кривизны (хотя здесь есть и отдельные исключительные случаи), а решение первого определяется непосредственно самой структурой (4) метрики (2).

Теорема. [1] *Алгебра Ли группы симметрий уравнения (1) является суммой четырех подалгебр:*

1. Одномерной алгебры сдвигов переменной ψ: $\Xi = L\partial_\psi$;

2. Алгебры Ли группы однородности, которая порождается решениями уравнения (3) и имеется только в случае уравнения эйконала для однородной или полуоднородной среды.

3. Алгебры Ли группы движений метрики (2): $\Xi = \chi^i\partial_i$, где χ^i (а точнее, $\chi_j = g_{ij}\chi^i$) удовлетворяет уравнению $\chi_{i,j} + \chi_{j,i} = 0$. Для однородных сред эта алгебра известна, для полуоднородных сред эта алгебра является прямой суммой некоторой подалгебры движений основной метрики $\hat{g}_{ij}$ и алгебры движений присоединенной метрики $\tilde{g}_{ij}$.

4. Алгебры растяжений $\Xi = \chi^i\partial_i + \psi\partial_\psi$, где $\chi_j = g_{ij}\chi^i$ — некоторое частное решение уравнения $\chi_{i,j} + \chi_{j,i} = 2g_{ij}$, порождающее (если уравнение разрешимо) одномерную группу гомотетических преобразований метрики (2).

Вид алгебр однородности и алгебры движений для канонических уравнений эйконала в однородных и полуоднородных средах будет представлен в докладе.

Литература

1. *Боровских А. В.* Уравнение эйконала для анизотропной среды // Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 2012. — Вып. 29.

Group analysis of eikonal euqations for anisotropic medium

A. V. Borovskikh

M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
bor.bor@mail.ru

Сингулярно возмущенные задачи в случае кратных корней вырожденного уравнения

В. Ф. Бутузов

Московский государственный университет, Москва, Россия

Асимптотики погранслойных решений сингулярно возмущенных задач в случае кратного корня вырожденного уравнения имеют качественные отличия от асимптотик в случае простого корня. Эти отличия можно увидеть на примере краевой задачи

$$\varepsilon^2 u'' = f(u, x, \varepsilon), \quad 0 < x < 1; \tag{1}$$

$$u'(0, \varepsilon) = u'(1, \varepsilon) = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, f — достаточно гладкая функция, имеющая вид

$$f(u, x, \varepsilon) = h(u, x)(u - \varphi(x))^k - \varepsilon f_1(u, x, \varepsilon). \tag{3}$$

Пусть $\overline{h}(x) := h(\varphi(x), x) > 0$ на отрезке $[0; 1]$. Если $k = 1$, то вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$, получающееся из (1) при $\varepsilon = 0$, имеет простой (однократный) корень $u = \varphi(x)$, а задача (1), (2) имеет для достаточно малых ε погранслойное решение $u(x, \varepsilon)$ с асимптотикой вида (см.[1])

$$u(x, \varepsilon) = \overline{u}(x, \varepsilon) + \Pi(\xi, \varepsilon) + \widetilde{\Pi}(\widetilde{\xi}, \varepsilon), \tag{4}$$

где $\overline{u}(x, \varepsilon) = \varphi(x) + \sum\limits_{i=1} \varepsilon^i \overline{u}_i(x)$ — регулярная часть асимптотики, $\Pi(\xi, \varepsilon) = \sum\limits_{i=1} \varepsilon^i \Pi_i(\xi)$, $\xi = \dfrac{x}{\varepsilon}$ — левый пограничный ряд (в окрестности точки $x = 0$), $\widetilde{\Pi}(\widetilde{\xi}, \varepsilon)$, $\widetilde{\xi} = \dfrac{1 - x}{\varepsilon}$ — аналогичный правый пограничный ряд (в окрестности точки $x = 1$).

Если $k = 2$, то корень $u = \varphi(x)$ вырожденного уравнения является двукратным, и, как оказалось, существенную роль в вопросе о существовании погранслойного решения задачи (1), (2) играют теперь члены порядка ε, входящие в выражение (3), а именно, функция $\overline{f}_1(x) := f_1(\varphi(x), x, 0)$.

Если $\overline{f}_1(x) > 0$ на отрезке $[0; 1]$, то для достаточно малых ε задача (1), (2) имеет решение с погранслойной асимптотикой вида (4), но качественное отличие от случая простого корня состоит в том, что регулярная часть асимптотики является теперь рядом по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ (а не ε, как в случае простого корня): $\overline{u}(x, \varepsilon) = \varphi(x) + \sqrt{\varepsilon}\,\overline{u}_1(x) + \cdots$, погранслойные переменные ξ и $\widetilde{\xi}$ имеют теперь другой масштаб: $\xi =$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 12-01-00387.

$\dfrac{x}{\varepsilon^{3/4}}$, $\widetilde{\xi} = \dfrac{1-x}{\varepsilon^{3/4}}$, а ряды $\Pi(\xi,\varepsilon)$ и $\widetilde{\Pi}(\widetilde{\xi},\varepsilon)$ являются рядами по степеням $\varepsilon^{1/4}$.

Если вместо условий Неймана (2) заданы краевые условия Дирихле

$$u(0,\varepsilon) = u^0,\ u(1,\varepsilon) = u^1, \tag{5}$$

то при некоторых требованиях к u^0 и u^1 задача (1), (5) также имеет погранслойное решение с асимптотикой вида (4), но характер асимптотики изменяется. Так левый пограничный ряд строится теперь в виде

$$\Pi(\xi,\varepsilon) = \Pi_0(\xi,\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1(\xi,\varepsilon) + \varepsilon\Pi_2(\xi,\varepsilon) + \cdots,\ \xi = \frac{x}{\varepsilon},$$

причем его коэффициенты зависят не только от ξ, но и от ε, в частности функция $\Pi_0(\xi,\varepsilon)$ является решением задачи (при условии, что $h = h(x)$):

$$\frac{d^2\Pi_0}{d\xi^2} = h(0)\left(\Pi_0^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\,\overline{u}_1(0)\Pi_0\right),\ \xi > 0; \quad \Pi_0(0,\varepsilon) = u^0 - \varphi(0),\ \Pi_0(\infty) = 0.$$

Анализ решения этой задачи и задач для следующих функций $\Pi_i(\xi,\varepsilon)$ показывает,что пограничный слой в задаче (1), (5) разделяется на три зоны. В первой зоне ($0 \leqslant x \leqslant \varepsilon^{1-\gamma},\ 0 < \gamma < 1/4$) функции $\Pi_i(\xi,\varepsilon)$ убывают с ростом ξ степенным образом: $\Pi_i(\xi,\varepsilon) = O\left(\dfrac{1}{(1+\xi)^2}\right)$, во второй зоне ($\varepsilon^{1-\gamma} \leqslant x \leqslant \varepsilon^{3/4}$) происходит изменение масштаба погранслойной переменной и характера убывания пограничных функций, и, наконец, в третьей зоне ($x \geqslant \varepsilon^{3/4}$) функции Π_i убывают экспоненциально, как $\exp(-\kappa\zeta)$, где $\zeta = \dfrac{x}{\varepsilon^{3/4}}$.

Если в левую часть уравнения (1) добавлен член с первой производной вида $\varepsilon A(x)u'$, то в случае кратного (в отличие от простого) корня вырожденного уравнения это приводит к изменению масштаба погранслойных переменных.

В докладе более подробно будет рассказано об упомянутых задачах, а также о некоторых задачах в случае кратного корня вырожденного уравнения для параболических и эллиптических уравнений. Для всех этих задач доказано существование решений с построенной погранслойной асимптотикой.

Литература

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.

Singularly perturbed problems in the case of multiple roots of the degenerate equation

V. F. Butuzov

Moscow State University, Moscow, Russia
e-mail: butuzov@phys.msu.ru

Контрастные структуры для уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова

А. А. Быков, А. С. Шарло

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
abkov@yandex.ru, sharlo@physics.msu.ru

Как известно [1], решения уравнения реакции-диффузии (далее РД), $\varepsilon^2 u_t + \varepsilon^2 V(x) u_x = \varepsilon^2 (k u_x)_x + f(u,x)$, где ε малый параметр, при некоторых дополнительных условиях имеют характер контрастных структур. Для наличия решения типа КС плотность источников должна иметь несколько корней, например, $f(u,x) = \gamma(x)\Pi_{j=1}^{3}\big(U_j(x) - u\big)$, $\gamma > 0$, $U_1(x) < U_2(x) < U_3(x)$. Контрастная структура (КС) характеризуется наличием больших областей с малым градитентом решения, разделенных узкими внутренними переходными слоями (ВПС). Скорость дрейфа ВПС в неоднородной среде определяется дисбалансом плотности источников, $\mathcal{B}(x) = \int_{U_1(x)}^{U_3(x)} f(u,x)du$, производными dU_j/dx и некоторыми моментами функций f_x и f_u. Мы рассматриваем вместо уравнения РД так называемое обобщенное уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова (ОКПП)

$$\varepsilon^2 u_t + \varepsilon^2 V(x) u_x = \varepsilon^4 (\mu u_x)_{xt} + \varepsilon^2 (k u_x)_x + f(u,x) \qquad (1)$$

с начальными условиями $u(x,0) = u_0(x)$ и граничными услвоиями $u(x_a,t) = u_a(t)$, $u(x_b,t) = u_b(t)$, $x \in [x_a, x_b]$. Вычисление скорости дрейфа и профиля ВПС, соединяющего нижний U_1 и верхний U_3 корни, проводится методом сингулярного разложения решения по степеням параметра ε. Решение представляется в виде суммы регулярной функции $\bar{u}(x,\varepsilon)$ и функции ВПС $\Pi(\xi,\varepsilon)$, зависящей от растянутой координаты $\xi = (x - x^\star)/\theta$, где $\theta = \sqrt{2k/\gamma}$ есть толщина ВПС, $x^\star(t)$ есть корень уравнения $u(x,t) = U_2(x)$, причем $\theta \ll x_b - x_a$. Скорость дрейфа ВПС $x^\star(t)$ представляется рядом $x^\star(t) = x_0^\star(t) + \varepsilon x_1^\star(t) + \ldots$, $u(x,\varepsilon) = \bar{u}(x,\varepsilon) + \Pi(\tau,\varepsilon)$, $\bar{u}(x,\varepsilon) = \bar{u}_0(x) + \varepsilon\bar{u}_1(x) + \varepsilon^2\bar{u}_2(x) + \ldots$, $\Pi(\xi,\varepsilon) = \Pi_0(\xi) + \varepsilon\Pi_1(\xi) + \varepsilon^2\Pi_2(\xi) + \ldots$, Регулярные функции $\bar{u}_m(x)$ явно выражаются через $U_j(x)$ и их производные, а для функций переходного слоя Π_m строится семейство связанных краевых задач второго порядка, из которых находятся последовательно $\Pi_0(x,t)$ и $W_0(x) = dx_0^\star/dt$, затем $\Pi_1(x,t)$ и $W_1(x) = dx_1^\star/dt$ и т.д. Каждый очередной член ряда $x_m^\star(t)$ находится из задачи Коши $dx_m^\star/dt = \Phi_m(t)$, причем $\Phi_m(t)$ зависит также от всех ранее найденных функций переходного слоя.

Обоснование существования решения и сходимости метода сингулярных разложений по степеням малого параметра в классических работах [1] для уравнения РД проводится с использованием метода

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 10-01-00319-а и 12-01-00387-а.

дифференциальных неравенств [2], который основан на использовании принципа максимума для эллиптических уравнений второго порядка, который для уравнения ОКПП не применим.

Мы используем для обоснования метода асимптотических сингулярных рядов для уравнения ОКПП так называемый обобщенный принцип максимума, который, насколько нам известно, был сформулирован и доказан в работе [3] для уравнения $-u_t + u_{xxt} + u_{xx} - f(u, x) = 0$, $x \in (a, b)$, $t \in (0, T]$.

Используя регулярные функции и функции переходного слоя для порядков $0 \leqslant m \leqslant n$, а также модифицированную функцию переходного слоя для порядка $m + 1$, мы строим семейство верхних решений $\beta_m(x, t)$ и нижних решений $\alpha_m(x, t)$ краевой задачи для уравнения (1). Функции $\alpha_m(x, t)$ и $\beta_m(x, t)$ имеют характер движущихся фронтов волны, причем положение фронта определяется из задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка, для которого доказывается теорема существования решения. Используя обобщенный принцип максимума, мы доказываем, что классическое решение задачи (1) расположено строго между нижним и верхним решениями, $\alpha_m(x, t) < u(x, t) < \beta_m(x, t)$, и таким образом также имеет характер движущегося фронта.

Литература

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундаментальная и прикладная математика. — 1998. — Т. 4, № 3. — С. 799–851.
2. *Pao C.V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. — New York: Plenum, 1992.
3. *Кожанов А.И.* Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Математические заметки. — 1999. — Т.65, вып. 1. — С. 70–75.

Contrasting Structures for Kolmogorov Petrovskii Piskunov equation

A. A. Bykov, A. S. Sharlo

Department of physics, Moscow State University, Moscow, Russia
abkov@yandex.ru, sharlo@physics.msu.ru

Устойчивость решений одного класса нелинейных начально-краевых задач аэроупругости

П. А. Вельмисов, В. А. Судаков, Ю. К. Замальдинова

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия, velmisov@ulstu.ru, sseevvaa@inbox.ru

Исследуется устойчивость решения начально-краевых задач, описывающих динамику упругой пластины в сверхзвуковом потоке газа.

Одна из возможных математических постановок задачи:

$$mw_{tt}+Dw_{xxxx}+Nw_{xx}+\frac{\rho V}{\sqrt{M^2-1}}(Vw_x+\frac{M^2-2}{M^2-1}w_t)+\psi(w,w_t)=0, \quad (1)$$

$$w(0,t)=w_{xx}(0,t)=0, \quad w(l,t)=w_{xx}(l,t)=0, \quad (2)$$

$$w(x,0)=f(x), \quad w_t(x,0)=g(x). \quad (3)$$

Здесь $w(x,t)$ - функция деформации пластины; индексы x,t обозначают производные по x и t; D и m — изгибная жесткость и погонная масса упругого элемента; N — сжимающая (растягивающая) упругий элемент сила; M, V, ρ — число Маха, скорость и плотность набегающего потока. Функция $\psi(w,w_t)$ моделирует различные внешние воздействия, в частности, силы (как линейные, так и нелинейные) реакции и демпфирования упругого основания. На основе функционала Ляпунова:

$$\begin{gathered}J(t)=\frac{1}{2}\int\limits_a^b[mw_t^2(x,t)+\\ +m\gamma w_t(x,t)w(x,t)+Dw_{xx}^2(x,t)-\\ -Nw_x^2(x,t)++\theta\alpha\gamma w^2(x,t)]dx+I(t),\end{gathered} \quad (4)$$

где $\theta=\frac{\rho V}{\sqrt{M^2-1}}$, $\alpha=\frac{M^2-2}{M^2-1}$, γ — некоторый параметр, определяемый в процессе решения задачи, а форма слагаемого I зависит от выбора функции внешнего воздействия ψ, проведено исследование устойчивости решений начально-краевой задачи (1)–(3). При этом в качестве граничных условий выбирались как условия (2), соответствующие шарнирному закреплению концов, так и другие граничные условия, соответствующие другим типам закрепления (например, жесткому защемлению и т.д.). Получены условия устойчивости, налагающие ограничения на скорость набегающего потока V, значение сжимающего усилия N, изгибную жесткость D и другие параметры механической системы. Проведен также численный эксперимент по исследованию динамики упругого элемента, основанный на методе Галеркина.

Рассматривается также нелинейная модель в задаче о динамике упругой пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа:

$$\begin{cases} -EF(u_x + \frac{1}{2}w_x^2)_x + mu_{tt} + F(u, u_t) = 0; \\ -EF[w_x(u_x + \frac{1}{2}w_x^2)]_x + Dw_{xxxx} + mw_{tt} + G(w, w_t) = \\ = -\frac{\rho V}{\sqrt{M^2-1}}(Vw_x + \frac{M^2-2}{M^2-1}w_t); \end{cases} \tag{5}$$

$$w(x,0) = f_1(x),\ w_t(x,0) = g_1(x),\ u(x,0) = f_2(x),\ u_t(x,0) = g_2(x) \tag{6}$$

Здесь $w(x,t)$ и $u(x,t)$ - поперечная и продольная деформации пластины, E — модуль упругости, F — площадь поперечного сечения, функции $F(u, u_t)$, $G(w, w_t)$ отражают различные внешние воздействия, в частности силы реакции и демпфирования . Уравнения (5) и начальные условия (6) следует дополнить граничными условиями. Например, в случае жесткого защемления:

$$w(0,t) = w_x(0,t) = 0,\ w(l,t) = w_x(l,t) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0. \tag{7}$$

Исследование динамической устойчивости пластины на основе уравнений (5) проводилось с помощью численного эксперимента, основой которого является метод Галеркина. Решение соответствующих начально-краевых задач представлялось в виде:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{n} w_k(t)\psi_k(x), \quad u(x,t) = \sum_{k=1}^{m} u_k(t)\varphi_k(x) \tag{8}$$

где $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторые полные на отрезке $[0,l]$ системы базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления концов пластины

Stability of solutions to a class of nonlinear boundary problems of aeroelasticity

P. A. Velmisov, V. A. Sudakov, J. K. Zamaldinova

Ulyanovsk state technical university, Ulyanovsk, Russia
velmisov@ulstu.ru, sseevvaa@inbox.ru

Асимптотические модели трансзвуковых течений газа

П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова, С. В. Шарова

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия
velmisov@ulstu.ru, kazakovaua@mail.ru

Безвихревые изэнтропические течения газа в безразмерных переменных описываются следующим нелинейным уравнением для потенциала скорости $\Phi(t,x,y,z)$:

$$\begin{gathered}\Phi_{tt}+2\Phi_x\Phi_{xt}+2\Phi_y\Phi_{yt}+2\Phi_z\Phi_{zt}+2\Phi_x\Phi_z\Phi_{xz}+2\Phi_z\Phi_y\Phi_{zy}+\\+2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy}+\Phi_x^2\Phi_{xx}+\Phi_y^2\Phi_{yy}+\Phi_z^2\Phi_{zz}-(\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz})\times\\\times\left[\tfrac{\gamma+1}{2}-\tfrac{\gamma-1}{2}\left(2\Phi_t+\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2\right)\right]=0.\end{gathered}\qquad(1)$$

Здесь $\Phi(t,x,y,z)$ — потенциал скорости, x, y, z — декартовы координаты, t — время. Давление $P(t,x,y,z)$ и квадрат скорости звука $a(t,x,y,z)$ находятся по формулам:

$$a^2=P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\frac{\gamma+1}{2}-\frac{\gamma-1}{2}\left(2\Phi_t+\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2\right).$$

Введем для Φ асимптотическое разложение

$$\Phi(t,x,y,z)=x+\varepsilon\psi(y,z,\overline{t})+\varepsilon^3\varphi(\overline{x},y,z,\overline{t})+o(\varepsilon^3),\ x=\varepsilon\overline{x},\ t=\varepsilon^{-1}\overline{t},\quad(2)$$

где ε — малый параметр. Подставляя (2) в (1), получим для функции $\varphi(\overline{x},y,z,\overline{t})$ обобщенное трансзвуковое уравнение:

$$\begin{gathered}2\varphi_{\overline{x}\overline{t}}+(\gamma+1)\varphi_{\overline{x}}\varphi_{\overline{x}\overline{x}}+2\psi_y\varphi_{\overline{x}y}+2\psi_z\varphi_{\overline{x}z}-\Delta\varphi+\\+\tfrac{\gamma-1}{2}(2\psi_{\overline{t}}+\psi_y^2+\psi_z^2)\varphi_{\overline{x}\overline{x}}=L(\psi),\end{gathered}\qquad(3)$$

$$\begin{gathered}\text{где }-L(\psi)\equiv\psi_{\overline{t}\overline{t}}+2\psi_y\psi_{y\overline{t}}+2\psi_z\psi_{z\overline{t}}+\psi_y^2\psi_{yy}+\psi_z^2\psi_{zz}+\\+2\psi_z\psi_y\psi_{yz},\qquad\Delta\varphi\equiv\varphi_{yy}+\varphi_{zz}.\end{gathered}$$

Функция $\psi(y,z,\overline{t})$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi\equiv\psi_{yy}+\psi_{zz}=0$. Уравнение (3) описывает трансзвуковые течения газа, возникающие при воздействии на обтекаемое тело бокового (по отношению к основному направлению движения, совпадающему с направлением оси x) возмущения основного трансзвукового потока (для бокового возмущения $\Phi_y,\Phi_z\sim\varepsilon$, для основного течения $\Phi_y,\Phi_z\sim\varepsilon^3$).

Если $\psi\equiv0$, то получим классическое трансзвуковое уравнение Линя–Рейсснера–Тзяна

$$2\varphi_{\overline{x}\overline{t}}+(\gamma+1)\varphi_{\overline{x}}\varphi_{\overline{x}\overline{x}}-\varphi_{yy}-\varphi_{zz}=0,$$

которое в стационарном случае переходит в уравнение смешанного типа Кармана-Фальковича: $(\gamma+1)\varphi_{\overline{x}}\varphi_{\overline{x}\overline{x}} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0$.

Граничное условие непротекания на поверхности $y = f(x, z, t)$ имеет вид: $-\Phi_x \dfrac{\partial f}{\partial x} + \Phi_y - \Phi_z \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial t}$. Задавая уравнение поверхности асимптотическим разложением

$$y = y_0(z, \overline{t}) + y_1(\overline{x}, z, \overline{t})\varepsilon^4 + ...,$$

получим условия для функций $\psi(y, z, \overline{t})$, $\varphi(\overline{x}, y, z, \overline{t})$:

$$\frac{\partial y_0}{\partial \overline{t}} = \psi_y - \psi_z \frac{\partial y_0}{\partial z}, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \overline{x}} = \varphi_y - \varphi_z \frac{\partial y_0}{\partial z}. \tag{4}$$

Значения производных ψ_y, ψ_z, φ_y, φ_z в (4) вычисляются при $y = y_0(z, \overline{t})$.

Давление определяется по формуле:

$$P = 1 - \gamma\varepsilon^2(\psi_{\overline{t}} + \varphi_{\overline{x}} + \frac{1}{2}\psi_y^2 + \frac{1}{2}\psi_z^2).$$

Уравнение звуковой поверхности ($V^2 = a^2$) имеет вид:

$$N \equiv \frac{\gamma+1}{2}(\psi_y^2 + \psi_z^2) + (\gamma-1)\psi_{\overline{t}} + (\gamma+1)\varphi_{\overline{x}} = 0, \tag{5}$$

при этом в сверхзвуковой области $N > 0$, в дозвуковой области $N < 0$. Уравнение для определения характеристик имеет вид

$$2\frac{\partial x}{\partial \overline{t}} + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = (\gamma+1)\varphi_x - 2\psi_y \frac{\partial x}{\partial y} - 2\psi_z \frac{\partial x}{\partial z} + \\ + \frac{\gamma-1}{2}(2\psi_{\overline{t}} + \psi_y^2 + \psi_z^2)$$

Построены некоторые частные решения уравнения (3) и указаны их приложения. В частности, уравнение (3) допускает решение:

$$\varphi = \sum_{k=0}^{3} \varphi_k(y, z, \overline{t})\overline{x}^k, \tag{6}$$

где функция $\varphi_3(y, z, \overline{t})$ определяется из уравнения $\Delta\varphi_3 = 18(\gamma+1)\varphi_3^2$. В классе решений (6) содержатся решения, которые описывают течения газа в соплах Лаваля.

Asymptotic models of transonic gas flow

P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, S. V. Sharova

Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russia
velmisov@ulstu.ru, kazakovaua@mail.ru

Разрушение решений для неравенств в частных производных с особенностями на неограниченных множествах

Е. И. Галахов*, **О. А. Салиева**†

* *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
galakhov@rambler.ru

† *МГТУ «Станкин», Москва, Россия*
olga.a.salieva@gmail.com

Математические модели природных и техногенных катастроф часто описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, для которых имеет место ситуация blow-up (разрушение решений за конечное время). Поэтому нахождение условий возникновения ситуации blow-up представляет значительный научный и практический интерес. Большая часть известных результатов теории blow-up относится к эллиптическим и параболическим операторам второго порядка [1]. Существенно более общий подход, основанный на концепции нелинейной емкости, был предложен С. И. Похожаевым [2, 3].

Авторами настоящего доклада получены достаточные условия возникновения ситуации blow-up в задачах для уравнений и неравенств с частными производными, коэффициенты или начальные данные которых имеют особенности вблизи неограниченных множеств. В частности, имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое множество, $\varepsilon > 0$. Обозначим $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, S)$ и*

$$S^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \rho(x) < \varepsilon\}.$$

Предположим, что существуют положительные константы c_1, c_2, a, R_0 такие, что для всех $R > R_0$ выполнены соотношения

$$c_1 \varepsilon^a R^{n-a} \leqslant \mu(S^\varepsilon \cap B_R(0)) \leqslant c_2 \varepsilon^a R^{n-a}. \tag{1}$$

Пусть функция $u_0 : (\mathbb{R}^n \setminus S) \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет оценке

$$u_0(x) \geqslant c|x|^\lambda \rho^\mu(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus S), \tag{2}$$

где

$$\alpha > \max\{(\mu - \lambda)(q-1) + 2k, 0\}. \tag{3}$$

Тогда любое положительное решение задачи

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^k u \geqslant b u^q \rho^{-\alpha}(x) & ((x,t) \in Q = (\mathbb{R}^n \setminus S) \times \mathbb{R}_+), \\ u(x,0) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^n \setminus S) \end{cases} \tag{4}$$

разрушается за конечное время.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 11-01-00348-а и № 11-01-12018-офи-м-2011.

Литература

1. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987.
2. *Похожаев С. И.* Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами // Докл. РАН. — 1997. — Т. 357. — С. 592–594.
3. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — 2001. — Т. 234. — С. 1–383.

Blow-up for partial differential inequalities with singularities on unbounded sets

E. I. Galakhov*, O. A. Salieva†

* *Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia*
galakhov@rambler.ru

† *MGTU "Stankin", Moscow, Russia*
olga.a.salieva@gmail.com

Анализ решений нелинейного уравнения Шредингера для линейной/нелинейной сред с прямоугольными потенциальными ямами

В. С. Герасимчук*, И. В. Герасимчук†

* *Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Киев, Украина*
Viktor.Gera@gmail.com

† *Институт магнетизма НАН Украины и МОН, молодежи и спорта Украины, Киев, Украина*
Igor.Gera@gmail.com

Рассмотрена актуальная проблема аналитического исследования характера локализации нелинейных стационарных волн, распространяющихся в ангармонической среде вдоль тонких плоскопараллельных слоев с отличающимися физическими свойствами. Как известно, нелинейность среды приводит к возникновению ряда новых физических явлений и, прежде всего, к пространственной локализации нелинейных волн.

Сформулирована задача исследования характера локализации нелинейных стационарных волн в модельной системе, представляющей собой среду, обладающую линейными или нелинейными свойствами при наличии потенциала в виде двух прямоугольных ям с линейными и нелинейными свойствами. Ищутся решения нелинейного уравнения Шредингера

$$\lambda\psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2} + 2\psi^3 - U_0\psi$$

в указанной модельной системе в условиях непрерывности волновой функции и ее первой производной на границах потенциальных ям и окружающей среды.

Найдены точные решения и выяснен характер локализации нелинейных стационарных волн во всех возможных комбинациях: (1) сплошной линейной среды в системе; (2) среды с нелинейными свойствами в потенциальных ямах и линейными свойствами в окружающих областях; (3) среды с линейными свойствами в потенциальных ямах и нелинейными свойствами в окружающих областях; (4) сплошной нелинейной среды в системе.

Таким образом, проведено исследование структуры и характера локализации нелинейных стационарных волн в условиях линейной и нелинейной среды в потенциальных ямах, а также их линейного и нелинейного окружения. Получены частотные зависимости амплитуд поля для всех типов возможных стационарных локализованных состояний.

Полученные результаты могут быть полезными для изучения локализованных состояний в системе с двумя нелинейными дефектами, например, в нелинейной оптике, где слоистые и модулированные среды находят применение в волоконных системах, оптических линиях задержки и т.п.

Analysis of Nonlinear Schrodinger Equation Solutions for a Linear/Nonlinear Media with Rectangular Potential Holes

V. S. Gerasimchuk*, **I. V. Gerasimchuk**†

* *National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine*
Viktor.Gera@gmail.com

† *Institute of Magnetism, NAS of Ukraine and Ministry of Education and Science, Youth and Sports of Ukraine, Kiev, Ukraine*
Igor.Gera@gmail.com

О разрешимости одной краевой задачи, возникающей в моделях пограничного слоя

А. И. Дрегля

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия
adreglea@gmail.com

При моделировании ряда процессов в химических технологиях [2]–[4] при наличии пограничного слоя важную роль играет система уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{v}{a+y}=0,$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{a+y}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Заменой

$$u=\frac{1}{a+y}\frac{\partial\psi}{\partial y},\ v=-\frac{1}{a+y}\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

где

$$\psi=fa\sqrt{u_e\nu x},\ y=a\sqrt{2}\xi\eta,\ x=\xi^2\frac{u_e a^2}{\nu},$$

система в первом приближении сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка с граничными условиями [1, 3, 4]:

$$f_{\eta\eta\eta}+R(f,\eta)f_{\eta\eta}=0, \tag{1}$$

$$f(\alpha)=a,\ f'(\alpha)=b,\ f(\beta)=c. \tag{2}$$

Пусть

А. Функция $R(f,\eta)$ определена, непрерывна и ограничена на компакте

$$D=\{f,\eta|\ \ |f|\leqslant|a|+|b|\,|\beta|+|c-a-b\beta|\,,\ \alpha\leqslant\eta\leqslant\beta\}\,,$$

Тогда краевая задача (1), (2) сводится к нелинейному интегральному уравнению, удовлетворяющему принципу неподвижной точки Шаудера. В результате доказана теорема существования решения краевой задачи (1), (2) на любом конечном отрезке $[\alpha,\beta]$ в общем случае, когда функция $R(f,\eta)$ – любая непрерывная функция, удовлетворяющая условию А.

Теорема *Пусть выполнено условие А. Тогда краевая задача (1), (2) имеет в классе $C^{(3)}_{[\alpha,\beta]}$ по крайней мере одно решение.*

Работа выполена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (мероприятие 1.2.2, проект 2012-1.2.2-12-000-1001-012), частично поддержана грантом Минобрнауки РФ, номер госрегистрации НИР: 01200804682.

Литература

1. *Сидоров Н. А.* О малых решениях нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях / Н. А. Сидоров, Р. Ю. Леонтьев, А. И. Дрегля // Матем. заметки. — 2012. — Т. 91. — С. 120–135.
2. *Дрегля А. И.* Некоторые аналитические и точные решения систем уравнений в теории моделирования полимеров / А. И. Дрегля // Сиб. журн. индустр. матем. — Новосибирск: 2008. — Т. 11. — С. 61–70.
3. *Дрегля А. I.* Краевые задачи в моделировании формования волокон аналитические и численные методы. — Saarbrucken: Lambert Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. — 110 с.
4. *Glauert M. B., Lighthill M. J.*, The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder // Proc. R. Soc. London. — 1955. — Vol. 320. — P. 188–203.

On the solvability of boundary value problems arising in the boundary layer model

A. I. Dreglea

Irkutsk State University, Irkutsk, Russia
adreglea@gmail.com

Математическая модель задачи электрохимической обработки металлов с разрывными граничными условиями

Л. М. Котляр, Н. М. Миназетдинов

Казанский федеральный университет (филиал),
Набережные Челны, Россия
kotlyar@ineka.ru, nminazetdinov@yandex.ru

Для обеспечения высокой точности копирования формы и размеров электрода-инструмента (катода) на обрабатываемой заготовке (аноде) при электрохимической обработке металлов требуется локализация процесса растворения металла в зоне, предназначенной для обработки. Одной из важных характеристик процесса является величина выхода по току η для реакций анодного растворения металла, учитывающая влияние протекающих на анодной поверхности процессов, сопутствующих растворению металла. Известно, что при обработке в растворах нитрата натрия и хлората натрия значение η при малых значениях плотности тока j_a на анодной границе практически равно нулю. После достижения j_a критического значения j_{cr} в результате анодной активации металла начинается увеличение η с ростом j_a [1]. Используя результаты экспериментов [2] введем скачкообразную функцию

$$\eta(j_a) = 0, j_a < j_{cr};\ \eta(j_a) = a_0 - a_1/j_a,\ j_a \geqslant j_{cr}, \tag{1}$$

постоянные $a_0 > 0,\ a_1 > 0$ характеризуют свойства электролита [3].

В соответствии с допущениями модели идеального процесса [1], электрическое поле в межэлектродном промежутке считается потенциальным, а потенциал u электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа. Значения потенциалов u_a, u_c на поверхностях анода и катода постоянны.

В соответствии с зависимостью (1) искомую установившуюся границу анода разделим на три участка. На первом участке происходит интенсивное растворение металла при высоких значениях j_a и η. Условие, определяющее форму анодной границы, выражается равенством [1]

$$\eta(j_a)j_a = j_0 \cos\theta,\ j_0 = \rho V_c/\varepsilon,\ j_a = \kappa \partial u/\partial n_1, \tag{2}$$

где κ – удельная электропроводность среды, ρ – плотность материала анода, ε – электрохимический эквивалент металла, θ – угол между вектором $\mathbf{V}_c$ скорости подачи катода и вектором $\mathbf{n}_1$ внешней нормали границы анода. Используя формулы (1) и (2) получим

$$\partial u/\partial n_1 = (a_1 + j_0 \cos\theta)/(a_0 \kappa). \tag{3}$$

Уменьшение j_a до j_{cr} приводит к образованию переходного участка, на котором происходит резкое снижение η от значения $\eta(j_{cr})$ до нуля при постоянном значении плотности тока, равном j_{cr}. На этом участке анодной границы выполняется условие

$$\partial u/\partial n_1 = j_{cr}/\kappa. \tag{4}$$

При наличии диэлектрических покрытий на поверхности катода или больших межэлектродных зазоров возникают необрабатываемые участки, на которых выполняется неравенство

$$j_a < j_{cr}. \tag{5}$$

Двумерная задача, связанная с определением формы границы анода сводится к нелинейной краевой задаче для аналитических функций. Граничные условия этой задачи определяются геометрией катода и условиями (3)–(5).

В работе рассмотрены решения краевой задачи при различных схемах обработки. Результаты представлены в виде графиков анодных границ.

Литература

1. *Давыдов А. Д. Козак Е.* Высокоскоростное электрохимическое формообразование. — М.: Наука, 1990.
2. *Маннапов А. Р. Житников В. П. Поречный С. С.* Полуэмпирическая модель нестационарного процесса импульсной электрохимической обработки вибрирующим электродом-инструментом в локально-одномерном приближении // Вестник УГАТУ. — Уфа, 2011. — Т. 15, № 3. — С. 60–66.
3. *Миназетдинов Н. М.* Об одной задаче электрохимической обработки металлов с учетом переменности выхода по току реакций анодного формообразования // Вестник УГАТУ. — Уфа, 2012. — Т. 16, № 5. — С. 154–159.

A mathematical model of the electrochemical machining of metals with discontinuous boundary conditions

L. M. Kotlyar, N. M. Minazetdinov

Kazan Federal University (branch office), Naberezhnye Chelny, Russia
kotlyar@ineka.ru, nminazetdinov@yandex.ru

Математическая модель диспегирования металла в электрическом разряде с житким электролитом

Л. М. Котляр, А. И. Воронкова

Казанский федеральный университет (филиал), Набережные Челны, Россия, kotlyar@ineka.ru

В последние годы успешно развивается применение ферромагнитных порошков для изготовления деталей повышенной прочности. Для получения порошков широко используется метод диспергирования металлов и сплавов электрическими разрядами с жидким электродом.

Для решения задачи отметим, что в процессе образования порошка зависимость выхода по току η от анодной плотности тока j_a идентична аналогичной зависимости $\eta(j_a)$ для электрохимической обработки металлов [2]. Исходя из этого, будем считать, что скорость снятия металла V_m с поверхности анода на единицу массы, определяется по анологии с законом Фарадея $V_m = j_a\eta\epsilon$, где $\eta = \eta(j_a)$ — выход по току, равный доле энергии затраченной на образование порошка в электрическом разряде, j_a — плотность тока, ϵ — электрохимический эквивалент металла. Будем считать, что поверхность анода перемещается с постоянной скоростью V и линейная скорость точек на поверхности анода равна

$$V_a = V\cos\theta, \tag{1}$$

где θ — угол между вектором скорости $\vec{V}$ подачи анода и единичным вектором $\vec{n}_a$ внешней нормали к поверхности анода. В этом случае общая схема процесса не изменяется со временем и процесс можно считать стационарным.

Из (1) установившееся распределение плотности тока j_a на стационарной границе анода с учётом зависимости выхода по току определяется соотношением [1]

$$j_a = \frac{\rho V}{\epsilon}\left(a + b\cos\theta\right), \tag{2}$$

где a, b — постоянные, зависящие от свойств электродов.

Рассмотрим двумерную модель процесса. На рис. 1, в плоскости $z = x+iy$, представлена область межэлектродного пространства (МЭП) ограниченная линиями симметрии A_1C и B_1D, CD — жидкая граница катода, A_1ABB_1 граница анода, A_1, B_1 — бесконечно удалённые точки. Граница анода разделена на две области: прямолинейные участки A_1A, BB_1, где $V_a = 0$ и участок AB на котором выполняется условие (2).

Будем считать, пренебрегая приэлектродными явлениями, что в МЭП существует потенциал электрического поля ψ, удовлетворяющий уравнению Лапласа [1]

$$\Delta\psi = 0 \tag{3}$$

и на границах электродов выполняется условие постоянства потенциалов $\psi_a = u_a$, $\psi_k = u_k$. В силу уравнения (3), существует функция φ, гармонически сопряжённая ψ и можно ввести комплексный потенциал $W(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ электростатического поля, являющейся аналитической функцией в области z.

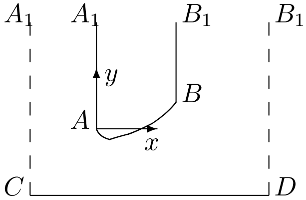


Рис. 1. Область МЭП

Рассматриваемая задача в безразмерном виде сводится к поиску границы AB анодной поверхности в следующей задаче. Функция ψ удовлетворяет уравнению (3), на границах электродов выполняются условия $\psi|_{CD} = 0$, $\psi|_{A_1ABB_1} = 1$, $\partial\psi/\partial n|_{AB} = a + cos\theta$. На линиях симметрии A_1C, B_1D — условия $\partial\psi/\partial n|_{A_1C} = 0$, $\partial\psi/\partial n|_{B_1D} = 0$.

Получено аналитическое решение задачи и построены формы границы анода для различных физических и геометрических параметров задачи.

Литература

1. *Котляр Л. М. Миназетдинов Н. М.* Определение формы анода с учётом свойств электролита в задачах электрохимической размерной обработки металлов // ПМТФ, 2003. — Т. 44, № 3. — С. 179–184.
2. *Седыкин Ф. В.* Размерная электрохимическая обработка деталей машин. — М.: Машиностроение, 1976.

Mathematical model of metal dispersion in electrical discharge with liquid electrodes

L. M. Kotlyar, A. I. Voronkova

Kazan Federal University (branch office), Naberezhnye Chelny, Russia
kotlyar@ineka.ru

Контрастная структура типа ступеньки в системе параболических уравнений

Н. Т. Левашова, А. А. Мельникова

МГУ имени М.В. Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия
natasha@npanalytica.ru, melnikova@physics.msu.ru

Рассматривается начально-краевая задача

$$\varepsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v, x, \varepsilon), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v, x, \varepsilon),$$

$$x \in (0;1), \;\; t \in (0, T], \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t, \varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0, \;\; \frac{\partial v}{\partial x}(0, t, \varepsilon) = \frac{\partial v}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0, \;\; t \in (0, T],$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u^0(x), \;\; v(x, 0, \varepsilon) = v^0(x), \;\; x \in (0;1),$$

где f и g — достаточно гладкие функции в области $(u, v, x, \varepsilon) \in I_u \times I_v \times [0;1] \times (0;\varepsilon_0]$, а I_u и I_v — некоторые промежутки изменения переменных u и v, $\varepsilon_0 > 0$.

Исследуется вопрос о существовании и асимптотике при малых ε решения с переходным слоем в окрестности некоторой внутренней точки x^* отрезка $[0;1]$, где происходит быстрый переход решения $u(x, t, \varepsilon)$, $v(x, t, \varepsilon)$ задачи (1) от одного корня вырожденной системы (к которому $u(x, t, \varepsilon)$, $v(x, t, \varepsilon)$ близко при $x < x^*$) к другому (к которому $u(x, t, \varepsilon)$, $v(x, t, \varepsilon)$ близко при $x > x^*$). Решения такого типа называются контрастными структурами типа ступеньки (КСТС). Предполагается, что в начальный фронт в виде КСТС уже сформирован. Его положение изменяется со временем и определяется функцией $x^*(t, \varepsilon)$.

Считаем, что выполнены условия:

Условие 1. Уравнение $f(u, v, x, 0) = 0$ имеет относительно u ровно три корня $u = \varphi^i(v, x) \in I_u$, $i = 1, 2, 3$, такие что $\varphi^1(v, x) < \varphi^2(v, x) < \varphi^3(v, x)$ всюду в области $(v, x) \in I_v \times [0;1]$, причем $f_u(\varphi^{1,3}(v, x), v, x, 0) > 0$, $f_u(\varphi^2(v, x), v, x, 0) < 0$.

Условие 2. Каждое из уравнений $h^i(v, x) := g(\varphi^i(v, x), v, x, 0) = 0$, $i = 1, 2, 3$ имеет единственное решение $v = v^i(x) \in I_v$, причем на всем отрезке $[0;1]$ выполнены неравенства $v^1(x) < v^3(x)$; $h^i_v(v^i(x), x) > 0$, $i = 1, 3$.

Условие 3. (Условие квазимонотонности)

$$f_v(u, v, x, 0) < 0, \;\; g_u(u, v, x, 0) < 0$$

всюду в области $(u, v, x) \in I_u \times I_v \times [0;1]$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 10-01-00319 и 12-01-00387.

Условие 4. Пусть существует единственное решение $v_0(x)$ уравнения

$$\int\limits_{v^1(x)}^{v_0} h^1(v,x)dv + \int\limits_{v_0}^{v^3(x)} h^3(v,x)dv = 0,$$

определенное на отрезке $[0;1]$, причем $v^1(x) < v_0(x) < v^3(x)$.

Если положение фронта в нулевом порядке разложения по степеням ε определяется функцией $x_0(t)$, т.е. $x^*(t,\varepsilon) = x_0(t) + O(\varepsilon)$, то $v = v_0(x_0(t))$ определяет значение v-компоненты решения в точке $x = x_0(t)$ с точностью $O(\varepsilon)$.

При выполнении условий 1–4 и дополнительного требования существования функции $x_0(t)$ построена асимптотика решения задачи (1) и доказано существование решения в виде движущегося фронта. Асимптотическое решение строится стандартным способом (см. [1]), а для его обоснования применяется асимптотический метод дифференциальных неравенств (см. [2]).

Литература

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. школа, 1990.
2. *Нефедов Н. Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 7. — С. 1142–1149.

Step type contrast structure in parabolic equations system

N. T. Levashova, A. A. Mel'nikova

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, Russia
natasha@npanalytica.ru, melnikova@physics.msu.ru

Продольные колебания нагруженной вязкоупругой нити переменной длины

В. Л. Литвинов, В. Н. Анисимов

Сызранский филиал Самарского государственного технического университета, Сызрань, Россия
vladlitvinov@rambler.ru

Рассмотрим продольные колебания и прохождение через параметрический резонанс вязкоупругой нити, один конец которой наматывается на барабан, а на втором закреплен груз. Резонанс создается за счет неравномерности подъема, при этом удлинение нити сопоставимо с длиной.

Для учета внутреннего трения пусть реология материала нити подчиняется нелинейной модели Фойхта, т.е. $\sigma = E \cdot \varepsilon^a + \lambda \cdot \varepsilon'$, где E, a, λ – реологические параметры, ε – относительное удлинение, σ – напряжение.

Уравнение колебаний имеет вид:

$$Mu''(t) + S\left(E\left(\frac{u(t)}{l(t)} - 1\right)^a + \lambda\frac{u'(t)l(t) - u(t)l'(t)}{l^2(t)}\right) = Mg,$$

где M – масса груза; $u(t)$ – расстояние от точки подвеса до груза в момент времени t; $l(t)$ – длина нерастянутой нити в момент времени t; S – площадь сечения нити.

В данном случае относительное удлинение равно:

$$\varepsilon(t) = \frac{u(t) - l(t)}{l(t)}.$$

Закон изменения длины нити $l(t)$ взаимосвязан с $u(t)$ уравнением:

$$l'(t) = \frac{v(t)l(t)}{u(t)},$$

так как нить на барабан наматывается в растянутом виде.

С учетом неравномерности подъема, будем считать, что скорость вращения барабана имеет вид: $v(t) = v_0 + Av_0 \sin\omega_0 t$, т.е. интенсивность возбуждения зависит от скорости подъема.

Задачу необходимо решить при начальных условиях:

$$u(0) = u_0; \quad u'(0) = 0; \quad l(0) = l_0.$$

Если подъем начинается из положения равновесия, то:

$$u_0 = l_0\left(1 + \left(\frac{g}{l_0\omega_0}\right)^{\frac{1}{a}}\right).$$

Введем безразмерные переменные:

$$u(t) = l_0 U(\tau);\ l(t) = l_0 L(\tau);\ v(t) = v_0 V(\tau); \tau = \omega t;$$

$$V(\tau) = 1 + A \sin \frac{\omega_0 \tau}{\omega}; \omega^2 = \frac{ES}{Ml_0}.$$

В результате получим следующую задачу:

$$\begin{cases} U''(\tau) + \alpha \dfrac{U'(\tau)}{L(\tau)} - \beta V(\tau) L(\tau) + \left(\dfrac{U(\tau)}{L(\tau)} - 1\right)^a = \gamma; \\ L'(\tau) = \theta \dfrac{V(\tau) L(\tau)}{U(\tau)}; \\ V(\tau) = 1 + A \sin W\tau, \end{cases}$$

где

$$U(0) = u_0;\ U'(0) = 0;\ L(0) = 1; alpha = \lambda \sqrt{\frac{S}{Ml_0 E}};$$

$$\theta = v_0 \sqrt{\frac{M}{ESl_0}};\ \gamma = \frac{gM}{ES}; beta = \frac{\lambda v_0}{El_0} = \theta\alpha;\ U_0 = 1 + \gamma^{\frac{1}{a}}.$$

При частоте возмущения W, близкой к единице, наблюдается прохождение через резонанс, т.е. увеличение амплитуды колебаний в течение некоторого периода времени. Исследование прохождения через резонанс было произведено численно, так как задача не допускает точного решения. При

$$\alpha = 1;\ E = 4{\cdot}10^6(\text{ н/м}^2);\ S = 10^{-3}(\text{ м}^2);\ M = 100(\text{ кг});\ l_0 = 10(\text{ м});\ A = 0,1$$

была получена зависимость максимального относительного увеличения амплитуды, т.е. $\Delta l = \max\limits_t \dfrac{(u(t) - l(t))l_0}{(u_0 - l_0)l(t)}$ в зависимости от скорости подъема v_0 и параметра вязкости λ.

Частота возмущения ω_0 подбиралась таким образом, чтобы увеличение амплитуды за время подъема было максимальным. Результаты численного решения представлены в таблице.

$\lambda \backslash v_0$	0,1	0,3	0,5	0,7	1
$2 \cdot 10^4$	1,074	1,153	1,270	1,364	1,521
$4 \cdot 10^4$	1,058	1,127	1,226	1,314	1,462
$6 \cdot 10^4$	1,047	1,11	1,196	1,272	1,402

Увеличение амплитуды колебаний с возрастанием скорости связано с тем, что амплитуда возмущений прямо пропорциональна скорости.

Литература

1. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография / В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов. — Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2009. — 131 с.: ил.

Longitudinal vibrations loaded viscoelastic threads variable length

V. L. Litvinov, V. N. Anisimov

Syzran Branch of Samara State Technical University, Syzran, Russia
vladlitvinov@rambler.ru

Основной и комбинационный резонансы в нелинейной системе двух осцилляторов

Н. А. Люлько

Институт математики имени С.Л.Соболева, Новосибирск, Россия
natlyl@mail.ru

В [1] построена гидродинамическая теория водонефтяных газосодержащих слоистых систем. Показано, что при наличии начального градиента концентрации газовой фазы и периодических внешних возмущениях в линеаризованной распределенной системе возникает параметрический резонанс, приводящий к разрушению всей системы. В данной работе рассматривается задача Коши для нелинейной системы двух осцилляторов

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\sigma_1^2\right)u=f, \tag{1}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\sigma_2^2\right)f=q\left(\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_1^2\right)u^2+\varepsilon\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_2^2\right)(usin(\omega t))\right),$$

относительно двух неизвестных вещественных функций u, f, являющаяся модельной для нелинейной системы в [1] (см. [2]). Здесь $q, \varepsilon > 0$ — малые параметры,ω — частота внешнего возмущения, $\sigma_1, \sigma_2, \omega_1, \omega_2 > 0$ — параметры модели. Невозмущенная система (1) ($\varepsilon = 0$) является обратимой, поэтому имеет в окрестности нуля бесконечное число квазипериодических решений с базисом частот σ_1, σ_2.

С другой стороны, при $q = 0$ система (1) является устойчивой, так как имеет только ограниченные (почти периодические) решения.

Цель работы — исследование характера неустойчивости начала координат у системы (1) при $\omega = 2\sigma_1$ (основной резонанс) и при $\omega = \sigma_1 + \sigma_2$ (комбинационный резонанс). Основным подходом при решении этой задачи является применение метода Крылова–Боголюбова–Митропольского [3] к системе (1) и анализ усредненной автономной системы.

Обозначим $X = \left(u, \dfrac{du}{dt}, \dfrac{d^2u}{dt^2}, \dfrac{d^u}{dt^3}\right)^T$ и запишем (1) в виде системы первого порядка $\dot{X} = AX + q(\varepsilon B(\omega t)X + F(X))$ с соответствующими матрицами $A, B(\omega t)$ и квадратичной функцией $F(X)$. Тогда с помощью замены $X = e^{At}V$ мы получим нелинейную систему с почти периодическими коэффициентами

$$\dot{V} = q(\varepsilon G(\omega t)V + \Phi(V)), \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 15 и Междисциплинарого интеграционного Проекта СОРАН № 30.

эквивалентную (1). Здесь $G(\omega t) = e^{-At} B(\omega t) e^{At}$, $\Phi(V) = e^{-At} F(e^{At} V)$. Применим к (2) метод усреднения, для чего введем замену $V = \Psi + qR_1(\Psi, t) + q^2 R_2(\Psi, t)$, где R_1, R_2- гладкие почти периодические по t функции. В случае резонансных частот для функции Ψ построены автономные системы следующего вида:

$$\dot{\Psi} = q\varepsilon C\Psi + q^2 S(\Psi^3), \tag{3}$$

где C — постоянная матрица, $S(\Psi^3)$ — форма третьей степени относительно. Доказано, что на промежутке $\left[0, \dfrac{T}{q}\right]$ $(T > 0)$ справедливо $||V - \Psi|| < K(T)q$.

Для системы (3) найдены два независимых интеграла (в случае каждого резонанса), позволяющие построить фазовый портрет этой системы при всех значениях q, ε, и определить максимальную амплитуду колебаний системы (3), а, следовательно и системы (1). Доказано, что неустойчивость системы (1) при $\omega = 2\sigma_1$ $\omega = \sigma_1 + \sigma_2$ имеет место, если $\dfrac{q}{\varepsilon} \to 0$.

Литература

1. *Белоносов В. С., Доровский В. Н., Белоносов А. С., Доровский С. В.* Гидродинамика газосодержащих слоистых систем // Успехи механики. — 2005. — Т. 3, № 2. — С. 37–70.
2. *Люлько Н. А.* Основной и комбинационный резонансы в нелинейной системе двух осцилляторов. — Новосибирск. Препринт ИМ СОРАН. — № 281, 2012. — 33 с.
3. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наукова Думка, 1971/

Main and combinational resonances in a nonlinear system of two oscillators

N. A. Lyulko

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
natlyl@mail.ru

Об отсутствии решений некоторых систем квазилинейных параболических неравенств

А. Б. Муравник

ОАО «Концерн «Созвездие», Воронеж, Россия
amuravnik@mail.ru

При $0 \leqslant u_1^{(0)} \in C(\mathbb{R}^n), 0 \leqslant u_2^{(0)} \in C(\mathbb{R}^n), g_1, g_2 \in C(-\infty, +\infty)$ в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$ рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} \geqslant \Delta u_1 + \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}(x,t,u_1,u_2)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right)^2 + d_1(x,t)\omega_1(u_1,u_2), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} \geqslant \Delta u_2 + \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}(x,t,u_1,u_2)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right)^2 + d_2(x,t)\omega_2(u_1,u_2), \qquad (2)$$

$$u_1\Big|_{t=0} = u_1^{(0)}(x),\ u_2\Big|_{t=0} = u_2^{(0)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (3)$$

Здесь $d_1(x,t), d_2(x,t)$ — такие п. в. положительные измеримые функции, что при некоторых $q_1, q_2 \in (1, +\infty)$ функции $d_1^{\frac{1}{1-q_1}}(x,t), d_2^{\frac{1}{1-q_2}}(x,t)$ локально суммируемы в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ за исключением, может быть, ограниченного множества, и следующие два неравенства выполняются в $\mathbb{R}^2$:

$$\omega_1(s_1,s_2) \geqslant \left|\int_0^{s_2} e^{\int_0^{\tau} g_2(\theta)d\theta} d\tau\right|^{q_1} e^{-\int_0^{s_1} g_1(\tau)d\tau},$$

$$\omega_2(s_1,s_2) \geqslant \left|\int_0^{s_1} e^{\int_0^{\tau} g_1(\theta)d\theta} d\tau\right|^{q_2} e^{-\int_0^{s_2} g_2(\tau)d\tau}.$$

Полагая, что $a_{i,j}(x,t,s_1,s_2) \geqslant g_i(s_i)$ на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ для любых $i = 1, 2$, $j = \overline{1, n}$, находим (в терминах функций $d_1(x,t)$ и $d_2(x,t)$) достаточные условия отсутствия классических нетривиальных решений задачи (1)–(3).

Отметим, что условия отсутствия глобальных решений нелинейных параболических систем, вообще говоря, изучались многими авторами (см., напр., [1] и имеющуюся там библиографию). В основном, однако, это относится к *полулинейным* системам, в то время как *квазилинейный* случай ранее практически не был исследован, хотя возникает в приложениях: например, рассматриваемые здесь нелинейности возникают в задачах о помехоустойчивости и о направленном росте полимеров (см., напр., [2, 3]).

Литература

1. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Труды МИАН. — 2001. — Т. 234.
2. *Kardar M., Parisi G., Zhang Y.-C.* Dynamic scaling of growing interfaces // Phys. Rev. Lett. — 1986. — Т. 56. — С. 889–892.
3. *Medina E., Hwa T., Kardar M., Zhang Y.-C.* Burgers equation with correlated noise: Renormalization group analysis and applications to directed polymers and interface growth // Phys. Rev. A. — 1989. — Т. 39. — С. 3053–3075.

On absence of solutions for systems of quasilinear parabolic inequalities

A. B. Muravnik

JSC "Concern "Sozvezdie", Voronezh, Russia
amuravnik@mail.ru

Локальная разрешимость и разрушение решений некоторых краевых задач для уравнений Бенджамена—Бона—Махони—Бюргерса и Розенау—Бюргерса

А. А. Панин, М. О. Корпусов

Физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
a-panin@yandex.ru

Рассматриваются уравнения Бенджамена—Бона—Махони—Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{xx} - u) + u_{xx} + uu_x = 0 \tag{1}$$

и Розенау–Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{xxxx} + u) - u_{xx} - uu_x = 0, \tag{2}$$

находящие своё применение в гидро- и электродинамике. Так, уравнение (1) было предложено в [1] в качестве модельного для описания длинных волн на воде. Как показано в [2], оно же возникает в теории кристаллических полупроводников. Уравнение (2) и сходные с ним появились в [3–5] для описания волн на мелкой воде и других физических явлений. Для этих уравнений мало исследован вопрос о разрушений решений (режим «blow-up»): единственными результатами на эту тему являются полученные в [6, 7]. При этом надо отметить, что результат о локальной разрешимости рассмотренных в [6, 7] задач оставался открытым.

Мы рассматриваем следующие начально-краевые задачи: задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(u_{xx} - u) + u_{xx} + uu_x = 0, \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T_0), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,l], \\ u(0,t) = 0, \quad lu_x(0,t) = u(l,t), \quad t \in [0,T_0) \end{cases} \tag{3}$$

для уравнения (1) и серия задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(u_{xxxx} + u) - u_{xx} - uu_x = 0, \quad x \in [0,l], \quad t \in [0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,l]; \quad B_j[u(x,t)] = 0, \quad j = 1,2,3,4, \end{cases} \tag{4}$$

для уравнения (2), где операторы B_j граничных условий имеют один из следующих видов:

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00479а.

$$u(0) = 0, \quad u_x(0) = 0, \quad u(l) = 0, \quad lu_{xxx}(0) + u_{xx}(0) - u_{xx}(l) = 0;$$
$$u(0) = 0, \quad lu_x(0) - u(l) = 0, \quad lu_{xxx}(0) + u_{xx}(0) = 0, \quad u_{xx}(l) = 0;$$
$$u(0) = 0, \quad u_x(0) = 0, \quad u(l) = 0, \quad lu_{xxx}(0) + 3u_{xx}(0) = 0;$$
$$u(0) = 0, \quad u_x(0) = 0, \quad u_{xx}(0) = 0, \quad l^3u_{xxx}(0) - 6u(l) = 0.$$

Идея рассмотрения всех этих задач общая. Для доказательства разрушения решения использован метод пробных функций (нелинейной ёмкости) Похожаева и Митидиери (см., напр, [8]). Так, для задачи (3) рассматривался функционал $J(t) = \int_0^l u(x,t)(l-x)dx$. Для него было получено дифференциальное неравенство, из которого следует, что для некоторых начальных условий $u_0(x)$ функционал $J(t)$ обращается в бесконечность за конечное время. Для доказательства локальной разрешимости использовано обращение обыкновенного дифференциального оператора, стоящего под знаком производной по времени, с последующим применением теоремы 1.

Теорема 1. *Пусть рассматривается абстрактная задача Коши*

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)(y), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

в банаховом пространстве B с нормой $\|.\|$, $y_0 \in B$. Пусть (нелинейный) оператор $A(t)(y)$ локально Липшиц-непрерывен равномерно по $t \geqslant 0$. Тогда существует и единственно решение, для которого или 1) $T_0 = +\infty$, или 2) $T_0 < +\infty$ и (в последнем случае)

$$\lim_{t \uparrow T_0} \|y(t)\| = +\infty,$$

а любое другое решение может быть продолжено до решения, удовлетворяющего указанному условию.

Существенно, что теорема 1 применяется к задачам (3), (4), рассматриваемым в пространстве с гладкостью, меньшей требуемой для классического решения (для этого было описано продолжение соответствующих дифференциальных операторов), что в сочетании с последовательным повышением гладкости до классического решения позволяет доказать «жёсткий blow-up»:

Теорема 2. *При условии*

$$\int\limits_0^l (l-x)u_0(x)\,dx > 0$$

решение задачи (3) существует в классическом смысле

$$u(x)(t) \in C^1([0, T_0); C^2([0, l]))$$

и разрушается за конечное время с режимом «жёсткий blow-up», т. е. $T_0 \leqslant T_1 \equiv l^3 J(0)^{-1}$ *и*

$$\lim_{t \uparrow T_0} \|u(x)(t)\|_{C([0,l])} = +\infty.$$

Для задач (4) получены результаты аналогичного характера.

Литература

1. *Benjamin T. B., Bona J. L., and Mahony J. J.*, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. Royal Soc. London, Ser. A. — 1972. — Vol. 272. — P. 47–78.
2. *Al'shin A. B., Korpusov M. O., Sveshnikov A. G.* Blow-up in nonlinear Sobolev type equations. — De Gruyter, Series: De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. — Vol. 15. — 2011.
3. *Rosenau P.* Extending hydrodynamics via the regularization of the Chapman–Enskog expansion // Phys. Rev. A. — 1989. — Vol. 40, No 12. – P.'7193–7196.
4. *Rosenau P.* A quasi-continuous description of a nonlinear transmission line // Phys. Scripta. — 1986. — Vol. 34. — P.'827–829.
5. *Rosenau P.* Dynamics of dense discrete systems // Progr. Theor. Phys. — 1988. — Vol. 79. — P. 1028–1042.
6. *Корпусов М. О.* О разрушении решений трёхмерного уравнения Розенау–Бюргерса // Теоретическая и математическая физика. — 2012. — Т. 170, № 3. — С. 342–349.
7. *Korpusov M. O.* On the blow-up of solutions of the Benjamin–Bona–Mahony–Burgers and Rosenau–Burgers equations // Nonlinear analysis. — 2012. — Vol. 75, № 4. — P. 1737–1743.
8. *Митидиери Э. Л., С. И. Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. — 2001. — Т. 234. — С. 3–383.

Local solvability and blow-up of solutions for some boundary value problems for Benjamin–Bona–Mahony–Burgers and Rosenau–Burgers equations

A. A. Panin, M. O. Korpusov

Lomonosov Moscow State University, faculty of physics, Moscow, Russia
a-panin@yandex.ru

О задаче управляемости для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка в банаховом пространстве.

Г. Г. Петросян

Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия, garik@yandex.ru

Мы рассматриваем задачу управляемости для полулинейного функционально-дифференциального включения с дробной производной в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^{\alpha}y(t) \in Ay(t) + F(t, y_t, y(t)) + Bu(t), \quad t \in [0,T] = I, \tag{1}$$

с начальным условием:

$$y(s) = \vartheta(s), \quad s \in (-\infty, 0], \tag{2}$$

где D^{α}, $0 < \alpha < 1$, — дробная производная Римана—Лиувилля, $A : D(A) \subset E \to E$ — линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At}, $F : I \times \mathcal{B} \times E \multimap E$ — мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями. Здесь $\mathcal{B}$ обозначает фазовое пространство бесконечных запаздываний и $y_t \in \mathcal{B}$ характеризует предисторию функции до момента $t \in I$, т.е. $y_t(\theta) = y(t+\theta), \quad \theta \in (-\infty, 0]$. Предпологается, что функция управления $u(\cdot) \in L^2(I, U)$, где U — банахово пространство управлений. Оператор $B : U \to E$ является ограниченым и линейным.

В докладе описываются условия, которые обеспечивают существование интегрального решения задачи (1)–(2), удовлетворяющего соотношению $y(T) = x_1$, где $x_1 \in E$ — заданная точка.

Мультиотображение F удовлетворяет следующим условиям:

$(F1)$ Мультифункция $F(\cdot, \vartheta, \varsigma) : I \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение для всех $(\vartheta, \varsigma) \in \mathcal{B} \times E$;

$(F2)$ Мультиотображение $F(t, \cdot, \cdot) : \mathcal{B} \times E \to Kv(E)$ — п.н.с. для п.в. $t \in I$;

$(F3)$ Существует функция $w \in L^p(I, E), \quad p > \frac{1}{\alpha}$, такая, что:

$$\|F(t, \vartheta, \varsigma)\| := sup\left\{\|f\|_E : f \in F(t, \vartheta, \varsigma)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant w(t)(1 + |\vartheta|_{\mathcal{B}} + \|\varsigma\|_E) \quad \text{п. в.} \quad t \in I,$$

для всех $(\vartheta, \varsigma) \in \mathcal{B} \times E$;

$(F4)$ Существует функция $\mu \in L^p(I, E)$ такая, что для любых ограниченых множеств $\Omega \subset \mathcal{B}$ и $Q \subset E$, мы имеем:

$$\chi_E(F(t, \Omega, Q)) \leqslant \mu(t)(\psi(\Omega) + \chi_E(Q)), \text{п. в.} \quad t \in I,$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 11-01-00328 и № 12-01-00392.

где χ_E — мера некомпактности Хаусдорфа в E, $\psi(\Omega) = \sup_{\theta \leqslant 0} \chi_E(\Omega(\theta))$; $\Omega(\theta) = \{q(\theta), q \in \Omega\}$.

Наконец сделаем стандартное предположение о разрешимости соответствующей линейной задачи управляемости, т.е. будем полагать, что линейный оператор управления $W : L^2(I, U) \to E$ следующего вида:

$$Wu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T e^{A(T-s)} (T-s)^{\alpha-1} Bu(s) ds,$$

имеет обратный ограниченный оператор $W^{-1} : E \to L^2(I, U)/KerW$.

Литература

1. *Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Speces, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7, Walter de Gruyter, Berlin – New-York, 2001.
2. *Obukhovskii V. V., Zecca P.* Controllability for systems gaverned by semilinear differential inclusions in a Banach space with a noncompact semigroup // Nonlinear Anal. — 2009. — Vol. 70 (9). — P. 3424–3436.

The problem of controllability for semilinear functional differential inclusions of fractional order in Banach space.

G. G. Petrosyan

Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
garik@yandex.ru

Исследование нелинейных систем динамического контроля за изменением давления

Ю. В. Покладова, Е. С. Серебрянникова

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия, pokladovau@inbox.ru, serebr_k@mail.ru

Независимо от принципа преобразования все датчики давления в той или иной степени критичны к воздействию широкого диапазона температур и повышенных уровней виброускорений. Размещение датчика давления непосредственно на двигателе принципиально обеспечивает более высокую достоверность измерения, но, как правило, сопровождается воздействием на датчики высоких температур и виброускорений. Причем в большинстве реальных случаев температура воздействия как на авиационный, так и на ракетный двигатель носит нестационарный характер. В результате датчики подвергаются воздействию нестационарной температуры, повышенных виброускорений, что приводит к дополнительной погрешности измерений, и даже к разрушению упругого чувствительного элемента датчика.

В связи с вышесказанным, возникает задача проектирования механической системы «трубопровод – датчик давления», позволяющей ослабить воздействие высоких температур и виброускорений. Датчик давления связан с камерой сгорания двигателя трубопроводом и служит для определения рабочего давления в двигателе. Задача состоит в получении уравнений, связывающих закон изменения рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию упругого элемента датчика, и предназначенных по величине деформации элемента рассчитать давление в двигателе.

В докладе рассматриваются математические модели механической системы, включающей в себя трубопровод с рабочей средой и датчик, содержащий в качестве составного элемента упругую пластину. Датчик давления расположен на боковой или торцевой стенке трубопровода.

Предлагаются одностепенные нелинейные и двухстепеные нелинейные математические модели системы в случае жесткого закрепления концов упругого элемента. Рассматриваются модели для трубопровода конечной длины. Для всех моделей с помощью методов Фурье или теории функций комплексного переменного получено разрешающее уравнение, связывающее деформацию упругого элемента и закон изменения давления на входе в трубопровод.

На основе метода Галеркина решение задач сводилось к исследованию систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Задача Коши для возникающей при этом системы обыкновенных дифференциальных уравнений решается с помощью системы Mathematica. На основе численного эксперимента проведено исследование динамики упругого элемента в зависимости от закона изменения давления в двигателе.

Литература

1. *Vel'misov P. A., Pokladova Yu. V.* Investigation of dynamics of an elastic element of a pressure sensor // Applications of Mathematics in Engineering and Economics. — Soft trade, Sofia, Bulgaria, 2006. — P. 51–57.
2. *Вельмисов П. А., Покладова Ю. В.* О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод – датчик давления» // Вестник Самарского государственного технического университета. — 2011. — № 1 (29). — С. 137–144.
3. *Вельмисов П. А., Покладова Ю. В.* О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод – датчик давления» // Proceeding of the international conference "Education, sience and economics at universities. Integration to international education area" (Poland, Plock, 20.09.10 – 25.09.10). — Plock: NOVUM, 2010. — P. 492–499.
4. *Вельмисов П. А., Покладова Ю. В.* Математическое моделирование систем измерения давления // Избранные труды международной научной конференции (Армения, Ереван, 26.09.11 – 30.09.11). — Ереван, 2012. — С. 113–123.
5. *Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Покладова Ю. В.* Математические модели механической системы «трубопровод-датчик давления» // Вестник Саратовского государственного технического университета. — 2007. — № 3. — С. 7–14.
6. *Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Покладова Ю. В.* Математическое моделирование механической системы «трубопровод-датчик давления» / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, В. Д. Горбоконенко, Ю. В. Покладова. — Ульяновск: УлГТУ, 2008. — 188 с.

Investigation of nonlinear system of dynamical control over the pressure

U. V. Pokladova, E. S. Serebryannikova

Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russia
pokladovau@inbox.ru, serebr_k@mail.ru

О явлении взрыва решений задачи Коши для уравнения Шредингера

В. Ж. Сакбаев

Московский физико-технический институт, Москва, Россия
fumi2003@mail.ru

Устанавливаются условия на оператор Шредингера, необходимые и достаточные для существования начальных данных, при которых решение задачи Коши существует лишь конечное время. Определены свойства возникновения особенностей, общие для решений линейного и нелинейного уравнений Шредингера. Исследована процедура продолжения динамического преобразования пространства начальных данных через момент возникновения особенностей, основанная на предельном перехода в методе исчезающей вязкости.

Рассматривается задача Коши для уравнения Шредингера

$$i\frac{du}{dt} = \mathbf{L}u(t) = div(G\nabla u) + \frac{i}{2}((\mathbf{a}, \nabla u) + div(\mathbf{a}u)) + Vu; \quad u(+0) = u_0; \ (1)$$

где $u_0 \in H \equiv L_2(R^d)$,, а заданный дифференциальным выражением второго порядка оператор $\mathbf{L}$ является плотно определенным замкнутым оператором в пространстве X. Коэффициенты дифференциального выражения являются измеримыми вещественнозначными функциями аргумента $x \in R^d$ в случае линейного уравнения или аргументов $(x, u) \in R^d \times \mathbf{C}$ в случае нелинейного уравнения.

В работе [2] установлено, что вырождение характеристической формы линейного дифференциального оператора $\mathbf{L}$ может привести к нетривиальности индексов дефекта оператора, и что в этом случае справедлив следующий критерий корректности задачи Коши (1)

Теорема 1. *Пусть оператор* $\mathbf{L}$ *является максимальным симметричным линейным опертром в пространстве* H *с индексами дефекта* $(n_-, n_+) = (0, m)$, $m > 0$. *Тогда 1. Оператор* $i\mathbf{L}$ *генерирует изометрическую полугруппу* $e^{it\mathbf{L}}$, $t \geqslant 0$, *а оператор* $-i\mathbf{L}^*$ *– сжимающую полугруппу* $e^{-it\mathbf{L}^*}$, $t \geqslant 0$, *преобразований пространства* H. *При этом* $H = H_0 \oplus H_1$, *где* $H_0 = \bigcap\limits_{t>0} \mathrm{Im}(e^{it\mathbf{L}})$, $H_0 = \bigcup\limits_{t>0} \mathrm{Ker}(e^{-it\mathbf{L}^*})$, *а задача Коши (1) имеет решение на промежутке* $[0, T)$, $T > 0$, *тогда и только тогда, когда* $u \in H_0(T) = \mathrm{Im}(e^{iT\mathbf{L}})$.

Для нелинейного оператора $\mathbf{L}$ с коэффициентами $G = I$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ и $V = \frac{1}{|x|^\alpha}|u|^p$, $p > 0$, $\alpha \in [0, 2)$, справедливо следующее утверждение о корректности задачи Коши (1) (см. [1]).

Теорема 2. *Если* $p \in [0, \frac{2(2-\alpha)}{d})$, *то для любого* $u_0 \in W_2^1(R^d)$ *задача Коши (9)-(10) имеет единственное* H_1*-решение глобально на промежутке* $[0, +\infty)$, *причем функция* $\|u(t)\|_{H_1}$, $t \in [0, +\infty)$, *ограничена на промежутке* $[0, +\infty)$.

Пусть $p \in (\frac{2(2-\alpha)}{d}, +\infty)$. *Тогда существует такое* $u_0 \in W_2^1(R^d)$, *что выполняются неравенства* $E(u_0) > 0$ *и* $J(u_0) > 0$. *Тогда время* $T_1 = T_1(u_0) \in (0, +\infty]$ *существования* H^1*-решения конечно и* $\lim\limits_{t \to T_1 - 0} \|u(t,\cdot)\|_{W_2^1(\Omega)} = +\infty$.

Поскольку задача Коши (1) для уравнения Шредингера проявляет свойство некорректности в случае вырожденного линейного оператора $\mathbf{L}$ или оператора $\mathbf{L}$ со сверхкритическим показателем нелинейности, то она будет рассмотрена вместе со своей регуляризацией в пространстве задач Коши – последовательностью задач Коши (2)

$$i\frac{du}{dt} = \mathbf{L}_\epsilon u(t), \quad u(+0) = u_0; \quad \epsilon \in (0,1), \tag{2}$$

где $\mathbf{L}_\epsilon u(t) = div(G\nabla u) + \frac{i}{2}((\mathbf{a}, \nabla u) + div(\mathbf{a}u)) + Vu + \epsilon \mathbf{\Delta}^2 u$, и исследуем предельное поведение решений регуляризованных задач при $\epsilon \to 0$.

Теорема 3. *Пусть* $u_0 \in W_2^1(R^d)$ *и* $T_* \in (0, +\infty)$ *– точная верхняя грань длин промежутков, на которых существует решение задачи Коши (1). Тогда для любого* $T \in (0, T_*)$ *последовательность* $\{u_\epsilon(t),\, t > 0,\}$ *решений задач (2) сходится к решению* $u(t)$, $t \in [0, T_*)$ *задачи (1) равномерно на отрезке* $[0, T]$. *Если* $T > T_*$, *то не существует бесконечно малой последовательности* $\{\epsilon_k\}$ *такой, что последовательность* $\{u_{\epsilon_k}\}$ *сходится в пространстве* $([0,T], H)$.

Литература

1. *Zhidkov P. E.* Korteweg-de Vries and nonlinear Schrodinger equations: qualitative theory // Lect. Notes. In Math. — Vol. 1756. — Springer, 2001.
2. *Сакбаев В. Ж.* , Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с вырождением и усреднение аппроксимирующих ее регуляризаций // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2012. — Vol. 43. — С. 120–134.

On the blow up phenomena in Cauchy problem for Schrodinger equation

V. Zh. Sakbaev

Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia
fumi2003@mail.ru

Об одном классе псевдомонотонных операторов, не удовлетворяющих условию эллиптичности

О. В. Солонуха

ЦЭМИ РАН, Москва, Россия

В работе исследуется существование решений существенно нелинейных функционально-дифференциальных уравнений в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей. Для исследования были использованы теория операторов монотонного типа (см., например, [1]) и теория линейных дифференциально–разностных уравнений (см. [2]).

Рассматривается уравнение, в котором дифференциально-разностный оператор является композицией существенно нелинейного p-лапласиана при $p > 2$

$$\Delta_p u(x) = -\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \partial_i \left(|\partial_i u|^{p-2} \partial_i u \right)$$

и линейного симметричного разностного оператора

$$Ru(x) = \sum_{h\in\mathcal{M}} a_h u(x+h),$$

где $a_h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество векторов с целочисленными (или соизмеримыми) координатами, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Получены достаточные условия на коэффициенты a_h, гарантирующие существование решения функционально–дифференциального уравнения

$$\Delta_p Ru(x) = f(x) \quad (x \in Q), \quad u(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q). \qquad (1)$$

При этом было показано, что оператор $\Delta_p R$ является ограниченным, псевдомонотонным и коэрцитивным. Более того, при $p = 2$ (линейная ситуация) данный оператор сохраняет эллиптичность, что является частным случаем теории, рассмотренной в [2]. Однако, благодаря нелинейности p-лапласиана ($p > 2$), оператор $\Delta_p R$ не удовлетворяет условию эллиптичности, ставшему классическим при определении псевдомонотонности оператора.

Пример. Пусть $p = 4$, $Q = (0, 2)$, $Ru(x) = u(x) + 0.9u(x + 1) + 0.9u(x - 1)$. Тогда уравнению (1) эквивалентно следующая система нелинейных дифференциальных уравнений

$$-\left(|u_1'(x) + 0.9u_2'(x)|^{p-2}(u_1'(x) + 0.9u_2'(x)\right)' = f_1(x) \quad (x \in (0,1)),$$

$$-\left(|0.9u_1'(x) + u_2'(x)|^{p-2}(0.9u_1'(x) + u_2'(x)\right) = f_2(x) \quad (x \in (0,1)),$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00524.

$$u_1(0) = 0, \quad u_1(1) = u_2(0), \quad u_2(1) = 0,$$

$$u_1'(1) + 0.9u_2'(1) = 0.9u_1'(0) + u_2'(0),$$

где $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(x+1)$. При $p = 2$ задача имеет единственное решение, соответствующий оператор эллиптичен, см. [2]. Проверим нарушение классических условий (см., например, теорему 2.8 гл.2 [1]) на паре $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\zeta = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$:

$$(|\xi_1 + 0.9\xi_2|^{p-2}(\xi_1 + 0.9\xi_2) - |\zeta_1 + 0.9\zeta_2|^{p-2}(\zeta_1 + 0.9\zeta_2))(\xi_1 - \zeta_1) +$$
$$+ (|0.9\xi_1 + \xi_2|^{p-2}(0.9\xi_1 + \xi_2) - |0.9\zeta_1 + \zeta_2|^{p-2}(0.9\zeta_1 + \zeta_2))(\xi_2 - \zeta_2) =$$
$$= (|-0.8|^2(-0.8) - |0.4|^2 0.4)(1 - 4) +$$
$$+ (|1.1|^2(-1.1) - |-0.4|^2(-0.4))(-2 + 4) = -0.806 < 0.$$

Условие эллиптичности нарушено.

Литература

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
2. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.

On the class of pseudomonotone operators that do not satisfy the elipticity condition

O. V. Solonukha

CEMI of Rus. Acad. of Sci., Moscow, Russia
solonukha@yandex.ru

Распространение субгармонических волн с нелинейным механизмом диссипации энергии

А. Н. Тюреходжаев

Казахский национальный технический университет им. К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан, tyurekhodja@mail.ru

Динамика сухого трения, представляющего нелинейный механизм диссипации энергии, проявляющееся на границе шероховатых слоистых сред или при относительном перемещении одного тела по поверхности другого представляет достаточно сложную математическую проблему уже для кулонового закона трения, когда ветви трения являются прямыми со скачком при систематическом обращении в нуль скорости относительного перемещения тела. Упомянутые ветви трения в общем случае являются скорее криволинейными и создают дальнейшие математические сложности.

Рассматривается распространение нелинейных волн в упругом стержне длины l, по боковой поверхности которого реализуется кулоново сухое трение. При приложении динамической нагрузки на торец в стержне возбуждаются прямые и обратные волны и все его сечения в соответствии с динамикой волн приходят в колебательное движение с переменной скоростью. Поскольку механизм диссипации энергии зависит от модуля и направления скорости движения сечений процесс включения его в дифференциальное уравнение движения представляет существенное затруднение, поскольку скорость сама является априори неизвестной функцией.

Характеристиками нелинейного гиперболического уравнения область зависимости решения делится на большое количество подобластей, в ряде из которых трение имеет положительный знак, в других – отрицательный, в третьих – скорость обращается в нуль. Особенностью рассматриваемого класса задач является выполнение релаксационных колебаний, сопровождающихся в определенные отрезки времени остановкой отдельных участков или всех сечений стержня. В дальнейшем такая картина многократно повторяется с остановками движения в ряде подобластей зависимости решения, которые затем вновь включаются в движение, тогда как остановки движения происходят уже на других участках. Подобные остановки выполняются в последующем в пределах каждой пары периодов колебаний стержня, вслед за которыми на время одного периода останавливается стержень целиком. Этот сложный разрывный закон влияния трения на движение, записанный в обобщенных функциях, следует включить в уравнении движения. Если знаковая функция $\chi\left(\frac{du}{dt}/\left|\frac{du}{dt}\right|\right)$, зависящая, в конечном счете от независимых координат x, t установлена, то нелинейное в силу присутствия этой функции уравнение становиться линейным и задача может быть решена с использованием какого либо стандартного линейного метода решения линейных задач, например, метода интегрального преобразования Лапласа-Карсона.

В качестве примеров деформируемых систем, для которых фрикционный контакт играет важную роль, можно указать на взаимодействие слоев в геомеханике, бурильных колонн с грунтом в нефтепромысловом-, различные подземные сооружения в строительном деле, на оползание горных пород и снежных массивов, работу композитных материалов, взаимодействие при соударении различных тел с мембранами и др. Подобные ситуации возникают в сейсмогенных процессах, стабилизаторах ракет, электротехнике, авторегулировании и т.д. В таком классе задач сила сухого трения является распределенной. Достаточно широк круг задач о взаимодействии деформируемых тел, для которых область контакта локализована или сосредоточена. Примерами могут служить панели, соединенные внахлест в самолетостроении, ленточные и пластинчатые конвейеры на роликоопорах, система вал – втулка, шарнирные соединения в робототехнике и др.

Такого рода задачи сводятся к рассмотрению нелинейного дифференциального уравнения гиперболического типа, описывающего нелинейный волновой процесс, например, как указано выше, в стержне при наличии сухого трения по боковой поверхности:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \chi\left(\partial u/\partial t/ \left|\partial u/\partial t\right| \right) q,$$

где u – смещение, $a = (E/\rho)^{1/2}$ – скорость упругой волны, ρ – плотность материала; знак скорости $\chi = sign(\frac{du}{\partial t})$, если скорость не равна нулю и $\chi \in [-1; 1]$, там, где движение происходит с остановками.

Distribution of subharmonic waves with the nonlinear mechanism of dissipation of energy

A. N. Tyurekhodjaev

Kazakh National Technical University named after K.I. Satpaev,
Almaty, Republic of Kazakhstan,
tyurekhodja@mail.ru

Начально-краевые задачи для уравнения Захарова–Кузнецова на плоскости

А. В. Фаминский, Е. С. Байкова

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
afaminskii@sci.pfu.edu.ru, baykova82@inbox.ru

Уравнение Захарова–Кузнецова на плоскости записывается в виде

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x = 0. \tag{1}$$

Оно было выведено для описания ионно-акустических волновых процессов в плазме, помещенной в магнитное поле. В дальнейшем это уравнение стало рассматриваться как модельное для нелинейных волн в средах с дисперсией, распространяющихся вдоль одного выделенного направления (x) и испытывающих деформации в трансверсальном направлении (y).

Ранее граничные задачи для этого уравнения, как правило, изучались в областях, являющихся прямым произведением некоторого интервала (ограниченного или неограниченного) по переменной x и всей числовой прямой по переменной y (см, например, [1, 2]). Однако, с физической точки зрения представляется даже более естественным рассматривать области, в которых переменная y изменяется на ограниченном интервале. Оказалось, что такие задачи более трудны для изучения и результаты о разрешимости и корректности для них (особенно, глобальные по времени) практически отсутствуют.

В настоящей работе рассматриваются начально-краевые задачи в слое $\Pi_T = (0,T) \times \Sigma$, где $\Sigma = \bigl\{(x,y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < L\bigr\}$ – горизонтальная полоса заданной ширины L. Ставятся начальной условие

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in \Sigma, \tag{2}$$

и один из четырех типов краевых условий для $(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &a)\ u(t,x,0) = u(t,x,L) = 0,\\ &b)\ u_y(t,x,0) = u_y(t,x,L) = 0,\\ &c)\ u(t,x,0) = u_y(t,x,L) = 0,\\ &d)\ u\text{– } L\text{-периодическая функция по переменной } y. \end{aligned} \tag{3}$$

Для каждого из этих четырех случаев далее используется термин «задача (1)–(3)».

Основными результатами работы являются теоремы существования и единственности глобальных слабых решений ($T > 0$ – произвольно).

Для любого $\alpha \geqslant 0$ введем функциональные пространства

$$L_2^\alpha = H^{0,\alpha} = \{\varphi \in L_2(\Sigma) : (1 + x_+)^\alpha \varphi \in L_2(\Sigma)\},$$

$$H^{1,\alpha} = \{\varphi \in H^1(\Sigma) : \varphi, \varphi_x, \varphi_y \in L_2^\alpha\}$$

с естественными нормами (здесь $x_+ = \max(x, 0)$).

Решения рассматриваемых задач строятся в пространствах $X^{k,\alpha}(\Pi_T)$, $k = 0$или1, состоящих из функций $u(t, x, y)$ таких, что

$$u \in C_w([0,T]; H^{k,\alpha}), \qquad \sup_{x_0\in\mathbb{R}} \int_0^T \int_{x_0}^{x_0+1} \int_0^L |D^{k+1}u|^2 \, dydxdt < \infty$$

и если $\alpha > 0$, то дополнительно

$$(1+x)^{\alpha-1/2}|D^{k+1}u| \in L_2\big((0,T)\times(0,+\infty)\times(0,L)\big),$$

где

$$|D^k\varphi| = \Big(\sum_{k_1+k_2=k} (\partial_x^{k_1}\partial_y^{k_2}\varphi)^2\Big)^{1/2}.$$

Теорема 1. *Пусть $u_0 \in L_2^\alpha$ для некоторго $\alpha \geqslant 0$. Тогда существует слабое решение любой из задач (1)–(3) из пространства $X^{0,\alpha}(\Pi_T)$.*

Теорема 2. *Пусть $u_0 \in H^{1,\alpha}$ для некоторго $\alpha \geqslant 0$,*

$$\begin{aligned} u_0|_{y=0} = u_0|_{y=L} = 0 \quad &\text{в случае } a,\\ u_0|_{y=0} = 0 \quad &\text{в случае } c,\\ u_0|_{y=0} = u_0|_{y=L} \quad &\text{в случае } d. \end{aligned}$$

Тогда существует слабое решение любой из задач (1)–(3) из пространства $X^{1,\alpha}(\Pi_T)$. Если $\alpha \geqslant 1/2$, то решение единственно в данном классе.

Литература

1. *Faminskii A. V.* Well-posed initial-boundary value problems for the Zakharov–Kuznetsov equation // Electronic J. Differential Equ. — 2008. — № 127. — P. 1–23.
2. *Faminskii A. V.* Weak solutions to ininial-boundary-value problems for quasilinear evolution equations of an odd order // Adv. Differential Equ. — 2012. — Vol. 17. — P. 421–470.

Initial-boundary value problems for Zakharov–Kuznetsov equation on the plane

A. V. Faminskii, E. S. Baykova

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
afaminskii@sci.pfu.edu.ru, baykova82@inbox.ru

Об алгебро-геометрических основаниях теории m-гессиановских уравнений

Н. В. Филимоненкова

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Россия
nf33@yandex.ru

Предметом рассмотрения является теория разрешимости задачи Дирихле для одного из типичных представителей полностью нелинейных уравнений в частных производных – m-гессиановского уравнения:

$$tr_m u_{xx} = f^m \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

где $tr_m u_{xx}$ – это сумма главных миноров порядка m матрицы u_{xx}. Предполагается, что $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$, $1 \leqslant m \leqslant n$, Ω – область со строго $(m-1)$-выпуклой границей.

Класс m-гессиановских уравнений включает в себя при $m = 1$ уравнение Пуассона, при $m = n$ — уравнение Монжа–Ампера. К настоящему времени проведено исследование классической и слабой разрешимости задачи Дирихле для m-гессиановских уравнений [1].

Изучение m-гессиановских уравнений демонстрирует на более или менее простом примере основные закономерности, присущие нетотально эллиптическим нелинейным уравнениям. Вопрос о разрешимости нетотально эллиптического уравнения обычно ставят в специальном функциональном конусе в пространстве C^2 – так называемый конус допустимых функций. В ходе исследования стало ясно, что специфика нелинейной теории кроется именно в алгебраических и геометрических свойствах конусов допустимых функций и что в настоящий момент эта алгебро-геометрические основания недостаточно разработаны в математической литературе и еще в меньшей степени доступны для широкого круга специалистов. Базой для изучения конусов допустимых функций является теория а-гиперболических многочленов, созданная Л.Гордингом [2] в 1959 году и востребованная лишь в 80-х, а также работы Н.М.Ивочкиной, например, [3].

В настоящее время проводится систематизация алгебраических и геометрических особенностей функциональных конусов разрешимости m-гессиановских уравнений. Сформулированы такие базовые определения, как: понятия m-допустимой функции, m-субфункции, m-суперфункции, m-выпуклой функции, m-выпуклой поверхности, m-кривизны. Установлена связь между m-допустимыми функциями и m-выпуклыми гиперповерхностями: строго $(m-1)$-выпуклая гиперповерхность является поверхностью уровня некоторой m-допустимой функции и, наоборот, поверхность уровня m-допустимой функции представляет собой строго $(m-1)$-выпуклую гиперповерхность. Доказан аналог теоремы Сарда для m-допустимых функций: мера множества

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-31467, и Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 14.B37.21.1125.

критических точек такой функции равна нулю. Эти и другие результаты, запланированные к докладу, частично опубликованы в статье [4].

Литература

1. *Филимоненкова Н. В.* О классической разрешимости невырожденной задачи Дирихле для m-гессиановских уравнений // Проблемы мат. анализа. — 2011. — № 60. — С. 89–111.
2. *Garding L.* An inequality for hyperbolic polynomials // J. Math. Mech. — 1959. — № 8. — C. 957–965.
3. *Ивочкина Н. М.* Описание конусов устойчивости, порождаемых дифференциальными операторами типа Монжа-Ампера // Мат. сборник. — 1983. — Т. 122 (164), № 2 (10). — С. 265–275.
4. *Filimonenkova N. V., Ivochkina N. M.* On the backgrounds of the theory of m-Hessian equations // Communications on Pure and Applied Analysis. — 2013. — Vol. 12, № 4. — P. 1687–1703.

On the algebro-geometric backgrounds of the theory of m-Hessian equations

N. V. Filimonenkova

Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint-Petersburg, Russia
nf33@yandex.ru

Нормальная параболическая система, соответствующая 3-х мерной системе уравнений Гельмгольца

А. В. Фурсиков

Московский государственный университет, Москва, Россия
fursikov@gmail.com

Система полулинейных параболических уравнений относительно векторного поля v называется нормальной параболической системой, если её нелинейный член $B(v)$ коллинеарен вектору v при каждом v. Так как энергетическое неравнество следует из условия $B(v) \perp v$, то нормальная параболическая система не удовлетворяет энергетическому неравенству в наибольшей степени.

Для трехмерной системе уравнений Гельмгольца, описывающего вихрь поля скорости вязкой несжимаемой жидкости, мы выводим соответвтвующее ей нормальную параболическую систему, чей нелинейный член $B(v)$ является ортогональной проекцией нелинейного члена уравнений Гельмгольца на луч, порожденный v. Оказывается, что существует явная формула для решений этой нормаоьной параболической системы, позволяющая описать её динамическую структуру, т.е. разбить его фазовое пространство на множество взрывов (множество начальных условий, для которых решение взрывается за конечное время), множество устойчивости (когда решение экспоненциально убывает с заданной скоростью, если время $t \to \infty$) и множество роста (когда решение растет на бесконечности), а также дать аналитическое описание этих множеств.

Normal Parabolic System corresponding to 3d Helmholtz system

A. V. Fursikov

Moscow State University, Moscow, Russia
fursikov@gmail.com

Нелинейные уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова

С. В. Шапошников

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
starticle@mail.ru

В настоящей работе исследуется разрешимость следующей задачи Коши:

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x_i x_j}(a^{ij}(x,t,\mu)\mu_t) - \partial_{x_i}(b^i(x,t,\mu)\mu_t), \quad \mu_0 = \nu, \tag{1}$$

где ν — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$. Под решением понимается поток $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ вероятностных мер на $\mathbb{R}^d$, для которого выполняется равенство $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_t - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\nu = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} L_\mu \varphi d\mu_s ds \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, где $L_\mu\varphi = a^{ij}(x,t,\mu)\partial_{x_i x_j}\varphi + b^i(x,t,\mu)\partial_{x_i}\varphi$.

Пусть τ_0 — положительное число и V — неотрицательная функция. Для всяких $\alpha \in C^+([0,\tau_0])$(неотрицательные непрерывные функции) и $\tau \in (0,\tau_0]$ через $M_{\tau,\alpha}(V)$ обозначим множество *неотрицательных* мер μ из $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d\times[0,\tau])$, заданных потоком вероятностных мер $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ и таких, что для всех $t\in[0,\tau]$ выполняется неравенство $\int_{\mathbb{R}^d} V(x)\,d\mu_t \leqslant \alpha(t)$. Сформулируем условия на коэффициенты.

(H1) Заданы функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, для которой $V(x) > 0$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty$, отображения Λ_1 и Λ_2 пространства $C^+([0,\tau_0])$ в $C^+([0,\tau_0])$ такие, что для всяких $\tau\in(0,\tau_0]$, $\alpha\in C^+([0,\tau_0])$, μ из $M_{\tau,\alpha} = M_{\tau,\alpha}(V)$ и всех $(x,t)\in\mathbb{R}^d\times[0,\tau]$ выполняется неравенство

$$L_\mu V(x,t) \leqslant \Lambda_1[\alpha](t) + \Lambda_2[\alpha](t)V(x).$$

Будем говорить, что меры $\mu^n = (\mu^n_t)_{t\in[0,\tau]}$ из множества $M_{\tau,\alpha}$ сходятся V-слабо к мере $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ из $M_{\tau,\alpha}$, если для всех $t\in[0,\tau]$ имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\int F(x)d\mu^n_t = \int F(x)d\mu_t$ для всякой непрерывной функции F такой, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} F(x)/V(x) = 0$.

(H2) Для всяких $\tau\in(0,\tau_0]$, $\alpha\in C^+([0,\tau_0])$, $\sigma\in M_{\tau,\alpha}$ и $x\in\mathbb{R}^d$ отображения $t\mapsto a^{ij}(x,t,\sigma)$ и $t\mapsto b^i(x,t,\sigma)$ измеримы по Борелю на $[0,\tau]$ и для всякого замкнутого шара $U\subset\mathbb{R}^d$ отображения $x\mapsto b^i(x,t,\sigma)$ и $x\mapsto a^{ij}(x,t,\sigma)$ равномерно по $\sigma\in M_{\tau,\alpha}$ и $t\in[0,\tau]$ ограничены

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 11-01-00348, № 12-01-33009 и гранта Президента РФ..

на U и равностепенно по $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ и $t \in [0,\tau]$ непрерывны на U. Кроме того, если последовательность $\mu^n \in M_{\tau,\alpha}$ сходится V-слабо к $\mu \in M_{\tau,\alpha}$, то для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,\tau]$ выполняются равенства $\lim\limits_{n\to\infty} a^{ij}(x,t,\mu^n) = a^{ij}(x,t,\mu)$, $\lim\limits_{n\to\infty} b^i(x,t,\mu^n) = b^i(x,t,\mu)$.

(H3) Для всяких $\tau \in (0,\tau_0]$, $\alpha \in C^+([0,\tau_0])$ и $\sigma \in M_{\tau,\alpha}$ матрица $A(x,t,\sigma) = (a^{ij}(x,t,\sigma))_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ является симметричной и неотрицательно определенной.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (H1)–(H3) *и вероятностная мера ν такова, что $V \in L^1(\nu)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Существует $\tau \in (0,\tau_0]$ такое, что задача Коши* (1) *имеет решение на отрезке* $[0,\tau]$.

(ii) *Если отображения Λ_1 и Λ_2 из условия* (H1) *являются константами, то задача Коши* (1) *имеет решение на всем отрезке* $[0,\tau_0]$.

(iii) *Если $\Lambda_1[\alpha] = 0$ и $\Lambda_2[\alpha](t) = G(\alpha(t))$, где G – строго возрастающая непрерывная положительная функция на $[0,+\infty)$, то задача Коши* (1) *имеет решение на всяком отрезке $[0,\tau]$, где $\tau \in (0,\tau_0]$, $\tau < T$ и $T = \int_{u_0}^{+\infty} \frac{1}{uG(u)}\,du$, $u_0 = \int_{\mathbb{R}^d} V(x)\,d\nu$.*

(iv) *Если $\Lambda_1[\alpha](t) = G(\alpha(t))$ и $\Lambda_2[\alpha] = 0$, где G – строго возрастающая непрерывная положительная функция на $[0,+\infty)$, то задача Коши* (1) *имеет решение на всяком отрезке $[0,\tau]$, где $\tau \in (0,\tau_0]$, $\tau < T$ и $T = \int_{u_0}^{+\infty} \frac{1}{G(u)}\,du$, $u_0 = \int_{\mathbb{R}^d} V(x)\,d\nu$. Кроме того, во всех пунктах решение задается потоком вероятностных мер $(\mu_t)_{t\in[0,\tau]}$ и выполняется неравенство $\sup\limits_{t\in[0,\tau]} \int_{\mathbb{R}^d} V(x)d\mu_t < \infty$.*

Данные результаты получены в работе [1].

Литература

1. *Манита О. А., Шапошников С. В.* Нелинейные параболические уравнения для мер // Алгебра и Анализ. — 2013. — Т. 25, № 1. — С. 64–93.

Nonlinear Fokker-Planck-Kolmogorov equations

S. V. Shaposhnikov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
starticle@mail.ru

Секция 4. Общая топология и ее приложения

Universal frames

T. Dube, S. D. Iliadis, I. Naidoo, J. van Mill

For a class of frames we define the notion of a universal element and prove that in the class of all frames of weight less than or equal to a fixed infinite cardinal number there are such elements.

New findings in the theory of cascade search for singularities of mappings

T. N. Fomenko

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
tn-fomenko@yandex.ru

The subject matter of the talk concerns the search for singularities of (a finite collections of) mappings between metric spaces such as zeros of nonnegative real functionals, common fixed points, coincidence points, common roots etc.

The cascade search methods were proposed and studied in [1] and in other author's papers. A multicascade on a metric space X is a multivalued discrete dynamic system on X, that is a set-valued action on X of the semigroup $(\mathbb{Z}_{\geqslant 0}, +)$. The action of $1 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ is a set-valued mapping called a generator of the multicascade. A non-negative set-valued real functional φ is called (α, β)-*search* on X, $0 < \beta < \alpha$, if $\forall x \in X$, $\exists x' \in X$ such that $\rho(x, x') \leqslant \frac{\varphi_*(x)}{\alpha}, \varphi_*(x') \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \cdot \varphi_*(x)$. Here $\varphi_*(x)$ stands for $\inf\{y | y \in \varphi(x)\}$.

With the help of a given (α, β)-search functional φ, the cascade search principle [1] enables one to construct so called *search multicascade* on X with the nonempty limit set $Nil(\varphi) = \{x \in X | 0 \in \varphi(x)\}$. Essential generalizations of several known results were obtained as consequences of that principle. The stability problems were also investigated [2, 3].

In this talk we present the following new developments of the cascade search principle and some their applications to the problems of existence and approximation of the mentioned above singularities of mappings between metric spaces.

1) We consider the more wide class of functionals than (α, β)-search ones. We call a non-negative set-valued real functional *generally* (α, β)-*search* on X, $0 < \beta < \alpha$, if for every pair $(x, d) \in Graph(\varphi)$, $x \in X$, there exists a pair $(x', d') \in Graph(\varphi)$, such that $\rho(x, x') \leqslant \frac{d}{\alpha}, d' \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \cdot d$. One of the new results is a generalized cascade search principle which implies generalizations of our previous results concerning the theory of coincidences, common fixed points and common roots of n given set-valued mappings between metric spaces.

2) We consider local versions of the cascade search methods mentioned above, which allow one to realize the cascade search locally, that is within a given neighbourhood of the starting point. Also, we propose some new iteration schemes of the cascade search for coincidences of a finite collection of mappings and consider their local versions [4]. Here we also obtain generalizations of some known results.

3) We propose some further extension of the class of functionals under consideration. Together with S.R.Gajnullova [5], we introduce so called functionals subjected to a convergent series. That class of functionals is much wider than the classes of (generally) (α, β)-search functionals mentioned above. Nevertheless, that class of functionals yields similar

cascade search principle and similar applications concerning the search for singularities of (a finite collection of) mappings between metric spaces.

Some examples and applications of the new results mentioned above to the theory of coincidences of a finite collection of set-valued mappings between metric spaces will be presented as well.

References

1. *Fomenko T. N.* Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of n one-valued or multi-valued mappings // Topology and its Applications. — 2010. — Vol. 157. — P. 760–773.
2. *Fomenko T. N.* Stability of cascade search // Izvestiya:Mathematics. — 2010. — Vol. 74, No 5. — P. 1051–1068.
3. *Fomenko T. N.* Cascade Search: Stability of Reachable Limit Points // Moscow University Mathematical Bulletin. — 2010. — Vol. 65, No 5. — P. 179–185.
4. *Fomenko T. N.* Cascade Search for Preimages and Coincidences: Global and Local Versions // Mathematical Notes. — 2013. — Vol. 93, No 1. — P. 3–17.
5. *Gajnullova S. R., Fomenko T. N.* Functionals subjected to convergent series and cascade search for singularities of mappings // Matematicheskie Zametki (Submitted).

Homogeneous and h-homogeneous spaces

S. Medvedev

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia
medv@math.susu.ac.ru

The relations between zero-dimensional homogeneous spaces and h-homogeneous ones are studied. We shall describe some cases when the product $X \times Y$ is an h-homogeneous space if X is h-homogeneous and Y is homogeneous. Theorems 1 and 2 strengthen the results of Motorov and Medini (see [1]). We shall show that a zero-dimensional homogeneous non-pseudocompact space is not incompressible. Theorem 3 generalizes a one remark of van Douwen [2].

A *clopen* set is a set which is both closed and open. A space X is called *zero-dimensional* if X is a non-empty T_1-space and has a base consisting of clopen sets. In particular, every zero-dimensional space is a Tychonoff space. A space X is called *h-homogeneous* if every non-empty clopen subset of X is homeomorphic to X. Note that we do not assume that an h-homogeneous space is zero-dimensional.

We say that a space X is *strongly k-divisible* if $X \approx D_k \times X$, where D_k is the discrete space of cardinality k.

For all undefined terms and notation see [3].

Theorem 1. *Let a strongly k-divisible space X has a π-base consisting of clopen subsets that are homeomorphic to X, where $k \geqslant \omega$. Let Y be a homogeneous paracompact zero-dimensional space with the Lindelöf number $l(Y) \leqslant k$. Then $X \times Y$ is an h-homogeneous space.*

Theorem 2. *Let X be an h-homogeneous disconnected pseudocompact space and Y be a homogeneous compact space. Then $X \times Y$ is an h-homogeneous space.*

A space is called *incompressible* if it is not homeomorphic to any proper subspace.

Theorem 3. *Let a and b be two different points in a zero-dimensional homogeneous non-pseudocompact space X satisfying the first axiom of countability. Then there is a homeomorphism $f : X \to X \setminus \{a\}$ with $f(a) = b$.*

Theorem 4. *Let X be a zero-dimensional homogeneous non-pseudo-compact space satisfying the first axiom of countability. Suppose that a sequence $\{a_i\}$ consists of different points and converges to a point a and a sequence $\{b_i\}$ consists of different points and converges to a point b. If the sets $S(a) = \{a\} \cup \{a_i : i \in \omega\}$ and $S(b) = \{b\} \cup \{b_i : i \in \omega\}$ are disjoint, then there is a homeomorphism $f : X \to X \setminus S(a)$ such that $f(a) = b$ and $f(a_i) = b_i$ for each $i \in \omega$.*

It is interesting to compare Theorem 4 with the following theorem.

Theorem 5. *Let X be a metric h-homogeneous non-compact space with* $\mathrm{Ind}X = 0$. *Let F, G be nowhere dense closed subsets of X such that $F \cap G = \varnothing$ and F is homeomorphic to G. Then there is a homeomorphism $f : X \to X \setminus F$ such that $f(F) = G$.*

References

1. *Medini A.* Products and h-homogeneity // Topology Appl. — 2011. — Vol. 158, No 18. — P. 2520–2527.
2. *van Douwen E. K.* A compact space with a measure that knows which sets are homeomorphic // Adv. in Math. — 1984. — Vol. 52, No 1. — P. 1–33.
3. *Engelking R.* General topology. — Warszawa: PWN, 1977.

К теореме Баума–Браудера

П. М. Ахметьев*, **О. Д. Фролкина**†

* *ИЗМИРАН, Троицк, Москва, Россия*
pmakhmet@izmiran.ru

† *МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия*
odfrolki@mail.ru

В 1965 г. П. Баум и У. Браудер получили результаты о структуре колец когомологий факторов классических групп Ли и в качестве приложения разработали технику изучения векторных полей на вещественных проективных пространствах. В частности, они доказали, что в ограничении касательного пространства $T\mathbb{R}P^{15}$ на $\mathbb{R}P^{10}$ не существует 9 линейно независимых векторных полей [1, Thm. (9.5)]. Следовательно, по лемме Б. Сандерсона [1, Lemma (9.7)], проективное пространство $\mathbb{R}P^{10}$ не может быть погружено в $\mathbb{R}^{15}$ [1, Corollary (9.9)].

В докладе будет намечено новое доказательство этой теоремы о непогружаемости, основанное на использовании сингулярностного подхода У. Кошорке [2].

Литература

1. *Baum P. F., Browder W.* The cohomology of quotients of classical groups // Topology. — 1965. — 3. — P. 305–336.
2. *Koschorke U.* Vector Fields and Other Vector Bundle Morphisms — A Singularity Approach. Lecture Notes in Math. 847. — Berlin: Springer, 1981.
3. *Akhmet'ev P. M., Frolkina O. D.* On non-immersibility of $\mathbb{R}P^{10}$ to $\mathbb{R}^{15}$. — To be published in: Topol. Appl., 2013.

On the Baum–Browder theorem

P. M. Akhmet'ev*, **O. D. Frolkina**†

* *IZMIRAN, Troitsk, Moscow, Russia*
pmakhmet@izmiran.ru

† *M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
odfrolki@mail.ru

Работа обоих авторов поддержана РФФИ, проект N 11–01–00822.

Обобщение равномерной непрерывности функций в топологической алгебре

Д. Н. Булгаков

Московский городской психолого-педагогический университет, Москва, Россия, dnbulgakov@mail.ru

При изучении тополого-алгебраических систем (т.-а.с.), обобщающих топологические группы (полутопологические группы, паратопологические и семитопологические группы, топологические моноиды с сокращением, топологические лупы), возникает вопрос: «Какие наиболее общие свойства присущи только топологическим группам и отличают топологические группы от их обобщений?»

Л.С. Понтрягин доказал полную регулярность топологических групп. Однако все топологические группы обладают более сильным, чем $T_{3\frac{1}{2}}$ тополого-алгебраическим свойством — сильно мультипликативной полной регулярностью T_{m^*}, которое формулируется следующим образом [1].

Рассматривается отделимая топологическая группа G с базой Σ_e окрестностей её единицы e.

Определение 1. Пусть $U \in \Sigma_e$ и $f : G \to [0,1]$ — непрерывная функция, для которой $fe = 0,\ fU' = 1$ (U' — дополнение U в G). Семейство $\mathcal{F} = \{F_r = f^{-1}[0,r) | \forall\, r \in D\}$, где D — всюду плотное подмножество в $(0,1]$, называется базисом функции f. $\mathcal{F}$ называется m^*-базисом, если для произвольных $r, s \in D$ при $r < s$ существует $T = T(r,s) \in \Sigma_e$, для которой $T \cdot F_r \cap T \cdot F'_s = \varnothing$.

Определение 2. Пусть A – тополого-алгебраическая система с бинарной операцией $\cdot$, имеющей единицу e. Т.-а.с. A называется сильно мультипликативно вполне регулярной (T_{m^*}), если для любой окрестности e U существует непрерывная функция $f : A \to [0,1]$ с m^*-базисом, для которой $fe = 0,\ fU' = 1$.

Очевидно, что сильно мультипликативная полная регулярность T_{m^*} в случае т.-а.систем является алгебраическим усилением аксиомы полной регулярности $T_{3\frac{1}{2}}$, достигаемым наложением алгебраического условия на базис непрерывной функции f.

Теорема 1. *Любая отделимая топологическая группа сильно мультипликативно вполне регулярна.*

Оказывается, что для топологических групп класс непрерывных функций, обладающих m^*-базисами, совпадает с классом равномерно непрерывных функций.

Теорема 2. *Пусть G – отделимая топологическая группа. Непрерывная функция $f : G \to [0,1]$, $fe = 0,\ fU' = 1$ для некоторой $U \in \Sigma_e$ имеет m^*-базис тогда и только тогда, когда f равномерно непрерывна относительно правой равномерности топологической группы G.*

Т.-а. системы, обобщающие топологические группы, могут не иметь равномерностей, порождаемых их топологией и алгеброй, вследствие как возможной не полной регулярности их топологий, так и слабой взаимосвязи их топологической и алгебраической структур. Например, существуют топологические коммутативные лупы, определенные на числовой прямой с ее естественной топологией, у которых нет равномерностей, порожденных их алгебраической структурой. Для таких т.-а.с. непрерывные функции, обладающие m^*-базисами, являются естественным обобщением равномерно непрерывных функций. Наложение на эти т.-а.с. требования сильно мультипликативной полной регулярности усиливает взаимосвязь их топологических и алгебраических структур и приближает их свойства к свойствам топологических групп [2]. Иллюстрацией этого является

Теорема 3 (Метризационная теорема для ассоциативных обобщений топологических групп). *Полутопологические, квазитопологические, паратопологические группы и топологические коммутативные моноиды с сокращением метризуемы левоинвариантной метрикой тогда и только тогда, когда они сильно мультипликативно вполне регулярны и удовлетворяют первой аксиоме счётности.*

Литература

1. *Булгаков Д. Н., Пиньон Х. Д., Сессу П.*, Мультипликативная полная регулярность тополого-алгебраических систем // Вестник РУДН, сер. Математика. — 1995. — № 2(1). — С. 10–22.
2. *Булгаков Д. Н., Пиньон Х. Д., Сессу П.* Квазинормы и нормы на тополого-алгебраических системах // Вестник РУДН, сер. Математика. — 1996. — № 3(2). — С. 21–29.

The generalization of uniformly continuous functions in topological algebra

D. N. Bulgakov

Moscow State University of Psychology & Education, Moscow, Russia
dnbulgakov@mail.ru

О бинарных G-пространствах

П. С. Геворкян

Академия труда и социальных отношений,
Московский энергетический институт, Москва, Россия
pgev@yandex.ru

Унарные операции непустого множества X составляют полугруппу относительно композиции, а все обратимые унарные операции составляют группу. Если же X — топологическое пространство, то это есть группа всех гомеоморфизмов пространства X.

В алгебре развиты теории бинарных, тернарных и n-арных операций данного множества X.

Рассмотрим множество всех бинарных операций непустого множества X. Здесь важно правильно определить произведение двух бинарных операций.

Пусть $f, \varphi : X^2 \to X$. Операция $f * \varphi$ определяется формулой

$$(f * \varphi)(x_1, x_2) = f(x_1, \varphi(x_1, x_2)), \tag{1}$$

$x_1, x_2 \in X$.

Относительного этой операции множество всех бинарных операций превращается в полугруппу с единицей $e(x_1, x_2) = x_2$, а множество всех обратимых бинарных операций — в группу.

Естественность операции (1) и важность последней группы объясняется, в частности, бинарной теоремой Кэли, которая утверждает, что каждый моноид (полугруппа с единицей) имеет бинарное представление, удовлетворяющее сверхтождествам

$$X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), X(x, z)),$$

$$X(X(x, y), X(u, v)) = X(X(x, u), X(y, v)).$$

В случае топологического пространства X естественно рассматривать множество всех непрерывных бинарных операций $f : X^2 \to X$ пространства X. Это множество обозначим через $C_2(X)$, а подмножество всех обратимых элементов — через $C_2^*(X)$.

Итак, $C_2^*(X)$ — группа всех обратимых бинарных операций топологического пространства X.

Заметим, что каждая бинарная операция $f \in C_2(X)$ для произвольного $a \in X$ порождает непрерывное отображение $f_a : X \to X$ формулой

$$f_a(x) = f(a, x), \tag{2}$$

где $x \in X$.

Обратимые бинарные операции характеризуются следующей теоремой.

Теорема 1. *Непрерывная бинарная операция $f : X^2 \to X$ обратима тогда и только тогда, когда для произвольного $a \in X$ отображение $f_a : X \to X$ является гомеоморфизмом.*

Теперь, действуя традиционно, можно определить понятие бинарного G-пространства.

Пусть X — топологическое пространство, а G — топологическая группа.

Определение 1. Непрерывное отображение $\alpha : G \times X^2 \to X$ называется *бинарным действием* топологической группы G на пространстве X, если выполняются условия

$$gh(x_1, x_2) = g(x_1, h(x_1, x_2)),$$

$$e(x_1, x_2) = x_2,$$

$g, h \in G$, $x_1, x_2 \in X$ и $g(x_1, x_2) = \alpha(g, x_1, x_2)$.

Пространство X с фиксированным бинарным действием группы G или тройку (G, X, α) назовем *бинарным G-пространством.*

Пример 1. Непрерывное отображение $\alpha : G \times G^2 \to G$, заданное формулой

$$\alpha(g, g_1, g_2) = g_1^{-1} g g_1 g_2,$$

является бинарным действием топологической группе G на себя.

Пример 2. Пусть $GL(n, \mathbf{R})$ — общая линейная группа n-го порядка. Определим непрерывное отображение $\alpha : GL(n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ формулой

$$\alpha(A, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} + A(\mathbf{y} - \mathbf{x}),$$

или

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} + A(\mathbf{y} - \mathbf{x}),$$

где $A \in GL(n, \mathbf{R})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$.

Последней формулой определяется бинарное действие общей линейной группы $GL(n, \mathbf{R})$ на n-мерном векторном пространстве $\mathbf{R}^n$.

Пусть теперь (G, X, α) и (G, Y, β) две бинарные G-пространства.

Определение 2. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ назовем *би-эквивариантным*, если выполняется равенство

$$f(g(x_1, x_2)) = g(f(x_1), f(x_2)),$$

$g \in G$ и $x_1, x_2 \in X$.

Би-эквивариантное отображение $f : X \to Y$, являющееся также гомеоморфизмом, назовем *би-эквивалентностью* бинарных G-пространств.

Теорема 2. *Бинарные G-пространства и би-эквивариантные отображения составляют категорию*

On binary G-spaces

P. S. Gevorgyan

Academy of labour and social relations, Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russia, pgev@yandex.ru

Иерархия четностей и новые инварианты узлов в утолщенных поверхностях

М. В. Зенкина

Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия
zenkina-m@mail.ru

В докладе речь пойдет о построении инварианта виртуальных узлов. Мы можем разделить классические перекрестки на 2 типа: четные и нечетные, и использовать различные соотношения в четных и нечетных типах перекрестков. Мы будем использовать иерархию четностей, впервые введенную Мантуровым В.О. в [1].

Гауссова четность устанавливает различия между четными и нечетными перекрестками. Оказывается, имеется естественный путь для дальнейшего различия между перекрестками. Пусть K — виртуальная диаграмма узла, а $f(K)$ — образ диаграммы K при отображении f, которое отображает нечетные перекрестки в виртуальные. Тогда все перекрестки образа $f(K)$ соответствуют четным перекресткам диаграммы K. Эти перекрестки, рассматриваемые как перекрестки диаграммы $f(K)$, могут быть либо четными, либо нечетными. Таким образом, мы говорим, что перекресток диаграммы K имеет тип 0, если он нечетный, в противном случае мы говорим, что перекресток имеет тип 1, если соответствующий перекресток диаграммы $f(K)$ нечетный, и если соответствующий перекресток диаграммы $f(K)$ четный, то мы говорим, что перекресток имеет тип 2 [2]. Используя иерархию четностей, предложенную В.О.Мантуровым, можно построить инвариантный модуль $N(K)$.

Литература

1. *Ильютко Д. П., Мантуров В. О., Никонов И. М.* Четность в теории узлов и граф-зацепления // Топология, СМФН. — 2011. — Т. 41. — С. 3–163.
2. *Manturov V. O.* Flat Hierarchy // Fundamenta Mathematicae. — 2005. — Vol. 188. — P. 147–154.
3. *Зенкина М. В.* Инвариант зацеплений в утолщенном торе // Матем. заметки. — 2011. — Т. 90:2. — С. 242–253.

The parity hierarchy and new invariants of knots in thickened surfaces

M. V. Zenkina

Moscow Pedagogical State University, Moscow, Russia
zenkina-m@mail.ru

Ориентированные граф-зацепления, инварианты и нереализуемые графы

Д. П. Ильютко

Московский государственный университет, Москва, Россия
ilyutko@yandex.ru

Оказывается, что много информации о виртуальном узле можно получить лишь зная граф пересечений какой-то его гауссовой диаграммы (граф, вершины которого соответствуют хордам, и две вершины графа соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие хорды пересекаются) и число закрученности каждого классического перекрестка. Отметим, что не каждый граф является графом пересечений. Например, мы можем найти количество окружностей в состояниях скобки Кауфмана из графа пересечений [4, 5] (равно корангу матрицы смежности графа плюс один, см. рис. 1).

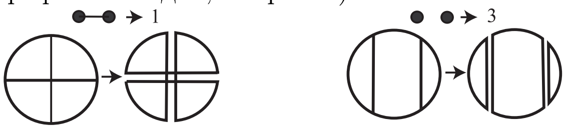


Рис. 1. Сглаживание вдоль двух хорд дает одну или три окружности

В работах [1–3] был предложен новый, «более» комбинаторный, подход к теории виртуальных узлов. В работе [3] была построена теория «нереализуемых графов» с использованием гауссовых диаграмм. В работах [1, 2] был предложен другой подход: вместо гауссовой диаграммы рассматриваются поворачивающие обходы. Кроме того, мы можем закодировать тип прохода вершины (A-разведение или B-разведение), см. рис. 2. Здесь каждая вершина еще будет иметь метку 0 или 1, зависящую от ориентации противоположных ребер. Определяя движения на графах пересечений, соответствующие движениям на хордовых диаграммах, и продолжая их на все простые графы, мы получим новый объект — *граф-зацепление*

Большинство инвариантов граф-зацеплений, полученных в работах [1, 2], относятся к граф-зацеплениям с одной компонентой. Если мы рассматриваем граф-зацепления с многими компонентами, то ситуация намного сложнее. Например, мы можем снабдить граф-зацепление ориентацией. Для ориентированного граф-зацепления строится полином Джонса и другие инварианты. Кроме ориентации для граф-зацеплений с многими компонентами можно рассматривать коэффициент, который, в некотором роде, показывает зацепленность компонент графа.

Автор выражает благодарность В. О. Мантурову, И. М. Никонову, А. Т. Фоменко и В. В. Чернову за полезные советы и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению N 220, договор 11.G34.31.0053, РФФИ (проекты № 12-01-31432 и № 13-01-00664), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1410.2012.1).

С помощью этого коэффициента можно показать, что второй граф Буше, см. рис. 3, дает нереализуемое граф-зацепление, т.е. любой его представитель не реализуем хордовой диаграммой.

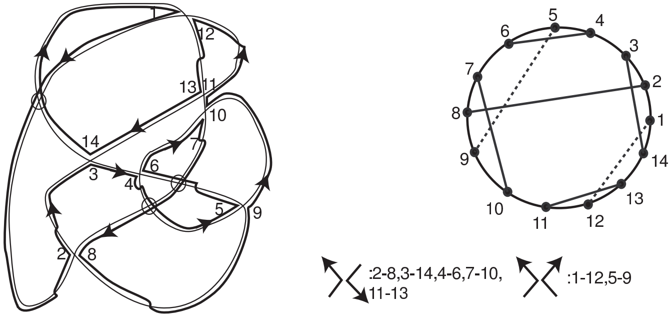


Рис. 2. Поворачивающий обход (тонкая линия); Хордовая диаграмма

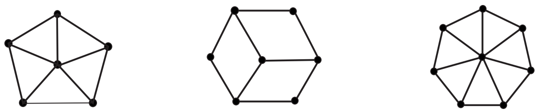


Рис. 3 Графы Буше (нереализуемые графы)

Литература

1. *Ilyutko D. P., Manturov V. O.* Introduction to graph-link theory // Knot Theory and Its Ramifications J. — 2009. — Vol. 18, № 6. — P. 791–823.
2. *Ильютко Д. П., Мантуров В. О.* Граф-зацепления // Докл. РАН. Сер. матем. — 2009. — Т. 428, № 5. — С. 591–594.
3. *Traldi L., Zulli L.* A bracket polynomial for graphs // Knot Theory and its Ramifications J. — 2009. — Т. 18. — С. 1681–1709.
4. *Cohn M., Lempel A.* Cycle decomposition by disjoint transpositions // Combin. Theory Ser. A J. — 1972. — Vol. 13. — P. 83–89.
5. *Traldi L.* Binary nullity, Euler circuits and interlace polynomials // arXiv:math.CO/0903.4405.

Oriented graph-links, invariants and non-realizable graphs

D. P. Ilyutko

Moscow State University, Moscow, Russia
ilyutko@yandex.ru

Топологическое удвоение so-множеств и продолжение отображений

В. Л. Клюшин, Аль Баяти Джелал Хатем Хуссейн

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
vklyushin@mail.ru, jalalintuch@yahoo.com

Пусть X' и X'' — два экземпляра одного и того же топологического пространства X. Рассмотрим множество $A(X) = X' \cup X''$. Точку $x \in X$, рассматриваемую как элемент в X', обозначаем через x', а рассматриваемую как элемент в X''– через x''. Аналогично и множество $M \subset X$ обозначаем M', если мы его рассматриваем в экземпляре X', и M'', если в X''. Вводим в $A(X)$ топологию следующим образом. Базу топологии образуют одноточечные множества $\{x''\}$, $x'' \in X''$, и множества вида $(U' \cup U'')/\{x''\}$, где U — произвольная окрестность точки x пространства X. Полученное таким образом топологическое пространство $A(X)$ называется дубликатом (или дубликотам Александрова), или А-дубликатом пространства X.

Множество $M \subset X$ называется просто-открытым [1], или so-множеством, если $M = O \cup N$, где O — открытое множество, а N нигде не плотно; so-множество, содержащее непустое открытое множество будем называть sso-множеством. Множество $M \subset X$ называется полуоткрытым, если существует такое открытое множество O, что $O \subset M \subset clO$. Очевидно, всякое полуоткрытое множество является so-множеством. Нетрудно доказать, что дубликат so-множества есть sso-множество. Можно доказать, что дубликат полуоткрытого множества является полуоткрытым. Однако, простые примеры показывают, что дубликат so-множества может не быть полуоткрытым множеством.

Пространство X называется S-паракомпактным [2], если во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие, состоящее из полуоткрытых множеств.

Теорема 1. *Дубликат S-паракомпактного пространства есть S-паракомпактное пространство.*

Отображение $f : X \to Y$ называется просто-непрерывным, или sc-отображением, если прообраз открытого множества есть so-множество. Если прообраз открытого множества есть sso-множество, то отображение называется ssc-отображением.

Всякое отображение $f : X \to Y$ естественно продолжается на $A(X)$: $f(x'') = f(x')$.

Теорема 2. *Если Y есть образ компактного (линделёфова, паракомпактного, S-паракомпактного) пространства X при sc-отображении, то Y есть образ компактного (линделёфова, паракомпактного, S-паракомпактного) пространства при ssc-отображении.*

Литература

1. *Biswas N.* On some mappings in topological spaces. Calcutta Math. Soc. — 1969. — Vol. 61. — P. 127–135.

2. *Al-Zoubi K. Y.* S-paracompact spaces // Acta Math. Hungar. — 2006. — Vol. 110 (1–2). — P. 165–174.
3. *Levine N.* Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces // Amer. Math. Monthly. — 1963. — Vol. 70. — P. 36–41.
4. *Клюшин В. Л.* О топологическом удвоении бикомпактов Эберлейна // Тезисы докладов XXVIII научной конференции факультета физико-математических и естественных наук УДН. — М.: Изд-во УДН, 1992.
5. *Li P.-Y., Song Y.-K.* Some remarks on S-paracompact spaces // Acta Math. Hungar. — 2008. — Vol. 118 (4). — P. 345–355.

Topological duplication of so-sets and extension of mappings

V. L. Klyushin, Al Bayati Jalal Hatem Hussein

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
vklyushin@mail.ru, jalalintuch@yahoo.com

О редукции действий

К. Л. Козлов

Московский государственный университет, Москва, Россия
klkozlov@gmail.com

Понятие d-открытого или слабо микро-транзитивного действия введено Ф. Анцелем. Оно оказалось достаточно продуктивным в решении вопроса алгебраической однородности однородных пространств; успешно используется при исследовании G-бикомпактификаций; позволяет строить информативную решетку d-открытых отображений на пространстве (свойство Дугунджи).

Вводится понятия равномерно локально G-равномерного действия, которое является d-открытым.

В докладе будет показано, как переходить от равномерно локально G-равномерного действия на пространстве с вполне ограниченной максимальной эквиравномерностью $\aleph_0$-уравновешенной группы к аналогичному действию $\aleph_0$-ограниченной группы. Так как d-открытое действие $\aleph_0$-уравновешенной группы на псевдокомпактном G-пространстве равномерно локально G-равномерно, то получается следствие: d-открытое действие $\aleph_0$-уравновешенной группы на псевдокомпактном G-пространстве заменяется на аналогичное действие $\aleph_0$-ограниченной группы. Отметим, что М. М. Чобан применял такой редукционный подход для замены открыто действующей почти метризуемой группы на компакте на открыто действующую $\aleph_0$-ограниченную группу. Так как при d-открытом действии $\aleph_0$-уравновешенной группы на псевдокомпактном G-пространстве последнее является d-пространством, и его Стоун-Чеховская бикомпактификация, совпадающая с максимальной G-бикомпактификацией, является бикомпактом Дугунджи, то имеем обобщение результата В. В. Успенского для транзитивного действия $\aleph_0$-ограниченной группы.

Reduction of action

K. L. Kozlov

Moscow State University, Moscow, Russia
klkozlov@gmail.com

Послойные варианты теорем Банаха и Арутюнова

Нгуен Тхи Хонг Ван[*], Б. А. Пасынков[†]

[*] *Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия, nguyenhongvan@mail.ru*

[†] *Московский государственный университет, Москва, Россия bpasynkov@gmail.com*

Определение метрического ($\equiv$ тривиально метрического) отображения см. в [2]. Метрическое отображение $(f, \rho)\colon X \to Z$ называется *послойно полным*, если все его слои полны относительно метрики ρ. Множество всех непрерывных сечений такого отображения будет обозначаться символом $S(f)$. Для $s, s' \in S(f)$ положим $d(s, s') = sup\{\rho(s(z), s(z'))\colon z \in Z\}$.

Фиксируем пару метрических отображений «на» $(f, \rho)\colon X \to Z$ и $(g, \rho')\colon X \to Z$.

Мар-морфизмом $\Psi\colon f \to g$ называется такое непрерывное отображение $\Psi\colon X \to Y$, что $g \circ \Psi = f$. Мар-морфизмом $\Psi\colon f \to g$ называется *послойно α-накрывающим* (соответственно, *β-липшицевским*), если α-накрывающим (соответственно, β-липшицевским) в смысле статьи [1] является коограничение на $g^{-1}z$ ограничения $\Psi|_{f^{-1}z}$, $z \in Z$.

Теорема 1. *Пусть даны α-накрывающий тар-морфизм $\Psi\colon f \to g$ и β-липшицевский тар-морфизм $\Phi\colon f \to g$, $0 < \beta < \alpha$, а f открыто и послойно полно. Если 1) $dim\ Z = 0$ или 2) существует такая изометрия q отображения (f, ρ) в банахово пространство B (т.е. такое отображение $q\colon X \to B$, для которого расстояние между qx и qx' равно $\rho(x, x')$, $x, x' \in X$), что все $q(\Psi^{-1}y)$, $y \in Y$, выпуклы в B, то для любого $\varepsilon > 0$ и для любого такого $s \in S(f)$, что $d = d(\Psi(s), \Phi(s)) < +\infty$, существует $\xi \in S(f)$, для которого*

$$\Psi(\xi) = \Phi(\xi) \text{ и } d(s, \xi) \leqslant \frac{d}{\alpha - \beta} + \varepsilon.$$

Таким образом, сечение ξ целиком состоит из точек совпадения отображений Ψ и Φ.

Теорема 1 является послойным аналогом теоремы 1 А.В. Арутюнова из [1]. В доказательстве теоремы 1 используется (в несколько обобщенном варианте) метод поисковых функционалов, разработанный Т.Н. Фоменко [3].

Следующее утверждение получено Б.А. Пасынковым.

Теорема 2. (Послойный принцип сжимающих отображений.) *Если отображение f факторно и послойно полно, а тар-морфизм $A\colon f \to f$ является β-сжатием (т.е. коограничение на $f^{-1}z$ ограничения A на $f^{-1}z$ является β-сжатием для любого $z \in Z$), то существует и единственно такое $s \in S(f)$, что s состоит в точности из всех неподвижных точек отображения $A\colon X \to X$ и $\rho(x, s(fx)) \leqslant \rho(x, Ax) \cdot \dfrac{1}{1-\beta}$, $x \in X$.*

Отметим, что в 1986 г. студенткой Б.А .Пасынкова Н. Порожнетой (Архиповой) теорема 2 была получена в более сильном предположении открытости отображения f.

Литература

1. *Арутюнов А. В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. — 2007. — Т. 416, № 2. — С. 151–155.
2. *Пасынков Б. А.* О метрических отображениях // Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика. — 1999. — № 3. — С. 29–32.
3. *Fomenko T. N.* Cascade search principle and its applications to the coincidence problems of n one-valued or multi-valued mappings // Topology and Its Applications. — 2010. — Vol. 157, № 4. — С. 760–773.

Fibrewise variants of Banach's and Arutyunov's theorems

Nguyen Thi Hong Van[*], **B. A. Pasynkov**[†]

[*] *Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia*
nguyenhongvan@mail.ru

[†] *Moscow State University, Moscow, Russia*
bpasynkov@gmail.com

Функторы четности в теории узлов

И. М. Никонов
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия, nikonov@mech.math.msu.su

Четность — понятие, введенное В.О. Мантуровым в 2009 году [2],— определяется как способ оснащения перекрестков диаграмм узла или зацепления числовыми метками 0 и 1, причем приписывание меток должно быть согласовано с движениями Рейдемейстера. Введение дополнительной информации в диаграмму зацепления при помощи четностей позволяет усиливать инварианты узлов. При помощи новых инвариантов удалось показать нетривиальность свободных узлов, а также их классов кобордантности.

Естественный вопрос о том, как много информации о диаграмме может содержать четность, приводит к понятию универсальной четности [1]. В докладе мы рассматриваем дальнейшее обобщение четности — функторы четности. Функтор сопоставляет каждой диаграмме узла свою группу коэффициентов, в которой лежат четности вершин диаграммы, что позволяет сохранить еще больше информации о диаграмме. В докладе будут приведены примеры универсальных функторов четности для некоторых теорий узлов.

Литература

1. *Ilyutko D.P., Manturov V.O., Nikonov I.M.* Virtual Knot Invariants Arising From Parities. — arXiv:1102.5081v1.
2. Manturov V.O. On free knots. — arXiv:0901.2214v2.

Parity functors in knot parity

I. M. Nikonov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia
nikonov@mech.math.msu.su

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 13-01-00664-а и 12-01-31432, а также гранта Российского Правительства 11.G34.31.0053, Президентского гранта Научные школы 1410.2012.1.

Аналог теоремы Нобла для уплотнений псевдокомпактных пространств

О. И. Павлов*, О. Ю. Павлова†

* *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
matematika.atiso@gmail.com

† *Академия труда и социальных отношений, Москва, Россия*

Все рассматриваемые пространства являются тихоновскими.

Уплотнением называется непрерывное взаимно-однозначное отображение «на». Уплотнения широко изучаются в общей топологии так как описывают ситуацию ослабления (или, наоборот, усиления) топологии на данном множестве. Известная теорема Нобла (см. [1, 2]) утверждает, что все степени топологического пространства X нормальны (в обычной топологии тихоновского произведения) если и только если X является компактом.

Основным результатом доклада является аналог теоремы Нобла для уплотнений, справедливый в предположении существования измеримого по Уламу кардинала:

Теорема 1. *Пусть $\aleph_\sigma$ — наименьший измеримый по Уламу кардинал. Если мощность пространства X меньше $\aleph_\sigma$, все степени X псевдокомпактны и $X^{\aleph_\sigma}$ уплотняется на нормальное пространство, то существует кардинал $\alpha < \aleph_\sigma$ такой, что X^α уплотняется на компактное пространство.*

В статье [3] доказано, что если какая-то степень пространства X не псевдокомпактна, и мощность X не превосходит $\aleph_\sigma$, то для некоторых сколь угодно больших кардиналов β, меньших $\aleph_\sigma$, X^β уплотняется на σ-компактное (следовательно, нормальное пространство). Вместе с Теоремой 1 это утверждение влечёт

Следствие 1. *Пусть $\aleph_\sigma$ — наименьший измеримый по Уламу кардинал. Если мощность пространства X меньше $\aleph_\sigma$ и $X^{\aleph_\sigma}$ уплотняется на нормальное пространство, то существует кардинал $\alpha < \aleph_\sigma$ такой, что X^α уплотняется на σ-компактное пространство.*

Литература

1. *Noble N.* Products with closed projections // Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 160. — C. 169–183.
2. *Przymusinski T. C.* Products of normal spaces // *Handbook of Set Theoretic Topology* / K. Kunen, J. E. Vaughan (eds). — Elsevier Sci. Pub. BV. — 1984.
3. *Pavlov O.* Condensations of Cartesian products //CMUC. — 1999. — Vol. 40, № 2. — C. 355–365.

An analog of Nobl's theorem for condensations

O. I. Pavlov*, O. Yu. Pavlova†

* *Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia*
matematika.atiso@gmail.com

† *Academy of Labor and Social Relations, Moscow, Russia*

Гармонические дифференциалы Прима для нормированных характеров

Т. А. Пушкарева

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия
pushkareva.tanya@gmail.com

Пусть F_μ — переменная компактная риманова поверхность рода $g \geqslant 2$, комплексно-аналитическая структура задана дифференциалом Бельтрами $\mu(z)\frac{d\overline{z}}{dz}$ на $F = F_0$. Обозначим через Γ_μ квазифуксову группу униформизирующую F_μ в $w^\mu(U)$, где w^μ — решение уравнения Бельтрами на $U = \{|z| < 1\}$ и $\Gamma_\mu =< A_1^\mu, A_2^\mu, ..., A_g^\mu, B_1^\mu, B_2^\mu, ..., B_g^\mu >$. Характер ρ для F_μ это любой гомоморфизм $\rho: \ \pi_1(F_\mu) \cong \Gamma_\mu \to \mathbf{C}^*$. Дифференциалом Прима ϕ для ρ на F_μ назовем дифференциал $\phi = \phi(z)dz$ такой, что $\phi(Tz)T'(z) = \rho(T)\phi(z), \ z \in w^\mu(U), \ T \in \Gamma_\mu$.

Обозначим через $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ $(\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)))$ пространство всех голоморфных (гармонических) дифференциалов Прима для ρ на F_μ. Для $\phi = df(z)$ на $w^\mu(U)$ верно $f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi(T)$, где период $\phi(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0)$ для $T \in \Gamma_\mu$. Отображение $\phi: \ \Gamma_\mu \to \mathbf{C}$, удовлетворяет коциклическому условию $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T), \ S, T \in \Gamma_\mu$, т. е. $\phi \in Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$. Определен класс периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma_\mu, \rho) = Z^1(\Gamma_\mu, \rho)/B^1(\Gamma_\mu, \rho)$, где $B^1(\Gamma_\mu, \rho)$ порождается 1-циклом $\sigma_\mu(T) = 1 - \rho_\mu(T), \ T \in \Gamma_\mu$. Пусть L_g — подгруппа несущественных характеров, $[S^1]^{2g}$ — подгруппа нормированных характеров в группе $Hom\ (\Gamma, \mathbf{C}^*)$, $\mathbf{T}_g$ — пространство Тейхмюллера рода g.

Теорема 1(Аналог теорем де Рама и Ходжа). *Для $\rho \in [S^1]^{2g}$ верно $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)) \cong H^1_{DR}(F_\mu, \rho) \cong H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ и для любого замкнутого дифференциала Прима ϕ на F_μ класса C^∞ для ρ существует единственное разложение Ходжа $\phi = \phi_0 + df(z)$, где $\phi_0 \in \Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)), f(z) \in C^\infty(F_\mu, \rho)$, а также для любого класса периодов $[\psi] \in H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ существует замкнутый дифференциал Прима ϕ на F_μ класса C^∞ для ρ такой, что $[\phi] = [\psi]$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$.*

Теорема 2. *Дифференциал Прима $\phi \in \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ для существенного характера $\rho, \ \rho \in U_1 = \{\rho : \rho(A_1) \neq 1\}$, единственно определяется «половиной» своих базисных периодов $\phi(N_{j_1}), ..., \phi(N_{j_{g-1}})$, где $\phi(A_1) = 0$, $\{N_1, ..., N_g, N_{g+1}, ..., N_{2g}\} = \{A_1, A_2, ..., A_g, B_1, B_2, ..., B_g\}$ и $\{j_1, ..., j_{g-1}\}$ — подмножество из $(g-1)$ элементов в $\{2, 3, ..., g, g+2, g+3, ..., 2g\}$, зависящее от выбора базиса в $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho^{-1}))$.*

Теорема 3. *Для любого $[\mu_0] \in \mathbf{T}_g, \rho_0 \in [S^1]^{2g} \backslash 1$ существуют окрестности $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$, $U(\rho_0) \subset \{[S^1]^{2g} \backslash 1\}$ такие, что для $\rho \in$*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-90800-мол-рф-нр.

$U(\rho_0) \cap U_1$ в $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$ существует базис гармонических дифференциалов Прима $\phi_1 = \phi_1([\mu], \rho; z), ..., \phi_{2g-2} = \phi_{2g-2}([\mu], \rho; z)$, вещественно-аналитически зависящий от $[\mu]$ и ρ, и имеющий матрицу периодов, относительно $A_2, ..., A_g, B_2, ..., B_g$, вида I_{2g-2} (единичная матрица порядка $2g-2$).

Эти теоремы также будут верны, если заменить пространство Тейхмюллера на пространство Торелли.

Литература

1. *Чуешев В. В.* Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч. 2. Уч.пособие. — Кемерово, 2003.
2. *Пушкарева Т. А., Чуешев В. В.* Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов на компактной римановой поверхности // Докл. Кемерово. — 2011. — № 4. — С. 211–216.

Harmonic Prym differentials for normalized characters

T. A. Pushkareva

Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russia
pushkareva.tanya@gmail.com

Аппроксимации полунепрерывных сверху отображений отображениями с открытыми прообразами точек

П. В. Семенов

Московский городской педагогический университет, Москва, Россия, pavels@orc.ru

Связь между полунепрерывными сверху (снизу) многозначными отображениями и непрерывными однозначными отображениями чаще всего реализуется через, соответственно, аппроксимации (селекции) этих многозначных отображений. Теории аппроксимаций и, соответственно, селекций во многом схожи между собой по используемому запасу основных идей, но, формально, факты этих теорий напрямую не сводятся к фактам другой.

Одним из объектов, которые в том или ином виде появляются в обеих теориях являются *Браудеровские* многозначные отображения: так называют отображения с открытыми прообразами точек. Они могут быть использованы и для нахождения $\varepsilon-$неподвижных точек, и для нахождения $\varepsilon-$селекций.

Основной результат настоящей работы состоит в конструкции сколь угодно малого поточечного Браудеровского «раздутия» B п.н.св. отображения F, заданного на паракомпакте. Тогда всякая селекция f Браудеровского отображения B автоматически становится аппроксимацией отображения F. Тем самым, теория селекций напрямую дает аппроксимации п.н.св. отображений.

Теорема. *Пусть $F : X \to Y$ полунепрерывное сверху отображение паракомпакта X в T_2-пространство Y. Пусть ω (соотв., ν) — открытое покрытие X (соотв., Y). Тогда существует Браудеровское отображение $B = B_{\omega\times\nu} : X \to Y$ такое, что $\forall\, x \in X$*

$$(\, F(x) \subset B(x)\,)\ \&\ (\ \exists\, x' \in Star_\omega(x)\ :\ F(x') \subset B(x) \subset Star_\nu(F(x'))\ ).$$

Approximations of usc mappings by mappings with open point preimages

P. V. Semenov

Moscow City Education University, Moscow, Russia
pavels@orc.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 11-01-00822.

Описание ядра фон Неймана для связной локально компактной группы

А. И. Штерн

Московский государственный университет, Москва, Россия
aishtern@mtu-net.ru

В восьмидесятые годы Ротман [1] получил описание так называемого ядра фон Неймана (пересечения ядер непрерывных конечномерных унитарных представлений) связной группы Ли с замкнутой подгруппой Леви и затем распространил это описание (в совместной работе с Strassberg) на случай связных локально компактных групп с замкнутыми подгруппами Леви.

Доклад посвящен полному описанию ядер фон Неймана произвольных связных локально компактных групп и аналогов этих ядер, связанных с не обязательно непрерывными представлениями (т.е. пересечений ядер всех, не обязательно непрерывных, конечномерных унитарных представлений данной связной локально компактной группы). Доказательство [2] использует недавние результаты автора об автоматической непрерывности некоторых конечномерных представлений связных групп Ли.

Литература

1. *Rothman S.* The von Neumann kernel and minimally almost periodic groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1980. — Vol. 259, № 2. — P. 401–421.
2. *Штерн А. И.* Структура гомоморфизмов связных локально компактных групп в компактные группы // Изв. РАН. Сер. матем. — 2011. — Т. 75, № 6. — С. 195–222.

Description of the von Neumann kernel for a connected locally compact group

A. I. Shtern

Moscow State University, Moscow, Russia
aishtern@mtu-net.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-01-00057.

О суммируемости обобщенных решений (p, q) — аналитических систем, осуществляющих топологическое отображение единичного круга на себя, в случае вырождения на граничной дуге

Е. А. Щербаков*, Ю. В. Терентьева†

* *Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия, echt@math.kubsu.ru*

† *Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия, terentevauv@gmail.com*

Нами изучаются топологические отображения $w(z) = u(z) + iv(z)$ круга $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на себя, являющиеся решениями (p, q) аналитических систем вида

$$\begin{cases} pu_x + qu_y = v_y, \\ -qu_x + pu_y = -v_x, \end{cases} \tag{1}$$

комплексная форма которых имеет вид:

$$w_{\bar{z}} = k(z)\,\overline{w_z}. \tag{2}$$

Здесь

$$k(z) = \frac{1 - p^2(z) - q^2(z) + 2iq(z)}{q^2(z) + (1 + p(z))^2}.$$

При этом характеристика $K(z)$ квазиконформного отображения $w(z)$ [**?**] имеет вид:

$$K(z) = \frac{\sqrt{(1 + p(z))^2 + q^2(z)} + \sqrt{(1 - p(z))^2 + q^2(z)}}{\sqrt{(1 + p(z))^2 + q^2(z)} - \sqrt{(1 - p(z))^2 + q^2(z)}}.$$

Пусть Γ_0 — граничная дуга круга B_1:

$$\Gamma_0 = \{z \in \partial B_1 : \arg z_2 \leqslant \arg z \leqslant \arg z_1\}, \arg z_2 < \arg z_1, 0 < \arg z_1 - \arg z_2 \leqslant 2\pi,$$

Относительно функций $p(z)$ и $q(z)$ будем считать выполненным условие D.

Условие D: пусть функции p, $q : \bar{B}_1 \to \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемы в $\bar{B}_1 \backslash \Gamma_0$, положительны в B_1, и в окрестности дуги вырождения Γ_0 удовлетворяют условиям:

$$a_1 dist^{\alpha}(z, \Gamma_0) \leqslant p(z) \leqslant a_2 dist^{\alpha}(z, \Gamma_0),$$

$$b_1 dist^{\alpha-1}(z, \Gamma_0) \leqslant |\nabla p(z)| \leqslant b_2 dist^{\alpha-1}(z, \Gamma_0),$$

$$c_1 dist^{2\alpha}(z, \Gamma_0) \leqslant q(z) \leqslant c_2 dist^{2\alpha}(z, \Gamma_0),$$

$$d_1 dist^{2\alpha-1}(z,\Gamma_0) \leqslant |\nabla q(z)| \leqslant d_2 dist^{2\alpha-1}(z,\Gamma_0),$$
$$0<\alpha<1, 0<a_1<a_2, 0<b_1<b_2, 0<c_1<c_2, 0<d_1<d_2.$$

Так как характеристика $K(z)$ неограниченна в точках дуги Γ_0, то система (1) является вырождающейся.

Основным результат работы является следующая теорема об улучшении свойств интегрируемости производных функций $u(z)$, $v(z)$ отображения $w(z)$, являющегося решением (p,q) — аналитических систем (1), вырождающихся на дуге Γ_0 при $0<\alpha<1$.

Теорема. *Пусть функции p, $q:\bar{B}_1\to\mathbb{R}$ из уравнения (2) удовлетворяют условию D,в котором $0<\alpha<1$ и $w(z)$ — решение уравнения (2) в круге B_1, нормированное условием (2). Тогда координатные функции $u(z)$ и $v(z)$ принадлежат шкалам весовых пространств С. Л. Соболева:*

$$v\in W^{1,\tau_1}\left(dist^{\alpha_1}(z,\Gamma_0),B_1\right),$$
$$\tau_1=\frac{2(2-\varepsilon)(2+\alpha_1)}{5-3\alpha-\varepsilon+\alpha\varepsilon},\quad \alpha_1\in\left[\frac{1+\alpha-\alpha\varepsilon+\varepsilon}{\alpha-3};0\right],$$
$$u\in W^{1,l_1}(B_1),$$
$$l_1=\frac{2(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)(2+\alpha_1)}{5+\alpha(5-\varepsilon^2)+\alpha_1^2(4-2\varepsilon)+\alpha_1(8+4\alpha-2\alpha\varepsilon-4\varepsilon)+\varepsilon^2-6\varepsilon},$$
$$v\in W^{1,\tau_2}(B_1),\quad u\in W^{1,l_2}(B_1),$$
$$\tau_2=\frac{1-\varepsilon}{(1-\alpha)(1+\varepsilon)},\quad l_2=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon-\alpha\varepsilon}$$

где ε, $0<\varepsilon<1$ — произвольная фиксированная константа.

Литература

1. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям / Перевод с английского В.В. Кривова. Под ред. В. А. Зорича и Б. В. Шабата. — М.: Мир, 1969. — 133 с.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
3. *Stredulinsky E. W.* Weighted inequalition and Degenerate Elliptic partial Differential Equations // Lachtes Notes in Mathematics Sprienger. — 1984. — № 1074. — P. 143.
4. *Gergen J. J.,Dressel F. G.* Mapping by p – regular functions // Duke math. J. — 1951. — Vol. 18, № 1. — P. 185–210. bibitemShcherbakovEA5*Евграфов М. А.* Аналитические функции. — М.:Наука, 1968. — 471 с.

On the integral properties of the derivatives of the solutions of the boundary degenerate (p, q) analytic systems representing topological mapping of the unit disk

E. A. Shcherbakov*, Yu. V. Terentieva†

* *Kuban State University, Krasnodar, Russia*
echt@math.kubsu.ru

† *Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia*
terentevauv@gmail.com

Секция 5. Обратные и некорректно поставленные задачи

The inverse problem for the Grad — Shafranov equation

S. I. Bezrodnykh*, **V. I. Vlasov**†

* *Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Sternberg Astornomic Institute of MSU, Moscow, Russia, sergeyib@pochta.ru*

† *Dorodnicyn Computing Centre of RAS Moscow, Russia vlasov@ccas.ru*

The Grad — Shafranov equation with affine right-hand side $\Delta u(x) = au(x)+b$ is considered in plane simply connected domains G with piece-wise $C^{3,\alpha}$–smooth boundary Γ at which homogeneous Dirichlet condition and non–local condition $\int_\Gamma \partial_\nu u(x)\, ds = 1$ are prescribed, where ds is length element of arc Γ, ∂_ν is normal derivative to Γ. The non–local condition states an explicit relation between parameters a and b of the equation, $b = b(a)$, and by this fact makes the considering problem, named as a direct one, depending only on parameter a. The inverse problem for the equation consists in finding parameter a via information on normal derivative $\partial_\nu u(x)$. Those direct and inverse problems have been studied particularly in [1] in connection to physical applications. In the present work it is stated that parameter a can be found by the value of normal derivative $\partial_\nu u(x)$ in any point x belonging to special subset $\widetilde{\Gamma}$ of boundary Γ. The necessary and sufficient condition for solvability of the direct problem is that the value $\partial_\nu u(x)$ belongs to half–interval $\mathcal{J}_x$, which depends on $x \in \widetilde{\Gamma}$. A method is elaborated for finding parameter a, including an algorithm of constructing subset $\widetilde{\Gamma}$ and half–interval $\mathcal{J}_x$. Those results were obtained with the help of the multipole method that ensures high precision computation of normal derivative $\partial_\nu u(x)$ and by the use of asymptotics [1] as $a \to \infty$ for $\partial_\nu u(x)$ and $\frac{d}{da}\, \partial_\nu u(x)$, $x \in \Gamma$.

References

1. *Demidov A. S., Moussaoui M.* An inverse problem originating from magnetohydrodynamics // Inverse Problems. — 2004. — Vol. 20. — P. 137–154.
2. *Vlasov V. I.* Boundary value problems in domains with curvilinear boundary. — Moscow: CCAS, 1987 [in Russian].

This work is supported by the RFBR proj. No 13-01-00923, Program No 3 of the Division of Mathematical Sciences of the RAS and the “Contemporary Problems of Theoretical Mathematics” Program of the RAS..

An inverse fractional abstract Cauchy problem with nonlocal conditions

Mahmoud M. El-Borai, Khairia El-Said El-Nadi

Faculty of Science, Alexandria University, Alexandria, Egypt
m_ m_ elborai@yahoo.com, kliairia_ el_ said@liotmail.com

This note is devoted to the study of an inverse Cauchy problem in a Hilbert space H for the abstract fractional differential equation of the form:

$$\frac{d^{\alpha}u(t)}{\alpha} = Au(t) + f(t)g(t),$$

with the nonlocal initial condition:

$$u(0) = u_0 + \sum_{k=1}^{p} c_k u(t_k),$$

and the overdetermination condition: $(u(t), v) = w(t)$, where $(.,.)$ is the inner product in H, f is a real unknown function w is a given real function, u_0, v are given elements in H, g is a given abstract function with values in $H, 0 < \alpha \leqslant 1$, u is unknown, and A is a linear closed operator defined on a dense subset of H.

It is supposed that A generates a bounded semigroup. An application is given to study an inverse problem in a suitable Sobolev space for general fractional parabolic partial differential equations with unknown source functions and with nonlocal initial conditions.

Keywords and phrases: Fractional abstract differential equations, nonlocal initial conditions, inverse Cauchy problem.

Error estimation for ill-posed problems in partially ordered spaces

Y. M. Korolev, A. G. Yagola

Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
um.korolev@physics.msu.ru, yagola@physics.msu.ru

We consider ill-posed inverse problems for linear operator equations

$$Az = u \tag{1}$$

where $z \in Z, u \in U$, Z and U are Banach lattices. A is linear positive injective operator (by positiveness of A we understand that $z \geqslant 0 \to Az \geqslant 0$). Note that a linear positive operator acting between two Banach lattices is continuous [1] and, thus, bounded. We denote the exact solution to (1) by $\overline{z}$.

In practice we usually do not know the exact operator A and the exact right-hand side u, we know only their lower and upper bounds $A^l \leqslant A \leqslant A^u, u^l \leqslant u \leqslant u^u$, A^l and A^u are also linear positive operators. The relation "$A \leqslant B$" for operators is understood as $z \geqslant 0 \to Az \leqslant Bz$. Let $u_n^l \subset U$ a be a non-decreasing sequence,$u_n^u \subset U$ a non-increasing sequence and let $||u_n^l - u|| \to 0$, $|u_n^l - u|| \to 0|$ (here u denotes the exact right-hand side in (1)). Let also $A_{n+1}^l \geqslant A_n^l$, $A_n^u \geqslant A$. An and$||A_n^l - A|| \to 0$, $|A_n^l - A|| \to 0|$ (A is the exact operator in (1)).

It is well known [2] that, in general, no error estimate can be provided for an approximate solution to an ill-posed problem. But it is still possible in some special cases, when some a priori information about the exact solution is available. We use the information that the unknown exact solution z belongs to a compact set $M \subset Z$. This type of a priori information has been used before ([1, 2] etc.). However, the authors did not make use of the order structure of the functional spaces, in which the problems were considered. We try to fill up this gap.

Suppose we know a priori that the exact solution belongs to a positive compact set M C Z. Consider the following set of approximate solutions [5]

$$Z_n = \{z \in M \| A_n^l z \leqslant u^u, A_n^u z \geqslant u_n^l\} \tag{2}$$

Obviously, $\forall \overline{z} \in Z_n$.

Theorem 1. *With assumptions made above, $\forall \overline{z} \in Z_n, z_n \to \overline{z}$ and diam $\mathbb{Z}_n = \sup\limits_{z,\zeta \in Z_n} \|z - \zeta\| \to 0$.*

Theorem 1 makes error estimation for an approximate solution $z \in Z_n$ possible. Indeed, the value $\varphi(z) = \underset{\max}{\zeta \in Z_n} ||\zeta - z||$ may be considered as an error estimate, since $||\overline{z} - z|| \leqslant \varphi(z)$ and $\varphi(z_n) \to 0$ as $n \to \infty$ for any approximate solution $z_n \in Z_n$.

This work was supported by the RFBR grants 11-01-00040 and 12-01-00524.

Let Z be an AM-space. A Banach lattice Z is called an AM-space if

$$\forall x, y \geqslant 0||sup(x, y)|| = sup(||x||, ||y||).$$

Suppose also that Z is super Dedekind complete (i.e. every majorized set A has a supremum and exists a countable subset $A_0 \subset A, supA = supA_0$. An example of a super Dedekind complete AM-space is the space $L_\infty[a, b]$ [1].

Theorem 2. *If M is a positive majorized compact set in a super Dedekind complete AM-space Z and Z_n are the sets defined in (2) then $\exists \sup Z_n = z_n^u \to \overline{z}, \exists \inf z_n = z_n^l \to z$. The convergence is understood as strong (norm) convergence in z.*

Therefore,z^u and z^l can be considered as meaningful error bounds for an approximate solution $z \in Z_n$.

References

1. *Schaefer H. H.* Banach lattices and Positive operators. — Verlag: Springer, 1974.
2. *Tikhonov A. N., Goncharsky A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G.* Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems. — Kluwer, Dordrecht, 1995.
3. *Titarenko V. N., Yagola A. G.* Error estimation for ill-posed problems on piecewise-convex functions and sourcewise represented sets // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. — 2008. — Vol. 16. — P. 625–638.
4. *Yagola A. G., Titarenko V. N.* Using a priori information about a solution of an ill-posed problem for constructing regularizing algorithms and their applications // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2007. — Vol. 15, No 1. — P. 625–638.
5. *Korolev Yu. M., Yagola A. G.* On inverse problems in partially ordered spaces with a priori information // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. — 2012. — Vol. 20, No 4. — P. 567573.
6. *Dunford N., Schwartz J.* Linear operators: General theory. — Interscience Publishers, 1988.

Using parallel computing for solving multidimensional ill-posed problems

D. Lukyanenko

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
lukyanenko@physics.msu.ru

Solving multidimensional ill-posed problems has attracted wide interests and found many practical applications. However, the most modern applications require processing a large amount of data that often very difficult to perform on personal computers. In this case usual different methods are applied for simplification of the problem statement but these simplifications degrade the accuracy of the inverted parameters. It is supposed to solve calculating difficult applications by using parallel computation that gives us an advantage the time and the accuracy.

The main practical problem investigated here is an effective solving of multidimensional Fredholm integral equation of the 1st kind by using parallel computation. In most cases the algorithms of solving Fredholm integral equation of the 1st kind have structures which allow us to divide large problem into smaller ones which are then solved "in parallel". But there is Amdahl's law, which states an upper limit on the usefulness of adding more parallel execution units.

Several recent results [1,2] will be presented on the study of this problem. States that it is possible to construct a parallel algorithm for solving of multidimensional Fredholm integral equation of the 1st kind, the percentage of serial calculations of which will tend to zero, that proves the efficiency of multiprocessor systems for solving of this problem.

References

1. *LukyanenkoD D. V., Yagola A. G.* Application of multiprocessor systems for solving three-dimensional Fredholm integral equations of the first kind for vector functions // Numerical Methods and Programming. — 2010. — Vol. 11. — P. 336–343 [in Russian].
2. *Lukyanenko D. V., Yagola A. G., Evdokimova N. A.* Application of inversion methods in solving ill-posed problems for magnetic parameter identification of steel hull vessel // J. Inverse and Ill-Posed Problems. — 2011. — Vol. 18, No 9. — P. 1013–1029.

This work was supported by RFBR, project No. 12-01-91153-NSFC-a, No. 11-01-00040.

Identification of Mathematical Models with Uncertainties

A. V. Nenarokomov*, **A. F. Emery**†

* *Moscow aviation institute, Moscow, Russia*
Aleksey.nenarokomov@mai.ru

† *University of Washington, Seattle, USA*
emery@uofw.edu

An extended maximum likelihood principle is described by which inverse solutions for problems with uncertainties in *known* model parameters can be considered. The method is shown to be effective only when the equivalent experimental noise differs significantly and in a continous manner from the measurement noise and the sensors are at the optimal locations. The parameters of the model of a system are usually determined with the inverse method which consists of comparing the measured response of the system to the response predicted with varying values of the sought-after parameters. The predictions are made by using the model with properties and parameters, other than the sought-after parameters, assumed to be *known*. Although existing inverse methods consider the experimental noise, they do not take into account errors or uncertainties which might exist in these presumably *known* parameters of the system. The authors have presented a new measure of performance which takes into account such uncertainties in the *known* model parameters by extending the concept of the maximum likelihood principle.

Let us consider a thermal system which can be modeled by a set of differential equations and model parameters. Of all the parameters involved in the model, let there be P unknown parameters represented by the vector $\mathbf{u}$ which are to be determined by the inverse method. The rest of the parameters, say Q parameters, are known *a-priori* and are represented by the vector $\mathbf{b}$. In order to estimate the $\mathbf{u}$ parameters, experimental observations of the state of system are obtained at various locations (x_i, y_i) and times (t_k). Let N be the number of sensors used in the experiment and K the number of readings in time at these sensor locations. Then the experimental observations can be represented by $\mathbf{z}_k$ where,

$$\mathbf{z}_k^T = \{z_i(t_k),\ i = 1, 2, .., N\} \quad k = 1, 2, .., K \tag{1}$$

Let $\mathbf{\Phi}_k$ be a vector of the predicted state of the system at all the sensor locations based on the mathematical model using the *known* parameters (for distributed parameter systems this involves the solution of the field equations) such that,

$$\mathbf{\Phi}_k^T = \{\phi_i(t_k),\ i = 1, 2, .., N\} \quad k = 1, 2, .., K \tag{2}$$

The idea is to choose the sought-after parameters, $\mathbf{u}$, in such a way that the model predictions agree with the experimental measurements according to a specified functional. The vector $\mathbf{z}$ in equation (1) results from real measurements and therefore always contains errors. The usual deterministic approach is to minimize the least squares difference between the prediction and the measurements.

$$\mathbf{L}^* = \sum_{k=1}^{K} \{\mathbf{\Phi}_k - \mathbf{z}_k\}^T \{\mathbf{\Phi}_k - \mathbf{z}_k\} \tag{3}$$

In addition to the experimental errors, the predictions will also exhibit variations which are due to the uncertainties in the *known* parameters used in these models. Thus, the predictions $\mathbf{\Phi}_k$ should also be considered to be stochastic in nature. In this extended theory, the unknown parameters are estimated by minimizing the functional $\mathbf{J}$ which is given as,

$$\mathbf{J} = \sum_{k=1}^{K} \ln(Det(\mathbf{V}_k)) + \sum_{k=1}^{K} \mathbf{\Psi}_k(\mathbf{u})^T \mathbf{V}_k^{-1} \mathbf{\Psi}_k(\mathbf{u}) \tag{4}$$

where the covariance matrix $\mathbf{V}_k$ is defined as,

$$\mathbf{V}_k = E[\{\mathbf{\Psi}_k - E[\mathbf{\Psi}]\}\{\mathbf{\Psi}_k - E[\mathbf{\Psi}_k]\}^T] = \mathbf{\Theta}_k \mathbf{G} \mathbf{\Theta}_k^T \ + \mathbf{S}_k \tag{5}$$

where $\mathbf{G}$ is the covariance of the uncertain parameters and Θ is the sensitivity of the system response with respect to these uncertain parameters.

It can be shown that the Fisher information matrix, $\mathbf{M}$, for the extended theory given in Eqn. 10 is

$$(\mathbf{M})_{lm} = \sum_{k=1}^{K} \left[\{\frac{\partial \mathbf{\Phi}_k}{\partial u_m}\}^T \mathbf{V}_k^{-1} \{\frac{\partial \mathbf{\Phi}_k}{\partial u_l}\} \ + \ \frac{1}{2} Tr[\mathbf{V}_k^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial u_l} \mathbf{V}_k^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial u_m}] \right] \tag{6}$$

$$l, m = 1, .., P$$

It is important to note that since $\mathbf{M}$ involves the complicated dependence of $\mathbf{V}_k$ upon the sought-after parameters, the location of the minimum of $\mathbf{M}$ is a highly non-linear optimization problem. The developed method has been shown to be able to account successfully for uncertainties in surface heat transfer coefficients when estimating the conductivity. However, the success is achieved only when the sensor is placed at the position which is defined as optimal by the corresponding extended Fisher Information Matrix, $\mathbf{M}$. Either the use of the original theory, $\mathbf{L}$, or placement at non-optimal positions with the extended theory, retains the strong effect of the convective coefficient on the inverse solution.

About inverse problem for the wave equation on graphs

K. B. Nurtazina

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
knurtazina@mail.ru

Let $\mathbf{R}^2$ be a finite connected planar graph without cycles with edges $\{e\} = E$ (intervals of straight lines), vertices $\{\nu_1, \ldots, \nu_m\} = V$ and boundary vertices $\{\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\} = \mathrm{V}$. The graph is equipped with a density ρ which is a strictly positive and C^2-smooth function on the edges. The optical diameter of the graph, $d\,(\Omega)$, is defined by the formula

$$d\,(\Omega) := \max_{a,b\in\Gamma} \int_{\pi[a,b]} \sqrt{\rho}\,|dx|\,.$$

Here $|dx|$ is the length element on induced by the $\mathbf{R}^2$-metric, and $\pi\,[a,b]$ is path connecting a and b.

To the graph one associates the dynamical system

$$\rho u_{tt} - u_{ee} = 0 \quad \text{in} \quad \{\Omega\backslash \mathrm{V}\} \times (0,T) \tag{1}$$

$$\sum_{e\sim\nu} u_e|_{x=\nu} = 0 \quad \text{for all} \quad \nu \in V\backslash\Gamma \tag{2}$$

$$u_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \in \Omega \tag{3}$$

Here $(\cdot)_e$ is differentiation along the edge; the sum is taken over the edges incident to the vertex ν; $(\cdot)_e|\nu$ is the derivative along e in the direction from ν taken at ν.

The control $f \in f\,(\gamma, t)$ is applied at all except one boundary vertices:

$$u\,(\gamma_0, t) = 0, \quad u = f \quad \text{on} \quad \Gamma_0 \times (0,T), \tag{4}$$

$$\Gamma_0 \ := \Gamma\backslash\,\{\gamma_0\}\,.$$

Let $u = u^f\,(x,t)$ be the solution of this initial boundary value problem,

$$d_0 := \max_{a,b\in\Gamma_0} \int_{\pi[a,b]} \sqrt{\rho}\,|dx|\,,$$

and e_0 be the edge incident to γ_0 with the length $|e_0|$.

Theorem. *If $T \geqslant d_0 + 2\,|e_0|$, then for any $y \in L_2\,(\Omega)$ and any $z \in H^{-1}\,(\Omega)$ there exists a control $f \in L_2\,(\Gamma \times (0,T))$ providing the equalities*

$$u^f\,(\cdot,T) = y, \quad u^f_t\,(\cdot,T) = z.$$

The application of the Boundary Control method to solving boundary inverse problems is based on regularity and controllability results for a closely related wave equation, which we briefly discuss in our report.

References

1. *Avdonin S., Nurtazina K., Sheronova T.* Controllability and Inverse Problem for the Wave Equation on Graphs // Abstract s of 14th Mediterranean Conference on Control and Automation. Ancona, June 28-June 30, 2006. — P. 37–41.
2. *Avdonin S., Belinskiy B., and Matthews J.* Dynamical inverse problems on a metric tree // Inverse Problems. —Vol. 27, 075011.

Ill-posed problems on the set of bounded piecewise-convex functions

A. G. Yagola

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
yagola@physics.msu.ru

While solving inverse problems in practice it is necessary to have a deal with fixed given from experiment error levels of input data so as to provide error estimation of approximate solutions. It is very well known that ill-posed problems have unpleasant properties even in the cases when stable methods (regularizing algorithms) of their solution exist. E.g., it is impossible to estimate an error of an approximate solution of an ill-posed problem without very strong assumptions concerning the unknown solution. The theory of error estimation or a posteriori error estimation under different constraints was developed and applied for solving operator equations including integral equations and some inverse problems for differential equations. Numerical methods for solving ill-posed problems and their error estimation are based on convex programming.

If it is supposed that the exact solution is a bounded piecewise-convex function on some bounded segment [a,b] [1],the inflection point regularization method was proposed. A conjugate gradient projection method for solving the corresponding optimization problem was realized. In order to show the efficiency and feasibility of the proposed algorithm the real practical problem of the determination of the aerosol particle size distribution function using the particle spectrum extinction equation was considered [2].

References

1. *Titarenko V., Yagola A.* Error estimation for ill-posed problems on piecewise convex functions and sourcewise represented sets // Inverse and Ill-Posed Problems. — 2008. — Vol. 16, No 6. — P. 625–638.
2. *Wang Y., Zhang Y., Lukyanenko D.,Yagola A.* Recovering aerosol particle size distribution function on the set of bounded piecewise-convex functions // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2013. — To be published.

This work was supported by RFBR, projects No. 12-01-91153-NSFC-a, No. 12-01-00524-a.

Recovering Non-selfadjoint Quasi-periodic Differential Pencils

V. A. Yurko

Saratov University, Saratov, Russia, yurkova@info.sgu.ru

Let $\mathcal{P} = \{\rho\}_{n\in\mathbf{Z}}$ be the spectrum of the boundary value problem L:

$$y'' + (\rho^2 + \rho p_1(x) + p_0(x))y = 0, \quad x \in [0, T], \tag{1}$$

$$y(0) = \alpha y(T), \quad y'(0) - (i\rho h_1 + h_0)y(0) = \beta y'(T),$$

where $p_1(x), p_0(x)$ are complex-valued functions, $p_1(x) \in AC[0,T]$, $p_1'(x)$, $p_0(x) \in L(0,T)$ and h_1, h_0, α, β are complex numbers, $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha(1 \pm h_1) + \beta \neq 0$. Denote $d_j(\rho) = C_j(T,\rho)$, $j = 1, 2$, $Q(\rho) = \alpha C_1(T,\rho) - \beta C_2'(T,\rho)$, where $C_j(x,\rho)$ are solutions of (1) under the conditions $C_j^{(k-1)}(0,\rho) = \delta_{jk}$, $j,k = 1,2$. Here δ_{jk} is the Kronecker symbol. Put $\Lambda := \{n : n = \pm1, \pm2, \ldots\} = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Let $\mathcal{V} = \{\nu_n\}_{n\in\Lambda}$ be zeros of $d_2(\lambda)$, and let m_n be the multiplicity of ν_n ($\nu_n = \nu_{n+1} = \ldots = \nu_{n+m_n-1}$). Denote $S := \{n \geqslant 2 : \nu_{n-1} \neq \nu_n\} \cup \{1\}$, $I := \{n \in S : m_n > 1\}$,

$$\omega_n = \begin{cases} 0, & Q(\nu_n) = 0, \\ +1, & Q(\nu_n) \neq 0, \ \arg Q(\nu_n) \in [0, \pi), \\ -1, & Q(\nu_n) \neq 0, \ \arg Q(\nu_n) \in [\pi, 2\pi), \end{cases}$$

$\omega_{n\nu} := d_1^{(\nu)}(\nu_n)$, $\nu = \overline{0, m_n - 1}$, $I_0 = \{n \in I : \omega_n = 0\}$, $I_1 = \{n \in I : \omega_n \neq 0\}$. The sequence $\Omega = \{\omega_n\}_{n\in S} \cup \{\omega_{n\nu}\}_{n\in I_0,\ \nu=\overline{1,m_n-1}}$ is called the Ω-sequence for L. Denote $d(\rho) = \alpha(d_1(\rho) + (ih_1\rho + h_0)d_2(\rho)) + \beta C_2'(T,\rho) - (1 + \alpha\beta)$. Let α and β are known a priori and fixed. Inverse problems are formulated as follows.

Inverse problem 1. Given $d(\rho), d_2(\rho), \Omega$, construct $p_k(x), h_k, T$.

Inverse problem 2. Given $\mathcal{P}, \mathcal{V}, \Omega$, construct $p_k(x), h_k, T$.

Theorem 1. *The specification of $d(\rho), d_2(\rho)$ and Ω uniquely determines $p(x), q(x), h_1, h_0$ and T.*

Theorem 2. *The specification of $\mathcal{P}, \mathcal{V}$ and Ω uniquely determines $p(x)$, $q(x)$, h_1, h_0 and T.*

Algorithms for the solutions of Inverse problems 1 and 2 are also obtained: see [1].

References

1. *Yurko V. A.* Inverse problems for non-selfadjoint quasi-periodic differential pencils // Analysis and Math. Physics. — 2012. — Vol. 2, No 3. — C. 215–230.

This work was supported in part by Grants 10-01-00099 and 10-01-92001-NSC of Russian Foundation for Basic Research and Taiwan National Science Council.

Recovering aerosol particle size distribution function on the set of bounded piecewise-convex functions

Y. Zhang

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
zhangye@physics.msu.ru

For the sun-photometer, if the aerosols can be considered as globular particles, then the attenuation of the aerosols can be written as the integral equation of the first kind:

$$\tau_{aero}(\lambda) = \int_0^\infty \pi r^2 Q_{ext}(r, \lambda, \eta) n(r) dr. \tag{1}$$

where τ_{aero} is the measured aerosol optical thickness (AOT); r is the particle radius; $n(r)$ is the columnar aerosol size distribution (i.e. the number of particles per unit area per unit radius interval in a vertical column through the atmosphere); η is the complex refractive index of the aerosol particles; λ is the wavelength; and $Q_{ext}(r, \lambda, \eta)$ is the extinction efficiency factor from Mie's theory.

Since AOT can be obtained from the measurements of the solar flux density with sun-photometers, one can retrieve the size distribution by the inversion of AOT measurements through the above equation. This type of method is called extinction spectrometry. In practice, the sun-photometer CE 318, which we used to obtain observation data can be modeled numerically by the operator equation of the first kind, can only supply four aerosol modelled, i.e., only four observations are obtained, which are insufficient for the retrieval of the particle size distribution function $n(r)$ by solving equation (1).

In this report, to overcome the oscillations in recovering of the particle size distribution function $n(r)$, we introduce some a priori constraints to the solution. We first assume that, the particle size distribution is always nonnegative and piecewise-convex, and then we study the inflection point regularization method and develop the conjugate gradient projection method for solving the corresponding optimization problem. Here, the regularization parameter can be considered as the number of inflection points and their positions.

We assume that (1) The particle size radius interval of interest is $\mathcal{R} := [0.1, 2]\mu m$, (2) This aerosol particle size distribution function consists of the multiplication of two functions $h(r)$ and $f(r)$: $n(r) = h(r)f(r)$, where $h(r)$ is a rapidly varying function of r, while $f(r)$ is more slowly varying. Since most measurements of the continental aerosol particle size distribution reveal that these functions follow a Junge distribution, $h(r) = r^{-(\nu+1)}$, where ν is a shaping constant with typical values in the range 2.0–4.0. To

This work was supported by RFBR, projects No. 11-01-00040, No. 12-01-91153-NSFC-a, No. 12-01-00524-a.

simplify the problem, we define a operator A, which is a mapping of $C(\mathcal{R})$ (or $\mathcal{L}_2(\mathcal{R})$) to $\mathcal{L}_2(\mathcal{R})$:

$$A[f] := \int_{\mathcal{R}} \pi r^2 Q_{ext}(r, \lambda, \eta)\, h(r)\, f(r)\, dr.$$

Suppose that, the exact solution $\bar{f}$ belongs to the set of bounded piecewise-convex functions $\widetilde{\mathcal{F}}$. we can prove that $\widetilde{\mathcal{F}}$ on some bounded segment $\mathcal{R}$ almost is a compact set in $\mathcal{L}_p(\mathcal{R})(1 < p < \infty)$. Usually, instead of the exact data $\{A, \bar{\tau}\}$ we are given an approximate admissible data $\{A_h, \tau_\delta\}$, then instead of problem (1) we can consider its corresponding variational problem: $\min_{f \in \widetilde{\mathcal{F}}} \|A_h f - \tau_\delta\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathcal{R})}$, which almost is a well-posed problem. In fact, using the language of computability theory, we can prove: (1) if we are given the largest number of inflection points, our problem belongs to class **P**. (2) if we do not know the largest number of inflection points, our problem already belongs to class **NP**-completeness.

Moreover, in this talk, we will discuss the method of constructing the lower and upper solutions of problem (1) on the set $\widetilde{\mathcal{F}}$ and calculate the a posteriori error estimator of the approximate solution by $\Delta(\eta) = \|f^r - f^l\|_{\mathcal{F}}$ and $\Delta(\eta, r) = f^r(r) - f^l(r)$, where $f^l(r)$ is the lower solution and $f^r(r)$ is the upper one.

Our numerical tests for both the synthetic problem and practical problem are given to show the efficiency and feasibility of the proposed algorithm, which is called the inflection points method [1].

References

1. *Wang Y. F., Zhang Y., Lukyanenkob D. V., Yagola A. G.* Recovering aerosol particle size distribution function on the set of bounded piecewise-convex functions // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2013. — To be published.

Методы оптимального управления в обратных задачах маскировки материальных тел

Г. В. Алексеев, О. С. Ларькина

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия
alekseev@iam.dvo.ru

В этой заметке мы сформулируем и исследуем задачи управления, возникающие при разработке технологий создания средств маскировки материальных объектов методом волнового обтекания. Начиная с пионерской работы [1], исследованию математических задач, связанных с созданием средств маскировки материальных объектов от электромагнитной или акустической локации, посвящено большое количество работ (см., например, [2, 3] и ссылки там). В цитируемых работах эффект маскировки достигается за счет выбора параметров неоднородной анизотропной среды, заполняющей маскировочную оболочку, путем решения соответствующей обратной задачи для уравнений Максвелла или уравнения Гельмгольца с переменными коэффициентами. Нужно отметить, что техническая реализация решений, полученных в этих статьях, связана со значительными техническими трудностями.

Можно предложить несколько способов преодоления этих трудностей. Первый способ состоит в аппроксимации точных решений исследуемой задачи маскировки приближенными решениями, которые допускают относительно простую техническую реализацию. Еще один способ состоит в использовании альтернативного метода маскировки материальных объектов, основанного на покрытии их специальными материалами. Внесение такого покрытия моделируется введением импедансного граничного условия, связывающего между собой электрическое и магнитное поля (либо звуковое давление и нормальную компоненту колебательной скорости в случае акустической локации) через граничный коэффициент, называемый поверхностным импедансом.

В случае, если объект имеет неизменную форму, задача его маскировки от обнаружения (радаром или сонаром) сводится к выбору такого покрытия, которое минимизирует рассеянную волну, возникающую при падении на объект первичной электромагнитной или акустической волны. Математически эта задача сводится к решению обратной экстремальной задачи. Роль управления в ней играет поверхностный импеданс λ покрытой части границы, а в качестве функционального ограничения выступает используемая модель распространения электромагнитных или акустических волн, рассматриваемая при импедансном граничном условии. Именно эта задача рассматривается в данной заметке для двух двумерных моделей распространения акустических или электромагнитных волн. Для акустических волн обоснование физической подоплеки данного подхода можно найти в [4]. Для электромагнитных

Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ № 10-01-00219-а и проекта № 12-1-П17-03 ДВО РАН, тематика которого соответствует Программе 17 фундаментальных исследований Президиума РАН..

волн близкие задачи управления импедансом для трехмерных уравнений Максвелла, рассматриваемых в ограниченной области, изучены в [5,6]. Мы докажем разрешимость рассматриваемых обратных задач и выведем системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума. Далее на основе их анализа будут установлены достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость оптимальных решений относительно малых возмущений как исходного функционала качества, так и падающей на объект волны.

Литература

1. *Pendry J.B. Shurig D., Smith D.R.* Controlling electromagnetic fields // Science. — 2006. — Vol. 312. — P. 1780–1782.
2. *Cummer S.A., Popa B.I., Schurig D. et al.* Scattering theory derivation of a 3 D acoustic cloaking shell // Phys. Rev. Letters. — 2008. — Vol. 100. — P. 024301.
3. *Алексеев Г.В., Романов В.Г.* Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики // Сиб. журн. индустр. матем. — 2012. — Т. 6, № 2. — С. 1–6.
4. *Бобровницкий Ю.И.* Научные основы акустического стелса // ДАН. — 2012. — Т. 442, № 1. — С. 41–44.
5. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В.* Теоретический анализ экстремальных задач граничного управления для уравнений Максвела // Сиб. журн. индустр. матем. — 2011. — Т. 14, № 1. — С. 3–16.
6. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В., Романов В.Г.* Оценки устойчивости решений задач граничного управления для уравнений Максвела при смешанных граничных условиях // ДАН. — 2012. — Т. 447, № 1. — С. 7–12.

Control approach in inverse cloaking problems for material bodies

G. V. Alekseev, O. S. Larkina

Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia
alekseev@iam.dvo.ru

Обратная задача определения коэффициента в эллиптическом уравнении

Р. А. Алиев

Азербайджанский университет кооперации, Баку, Азербайджан
ramizaliyev3@rambler.ru

Обратные задачи для линейных и нелинейных уравнений эллиптического типа рассмотрены в работах [1]– [9]. В работе [2], [10] используя метод оценок типа Карлемана [11]– [12] получена теорема единственности для широкого класса обратных задач. В работе пользуясь этой идеей получена теорема единственности для уравнения эллиптического типа.

Рассмотрим задачу об определении $\{q(u), u(x,y), \varphi_2(y)\}$

$$-\Delta u + u = h_1(x,y)q(u) + h_2(x,y), \ \ (x,y) \in D, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \phi_1(x), u_y(x,l_2) = \phi_2(x), \ \ 0 \leqslant x \leqslant l_1, \tag{2}$$

$$u_x(0,y) = \varphi_1(y), u_x(l_1,y) = \varphi_2(y), \ \ 0 \leqslant y \leqslant l_2, \tag{3}$$

$$u(d_0,y) = \chi(y), 0 < d_0 < 1, \ \ 0 \leqslant y \leqslant l_2, \tag{4}$$

$$u_y\,|_{y=0} = g(x), \ \ 0 \leqslant x \leqslant l_1, \tag{5}$$

удовлетворяющих условиям $\phi_{1_x}(0) = \varphi_1(0), \varphi_{1_y}(l_2) = \phi_{2_x}(0), \phi_{2x}(l_1) = \varphi_{2y}(l_2), \phi_{1x}(l_1) = \varphi_2\,(0)\ g_x(0) = \varphi_{1y}(0), \chi(0) = \phi_1(d_0), \chi(1) = \phi_2(d_0)$.. Здесь $D = \{(x,y)\,|0 < x < 1\ , 0 < y < 1\}$, $h_i(x,y), \phi_i(x)$, $i = 1,2, \varphi_1(y)$, $\chi(y)$, $g(x)$ — известные функции, $h_i(x,y) \in C^{3+\alpha}(\bar{D})$, $i = 1,2,$, $\phi_1(x) \in C^{4+a}[0,l_1]$, $\phi_2(x) \in C^{3+a}[0,l_1]$, $\varphi_1(y) \in C^{3+\alpha}[0,l_2]$, $\chi(y) \in C^{4+\alpha}\,[0,l_2]$, $g(x) \in C^{3+a}[0,l_1]$, $0 < \alpha < 1$, R_1, R_2 — некоторые числа.

Определение. Функции $\{q(u), u(x,y), \varphi_2(y)\}$ назовем решением задачи (1)–(5), то функции $q(u), \varphi_2(y)$ принадлежат соответственно классам $\mathrm{M}[R_1,R_2]$ и $\mathrm{N}[0,l_2]$, в котором $0 < \mu_1 \leqslant q(u) \leqslant \mu_2, \nu_1 \leqslant q'(u) \leqslant \nu_2 < 0$, $q(u) \in C^2[R_1,R_2]$, и $\varphi_2(y) \geqslant \mu > 0$, $\varphi_{2y}(y) \geqslant 0$, $\varphi_2(y) \in C^3[0,l_2]$, $u(x,y) \in C^4(\bar{D})$, удовлетворяются соотношениям (1)–(5).

Обозначим $\alpha_0 = \phi_1(0), \alpha_1 = \phi_1(1), \alpha_2 = \chi(1)$. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$. Для каждого $z \in [\alpha_1, \alpha_2]$ через $s_z(x)$ обозначим функцию $y = s_z(x)$, являющуюся решением уравнения $u(x, s_z(x)) = z, (x, s_z(x)) \in \bar{D}$. Введем обозначение: $D_z = \{(x,y) \in D, u(x,y) < z\}$.

Лемма 1. *Пусть решение задачи (1)–(5) существует и выполнены следующие условия*

$$h(x,y) > 0, h_{i\,x}(x,y) > 0, h_{i\,y}(x,y) > 0, i = 1,2,$$

$$g(x) \geqslant \mu, \varphi_1(y) \geqslant \mu, \phi_2(x) \geqslant \mu, \phi_{1x}(x) \geqslant \mu,$$

$$\phi_{2x}(x) \geqslant 0, \ \ \varphi_{1y}(y) \geqslant 0.$$

Тогда верны следующие оценки

$$u_x(x,y), u_y(x,y) \geqslant \lambda_1 > 0, \tag{6}$$

где

$$\mu = \min\left\{\min_{x\in[0,1]} g(x), \min_{1\leqslant i\leqslant 2}\min_{x\in[0,1]} \phi_{ix}(x), \min_{y\in[0,1]} \varphi_{1y}(y)\right\},$$

$$\lambda_1 = \min\left\{\mu, \min_{\bar{D}} \frac{\mu_1 h_{1x}(x,y) + h_{1x}(x,y)}{1-\nu_1 h(x,y)}, \quad \min_{\bar{D}} \frac{\mu_1 h_{1y}(x,y) + h_{2y}(x,y)}{1-\nu_1 h(x,y)}\right\}.$$

В силу (6) функция $s_z(x)$ корректно определена для всех x таких, что $u(x,1) \geqslant z$ и в частности, для всех $x \in [d_0, 1]$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$ и функция $q(z)$ известна при $z \in (\alpha_0, \alpha_1)$. Тогда найдется не более одной вектор-функции $(u, q, \varphi_2(y)) \in C^4(\bar{D}_{\alpha_2}) \times \mathrm{M}[\alpha_0, \alpha_2] \times \mathrm{N}[0, s_{\alpha_2}(l_2)]$ удовлетворяющий (1) - (5), (6) и такой, что $u(x,y) \in C^4(\bar{D})$.*

Литература

1. *Искендеров А. Д.* Обратная задача об определении коэффициентов квазилинейного эллиптического уравнения // Изв. АН Аз.ССР. — 1978. — №2. — С. 80–85.
2. *Клибанов М. В.* Единственность в целом обратных задач для одного класса дифференциальных уравнения // Диффенц. ур-ния. — 1984. — Т. 20, № 11. — С. 1947–1953.
3. *Sylvester J.,Uhlmann G.* A qlobal uniqueness theorem for an inverse boundary value problem // Annals of Mathematics. — 1987. — Vol. 125. — P. 153–169.
4. *Вабищевич П. Н.* A qlobal uniqueness theorem for an inverse boundary value problem // Annals of Mathematics. — 1987. — Vol. 125. — P. 153–169.
5. *Соловьев В. В.* Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике // Журнал выч. мат. и мат. физики. — 2007. Т. 47, № 8. — С. 1365–1377.
6. *Runsheng Yang Yunhua Ou.* Inverse coefficient problems for nonlinear elliptic equations // ANZIAM. — 2007. — Vol. 1149:2. — P. 271–279.
7. *Вахитов И. С.* Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии-реакции // Дальневосточный матем. жур. — 2010. — Т. 10, № 2. — С. 93–105.
8. *Алиев Р. А.* Об одной обратной задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. Сер. — 2011. — Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика. — Вып. 1. — С. 3–9.
9. *Алиев Р. А.* Об одной обратной задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа // Изв.высших учебных заведений: Северо-Кавказский регин. Серия: естественные науки. — 2012. —№ 5. — С. 5–10.

10. *Клибанов М. В.* . Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // Сибирский матем. ж. — 1986. — Т. 27, № 5. — С. 83–94.
11. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980.
12. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — М.: Мир, 1965.

Return problem of definition of factor in the elliptic equation

R. A. Aliyev

The Azerbaijan University of Cooperation, Baku, Azerbaijan
ramizaliyev3@rambler.ru

О классе неединственности для оператора теплопроводности в вырождающейся области

М. М. Амангалиева, М. Т. Дженалиев, М. Т. Космакова, М. И. Рамазанов

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
muvasharkhan@gmail.com
muvasharkhan@gmail.com
muvasharkhan@gmail.com

Во многих приложениях возникает необходимость решения мо- дельных задач для уравнений нестационарного переноса в областях с подвижной границей [1]. Вследствие зависимости размера обла- сти от времени, тем более когда область вырождается в некоторых точках, не всегда удается согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границы области теплопереноса. Поэтому вопрос об исследовании краевых задач в области с вырождением в начальный момент времени является актуальным. Для однородной граничной задачи ($0 < b = \text{const} < \infty$):

$$u_t(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0,\ u(x,\ t)|_{x=0} = 0,\ u(x,\ t)|_{x=b\,t} = 0, \tag{1}$$

рассматриваемой в области $G = \{(x,\ t):\ t > 0,\ 0 < x < b\,t\}$, требуется найти функциональный класс существования нетривиального решения.

Теорема 1 (основной результат). *В весовом классе существенно ограниченных функций*

$$\mathcal{U} = \left\{u|\ \exp\left(\frac{x^2}{4a^2t}\right)[\gamma(x,t)]^{-1}\,u(x,t) \in L_\infty(G)\right\}, \tag{2}$$

где

$$\gamma(x,t) = \max_{\{x,t\}\in G}\left\{\frac{\sqrt{b\,t}}{b\,t-x};\ \exp\left(\frac{(2b\,t-x)^2}{4a^2t}\right)\right\},$$

граничная задача (1) имеет ровно одно нетривиальное решение. Например, функции

$$u_1(x,t) = x^2 + 2a^2t,\ \ u_2(x,t) = t^{-1/2}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2t}\right\},$$

являющиеся решениями уравнения (1), принадлежит классу (2). Используя представление:

$$u_0(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\nu_0(\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{x-b\,\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{(x-b\,\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi_0(\tau)\,d\tau,$$

для граничной задачи (1) получим интегральное уравнение относительно неизвестной плотности $\varphi_0(t)$:

$$\varphi_0(t)-\int\limits_0^t K(t,\,\tau)\,\varphi_0(\tau)\,d\tau=0, \tag{3}$$

$$\exp\left(\frac{b^2\,(t-\tau)}{4a^2}\right)K(t,\tau)=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{b\,(t+\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{b^2\,t\tau}{a^2(t-\tau)}\right)+\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\right\},$$

$$\nu_0=\frac{1}{2\,a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{b\,\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{b^2\,\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi_0(\tau)\,d\tau.$$

Применяя для интегрального уравнения (3) метод регуляризации Карлемана-Векуа, получаем неоднородное уравнение Абеля второго рода. Единственность решения последнего [2] устанавливает существование нетривиального решения граничной задачи (1) из весового класса существенно ограниченных функций (2).

Литература

1. *Ким Е. И.* Решение одного класса сингулярных интегральных уравнений с линейными интегралами // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 113. — С. 24–27.
2. *Ахманова Д. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* Об особом интегральном уравнении Вольтерра второго рода со спектральным параметром // Сиб. мат. журн. — 2011. — Т. 52, № 3. — С. 3–14.

About a non-uniqueness class for the heat operator in degenerating region

M. M. Amangaliyeva, M. T. Jenaliyev, M. T. Kosmakova, M. I. Ramazanov

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

О неклассических линейных уравнениях Вольтерра I рода

А. С. Апарцин

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия, apartsyn@isem.sei.irk.ru

Впервые уравнения вида

$$\int\limits_{a(t)}^{t} K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

для частного случая $a(t) = q(t)$, $0 < q < 1$, рассматривал еще Вольтерра [1]. В статье [2], посвященной столетнему юбилею интегральных уравнений Вольтерра I рода, приведена библиография публикаций начала XX-го века, в которых рассматривалось (1). Заметный импульс в изучении таких уравнений был придан В. М. Глушковым [3], применившим оператор из (1) для моделирования процессов развития макроэкономической системы.

Теория и численные методы решения (1) для случаев $a(0) < 0$ и $a(0) = 0$ имеют существенные отличия и детально рассмотрены в [3]. В [4] в связи с изучением интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывным ядром введена следующая конструкция:

$$\sum_{i=1}^{n} V_i x \equiv \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

в которой $a_i(0) = 0$, $i = \overline{0,n}$; $0 \equiv a_n(t) < a_{n-1}(t) < \ldots < a_0(t) \equiv t$.

Интегральное уравнение (2) может быть использовано для моделирования развивающейся системы, элементы которой разбиты на n возрастных групп с показателями эффективности функционирования $K_i(t,s)$, $i = \overline{1,n}$ [5].

В данной работе получены достаточные условия корректности по Адамару уравнения (2) на паре $(C_{[0,T]}, \overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]})$ на основании известной теоремы функционального анализа об ограниченности обратного к линейному оператору $V_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} V_i$, действующему из B_1 в B_2, и оценки $\left\|V_1^{-1}\right\|_{\overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]} \to C_{[0,T]}}$ (см. [3, с. 131]).

Рассмотрена также проблема численного решения (2). Предложена редукция (2) к виду, удобному для применения метода квадратур.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00722-а.

Литература

1. *Volterra V.* Sorpa alcune questioni di integrali definitive // Ann. Mat. Pura Appl. — 1897. — (2) 25. — P. 139–178.
2. *Brunner H.* 1896–1996: One hundred years of Volterra integral equations of the first kind // Applied Numerical Mathematics. — 1997. — Vol. 24. — P. 83–93.
3. *Глушков В. М.* Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие системы и машины. — 1977. — № 2. — С. 3–6.
4. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1999.
5. *Сидоров Д.Н.* Последовательное приближение параметрических семейств решений интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами // Тезисы докладов Межд. конф. "Алгоритмический анализ неустойчивых систем", посвященной памяти В.К. Иванова. Екатеринбург, Россия. — 2011. — С. 70–71.
6. *Апарцин А.С.* Об одном подходе к моделированию развивающихся систем. Preprints 6 International Worshop "Generalized Ststements and Solutions of Control Problems" (CD-Proceedings). Gelendzhik-Divnomorskoe. — 2012. — P. 32–35.

On nonclassic linear Volterra equations of the first kind

A. S. Apartsyn

Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia
apartsyn@isem.sei.irk.ru

Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования стратегий развития электроэнергетических систем

А. С. Апарцин, И. В. Сидлер

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия, apartsyn@isem.sei.irk.ru, krlv@isem.sei.irk.ru

В работе [1] В. М. Глушковым для построения математической модели развивающейся макроэкономической системы были введены (неклассические) интегральные операторы Вольтерра, у которых оба предела интегрирования переменные, нижний предел определяет динамику замены устаревших элементов системы, а ядро отражает эффективность её функционирования. Подобные модели нашли применение во многих приложениях. В [2, 3] на базе односекторного варианта модели В. М. Глушкова рассмотрена задача определения долгосрочных стратегий развития электроэнергетической системы (ЭЭС), которая в простейшем случае (без оптимизации развития ЭЭС по некоторому экономическому критерию) сводится к решению уравнения Вольтерра I рода

$$\int\limits_{a(t)}^{t} K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где $y(t)$ – экспертно задаваемая динамика электропотребления топливно-энергетическим комплексом.

Теория и численные методы решения (1) для случаев $a(0) < 0$ и $a(0) = 0$ имеют существенные отличия и детально исследованы в [4].

В [5] для моделирования развития ЭЭС вместо (1) введено уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

в соответствии с разбиением элементов системы на n возрастных групп.

В настоящей работе на базе (2) в зависимости от принятого механизма старения системы рассмотрены три типа моделей. Получены достаточные условия разрешимости соответствующих уравнений в классе непрерывных, кусочно-непрерывных и δ − функций.

Приводятся результаты расчетов как для тестовых примеров, так и для реальных данных по ЭЭС России.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00722-а.

Литература

1. *Глушков В. М.* Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие системы и машины. — 1977. — № 2. — С. 3–6.
2. *Апарцин А. С., Караулова И В., Маркова Е. В., Труфанов В. В.* Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики // Электричество. — 2005. — № 10. — С. 69–75.
3. *Маркова Е. В., Сидлер И. В., Труфанов В. В.* О моделях развивающихся систем типа Глушкова и их приложениях в электроэнергетике // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 7. — С. 20–28.
4. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. — 1999.
5. *Апарцин А.С.* Об одном подходе к моделированию развивающихся систем // Preprints 6 International Worshop “Generalized Ststements and Solutions of Control Problems” (CD-Proceedings). — Gelendzhik-Divnomorskoe, 2012. — P. 32–35.

Application of nonclassic Volterra equations of the first kind for modeling of development strategy of electric power systems

A. S. Apartsyn, I. V. Sidler

Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia
apartsyn@isem.sei.irk.ru, krlv@isem.sei.irk.ru

Единственность решения систем линейных интегральных уравнений фредгольма первого рода с двумя независимыми переменными

А. Асанов*, **З. А. Каденова**†

* *Кыргызско-Турецкий университет Манас, Бишкек, Кыргызстан*
avyt.asanov@mail.ru

† *Министерство Образования, Бишкек, Кыргызстан*
kadenova71@mail.ru

Рассмотрим систему уравнений вида

$$Ku \equiv \int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy+$$

$$+\int_{t_0}^T H(t,x,s)u(s,x)ds + \int_{t_0}^T \int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds =$$

$$= f(t,x), (t,x) \in G = \left\{(t,x) \in R^2 : t_0 \leqslant t \leqslant T, a \leqslant x \leqslant b\right\}, \qquad (1)$$

где

$$K(qt,x,y) = \begin{cases} A(t,x,y),\ t_0 \leqslant t \leqslant T;\ a \leqslant y \leqslant x \leqslant b; \\ B(t,x,y),\ t_0 \leqslant t \leqslant T,\ a \leqslant x \leqslant y \leqslant b. \end{cases}$$

$$H(t,x,s) = \begin{cases} M(t,x,s),\ t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,\ a \leqslant x \leqslant b; \\ N(t,x,s),\ t_0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T,\ a \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

$A(t,x,y), B(t,x,y)$, $M(t,x,s)$, $N(t,x,s)$, $C(t,x,s,y)$ — известные $n \times n$-мерные самосопряженные матричные функции, определенные соответственно в области

$$G_1 = (t,x,y) : t_0 \leqslant t \leqslant T, a \leqslant y \leqslant x \leqslant b,$$

$$G_2 = (t,x,y) : t_0 \leqslant t \leqslant T, a \leqslant x \leqslant y \leqslant b,$$

$$G_3 = (t,x,s) : t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, a \leqslant x \leqslant b,$$

$$G_4 = (t,x,y) : t_0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T, a \leqslant x \leqslant b, G^2 = G \times G,$$

$f(t,x)$ и $u(t,x)$ — соответственно известная и неизвестная n-мерные вектор-функции.

Основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [1], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В данной работе доказывается единственность решения системы (1).

Обозначим

$$P(s,y,z) = A(s,y,z) + B(s,z,y), (s,y,z) \in G_1,$$

$$Q(s,y,\tau) = M(s,y,\tau) + N(\tau,y,s), (s,y,\tau) \in G_3.$$

Потребуем выполнения следующих условий:

1) Непрерывные матрицы $P(s,b,a)$, $Q(T,y,t_0)$, $P_z(s,b,z)$, $Q_\tau(T,y,\tau)$ — неотрицательны соответственно при всех значениях $s \in [t_0,T], y \in [a,b], (s,z), (\tau,y) \in G$;

2) Непрерывные матрицы $P_y(s,y,a), Q_s(s,y,t_0)$, $P_{zy}(s,y,z)$, $Q_{\tau s}(s,y,\tau)$ — неположительны соответственно при всех значениях $(s,y) \in G, (s,y,z) \in G_1, (s,y,\tau) \in G_3$;

3) Выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий:

а) при почти всех $(s,y) \in G$ матрица $P_y(s,y,a)$ — отрицательна;

б) при почти всех $(s,z) \in G$ матрица $P_z(s,b,z)$ — положительна;

в) при почти всех $(s,y) \in G$ матрица $Q_s(s,y,t_0)$ — отрицательна;

г) при почти всех $(\tau,y) \in G$ матрица $Q_\tau(T,y,\tau)$ — положительна;

4) Все собственные значения симметричного матричного ядро $C(t,x,s,y)$ неотрицательны.

Теорема *Пусть выполняются условия 1), 2), 3) и 4). Тогда решение системы (1) единственно в пространстве $L_{2,n}(G)$.*

Литература

1. *Лаврентьев М. М.* Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 31–33.

Uniqueness of solutions of the system linear integral equations of the first kind with two variables

A. Asanov[*], Z. A. Kadenova[†]

[*] *Kyrgyz-Turkish University Manas, Bishkek, Kyrgyzstan*
avyt.asanov@mail.ru

[†] *Ministry of Education, Bishkek, Kyrgyzstan*
kadenova71@mail.ru

Идентификация нераспадающихся краевых условий

А. М. Ахтямов

Башкирский государственный университет,
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа, Россия
AkhtyamovAM@mail.ru

Изучается вопрос об идентификации нераспадающихся краевых условий следующей спектральной задачи:

$$l(y,\lambda) = \frac{d^2\,y}{dx^2} + p_1(x,\lambda)\,\frac{d\,y}{dx} + p_2(x,\lambda)\,y = 0,$$

$$U_j(y) = \sum_{k=1}^{2} \Big(a_{jk}\,y^{(k-1)}(0) + a_{j,k+2}\,y^{(k-1)}(1) \Big) = 0, \quad j = 1, 2,$$

где λ— спектральный параметр, $x \in [0,1]$,

$$p_1(x,\lambda) = \lambda\,p_{10} + p_{11}(x), \quad p_2(x,\lambda) = \lambda^2\,p_{20} + \lambda\,p_{21}(x) + p_{22}(x),$$

$$p_{i1}(x) \in C^1[0,1], \quad p_{22}(x) \in C[0,1], \quad p_{i0} = \text{const}, \qquad i = 1,\ 2,$$
$$\operatorname{rank}(a_{jk})_{2\times 4} = 2, \quad a_{jk} \in \mathbb{C}, \quad j = 1,2, \quad k = 1,2,3,4.$$

На основе условий Плюккера [1], возникающих при восстановлении матрицы по ее минорам максимального порядка, построено множество корректности задачи идентификации нераспадающихся краевых условий по пяти собственным значениям и доказана корректность ее по А.Н. Тихонову. В случае, когда ранг некоторой матрицы F равен пяти, найдено явное решение задачи идентификации матрицы нераспадающихся краевых условий, выписанное в терминах характеристического определителя соответствующей спектральной задачи.

Литература

1. *Ахтямов А. М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения. — М.: Физматлит, 2009.

Identification of nonseparated boundary conditions

A. M. Akhtyamov

Bashkir State University, Mavlutov Institute of Mechanics, Ufa, Russia
AkhtyamovAM@mail.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 11-01-97002-р_поволжье_а, № 11-01-00293-а, № 12-01-00567-а.

Границы применимости метода малого параметра решения обратных многомерных задач

А. С. Барашков, В. А. Борхаленко

Московский Энергетический Институт, Москва, Россия
BarashkovAS@mpei.ru, BorkhalenkoVA@mpei.ru

В работе [1] и других работах того же автора разработан метод решения обратных коэффициентных задач для уравнений с частными производными, который не требует большого числа решений соответствующих прямых задач для уравнений с частными производными. Примерами таких задач служит задача по восстановлению коэффициента $\sigma(x,y)$ в уравнении Гельмгольца или восстановление коэффициента $\sigma(x,y,z)$ в системе уравнений Максвелла. Для определенности будем иметь в виду уравнение Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda\sigma\left(x,y\right)u=0,\quad 0<y<1,\quad -\infty<x<\infty.$$

Пусть для этого уравнения поставлена граничная задача, которая имеет единственное решение и пусть об этом решении есть некоторые избыточные данные при $y=0$, которые и служат информацией для решения обратной задачи. Обозначим эти данные $\varphi(x,\lambda)$. Таким образом, нахождение по коэффициенту $\sigma(x,y)$ функции $\varphi(x,\lambda)$, $x\in(-\infty,\infty)$, $\lambda\in\Lambda$, называется прямой задачей. Восстановление коэффициента $\sigma(x,y)$ по функции $\varphi(x,\lambda)$ называется обратной задачей. В методе малого параметра активно используется одномерный аналог многомерной задачи. Для уравнения Гельмгольца таким аналогом служит уравнение:

$$\frac{d^2 V}{dy^2}+\lambda\sigma\left(y\right)V=0,\quad 0<y<1.$$

Информацией для решения обратной одномерной задачи по восстановлению коэффициента $\sigma(y)$ служат избыточные данные о решении $V(y,\lambda)$ при $y=0$. Обозначим эти данные $\psi(\lambda)$. Считаем, что известен алгоритм решения одномерной обратной задачи (построения квазирешения одномерной обратной задачи), который на точных данных $\psi(\lambda)$ дает точное решение $\sigma(y)$. Введем операторы решения прямых и обратных задач: М-оператор решения прямой многомерной задачи: $M(\sigma(x,y))=\varphi(x,\lambda)$, M_0 — оператор решения прямой одномерной задачи $M_0(\sigma(y))=\psi(\lambda)$, K_0 — оператор решения обратной одномерной задачи: $K_0(\widetilde{\psi}\,(\lambda))=\widetilde{\sigma}(y)$, причем $K_0(M_0(\sigma(y)))=\sigma(y)$. Строим последовательность $\{\sigma_n(x,y)\}$. Пусть известны данные для решения обратной многомерной задачи – функция $\varphi(x,\lambda)$. Нулевое приближение находим по формуле $\sigma_0(x,y)=K_0(\varphi(x,\lambda))$ (переменная x выступает в роли параметра). Пусть уже построено приближение $\sigma_k(x,y)$. Следующее приближение $\sigma_{k+1}(x,y)$ получается после проведения нескольких действий. Находим по $\sigma_k(x,y)$ решение прямой многомерной задачи и решение прямой одномерной задачи: $\varphi_k(x,\lambda)=M(\sigma_k(x,y))$,

$\psi_k(x,\lambda) = M_0(\sigma_k(x,y))$. Коэффициент $\sigma_{k+1}(x,y)$ находим с помощью решения одномерной обратной задачи:

$$\sigma_{k+1}(x,y) = K_0\left(\psi_k(x,\lambda) + \varphi(x,\lambda) - \varphi_k(x,\lambda)\right).$$

Показано при достаточно общих условиях [1], что последовательность $\{\sigma_n(x,y)\}$ асимптотически сходится к решению многомерной обратной задачи — коэффициенту $\sigma(x,y)$. При этом результат о единственности решения многомерной обратной задачи не используется, см. [1, 2].

В настоящем докладе выясняется, в каких ситуациях метод малого параметра предпочтительнее других методов решения многомерных обратных задач. Приближенным решением обратной задачи $\widetilde{\sigma}(x,y)$ считается n-ый член последовательности $\sigma(x,y) \approx \widetilde{\sigma}(x,y) = \sigma_n(x,y)$. Номер n выбирается из следующих соображений : $n \leqslant 40$; $\|\varphi_n(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\| \leqslant 0.01\,\|\varphi_0(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\|$ (что раньше наступит). Коэффициент $\sigma(x,y)$ задавался параметрически с помощью функций $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_5(x)$. Решение считалось найденным, если по приближенному решению можно было определить точки локальных минимумов и максимумов функций $a_j(x)$. Отметим, что в приложениях такие сведения, как правило, и интересны. Например, нефтяные и газовые месторождения приурочены к так называемым куполам.

Численные эксперименты строились следующим образом. В коэффициент $\sigma(x,y)$ вводился параметр ε плавности изменения по переменной x: $\sigma(x,y) = \sum(\varepsilon x, y)$, где $\sum(\zeta, y)$ — фиксированная функция двух переменных. Определялся максимальный параметр ε_1, при котором решение обратной многомерной задачи на основе одномерной модели, т.е функция $\sigma_0(x,y) = \sum_0(\varepsilon_1 x, y)$ давало еще удовлетворительные результаты: $\sigma(x,y) = \sum(\varepsilon_1 x, y) \approx \sum_0(\varepsilon_1 x, y) = \sigma_0(x,y)$. Далее параметр ε увеличивался до значения ε_2, а именно до тех пор, пока решение обратной многомерной задачи, полученное методом малого параметра, т.е функция $\sigma_n(x,y)$, $n \leqslant 40$, давало удовлетворительные результаты. Выяснилось, что отношение $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} > 4$

Литература

1. *Barashkov A. S.* Small parameter Method in Multidimensional Inverse Problems. — Utrecht: VSP, 1998.
2. *Барашков А. С.* Об определении характеристик слоя // Вестник Московского энергетического института. — 2012, № 2. — С. 181–183.

The borders of applicability of the small parameter method for solution of multidimensional inverse problems

A. S. Barashkov, V. A. Borkhalenko

Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russia
BarashkovAS@mpei.ru, BorkhalenkoVA@mpei.ru

Обратные задачи для уравнений Максвелла при смешанных граничных условиях

Р. В. Бризицкий

Институт прикладной математики, Владивосток, Россия
mlnwizard@mail.ru

В настоящей заметке исследуются краевые и экстремальные задачи для гармонических по времени уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = \mathbf{0}, \ \ \mathrm{rot}\,\mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J},$$

рассматриваемых в ограниченной области Ω с липшицевой границей Γ, состоящей из двух частей Γ_D и Γ_I, при граничных условиях

$$\mathbf{E}\times\mathbf{n} = \mathbf{k}\text{на}\Gamma_D, \ \ \mathrm{rot}\,\mathbf{E}\times\mathbf{n} + i\alpha(\mathbf{n}\times\mathbf{E})\times\mathbf{n} = \mathbf{h}\text{на}\Gamma_I.$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряженностей электрического и магнитного полей, $\mathbf{J}$ — заданная плотность электрических токов, ε и μ — постоянные электрическая и магнитная проницаемости, ω — круговая частота, i — мнимая единица, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ области Ω, $\mathbf{k}$ — заданная на участке Γ_D функция, α и $\mathbf{h}$ — заданные на другом участке Γ_I границы Γ функции, α — функция поверхностного импеданса участка Γ_I.

Первое условие в (198) при $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ означает идельную проводимость участка Γ_D. Граничное условие на участке Γ_I при $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ называют импедансным граничным условием. Физически оно отвечает ситуации, когда участок Γ_I идельно проводящей границы покрыт тонким слоем сильно поглощающего материала, например, с целью маскировки объекта.

На основе метода, разработанного в [1–3], доказывается разрешимость краевой задачи и задачи управления для уравнений (198). Роль управлений играют граничные функции α и $\mathbf{h}$. Выводится система оптимальности, на основе ее анализа устанавливаются условия на исходные данные, обеспечивающие устойчивость решений конкретных экстремальных задач относительно малых возмущений как функционала качества, так и функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{k}$. Выводятся оценки локальной устойчивости.

Полученные результаты по задачам граничного управления могут быть использованы для исследования проблемы однозначного определения характеристик препятствия по отраженной электромагнитной волне. Указанные обратные задачи рассеяния известны, например, по работам [4, 5].

Работа выполнена при поддержке проектов РФФИ (№ 10-01-00219-а и № 12-01-31288 мол_а) и проекта № 12-1-П17-03 ДВО РАН, тематика которого соответствует Программе 17 фундаментальных исследований Президиума РАН.

При $\Gamma_D = \emptyset$, т.е. при краевых условиях

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} + i\alpha(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{на} \Gamma,$$

установлены достаточные условия на исходные данные задачи (198), (198), при которых существует ее регулярное решение из пространства $\mathbf{H}^1(\Omega)$. При этом требования к границе Γ достаточно высокие: $\Gamma \in C^2$. Так же доказано существование регулярного решения соответствующей экстремальной задачи.

Литература

1. *Бризицкий Р.В., Савенкова А.С.* Обратные экстермальные задачи для уравнений Максвелла // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2010. — Т. 50, № 6. — С. 1038–1046.
2. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В.* Теоретический анализ экстремальных задач граничного управления для уравнений Максвела // Сиб. журн. индустр. матем. — 2011. — Т. 14, № 1. — С. 3–16.
3. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В., Романов В.Г.* Оценки устойчивости решений задач граничного управления для уравнений Максвела при смешанных граничных условиях // ДАН. — 2012. — Т. 447, № 1. — С. 7–12.
4. *Cakoni F., Colton D.* The determination of the surface impedance of a partially coated obstacle from far field data // SIAM. J. Appl. Math. — 2004. — Vol. 64. — P. 709–723.
5. *Cakoni F., Colton D., Monk P.* The electromagnetic inverse scattering problem for partially coated Lipschitz domains // Proc. Royal Soc. Edinburg. — 2004. — Vol. -34. — P. 661–682.

Inverse problems for Maxwell equations under mixed boundary conditions

R. V. Brizitskii

Institute of Applied Mathematics, Vladivostok, Russia
mlnwizard@mail.ru

О симметрийных свойствах бесконечномерных лагранжевых систем с не-B_u-потенциальными силами

С. А. Будочкина

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
sbudotchkina@yandex.ru

Рассматривается уравнение

$$N(u) \equiv P_{2u,t}u_{tt} + P_{1u,t}u_t + P_{3u,t}u_t^2 + Q(t,u) = 0, \tag{1}$$

$$u \in D(N) \subseteq U \subseteq V,\ \ t \in [t_0,t_1] \subset \mathbb{R},\ \ u_t \equiv D_t u \equiv \frac{d}{dt}u,\ \ u_{tt} \equiv \frac{d^2}{dt^2}u.$$

Здесь $\forall t \in [t_0,t_1]$, $\forall u \in U_1$ операторы $P_{iu,t} : U_1 \to V_1$ $(i = \overline{1,3})$ являются линейными; $Q : [t_0,t_1] \times U_1 \to V_1$ — произвольный оператор, вообще говоря, нелинейный; $D(N)$ — область определения оператора N; $U = C^2([t_0,t_1];U_1)$, $V = C([t_0,t_1];V_1)$, U_1, V_1 — действительные линейные нормированные пространства, $U_1 \subseteq V_1$.

Операторное уравнение (1) может быть обыкновенным дифференциальным, дифференциальным уравнением в частных производных, интегро-дифференциальным уравнением, уравнением с отклоняющимися аргументами и др., а также системой таких уравнений.

В работе используются обозначения и терминология [1–5].

Основные результаты.

1. Получены необходимые и достаточные условия представимости операторного уравнения со второй производной по времени (1) в форме уравнения Эйлера–Лагранжа с не-B_u-потенциальной плотностью силы, т. е. уравнения вида

$$\frac{\delta L}{\delta u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta u_t}\right) + \Lambda = 0,$$

где $\delta/\delta u$ и $\delta/\delta u_t$ - функциональные производные по u и u_t соответственно, L — обобщенный лагранжиан, Λ — плотность не-B_u-потенциальной силы.

В частности, операторный подход применен к исследованию представимости достаточно общего интегро-дифференциального уравнения с отклоняющимися аргументами в форме уравнения Эйлера–Лагранжа с непотенциальной плотностью силы.

2. Разработан конструктивный прием построения обобщенного лагранжиана, в общем случае не принадлежащего классу функционалов Эйлера–Лагранжа.

3. В терминах необходимых и достаточных условий определена структура уравнения (1) с квази-B_u-потенциальным оператором.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00554а.

4. Используя подход, основанный на применении теории преобразований переменных для установления инвариантности уравнений движения, получена формула для нахождения первых интегралов уравнения (1). Получено условие инвариантности до дивергенции действия по Гамильтону и также дан общий вид первых интегралов этого уравнения.

Теоретические результаты иллюстрируются конкретными примерами: уравнением малых поперечных колебаний шарнирно закрепленного прямолинейного трубопровода, по которому течет идеальная жидкость со скоростью $v(t)$ при отсутствии внутренного и внешного трения; уравнением Бюргерса; уравнением, описывающим колебания стержня с внутренним трением (материал Фойхта) в среде с сопротивлением; уравнением Пенлеве первого типа.

Автор выражает признательность профессору Савчину В.М. за внимание к работе.

Литература

1. *Савчин В. М.* Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. — М.: Изд-во УДН, 1991.
2. *Савчин В. М., Будочкина С. А.* О структуре вариационного уравнения эволюционного типа со второй производной по t // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, № 1. — С. 118–124.
3. *Budotchkina S. A., Savchin V. M.* On indirect variational formulations for operator equations // Journal of Function Spaces and Applications. — 2007. — Vol. 5, № 3. — P. 231–242.
4. *Будочкина С. А., Савчин В. М.* О B_u-гамильтоновых уравнениях в механике систем с бесконечным числом степеней свободы // Доклады Академии наук. — 2011. — Т. 439, № 4. — С. 583–584.
5. *Budochkina S. A.* Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — Vol. 3, № 1. — P. 18-28.

On symmetry properties of infinite-dimensional Lagrangian systems with non-B_u-potential forces

S. A. Budochkina

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
sbudotchkina@yandex.ru

Совмещенная постановка обратной задачи электромагнитного зондирования

А. В. Бухаров[*], С. И. Кабанихин[†], М. А. Шишленин[‡]

[*] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия buharovsasha@mail.ru*

[†] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия, kabanikhin@sscc.ru*

[‡] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия, mshishlenin@ngs.ru*

В работе рассматриваются численные методы решения совмещенной обратной задачи электромагнитного зондирования [1].

Постановка задачи:

$$\varepsilon u_{tt} + \sigma u_t = \Delta u + F, \qquad x \in (0, L_1), \quad z \in (0, D_1), \quad t \in (0, T_1); \tag{1}$$

$$u\,|_{t=0} = u_t\,|_{t=0} = 0; \tag{2}$$

$$u_z\,|_{z=0} = 0, \quad u\,|_{x=0} = u\,|_{x=L_1} = 0; \tag{3}$$

$$u\,|_{z=0} = f(x,t). \tag{4}$$

Прямая задача (1)–(3): по известным функциям $\varepsilon(x,z)$, $\sigma(x,z)$, $F(x,z,t)$ определить функцию $u(x,z,t)$. Обратная задача (1)–(4): по функциям $\varepsilon(x,z)$, $F(x,z,t)$ и дополнительной информации $f(x,t)$ определить $u(x,z,t)$ и $\sigma(x,z)$. Для численного решения обратной задачи применим оптимизационный метод. Введем целевой функционал:

$$J[\sigma] = \int_0^{T_1} \int_0^{L_1} (u(x,0,t;\sigma) - f(x,t))^2 dxdt.$$

Для минимизации функционала применяем градиентные методы [2].

Наряду с волновым процессом также рассматривается диффузионный:

$$\sigma v_t = \Delta v, \qquad x \in [0, L_2], \quad x \in [0, D_2], \quad t \in [0, T_2]. \tag{5}$$

Будут изложены результаты численного анализа решения обратной задачи для уравнения (1) и (5) в одномерном и двумерном случаях. Рассмотрены методы решения совмещенной постановки задачи.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ (проект №12-01-00773) и интеграционного проекта СО РАН №14 «Обратные задачи и приложения: теория, алгоритмы, программы».

Литература

1. *Эпов М.И., Ельцов И.Н., Кабанихин С.И., Шишленин М.А.* Совмещенная постановка обратных задач геоэлектрики // СЭМИ, Труды второй международной молодежной школы конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» 21–29 сентября 2010 г. — Т. 8, 2011.
2. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
3. *Самарский А.А., Гулин А.А.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.

Combined inverse problems of electromagnetic subsurface sounding

A. V. Bukharov*, S. I. Kabanihin†, M. A. Shishlenin‡

* *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
buharovsasha@mail.ru

† *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia, kabanikhin@sscc.ru*

‡ *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia*
mshishlenin@ngs.ru

Исследуется обратная задача в форме нелинейного операторного уравнения

$$A(u) = f \tag{1}$$

с дифференцируемым по Фреше оператором A, действующим в гильбертовых пространствах U, F. Непрерывность операторов $A^{-1}, A'(u)^{-1}$ не предполагается, поэтому (1) относится к классу некорректно поставленных задач. Для устойчивой аппроксимации решения предлагается двухэтапный алгоритм: на первом этапе применяется схема регуляризации Лаврентьева двух типов

$$A(u) + \alpha B(u - u^*) - f_\delta = 0, \quad A'(u^0)(A(u) - f_\delta) + \alpha B(u - u^*) = 0, \tag{2}$$

а на втором этапе для аппрокимации регуляризованного решения u_α используются итерационные процессы:

$$u^{k+1} = u^k - (A'(u^0) + \overline{\alpha}B)^{-1}[A(u) + \alpha B(u - u^*) - f_\delta], \tag{3}$$

для первого из уравнений (2), а для второго уравнения

$$u^{k+1} = u^k - (A'(u^0)^* A'(u^0) + \overline{\alpha}B)^{-1}[A'(u^0)^*(A(u) - f_\delta) + \alpha B(u - u^*)]. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть уравнения (2) разрешимы и выполнены следующие условия:*

$$||A'(u)|| \leqslant N_1, \; ||A'(u_1) - A'(u_2)|| \leqslant N_2||u_1 - u_2||, \; ||(A'(u^0) + \overline{\alpha}B)^{-1}|| \leqslant \frac{c}{\overline{\alpha}}.$$

Если для метода (3) выполнены соотношения:

$$||u^0 - u_\alpha|| \leqslant r, \quad 0 < \alpha \leqslant \overline{\alpha}, \quad r = \alpha/5N_2,$$

а для метода (4)

$$||u^0 - u_\alpha|| \leqslant r, \quad 0 < \alpha \leqslant \overline{\alpha}, \quad r = \alpha/5N_1N_2,$$

тогда для последовательности $\{u^k\}$, образованной либо процессом (3), либо (4) при $q = c||B||(1 - \alpha/2\overline{\alpha}) < 1$ справедлива следующая оценка:

$$||u_\alpha - u^k|| \leqslant rq^k;$$

здесь u_α– решение первого или второго из уравнений (2), соответственно.

Вместе со сходимостью регуляризованных аппроксимаций $u_{\alpha(\delta)}$ к точному решению z процессы порождают регуляризующий алгоритм для исходной обратной задачи (1).

Формулируются теоремы сходимости для регуляризованных решений, полученных из уравнений (2). Исследуются модификации процессов (3), (4), когда вводится дополнительный демпфирующий множитель (перед круглой скобкой) и устанавливается свойство сильной фейеровости итераций. Излагаются приложения различных вариантов методов (3), (4) к обратным задачам геофизики и термического зондирования атмосферы [1].

Заметим, что итерационный метод (4) при $\alpha = \overline{\alpha}$, $B = I$ и других структурных условиях на оператор A ранее исседовался в работе [2].

Литература

1. *Васин В. В., Грибанов К. Г., Захаров В. И.* Обратная задача термического зондирования атмосферы // Сибирские мат. известия. — 2008. — Т. 5. — С. 518–523.
2. *Georg S.* On convergence of regularized modified Newton's method for nonlinear ill-posed problems // J. Inv. Ill-Posed Problems. — 2010. — Vol. 18, № 2. — P. 133–146.

Nonlinear inverse problems: Lavrentiev regularization scheme and iterative approximation by Newton type methods

V. V. Vasin

Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia
vasin@imm.uran.ru

Об одном способе исследования обратных коэффициентных задач для операторов с параметром

А. О. Ватульян

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
vatulyan@math.rsu.ru

К обратным коэффициентным задачам для операторов с параметром сводятся многие задачи об определении переменных свойств для различных моделей механики и математической физики в режиме установившихся колебаний, либо после применения интегрального преобразования Лапласа или Фурье. Они возникают при усложнении моделей геофизики, биомеханики, механики градиентных и композиционных материалов и состоят в определении переменных коэффициентов дифференциальных операторов по некоторой дополнительной информации о решении. При этом возможны две кардинально различающиеся постановки обратных коэффициентных задач в зависимости от дополнительной информации. В первой в качестве дополнительной информации известны компоненты физических полей внутри тела, во второй — на всей границе или ее части.

В настоящей работе представлен общий подход к исследованию таких задач для широкого класса операторов, опирающийся на слабую постановку и анализ возникающих трилинейных форм. Для первой постановки, приводящей к линейной некорректной проблеме, в этом случае из слабой постановки сразу получается операторное уравнение первого рода с компактным оператором. Для второй постановки, которая приводит к существенно нелинейной проблеме, на основе слабой постановки предложен итерационный процесс. Последовательность решений строится таким образом, что на каждом шаге решается прямая задача для некоторого известного набора искомых функций и линейная некорректная задача для определения поправок, которая решается на основе метода регуляризации А. Н. Тихонова. При этом важным этапом является выбор начального приближения, диапазона и области изменения спектрального параметра. Начальное приближение выбирается на компактном множестве функций простой структуры — линейных, квадратичных, кусочно-постоянных, обычно из условия минимума функционала невязки.

Представлен ряд задач и вычислительных экспериментов, иллюстрирующих применение предложенной схемы для различных операторов при определении простейших одномерных законов неоднородности.

On a method of studying the inverse problems for operators with a parameter

A. O. Vatulyan

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
vatulyan@math.rsu.ru

Работа выполнена при поддержке Южного математического института, г. Владикавказ.

Обратная коэффициентная задача для эллиптического оператора

А. О. Ватульян*, И. В. Богачев*, О. В. Явруян†

* *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия*
vatulyan@math.rsu.ru, bogachev89@yandex.ru

† *Южный математический институт, Владикавказ, Россия*
yavruyan@mail.ru

Обратные задачи об определении коэффициентов эллиптических операторов по следам решений представляют собой важную фундаментальную задачу и охватывают широкий спектр прикладных задач теории упругости, вязкоупругости. К подобным задачам, например, сводятся актуальные задачи о реконструкции неоднородных свойств материалов, что особенно важно при изучении свойств новых функционально-градиентных и композиционных материалов, совершенствовании моделей в геофизике, а также при изучении свойств биоматериалов.

Создание эффективных теоретических и численных основ реконструкции неоднородных свойств материалов позволит точно описывать поведение новых композиционных, функционально-градиентных и биоматериалов, откроет широкие возможности моделирования биологических систем и относится к приоритетным направлениям механики и биомеханики.

В работе представлена эффективная схема идентификации неоднородных коэффициентов эллиптического оператора теории упругости. В качестве модельной задачи рассмотрена задача об установившихся колебаниях упругого неоднородного по толщине ортотропного слоя, нагрузка действует на части верхней границы. Обратная коэффициентная задача заключается в нахождении неизвестных функций-коэффициентов дифференциального оператора, зависящих от поперечной координаты, характеризующих упругие свойства слоя по характеристикам полей смещений, измеренным на верхней границе.

Исследование основано на предварительном сведении исходной краевой задачи к последовательности более простых задач относительно моментов полей смещений, которые описываются при помощи обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка с переменными коэффициентами.

Дальнейшее исследование обратной коэффициентной задачи связано с применением к полученным задачам комбинации регуляризующих алгоритмов численного дифференцирования, метода линеаризации и метода регуляризации Тихонова А.Н.

В результате задача восстановления неизвестных функций сведена к последовательному решению интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода. Предложенный алгоритм идентификации

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований № 12-01-31501, ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009 - 2013 годы (госконтракты № 14.132.21.1358, № 14.132.21.1360).

позволяет определить до шести функций — параметров среды, характеризующих ее ортотропные свойства.

Разработана вычислительная схема решения обратной коэффициентной задачи, представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению неоднородных свойств слоя для различных типов функций.

The inverse coefficient problem for elliptic operator

A. O. Vatulyan*, I. V. Bogachev*, O. V. Yavruyan†

* *Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*
vatulyan@math.rsu.ru, bogachev89@yandex.ru

† *South Mathematical Institute, Vladikavkaz, Russia*
yavruyan@mail.ru

Численное решение обратной задачи фармакокинетики

Д. А. Воронов
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
mitriy.voronov.89@gmsil.com

Фармакокинетика — раздел фармакологии, изучающий кинетику всасывания, распределения, метаболизм и экскреции лекарственного препарата в организме человека и животного.

Происходящие в организме процессы можно смоделировать, используя "камерный"подход. Под камерой понимается количество вещества, которое ведет себя, словно оно кинетически-однородно и идеально перемешено. Такие модели состоят из конечного набора камер со специальными связями между ними. Эти связи представляют собой поток вещества, что физиологически означает перемещение из одного места в другое или химическое преобразование, либо то и другое.

Кинетические процессы в организме описываются системой дифференциальных уравнений:

$$C'(t) = KC(t) + u,$$

где $C(t)$ — вектор концентраций в различных камерах. Матрица коэффициентов K описывает связь между камерами. Элементы матрицы K могут быть как константами(линейная модель), так и функциями от компонент вектора концентраций(нелинейная модель).

В докладе рассматриваются различные нелинейные многокамерные фармакокинетические модели и способы поиска соответствующих фармакокинетических параметров. Также рассматриваются и линейные модели: трехкамерные с элиминацией из центральной камеры и двухкамерная модель с всасыванием.

На практике у нас имеются результаты данных измерений. Обычно это концентрация препарата в плазме или моче пациента. Обратная задача состоит в определении констант скорости(элементов матрицы K) по этим опытным данным. В случае линейной модели обратная задача может быть представлена в следующем операторном виде:

$$A(q) = f,$$

где $A\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^M_+$ — нелинейный оператор, а $f = (f_1, f_2, \ldots, f_M)^T$, $f_j = C_j$, $j = \overline{1, M}$ — данные измерений.

Обратная задача решалась различными алгоритмами:

- методом итераций Ландвебера

$$q^{[n+1]} = q^{[n]} - \alpha[A'(q^{[n]})]^*(A(q^{[n]}) - f)$$

- методом наименьших квадратов с использованием сингулярного разложения

- методом Ньютона–Канторовича

$$q^{[n+1]} = q^{[n]} - [A'(q^{[n]})]^{-1}(A(q^{[n]}) - f)$$

Рассматривается вопрос о выборе начальных приближений. Показано, что физические свойства начальных приближений сильно влияют на получаемое решение. Показано, что разрешающая способность обратной задачи может быть улучшена при подходящем выборе точек измерений. Представлены результаты численных расчётов. Представлены результаты численных расчётов.

Литература

1. *Ilyin A.I, Kabanikhin S.I., Nurseitov D.B., Nurseitova A.T., Asmanova N.A., Voronov D.A., Bakytov D.* Analysis of Ill-Posedness and Numerical Methods of Solving a Nonlinear Inverse Problem in Pharmacokinetics for the Two-Compartmental Model with Extravascular Drug Administration // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems.* — 1998. — Vol. 2, № 1.
2. *Staub J.F., Foos E., Courtin B., Jochemsen R., Perault-Staub A. M.* A nonlinear compartmental model of Sr metabolism. I. Non-steady-state kinetics and model building // *Am J Physiol Regul Integr Comp Physiol.* — 2002.
3. *Liang E., Derendorf H.,* Pitfalls in Pharmacokinetic Multicompartment Analysis // *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics.* — 1998. — Vol. 26, № 2. — P. 247–260.

Numerical solution of the inverse problem of pharmacokinetics

D. A. Voronov

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

mitriy.voronov.89@gmsil.com

Численный метод решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и нескольких измерений на границе

С. В. Гаврилов

Московский государственный университет, Москва, Россия
gvrlserg@gmail.com

Рассматривается задача электроимпедансной томографии в ограниченной трехмерной области с кусочно-постоянным коэффициентом электрической проводимости, значения которой считаются известными [1]. Обратная задача сводится к поиску поверхности, представляющей собой границу, разделяющую области с разной электропроводностью. Исходной информацией являются несколько пар условий Дирихле и Неймана на внешней границе области.

Пусть Ω и Ω_1 односвязные ограниченные область с границами Γ_0 и Γ_1 соответственно, причем $\overline{\Omega_1} \in \Omega$. Поверхности Γ_0 и Γ_1 достаточно гладкие. Обозначим через Ω_0 область $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$.

Рассмотрим следующие краевые задачи. Требуется определить функции $u^j(M)$, такие что: $u^j \in C(\overline{\Omega}), u^j(M) = u_i^j(M), M \in \Omega_i (i = 0, 1)$, где $u_i^j \in C^2(\Omega_i) \cap C^1(\overline{\Omega_i}) (i = 0, 1)$,

$$\Delta u_i^j(M) = 0, \quad M \in \Omega_i, \quad i = 0, 1, \tag{1}$$

$$u_0^j(M) = u_1^j(M), \quad M \in \Gamma_1, \tag{2}$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0^j(M)}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial u_1^j(M)}{\partial n}, \quad M \in \Gamma_1, \tag{3}$$

$$u_0^j(M) = f^j(M), \quad M \in \Gamma_0. \tag{4}$$

Здесь $j = 1, 2, ..., m$; σ_0, σ_1 — заданные положительные постоянные, а $f^j(M)$ — известные функции, непрерывные и не постоянные на Γ_0.

Сформулируем задачу электроимпедансной томографии. Пусть в краевых задачах (1)–(4) поверхность Γ_0, постоянные σ_0, σ_1 и функции $f^j(M), j = 1, 2, ..., m$ на Γ_0 заданы, а поверхность Γ_1 неизвестна. Требуется определить Γ_1, если для $j = 1, 2, ..., m$ задана дополнительная информация о решениях $u^j(M)$ задач (1)–(4):

$$\frac{\partial u^j(M)}{\partial n} = g^j(M), \quad M \in \Gamma_0, \tag{5}$$

где $g^j(M)$ известные функции, непрерывные на Γ_0, а n — внутренняя нормаль к Γ_0.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-01-00259.

Для решения сформулированной обратной задачи предложен численный метод, основанный на выводе нелинейного операторного уравнения для функции, задающей неизвестную поверхность Γ_1, и построении регуляризованного итерационного метода решения полученного операторного уравнения (см. [1, 2]).

Литература

1. *Гаврилов С. В., Денисов А. М.* Итерационный метод решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и одного измерения на границе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2012. — Т. 52, № 8. — С. 1426–36.
2. *Гаврилов С. В., Денисов А. М.* Численные методы определения границы неоднородности в краевой задаче для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2011. — Т. 51, № 8. — С. 1–14.

Numerical method for solving a 3D electrical impedance tomography problem in case of piecewise constant conductivity and several measurements on the boundary

S. V. Gavrilov

Moscow State University, Moscow, Russia
gvrlserg@gmail.com

Прямая и обратная задачи тепломассопереноса в пористых средах

В. Р. Гадильшина
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки, Россия
Институт механики и машиностроения Казанского научного центра
Российской академии наук, Казань, Россия
venera-gadilshina@mail.ru

Проведение глубинных измерений подземных температурных процессов является одним из информативных методов при решении задач диагностики состояния нефтегазовых пластов и скважин. Исследования термогидродинамических процессов в действующих скважинах связаны с решением задач теплообмена между флюидом и горными породами. В данной работе рассматривается задача определения теплофизических и фильтрационных параметров нефтяных пластов на основе термогидродинамических исследований скважин до и после проведения гидравлического разрыва пласта.

Гидравлический разрыв пласта (ГРП) является одним из основных методов повышения дебита скважины путем создания новых или расширения существующих высокопроницаемых трещин, исходящих от ствола скважины. Процедура проведения ГРП заключается в закачивании рабочей жидкости в породу при высоком давлении и высокой скорости до момента развития трещины в породе, а далее - в закачивании расклинивающего агента, называемого проппантом, в созданную трещину ГРП. После этого давление жидкости понижают, а доставленные частицы проппанта образуют однородную упаковку и препятствуют полному смыканию трещины. Проницаемость трещины с проппантовой упаковкой становится выше, чем у окружающей породы. Это создает каналы с высокой проводимостью для притока жидкости в скважину.

В работе строится математическая модель для описания неизотермической фильтрации в окрестности вертикальной скважины до и после гидроразрыва пласта [1, 2]. Для численного решения задачи применяется метод конечных разностей. При этом проницаемость в ячейках, через которые проходит трещина, определяется как средневзвешенное значение по занимаемым площадям. Исследуется влияние проводимостей трещины и пласта, длины трещины, адиабатического расширения жидкости, дроссельного эффекта, а также состояния призабойной зоны скважины на изменение температуры на забое скважины после ее пуска. Предлагается вычислительный алгоритм на основе метода Левенберга-Марквардта для обработки результатов измерений, полученных при эксплуатации вертикальных скважин.

По предложенному алгоритму проводится интерпретация кривых изменения температуры и давления, зарегистрированных в скважине № 2030 РТ.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-97005-р_поволжье_а.

Литература

1. *Чекалюк Э. В.*Термодинамика нефтяного пласта. — М.: Недра, 1965. — 238 с.
2. *Бадертдинова Е. Р., Хайруллин М. Х., Шамсиев М. Н.* Термогидродинамические исследования вертикальных нефтяных скважин // Теплофизика высоких температур. — 2011. — Т. 49, № 5. — С. 795–798.

Forward and inverse problems of heat-mass transfer in porous media

V. R. Gadilshina
Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, Russian
venera-gadilshina@mail.ru

Первая краевая задача для стационарного нагруженного дифференциального уравнения Шредингера

С. А. Гашимов

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
s.hashimov@list.ru

Пусть $D = \left\{x = (x_1, x_2) \in R^2 : \ 0 < x_i < \ell_i, \ i = 1, 2\right\}$ прямоугольник в R^2 с границей Г. Рассмотрим первую краевую задачу для стационарного нагруженного уравнения Шредингера:

$$-\sum_{i=1}^{2} a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} + E\left(x\right)\psi + b\psi\left(q\right) = f\left(x\right), \ x \in D, \tag{1}$$

$$\psi\left(x\right) = 0, \ x \in \Gamma, \tag{2}$$

где $E = W - U$ — польная енергия, $a_0 = \frac{\hbar^2}{2m}$, $b = const$ ($\hbar$ — постоянная Планка, m — масса элемента частицы), $\psi = \psi\left(x\right)$ — вещественная функция, $q = \xi_k$, $k = \overline{1, s}$, $\xi_k \in D$ — фиксированные точки. $f(x) \in L_2(D)$ — заданная функция.

Предположим что

$$|E(x)| \leqslant \mu_1 \text{ п.в. на } D. \tag{3}$$

Под решением краевой задач (1), (2) понимается обобщенное решение из класса $W^2_{2,0}(D) = W^2_2(D) \cap \overset{0}{W}{}^1_2(D)$. С помощью функции Дирака $\delta(x)$ задачу (1), (2) можно представит виде:

$$L\psi = f\left(x\right), \tag{4}$$

$$\psi\left(x\right) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{5}$$

где

$$L\left(\psi\right) = -\sum_{i=1}^{2} a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} + E\left(x\right)\psi + b\sum_{k=1}^{s} \delta\left(x - \xi_k\right)\psi\left(x\right).$$

Применяя методику работы см. [1] доказана.

Теорема. *Задача (1), (2) однозначно разрешима в классе* $W^2_{2,0}\left(D\right)$ *и для решения верна следующая оценка:*

$$\|\psi\|_{W^2_2(D)} \leqslant C\left\|f\right\|_{L_2(D)}.$$

Литература

1. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.

First boundary value problem for a stationary of loaded differential Schredinger equation

S. A. Hashimov

Baku State University, Baku, Azerbaijan
s.hashimov@list.ru

Обратная задача о концентрации масс в геофизике

Ю. В. Гласко*, М. Ю. Волоцков†, С. А. Скачков†

* *ОНИВЦ Московский государственный университет, Москва, Россия*
glaskoyv@mail.ru

† *Российский государственный геологоразведочный университет,*
Москва, Россия, glaskoyv@mail.ru

Одна из основных задач геофизики заключается в интерпретации гравитационных полей измеренных на дневной поверхности Земли. Для интерпретации аномалий нефти и газа, следуя идеям В.Н. Страхова предложена задача концентрации масс в операторной форме:

$$Ap = \delta_\Gamma(s^*) \tag{1}$$

Здесь $p = \{\Omega(\omega), m_\Omega\}$. В общем случае $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Omega_i$, где Ω_i — односвязная область, масса $m_\Omega = \sum\limits_{i=1}^{N} m_{\Omega_i}$. Задана область $V \supset \Omega$. V — тихоновский куб. A — оператор, отображающий тихоновское произведения нескольких вполне регулярных -пространств [1] на поверхность плотностей $\delta_\Gamma(s^*)$ на $\Gamma \equiv \{s^*\} \equiv \partial V$.

Модель выметания плотности$u(s,t)$ (концентрация обратна выметанию) имеет вид:

$$\Delta u(s,t) = u_t(s,t),\ s \in V \setminus \Gamma,\ t \in (0,T) \tag{2}$$

$$u(s,0) = \begin{cases} \delta(s,0)\ \forall\ s \in \Omega \\ 0\ \forall\ s \in V \setminus \Omega \end{cases} \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial u(s,t)}{\partial n}\right|_\Gamma;\ \int\limits_0^T \left.\frac{\partial u(s,t)}{\partial n}\right|_\Gamma dt = u(s,T) \tag{4}$$

Для численной реализации выметания будем использовать метод конечных элементов на основе принципов Зидарова [2]. Для 2D расчетов используем четырех-точечную схему, для 3D - шеститочечную.

Из проведенной серии 2D расчетов следует: I. Сеточный оператор выметания — линейный. Это объясняется линейностью коэффициентов параболического уравнения (2). II. Сетки с четным числом узлов V^h более информативны для определения геометрии Ω, чем сетки с нечетным числом. III. Поскольку плотность нефти принадлежит [0.4; 1], то приняв ее за параметр листа, возможно рассчитать серию поверхностей выметенной массы и по ней посредством принципа палеток определять геометрию П. Объекты при этом берутся из множества морфологии M_{obj} — отрезки, многоугольники, круги. В 3D- параллелепипеды, эллипсы. Для решения обратной задачи (1) используем один из 3-х подходов: а. задана плотность следует определить Ω и соответственно m_Ω. б. Задана геометрия Ω из M_{obj} — следует определить $\delta(\omega)$ и соответственно m_Ω. в. Заданы частично параметры геометрии и распределения плотностей — определить оставшиеся параметры.

Концентрация посредством построения поверхностей масс для одного значения плотности относится к варианту а. Однако использование палеток (III) для различных параметров листа, относится к подходу в. Линейность выметания (I) для концентрации использует поточечный алгоритм эквивалентных перераспределений при заданной плотности. Этот алгоритм можно применять и для моделирования плотности посредством метода Монте-Карло.

Сужение множества поиска проводится посредством введения геофизически необходимого M_{obj} и информации о сегменте значений, либо величине плотности нефти на конкретном месторождении. Таким образом, предложены и реализованы 2 алгоритма концентрации.

Литература

1. *Tikhonov A.N.* Uber die Topologische Erweiterung von Raumen // Math. Ann. 1929. — № 102. — С. 544–561.
2. *Зидаров Д. О.* решении некоторых обратных задач потенциальных полей и их применение к вопросам геофизики. — София: Издательство Болгарской АН, 1968.

Inverse problem concentration of mass in geophysics

Y. V. Glasko*, M. Y. Volotskov†, S. A. Skachkov†

* *SRCC Moscow State University,Moscow,Russia*
glaskoyv@mail.ru

† *Russian State Geological Prospecting University, Moscow, Russia*
glaskoyv@mail.ru

Об определении внутренней границы области в двумерной начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности

С. Г. Головина, А. Г. Разборов

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
sgolovina-msu@mail.ru, razborov@cs.msu.ru

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} = \Delta P,\ P = P(t, M),\ M \in D \subset \mathbb{R}^2, t > 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial \bar{n}_1}\Big|_{M \in \Gamma_1} = 0, \quad \dfrac{\partial P}{\partial \bar{n}_2}\Big|_{M \in \Gamma_2} = f(t) q(M),\ t \geqslant 0, \\ P(0, M) = P_0,\ M \in \bar{D}, \end{cases} \tag{1}$$

где D — односвязная область с гладкими внутренней границей Γ_1 и внешней границей Γ_2, n_1 и n_2 — единичные векторы внешних нормалей к Γ_1 и Γ_2, соответственно, P_0 — фиксированное число.

Обратная задача заключается в определении контура Γ_1 при известных Γ_2, $f(t)$, $q(M)$ и P_0 по решению прямой задачи (1) $P(t, M)$, известному в конечном числе точек области D при всех $t \geqslant 0$.

Будем считать, что полярные координаты точек Γ_1 и Γ_2 можно задать в виде $(h(\varphi), \varphi)$ и $(g(\beta), \beta)$, $g, h \in C^1[0; 2\pi]$, соответственно. Будем также предполагать, что

$$\max_{[0,2\pi]} |h'(\varphi)| \ll \min_{[0,2\pi]} h(\varphi), \quad \max_{[0,2\pi]} |g'(\beta)| \ll \min_{[0,2\pi]} g(\beta),$$

т.е. границы не сильно отличаются от окружностей.

После замены $u = P - P_0$ и применения преобразования Лапласа по t задача (1) переходит в краевую задачу для уравнения Гельмгольца, решение которой $v(s, M) = \int_0^{+\infty} e^{-s^2 t} u(t, M)\,\mathrm{d}t$ выписывается через потенциалы и в полярных координатах (r, α) имеет следующий вид (K_0 — функция Макдональда нулевого порядка):

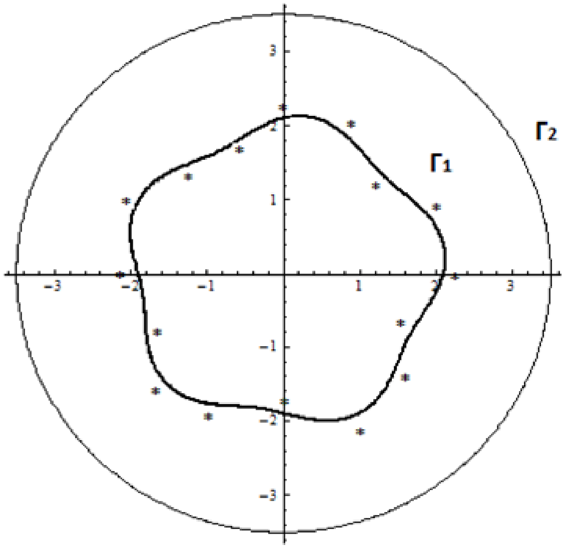
$$\begin{gathered} \int\limits_0^{2\pi} K_0\left(s\sqrt{r^2 + h^2(\varphi) - 2rh(\varphi)\cos(\alpha - \varphi)}\right) \mu[h(\varphi), \varphi] h(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \\ \int\limits_0^{2\pi} K_0\left(s\sqrt{r^2 + g^2(\beta) - 2rg(\beta)\cos(\alpha - \beta)}\right) \eta[g(\beta), \beta] g(\beta)\,\mathrm{d}\beta, \end{gathered} \tag{2}$$

где непрерывные плотности μ и η удовлетворяют соответствующей системе интегральных уравнений.

Таким образом, обратная задача сводится к восстановлению функции $h(\varphi)$ по известным функциям $v(s, r, \alpha)$, $g(\beta)$, $q[g(\beta), \beta]$ и $F(s^2)$ из уравнения (2) и системы для плотностей μ и η.

Функция $h(\varphi)$ вычисляется из уравнения (2) с помощью некоторой итерационной процедуры, причем на каждом j-м шаге вместо уравнения (2) решается его *линеаризация* в окрестности функции $h_{j-1}(\varphi)$, полученной на предыдущем шаге.

На рисунке приведен результат решения обратной задачи для случая, когда Γ_1 задается функцией $h(\varphi) = 2 + 0,1\cos 5\varphi + 0,1\sin 5\varphi$, Γ_2 является окружностью радиуса $3,5$ с центром в начале координат (изображены сплошной линией), $f(t) = 1$, $q[7/2, \beta] = \pi e^{-\pi|\beta-\pi|}$. Звездочками изображен восстановленный контур.



Точки измерения решения прямой задачи (16 точек) были равномерно распределены по окружности радиуса 3 с центром в начале координат. Начальным приближением была выбрана окружность с центром в начале координат радиуса 2. Задача решалась при $s^2 = 0,4$ и $s^2 = 0,5$, после чего результаты усреднялись.

Determining the internal boundary of a region in the two-dimensional initial – boundary-value problem for the heat equation

S. G. Golovina, A. G. Razborov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
sgolovina-msu@mail.ru, razborov@cs.msu.ru

Коэффициентные обратные задачи Стефана с финальным переопределением

Н. Л. Гольдман

МГУ им. М. В.Ломоносова, Москва, Россия
goldman@srcc.msu.ru

Исследуются достаточные условия, обеспечивающие однозначность нахождения неизвестных коэффициентов при младших чле-нах в квазилинейном параболическом уравнении в области с фазовым переходом, в качестве дополнительной информации рассматривается финальное переопределение. До сих пор вопросы единственности решения были изучены только для граничных обратных задач Стефана (т.е. с неизвестными граничными функциями) при условии переопределения на границе области [1, 2]. Такой вопрос для коэффициентных обратных задач Стефана с финальным наблюдением оставался открытым не только для квазилинейных, но даже для линейных моделей.

Соответствующая прямая постановка представляет собой однофазную квазилинейную задачу Стефана — найти функцию $u(x,t)$ в области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant \xi(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ и фазовый фронт $\xi(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющие условиям

$$c(x,t,u)u_t - Lu = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u|_{x=0} = v(t), \quad u|_{x=\xi(t)} = u^*(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_0, \quad \xi|_{t=0} = l_0, \quad l_0 > 0, \tag{3}$$

$$a(x,t,u)u_x + \chi(x,t,u)|_{x=\xi(t)} = -\gamma(x,t,u)|_{x=\xi(t)}\xi_t(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{4}$$

где равноверно эллиптический оператор Lu имеет вид

$$Lu \equiv (a(x,t,u)u_x)_x - b(x,t,u)u_x - f(x,t,u), \tag{5}$$

$a \geqslant a_{\min} > 0$, b, $c \geqslant c_{\min} > 0$, f, v, u^*, $\gamma \geqslant \gamma_{\min} > 0$, χ и φ — известные функции. Предполагается, что коэффициент f в (5) имеет структуру $f(x,t,u) = p\,d(x,t,u)$, в которой функция $d(x,t,u)$ задана, а p — неизвестный коэффициент вида $p(x)$, $p(u)$ либо $p(x,u)$.

Под решением соответствующей коэффициентной обратной за-дачи Стефана понимается совокупность функций $\{u(x,t), \xi(t), p(x)\}$, $\{u(x,t), \xi(t), p(u)\}$ либо $\{u(x,t), \xi(t), p(x,u)\}$

$$u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q), \quad \xi(t) \in H^{1+\lambda/2}(0,T], \quad 0 < \beta_0 \leqslant \xi(t) \leqslant \beta_1,$$

$$p(x) \in C^1[0,\beta_1], \quad p(u) \in C^1[-M_0,M_0], \quad p(x,u) \in C^{1,1}(\overline{\Omega}),$$

$$\beta_0, \beta_1, M_0 = \text{const} > 0, \quad \overline{\Omega} = [0,\beta_1] \times [-M_0,M_0],$$

удовлетворяющих соотношениям (1)–(5) и дополнительному условию в конечный момент времени

$$u|_{t=T} = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad \xi|_{t=T} = l, \tag{6}$$

в предположении, что $g(x)$ и l заданы, $l = \mathrm{const} > l_0 > 0$. Доказательство единственности решения обратной задачи (1)–(6) (в случае его существования) основано на предлагаемом использовании принципа двойственности [3], что позволяет связать проблему единственности со свойством плотности решений соответствующих сопряженных задач и со свойством так называемой обратной единственности [4] для линейных параболических операторов. Один из основных результатов состоит в следующем.

Теорема. Пусть выполнены требования к входным данным, обеспечивающие однозначную разрешимость в классах Гельдера прямой задачи Стефана (1)–(4), и пусть, кроме того, производные $a_t(x,t,u)$ и $c_t(x,t,u)$ непрерывны при $(x,t) \in \overline{Q}$, $|u| \leqslant M_0$, $d(x,t,u)$ при $t = T$ удовлетворяет неравенст,ву $|d(x,T,g)| > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$. Тогда обратная задача Стефана (1)–(6) двух различных решении $\{u(x,t), \xi(t), p(x)\}$ в указанных выше классах функций при условии аналитичности коэффициента $p(x)$ при $0 < x < \beta_1$.

Литература

1. *Gol'dman N. L.* Inverse Stefan problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
2. *Гольдман Н. Л.* Граничная обратная задача Стефана. Новый подход к исследованию // Докл. АН. — 2001. — Т. 380, № 6. — С. 736–740.
3. *Гольдман Н. Л.* Однозначность определения функции источника в квазилинейной обратной задаче Стефана с финальным наблюдением // Докл. АН. — 2012. — Т. 444, № 6. — С. 597–601.
4. Лионе Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972.

Coefficient inverse Stefan problems with final overdetermination

N. L. Gol'dman

Moscow State University, Moscow, Russia
goldman@srcc.msu.ru

Применение многопроцессорных систем в решении некорректных задач восстановления ориентационной функции распределения частиц

Н. А. Евдокимова[*], **Д. В. Лукьяненко**[†], **А. Г. Ягола**[†]

[*] *Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия*
naevdok@math.susu.ac.ru

[†] *Московский государственный университет, Москва, Россия*
lukyanenko@physics.msu.ru, yagola@physics.msu.ru

Одной из важных проблем современной физической химии является экспериментальное определение ориентационного распределения частиц в частично упорядоченных системах многих искусственных и природных материалах, свойства которых зависят от ориентационной упорядоченности молекул.

Наиболее точной характеристикой упорядоченности молекул является ориентационная функция распределения $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ которая показывает долю частиц, ориентированных в угловом интервале $\alpha+d\alpha$, $\beta+d\beta$, $\gamma+d\gamma$ (α,β,γ —углы Эйлера, связывающие систему координат отдельной частицы с системой координат образца). Одним из эффективных методов определять ориентационную функцию распределения частично ориентированных молекул является метод ЭПР. Положение резонансного сигнала каждой парамагнитной частицы в спектре ЭПР зависит от ориентации этой частицы относительно вектора напряжённости магнитного поля.

Интенсивность резонансного сигнала в каждой точке спектра определяется следующим образом:

$$I(H,\Theta,\Phi)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}F(H,g,A,h)\,\rho(\alpha,\beta,\gamma)\sin\beta\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,.$$

Углы Θ и α фиксированы. Поэтому достаточно решить интегральное уравнение

$$I(H,\Phi)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F(H,g,A,h)\,\rho(\beta,\gamma)\sin\beta\,d\beta\,d\gamma\,, \qquad (1)$$

где $\rho(\beta,\gamma)$ —ориентационная функция распределения - неизвестная функция, которую требуется найти, $I(H,\Theta,\Phi)$ —интенсивность резонансного сигнала - известная функция, которую получают посредством эксперимента, $F(H,g,A,h)$ —форма индивидуальной резонансной линии (задается из теоретических соображений), $g_{эфф}$ и $a_{эфф}$ — эффективные значения g –фактора и константы СТВ соответственно, h — значение ширины индивидуальной резонансной линии (расстояние между

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-01-00040.

точками максимального наклона). Углы Θ и φ определяют положение вектора напряжённости магнитного поля в системе координат, связанной с образцом $(X'Y'Z')$ (Θ — угол между H и осью Z', φ — угол между проекцией H на плоскость $(X'Y')$ и осью Y').

Задача является некорректно поставленной задачей (см. [1]).

В данном случае (см. [2]) при решении интегрального уравнения 1 возникает необходимость минимизировать регуляризирующий функционал Тихонова

$$M^{\alpha}[\rho] =$$

$$= \int_{H_1}^{H_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dH\, d\varphi \left\{ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(H, \varphi, \beta, \gamma)\, \rho(\beta, \gamma) \sin\beta\, d\beta\, d\gamma \, - I(H, \Phi) \right\}^2 + \alpha\Omega.$$

Конечно-разностная аппроксимация которого и возможность применения многопроцессорных систем описана в [3].

Литература

1. *Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г.* — М.: Наука, 1995.
2. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 153, № 1. — С. 55–59.
3. *Евдокимова Н. А., Лукъяненко Д. В., Ягола А. Г.* Восстановление ориентационной функции распределения частиц // Вестник ЮУрГУ. — 2012, № 40(299). – С. 169–173.

Application of multiprocessor systems in solving ill-posed problems for restoring orientational distribution function of particle

N. A. Evdokimova*, D. V. Lukyanenko†, A. G. Yagola†

* *South Ural State University, Chelyabinsk, Russia*
naevdok@math.susu.ac.ru

† *Moscow State University, Moscow, Russia*
lukyanenko@physics.msu.ru, yagola@physics.msu.ru

Численные решения прямой и обратной задачи изотропной теории упругости

Н. Ю. Зятьков*, **С. И. Кабанихин**†, **О. И. Криворотько**†, **К. С. Бобоев**†

* *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия, nikolay.zyatkov@gmail.com*

† *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*
kabanikhin@sscc.ru, krivorotko.olya@mail.ru, boboev@mail.ru

Рассмотрен численный алгоритм построения фундаментального решения системы уравнения теории упругости, записанной в скоростях и напряжениях, в случае изотропного упругого полупространства $x_3 \geqslant 0$, упругие свойства $\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$ и $\rho(x_3)$ которого зависят только от глубины

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial v_i}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{3}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ji}, & i=1,2,3,\\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} = C\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t}, & x_3>0, (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{1}$$

в предположении, что на свободную поверхность $x_3 = 0$ действует сила вида

$$\sigma_{33}|_{x_3=0} = -F(\sqrt{x_1^2+x_2^2})\delta(t), \quad \sigma_{13}|_{x_3=0} = \sigma_{23}|_{x_3=0} = 0. \tag{2}$$

Здесь $F(\sqrt{x_1^2+x_2^2})$ — достаточно гладкая финитная функция, $v = (v_1, v_2, v_3)^T$, $v_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial t}$, $i = 1, 2, 3$, $(u_1, u_2, u_3)^T$ — вектор перемещений в точке $x \in \mathbb{R}^3$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ — тензор напряжений, $i, j = 1, 2, 3$. Система (1) состоит из девяти уравнений; шесть последних получены после дифференцирования закона Гука $\sigma = C\varepsilon$ по времени (с учетом симметрии).

Будет построено решение, которое является фундаментальным решением системы (1) с начальными условиями

$$(v,\sigma)|_{t<0} = 0, \tag{3}$$

в следующем смысле: решение задачи (1)–(3) с произвольным источником $g(t)$ (обозначим это решение через v_g и σ_g)

$$\sigma_{33}|_{x_3=0} = -F(\sqrt{x_1^2+x_2^2})g(t)$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00773, и интеграционного проекта СО РАН №14 «Обратные задачи и приложения: теория, алгоритмы, программы».

может быть построено по формуле $v_g = v * g$ и $\sigma_g = \sigma * g$.

Исследована обратная задача определения упругих параметров $\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$ и плотности $\rho(x_3)$ среды по данным площадной системы наблюдений, расположенной на поверхности среды

$$v(x_1, x_2, 0, t) = v_0(x_1, x_2, t), \quad \sigma(x_1, x_2, 0, t) = \sigma_0(x_1, x_2, t). \qquad (4)$$

Построены численные алгоритмы решения обратной задачи (1)–(4), основанные на методах оптимизации и уравнениях И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана и М.Г. Крейна.

Литература

1. *Алексеев А. С.* Обратные динамические задачи сейсмики //̃ В *Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных.* — М.: Наука, 1967. — С. 9-84.
2. *Алексеев А. С., Михайленко Б. Г.* Метод вычисления теоретических сейсмограмм для сложно построенных моделей сред // Докл. АН СССР. — 1977. — Т. 35, № 3. — С. 46–49.
3. *Кабанихин С. И.* Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. — Наука, Сибирское отделение, 1988.
4. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сиб. научн. изд., 2009.

The numerical solution of the direct and inverse problems of isotropic elasticity

N. Yu. Zyatkov*, S. I. Kabanikhin†, O. I. Krivorotko†, K. S. Boboev†

* *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
nikolay.zyatkov@gmail.com

† *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia*
kabanikhin@sscc.ru, krivorotko.olya@mail.ru, boboev@mail.ru

Устойчивость решения одной обратной задачи для вырожденного эволюционного уравнения

Н. Д. Иванова

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия
natalia.d.ivanova@gmail.com

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линеен и непрерывен), $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линеен, замкнут и плотно определен). Через D_M будем обозначать область определения оператора M с нормой его графика $\|\cdot\|_{D_M}$. Рассмотрим задачу нахождения функций $x:[0,T]\to\mathcal{X}$ и $u:[0,T]\to\mathcal{U}$ из соотношений

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + y(t), \quad t\in[0,T], \tag{1}$$

$$Px(0) = x_0, \tag{2}$$

$$\Phi x(t) = \Psi(t), \quad t\in[0,T]. \tag{3}$$

При условии сильной (L,p)-радиальности оператора M [1] $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0\oplus\mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0\oplus\mathcal{Y}^1$, P и Q — проекторы, действующие, соответственно, вдоль $\mathcal{X}^0$ на $\mathcal{X}^1$ и вдоль $\mathcal{Y}^0$ на $\mathcal{Y}^1$. Сужения операторов L и M на эти подпространства обозначены через $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $k=0,1$. При этом существуют обратные операторы $M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$ и $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$.

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно $(L,0)$-радиален, $\Phi\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{U})$, $\mathcal{X}^1\subset\ker\Phi$, $B\in C^1([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $y\in C^1([0,T];\mathcal{Y})$, $\Psi\in C^1([0,T];\mathcal{U})$, при $t\in[0,T]$ оператор $\Phi M_0^{-1}(I-Q)B(t)$ обратим, $(\Phi M_0^{-1}(I-Q)B(t))^{-1}\in C^1([0,T],\mathcal{L}(\mathcal{U}))$, $x_0\in\mathcal{X}^1\cap D_M$. Тогда существует решение $x\in C^1([0,T];\mathcal{X})\cap C([0,T];D_M)$, $u\in C^1([0,T];\mathcal{U})$ задачи* (1)–(3)*, удовлетворяющее условиям*

$$\|x\|_{C^1([0,T];\mathcal{X})} \leqslant c_1\left(\|x_0\|_{D_M} + \|y\|_{C^1([0,T];\mathcal{Y})} + \|\Psi\|_{C^1([0,T];\mathcal{U})}\right),$$
$$\|u\|_{C^1([0,T];\mathcal{U})} \leqslant c_2\left(\|y\|_{C^1([0,T];\mathcal{Y})} + \|\Psi\|_{C^1([0,T];\mathcal{U})}\right),$$

где постоянные $c_1>0$, $c_2>0$ не зависят от x_0, y, Ψ.

Литература

1. *Федоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. — 2000. — Т. 12, вып. 3. — С. 173–200.

Solution stability of an inverse problem for a degenerate evolution equation

N. D. Ivanova

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia
natalia.d.ivanova@gmail.com

Вариационный метод решения обратной задачи для эллиптических уравнения

А. Д. Искендеров, Р. А. Гамидов

Ленкоранский государственный университет, Ленкорань, Азербайджан
rector@lsu.edu.az, prorector_ admin@lsu.edu.az

В статьи рассматривается вариационный метод решения обратной задачи для эллиптического уравнения второго порядка. Для рассматриваемой обратной задачи исследуется корректность постановки, устанавливаются теоремы о существовании и регуляризации решения, доказывается необходимое условие для решения [1, 2].

Рассмотрим задачу об определении функции $\{ v(x),\ u(x)\}$ из условий

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+v(x)\ u=f(x), x\in D, \tag{1}$$

$$u|_{\partial D}=g_1(x), \quad x\in\partial D, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\partial D}=g_2(x), \quad x\in\partial D, \tag{3}$$

где D — ограниченная область в E_n, с достаточно гладкой границей $\partial D, N-$ конормаль границы ∂D, $a_{ij}(x)\in C\left(\bar{D}\right)$ $\left(i,j=\overline{1,n}\right)$, $f(x)\in L_2(D)$, $g_1(x)\in W_2^{1/2}(\partial D)$, $g_2(x)\in L_2(\partial D)$– заданные функции, причем $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)(i,j=\overline{1,n})$, $\mu_1\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\leqslant\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant\mu_2\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2$, $\forall x\in\overline{D}$, $\forall\xi=(\xi_1,...,\xi_n)\in E_n$, $\mu_1,\mu_2=const>0$. Задачу об определении функции $u(x)$ при заданном $v=v(x)$ из условий (1), (2) назовем редуцированной задачей Дирихле, а задачу об определении функции $u(x)$ при заданном $v=v(x)$ из условий (1), (3) назовем редуцированной задачей Неймана. Под решениями редуцированных задач (1), (2) и (1), (3) понимается обобщенные решения этих задач из пространства $W_2^1(D)$.

Сформулируем задачу (1)–(3) в вариационной форме: пусть требуется минимизировать функционал

$$J_\alpha(v)=\|\,u_1-u_2\|^2_{L_2(D)}+\alpha\,\|v-w\|^2_{L_2(D)} \tag{4}$$

на множестве $V_{ad}=\left\{v(x)\in L_p(D): v(x)\geqslant\gamma\geqslant 0, \|v\|_{L_p(D)}\leqslant d\right\}$, где $\alpha\geqslant 0$, $\gamma\geqslant 0$, $d>0$, $p-$заданные числа, причем $p=2$ при $n=2$ и $n=3$, $p>n:2$ при $n\geqslant 4$, $w\in L_2(D)$–заданный элемент, $u_1=u_1(x)=u_1(x,v)$, $u_2=u_2(x)=u_2(x,v)$- решения редуцированных задач Дирихле (1), (2) и Неймана (1), (3) при заданном $v=v(x)\in V_{ad}$. Для этой задачи верны теоремы.

Теорема 1. *Функционал $J_\alpha(v)$ слабо непрерывен на V_{ad}, множество решений (4) $V_* = \{v_* \in V_{ad} : J(v_*) = \inf\{J(v) : v \in V\}\}$ непусто, V_* слабо компактно в $L_p(D)$ и любая минимизирующая последовательность слабо сходится в $L_p(D)$ к множеству V_*.*

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 0$. Тогда существует плотное подмножество Kпространства $L_p(D)$ такое, что для любого $w \in K$ задача (4) имеет единственное решение.*

Пусть $\psi_k = \psi_k(x) = \psi_k(x, v)$, $k = 1, 2$, обобщенные решения из $W_2^1(D)$ следующих задач:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\right) + v(x)\psi_k = 2\left(u_1(x) - u_2(x)\right), \quad x \in D, \ \ k = 1, 2, \tag{5}$$

$$\psi_1|_{\partial D} = 0, \quad \left.\frac{\partial \psi_2}{\partial N}\right|_{\partial D} = 0, \tag{6}$$

где $u_1(x) = u_1(x, v)$, $u_2(x) = u_2(x, v)$ — есть решения соответствующих редуцированных задач.

Доказывается необходимое условия в виде принципа максимума и найдено выражение для градиента функционала.

Литература

1. *Искендеров А. Д.* О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики // ДАН СССР. — 1984. — Т. 274, № 3. — С. 531–533.
2. *Искендеров А. Д., Гамидов Р. А.* Вариационный метод решения обратной задачи для эллиптических уравнений со специальным функционалом качества // Вест. Ленкоранского гос. ун-та Азерб. Республики. Сер. Ест. наук. — 2007. — С. 57–73.

Variational method of solution of the inverse problem for elliptic equation

A. D. Iskenderov, R. A. Hamidov

Lenkoran State University, Lenkoran, Azerbaijan
rector@lsu.edu.az, prorector_ admin@lsu.edu.az

Задача оптимального управления для квазилинейного эллиптического уравнения с управлениями в коэффициентах

А. Д. Искендеров*, Р. К. Тагиев†

* *Ленкоранский государственный университет, Ленкорань, Азербайджан*
office@lsu.edu.az

† *Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан*

Задачи оптимального управления системами, описываемыми уравнениями с частными производными имеют большое прикладное значение. Среди этих задач особый интерес представляют задачи, в которых управления входят в коэффициенты при старших производных уравнений для состояний. Исследование таких задач оптимального управления встречается серьезными трудностями, связанные с их сильной нелинейностью и некорректностью см. [1, 2].

В настоящее время наиболее полно исследованы задачи оптимального управления коэффициентами линейных эллиптических уравнений см. [3]. Такие задачи для квазилинейных эллиптических уравнений менее изучены.

Пусть область $\Omega \subset E_n$ $(n \geqslant 2)$ — шар, шаровой слой, параллелепипед или может быть преобразована в одну из этих областей с помощью регулярного преобразования из $C^2\left(\bar{\Omega}\right)$, Γ — непрерывная по Липшицу граница области Ω.

Пусть управляемая система описывается в Ω следующей задачей Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения:

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\left(x,k\left(x\right)\right)u_{x_j}\right)_{x_i}+q\left(x\right)a\left(x,u\right)=f\left(x\right),\ \ x\in\Omega, \tag{1}$$

$$u\left(x,v\right)=0,\ \ x\in\Gamma, \tag{2}$$

где $a_{ij}(x,k)$ $(i,j=\overline{1,n})$, $a(x,u)$, $f(x)$ — заданные функции, $k(x) = (k_1(x),\dots,k_r(x))$, $q(x)$ – управляющие функции, $v(x)=(k(x),q(x))$ — управление, $u=u(x,v)$ — решение задачи (1), (2) — состояние системы, соответствующее управлению $v(x)$.

Введем множество допустимых управлений

$$\begin{gathered}V=K\times Q, K=\left\{k(x)=(k_1(x),...,k_r(x))\in(W_\infty^1(\Omega))^r:\right.\\ \left.0<v_i\leqslant k_i(x)\leqslant\mu_i,\ \left|k_{ix_j}(x)\right|\ \leqslant d_i^{(j)}\,(i=\overline{1,r};\ j=\overline{1,n}),\ \text{п.в. на }\Omega\right\},\\ Q=\left\{q(x)\in L_\infty(\Omega):0\leqslant q_0\leqslant q(x)\leqslant q_1\ \text{п.в. на }\ \Omega\right\},\end{gathered} \tag{3}$$

где $\mu_i \geqslant v_i > 0$, $d_i^{(j)} > 0$ $\quad (i=\overline{1,r}, j=\overline{1,n})$, $\quad q_1 \geqslant q_0 \geqslant 0$ — заданные числа, п.в. — почти всюду.

Поставим следующую задачу оптимального управления: среди всех допустимых управлений $v(x) = (k(x), q(x)) \in V$, удовлетворяющих ограничениям

$$\begin{gathered} J_l\left(v\right) = \int\limits_{\Omega}\left[F_l\left(x, u\left(x,v\right), u_x\left(x,v\right), k\left(x\right)\right) + \right. \\ \left. + q\left(x\right) G_l\left(x, u\left(x,v\right), u_x\left(x,v\right)\right)\right] dx \leqslant 0, \quad \left(l = \overline{1, l_0}\right), \end{gathered} \tag{4}$$

найти управление $v_*(x) = (k_*(x), q_*(x)) \in V$, минимизирующее функционал

$$\begin{gathered} J_0\left(v\right) = \int\limits_{\Omega}\left[F_0\left(x, u\left(x,v\right), u_x\left(x,v\right), k\left(x\right)\right) + \right. \\ \left. + q\left(x\right) G_0\left(x, u\left(x,v\right), u_x\left(x,v\right)\right)\right] dx, \end{gathered} \tag{5}$$

где $F_l\left(x,u,p,k\right),\ G_l\left(x,u,p\right)\ \left(l = \overline{1,l_0}\right)$ — заданные функции.

В данной работе исследованы вопросы корректности постановки задачи (1)–(5) и установлено необходимое условие оптимальности в форме обобщенного правила множителей Лагранжа.

Литература

1. *Лионс Ж. Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Наука, 1972.
2. *Искендеров А. Д., Тагиев Р. К.* Задачи оптимизации с управлениями в коэффициентах параболического уравнения // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, № 8. — С. 1324–1334.
3. *Тагиев Р. К.* Об оптимальном управлении коэффициентами эллиптического уравнения // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 6. — С. 871–879.

Optimal Control Problem for Quasilinear Elliptic Equation with Controls in the Coefficients

A. D. Iskenderov*, R. K. Tagiyev†

* *Lenkoran State University, Lenkoran, Azerbaijan*

† *Baku State University, Baku, Azerbaijan*
office@lsu.edu.az

О некоторых некорректных задачах теории классического электродного эффекта в атмосфере

А. В. Калинин, Е. Е. Григорьев

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия
avk@mm.unn.ru

Стационарная система уравнений классического электродного эффекта в пространственно одномерном случае была исследована в работе [1] . В дальнейшем эта модель была использована при моделировании электрических полей в приземных слоях атмосферы [2, 3].

В настоящей работе проводится строгое исследование различных краевых задач для стационарной системы электродного эффекта, в частности, показывается, что некоторые краевые задачи, имеющие практическое приложение, относятся к классу некорректно поставленных задач [4]. В работе приводятся результаты о существовании и единственности решений соответствующих задач и обсуждаются регуляризирующие алгоритмы решения некорректно поставленных задач.

Литература

1. *Thomson J. J.* Conduction of electricity through gases. — Cambridge. 1903. 566 p.
2. *Hoppel W. A.* Theory of electrode effect // J. of Atmospheric and Terrestrial Phys. — 1967. — Vol. 29. — P. 709–721.
3. *Куповых Г. В., Морозов В. Н., Шварц Я. М.* Теория электродного эффекта в атмосфере. — Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1998. — 123 с.
4. *Калинин А. В., Григорьев Е. Е., Терентье А. М.* О некоторых соотношениях теории классического электродного эффекта // VII Всероссийская конф. по атмосферному электричеству 24–28 сентября // С.-Пб. сб. трудов. — С.-Пб.: 2012. — С. 99–100.

On some ill-posed problems of the theory of classic electrode effect

A. V. Kalinin, E. E. Grigoriev

N. I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia
avk@mm.unn.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011) и гранта Правительства Российской Федерации (договор № 11.G34.31.0048).

О некорректных самосопряженных задачах для полигармонического уравнения

Т. Ш. Кальменов

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
kalmenov.t@mail.ru

В докладе рассматриваются самосопряженные краевые задачи для полигармонического уравнения

$$Lu(x) \equiv \Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

которые являются существенно не корректными. Эти задачи не являются фредгольмовыми и даже не являются нетеровыми. При этом они являются самосопряженными и имеют полную ортонормированную систему собственных функций.

Для примера рассмотрим в единичном круге $\Omega = \{|r| < 1\} \subset R^2$ (в полярных координатах $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$) следующую задачу.

Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{r=1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0,\ \pi < \varphi < 2\pi; \tag{2}$$

$$\Delta u\Big|_{r=1} = \frac{\partial}{\partial r}\Delta u\Big|_{r=1} = 0,\ 0 < \varphi < \pi. \tag{3}$$

Пусть L — дифференциальный оператор, заданный на функциях $u \in W_2^4(\Omega)$, удовлетворяющих краевым условиям (2) и (3). Через $\overline{L}$ обозначим его замыкание в $L_2(\Omega)$.

Показано, что оператор $\overline{L}$ является самосопряженным. При этом он не является нетеровым. Для существования решения задачи (1)–(3) найдены необходимые и достаточные условия (счетное число условий), которым должна удовлетворять функция $f \in L_2(\Omega)$.

Показана связь рассматриваемых самосопряженных некорректных краевых задач с задачами Коши для оператора Лапласа.

Ill-posed problems for selfadjoint polyharmonic equation

T. Sh. Kal'menov

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
kalmenov.t@mail.ru

Коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений с условием интегрального наблюдения

В. Л. Камынин, Т. И. Бухарова

НИЯУ МИФИ, Москва, Россия
vlkamynin2008@yandex.ru

В докладе рассматриваются вопросы существования и единственности решений обратных задач определения одного из неизвестных коэффициентов в параболическом уравнении

$$\rho(t,x)u_t - \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_i x_j} + (\vec{b}(x), u_x) + d(t,x)u = f(x)g(t,x), \qquad (1)$$

где $(t,x) \in Q \equiv [0,T] \times \Omega$, Ω – ограниченная область в $\mathbf{R^n}$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Предполагается, что заданы краевые условия

$$u(t,x) = \Phi(t,x), (t,x) \in \Gamma,\ \Gamma = \{0\} \times \Omega \cup [0,T] \times \partial\Omega, \qquad (2)$$

а также дополнительное условие интегрального наблюдения

$$\int_0^T u(t,x)\chi(t)dt = \varphi(x). \qquad (3)$$

В задачах (1)–(3) неизвестными являются функция $u(t,x)$, а также один из коэффициентов $b(x) \equiv p(x)$, $d(t,x) \equiv p(x)$ или правая часть $f(x) \equiv p(x)$ зависящие только от x.

Исследование существования и единственности решений рассматриваемых задач в докладе проводится в классах Соболева при минимальных требованиях гладкости на известные входные данные этих задач. Как оказалось, определяющую роль в таких исследованиях могут сыграть априорные оценки норм решений прямой задачи (1)–(2) в пространствах Соболева с явно вычисленными константами.

Например, вопрос о существовании решения обратной задачи может быть сведен к вопросу о разрешимости некоторого операторного уравнения

$$p = A(p) \qquad (4)$$

в определенном банаховом пространстве, и знание таких констант позволяет указать условия на входные данные обратных задач (1)–(3), при которых оператор A в уравнении (4) обладает требуемыми свойствами, например, является компактным или сжимающим.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/11278).

Все условия доказываемых теорем существования и единственности решений обратных задач (1)–(3) выписываются в виде легко проверяемых неравенств. Приводятся нетривиальные примеры конкретных обратных задач, для которых такие условия выполнены, а следовательно, для них справедливы доказанные теоремы существования и единственности решения.

Часть результов получено совместно с Т.И. Бухаровой.

Основные результаты опубликованы в работах [1–3].

Литература

1. *Камынин В. Л., Бухарова Т. И.* Обратная задача определения коэффициента поглощения в параболическом уравнении уравнении на плоскости // Вестник РУДН. Сер. «Математика. Информатика. Физика». — 2011. — № 2. – С. 5–15.
2. *Камынин В. Л.* Обратная задача определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 2. — С. 207–216.
3. *Камынин В. Л., Бухарова Т. И.* Обратная задача определения функции источника в недивергентном параболическом уравнении // Вестник РУДН. Сер. «Математика. Информатика. Физика». — 2012. — № 3. — С. 5–12.

Coefficient inverse problems for parabolic equations

V. L. Kamynin, T. I. Bukharova

National Research Nuclear University MEPHI, Moscow, Russia
vlkamynin2008@yandex.ru

Численное решение задача продолжения для уравнения Гельмгольца

С. Е. Касенов*, Д. Б. Нурсеитов*, М. А. Бектемесов†

* *Национальная научная лаборатория коллективного пользования информационных и космических технологий КазНТУ им. К.Сатпаева, Алматы, Казахстан*
syrym.kasenov@mail.ru, ndb80@mail.ru

† *Семипалатинский Государственный Педагогический Институт, Семипалатинск, Казахстан*
maktagali@mail.ru

Введение

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Гельмгольца в области $\Omega = (0, l) \times (0, \pi)$.

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0, && (x, y) \in \Omega, && (1)\\ &u_x(0, y) = 0, && y \in [0, \pi], &&\\ &u(0, y) = f(y), && y \in [0, \pi], &&\\ &u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0, && x \in [0, l]. && (2) \end{aligned}$$

Задача (1)–(2) является некорретной. Для численного решения задачи мы сначала сведём её к обратной задаче $Aq = f$ по отношению к некоторой прямой (корректной) задаче. Далее мы сведём решение операторного уравнения $Aq = f$ к задаче минимизации целевого функционала $J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle$ [1].

Сведение исходной задачи к обратной задаче

В качестве прямой задачи будем рассматривать следующую задачу

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0, && (x, y) \in \Omega, && (3)\\ &u_x(0, y) = 0, && y \in [0, \pi], &&\\ &u(l, y) = q(y), && y \in [0, \pi], &&\\ &u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0, && x \in [0, l]. && (4) \end{aligned}$$

Обратная к задаче (3)–(4) задача заключается в определении функции $q(y)$ по дополнительной информации

$$u(0, y) = f(y), \qquad y \in [0, \pi].$$

Введем оператор

$$A\colon q(y) = u(l, y) \mapsto f(y) = u(0, y).$$

Тогда обратную задачу можно записать в операторной форме

$$Aq = f.$$

Для численного решения задачу $Aq = f$ рассмотрим задачу минимизации целевого функционала [2]

$$J(q) = \int\limits_0^\pi \big[u(0, y; q) - f(y)\big]^2 dy$$

Получен градиент целевого функционала и построен алгоритм обратной задачи с методом сопряженных градиентов. Приведены результаты численных расчетов для тестовых задачи.

Литература

1. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: СибНИ, 2008. — 460 с.
2. *Кабанихин С. И., Бектемесов М. А., Нурсеитова А. Т.* Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. — Алматы–Новосибирск: ОФ «Международный фонд обратных задач», 2006.

Numerical solution to the extension problem for the Helmholtz equation

S. E. Kasenov*, D. B. Nurseitov*, M. A. Bektemesov†

* *National Scientific Laboratory for Joint Usage of Information and Space Technologies K. Satpaev's Kazakh Technical National University, Almaty, Kazakhstan*
syrym.kasenov@mail.ru, ndb80@mail.ru

† *Semei State Pedagogical Institute, Semei, Kazakhstan*
maktagali@mail.ru

Операторы минимизации линейных функционалов на компактных множествах

В. Н. Козлов

Санкт-Петербургский государственный технический университет
Санкт-Петербург, Россия

Рассматриваются операторы решения задач минимизации линейного функционала на компактных множествах конечномерного пространства [1, 2].

1. Постановка задачи. Пусть задача вычисления вектора, минимизирующего линейный функционал при ограничениях, имеет вид

$$Z_* = argmin\left\{\varphi(Z) = c_0^T Z | A_0 Z = b_0, A_0 \in \square^{m\times n}, m \leqslant n, rangA_0 = m,\right.$$

$$\left.(Z-d)^T Q\,(Z-d) \leqslant r^2, Q = Q^T, rangQ = n\right\} \in \square_Z^n. \qquad (1)$$

Интервальные ограничения на переменные $x^- \leqslant x \leqslant x^+$ аппроксимируются эллипсоидом. Замена переменных $Z = Q^{-1/2}X + d$, $X = Q^{1/2}(Z-d)$ преобразует эллипсоид в шар:

$$(Z-d)^T Q (Z-d) =$$

$$(Q^{-1/2}X + d - d)^T (Q^{-1/2}X + d - d) = X^T Q^{-1/2} Q Q^{-1/2} X = X^T X \leqslant r^2,$$

и преобразует исходную задачу (1) к виду: сформулировать оператор оптимизации для вычисления векторов

$$X_* = argmin\left\{\varphi = c_0^T Q^{-1/2}X + c_0^T d | A_0 Q^{-1/2} X = b_0 - A_0 d, X^T X \leqslant r^2\right\},$$

$$X^* = argmax\left\{\varphi = c_0^T Q^{-1/2}X + c_0^T d | A_0 Q^{-1/2} X = b_0 - A_0 d, X^T X \leqslant r^2\right\}.$$

В новых переменных ограничения задачи принимают вид:

$$\left\{AX = b, A = A_0 Q^{-1/2}, b = b_0 - A_0 d, rangA = m, X^T X \leqslant r^2\right\} \in R_x^n.$$

В компактном виде последняя задача сводится к вычислению минимума (максимума) линейного функционала $J = c^T X + f$ при ограничениях: $AX = b, X^T X \leqslant r^2$.

2. Операторы условной минимизации и максимизации линейных функционалов. Свойства вспомогательных операторов проектирования на линейное многообразие (подпространство) конечномерного пространства определяются далее.

Лемма 1. *Пусть задача оптимизации имеет вид: вычислить:*

$$Z_* = argmin\left\{\varphi = \left\|Z - Z_0\right\|^2 | AZ = b, A \in \square^{m\times n}, rangA = m\right\} \in \square^n.$$

Тогда решение задачи минимизации, представленное оператором проецирования на линейное многообразие имеет вид

$$Z_* = P^0(Z_0) = \tilde{P^0} Z_0 + P_A b, \tilde{P^0} = E_{n\times n} - P_A A, P_A = A^T(AA^T)^{-1}.$$

Лемма 2. *Операторы проецирования на линейное многообразие и линейное подпространство, определенные в лемме 1, обладают следующими свойствами:*

$$1) P^0(P^0(Z_0)Z_0 = P^0(Z_0), \tilde{P^0}\tilde{P^0} Z_0 = \tilde{P^0} Z_0, \tilde{P^0} = (\tilde{P^0})^T \in \square^{n\times n},$$

$$2) \tilde{P^0}\tilde{P^0} = \tilde{P^0} \geqslant 0, P_A^T \tilde{P^0} = 0_{m\times n} \in \square^{m\times n},$$

$$3) P_A^T \tilde{P^0} = 0_{m\times n} \in \square^{m\times n},$$

$$4) \tilde{P^0} P_A = 0_{n\times m} \in \square^{n\times m},$$

$$5) P_A^T P_A = (AA^T)^{-1} \in \square^{m\times m}.$$

Утверждение 1. *Пусть экстремальные задачи вид: вычислить*

$$X_* = argmin\left\{\varphi = cX | AX = b, A \in \square^{m\times n}, rangA = m, X^T X \leqslant r^2\right\} \in \square^n,$$

$$X^* = argmax\left\{\varphi = cX | AX = b, A \in \square^{m\times n}, rangA = m, X^T X \leqslant r^2\right\} \in \square^n.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Условие совместности ограничений задач оптимизации определяется неравенством $r^2 - b^T(AA^T)^{-1}b > 0$.

2) Векторы $X_*, X^* \in \square^n$, определяющие условные минимум и максимум линейного функционала на пересечении линейного многообразия и шара, имеют вид

$$X_* = X(\lambda_*) = P_A b - \tilde{P^0} c/(2\lambda_*), X^* = X(\lambda^*) = P_A b - \tilde{P^0} c/(2\lambda^*), \quad (2a)$$

где $\tilde{P^0} = E - P_A A, P_A = A^T(AA^T)^{-1}$, скалярные вещественные параметры $\lambda_*, \lambda^* \in \square^1$– решения квадратного уравнения

$$\alpha\lambda^2 + \gamma = 0, \alpha = 4[b^T(AA^T)^{-1}b - r^2], \gamma = c^T \tilde{P^0} c, \quad (2b)$$

а операторы $X_* = X(\lambda_*)$ и $X^* = X(\lambda^*)$, доставляющие минимум и максимум функционалу, определяются параметром λ так, что

$$\lambda_* = +\left|\gamma/2\right|^{1/2}, \lambda^* = -\left|\gamma/2\right|^{1/2}. \quad (2c)$$

Из теории линейного программирования известно, что минимум линейного функционала достигается на границе компактного множества, поэтому полученные результаты доказывают утверждение. В результате с учетом (6) формулируются операторы условной минимизации и максимизации линейных функционалов, определенные равенствами (2.а), (2.б) и (2.в) утверждения.

Следствие 1. *(об эквивалентных формах оператора оптимизации). Полученные результаты определяют операторы оптимизации как функцию параметра* λ *в двух формах*

$$X_1 = X_1(\lambda) = P_A b - \tilde{P}^0 c/(2\lambda), X_2 = X_2(\lambda) = P^0(c) - \tilde{P}^0 c[1 - 1/(2\lambda)],$$

где $P^0(c) = \tilde{P}^0 c + P_A b, \tilde{P}^0 = E - P_A A, P_A = A^T(AA^T)^{-1}$.

Полученные результаты имеют геометрическую интерпретацию. Вектор $X_1 = X_1(\lambda) = P_A b - \tilde{P}^0 c/(2\lambda)$ включает первое слагаемое, соответствующее проекции начала координат на линейное многообразие, а второе - вектор, пропорциональный антиградиенту линейного функционала. Причем параметр $-1/(2\lambda)$ формируется из условия проецирования вектора $\tilde{P}^0 c \in \square^n$ на шар, принадлежащий линейному подпространству. Аналогичные интерпретации можно дать вектору $P^0(c) = \tilde{P}^0 c + P_A b$.

Утверждение 2. *Приближенное решение задачи (1) имеет вид*

$$z_* = Q^{1/2} x_* + d. \tag{7}$$

Таким образом, операторы оптимизации определяют векторы, определяющие параметры задачи в оптимальные решения.

Литература

1. *Козлов В. Н.* К аналитическому решению линейных алгебраических неравенств // Автоматика и телемеханика. — 1989. — № 4. — С. 101–104.
2. *Козлов В. Н.* Негладкие системы, операторы оптимизации и устойчивость. — СПб: Изд-во Политехн. Ун-та. 2012. — 198 с.

Operators minimizing linear functionals on compact sets

V. N. Kozlov

St. Petersburg State Technical University St. Petersburg, Russia

О единственности решения обратной абстрактной задачи Коши с дробной производной Капуто

М. М. Кокурин

Марийский государственный университет, г.Йошкар-Ола, Россия
kokurin@nextmail.ru

Пусть $u(t)$, $t \in [0,T]$, — функция со значениями в комплексном банаховом пространстве X. В работе используются стандартные определения дробного интеграла Римана–Лиувилля

$$(I_{0+}^{\alpha}u)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds$$

и дробной производной Капуто $\partial^{\alpha}u = I_{0+}^{1-\alpha}u'$ порядка $\alpha \in (0,1)$ от функции $u(t)$ ([1, гл.2], [2, с.10–11]). Рассмотрим обратную задачу Коши

$$\partial^{\alpha}u(t) = Au(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad u(T) = u_T \in D(A), \tag{1}$$

в которой нахождению подлежит элемент $u(0) \in D(A)$. Здесь $A : D(A) \subset X \to X$ — неограниченный замкнутый оператор; $\overline{D(A)} = X$. Решением задачи (1) будем называть функцию $u \in C\big([0,T];X\big)$, принимающую значения из $D(A)$, удовлетворяющую равенствам (1) и такую, что функция $(I_{0+}^{1-\alpha}u)(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \in (0,T]$. В общем случае задача (1) некорректна.

Введём обозначения: $\Pi(\omega) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\lambda > \omega\}$, $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A, $R(\zeta, A) = (\zeta E - A)^{-1}$ — резольвента. Пусть также $E_{\alpha}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\big(z^n/\Gamma(\alpha n+1)\big)$ — функция Миттаг–Леффлера.

Теорема 1. *Пусть существует $\omega_0 > 0$ такое, что $\lambda^{\alpha} \in \rho(A)$ для каждого $\lambda \in \Pi(\omega_0)$ и с некоторыми постоянными $C_0 > 0$ и $\beta \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$\|R(\lambda^{\alpha}, A)\| \leqslant \frac{C_0}{(1+|\mathrm{Im}\lambda|)^{\beta}}.$$

Пусть, кроме того, справедливо включение $\mu_n^{\alpha} \in \rho(A)$ $\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, где $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}$ — корни функции $E_{\alpha}(z^{\alpha}T^{\alpha})$, и с некоторым $\kappa \in \mathbb{R}$ выполняется оценка

$$\|R(\mu_n^{\alpha}, A)\mu_n^{\kappa}\| \leqslant C_1 = \mathrm{const}, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Тогда задача (1) имеет не более одного решения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12–01–00239а.

Литература

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of fractional differential equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.
2. *Bajlekova E. G.* Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. — Pleven: Eindhoven University of Technology, 2001.

On uniqueness of the solution of an inverse abstract Cauchy problem with the Caputo derivative

M. M. Kokurin

Mari State University, Yoshkar-Ola, Russia
kokurin@nextmail.ru

О регуляризации условно–корректных задач

М. Ю. Кокурин

Марийский государственный университет, Йошкар–Ола, Россия
kokurinm@yandex.ru

Пусть $X = (X, \rho_X)$, $Y = (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства и задано однозначное отображение $G : D(G) \subset X \to Y$.

Рассмотрим абстрактную вычислительную задачу $(G, D(G), X, Y)$, состоящую в приближенном нахождении значения $G(x)$ отображения G для произвольного элемента $x \in D(G)$, который может быть задан с погрешностью. Таким образом, вместо x доступна аппроксимация $\widetilde{x} \in X$, $\rho_X(\widetilde{x}, x) \leqslant \delta$, где $\delta > 0$ — уровень погрешности. Согласно классическому определению корректности, указанная задача называется корректной по Адамару, если $D(G) = X$ и отображение G непрерывно из X в Y. В том случае, когда $D(G)$ есть собственное подмножество X, возможна дальнейшая классификация отображений G. Широко известно следующее определение [1].

Определение 1. *Задача $(G, D(G), X, Y)$ называется условно-корректной (корректной по Тихонову), если отображение G относительно непрерывно на своей области определения $D(G)$.*

Последнее означает, что сходимость $x_n \to x$ в метрике X, где $x_n, x \in D(G)$, влечет сходимость $G(x_n) \to G(x)$ в Y. Наряду с определением 1 в [1] формулируется

Определение 2. *Задача $(G, D(G), X, Y)$ называется корректной на $D(G)$, если отображение G допускает продолжение $\overline{G}$ с $D(G)$ на X такое, что $\overline{G}$ непрерывно в точках множества $D(G)$.*

Класс корректных на $D(G)$ задач естественным образом возникает в связи с анализом общих регуляризующих алгоритмов, определяемых операторами $R_\delta(\cdot)$. Оператор $R_\delta(\cdot)$ называется регуляризующим для задачи $(G, D(G), X, Y)$, если выполняется условие

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\widetilde{x} \in X, \rho_X(\widetilde{x}, x) \leqslant \delta} \rho_Y(R_\delta(\widetilde{x}), G(x)) = 0 \quad \forall x \in D(G).$$

Если регуляризующий оператор $R_\delta(\cdot)$ построен, то $\widetilde{y} = R_\delta(\widetilde{x})$ есть приближение к $y = G(x)$, адекватное уровню погрешности δ.

На практике зачастую бывает затруднительно получить достаточно точные оценки уровня погрешности δ. В этой связи представляет интерес вопрос о том, в каких случаях возможно построить приближение элемента $G(x)$, асимптотически аппроксимирующее $G(x)$ при $\delta \to 0$, используя лишь сам приближенный элемент $\widetilde{x}$ и не привлекая информацию о δ. Известно [1, теорема 1.1], что корректные на $D(G)$ задачи и только они допускают регуляризующие операторы вида $R_\delta(\cdot) \equiv R(\cdot)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00239а.

Следующие теоремы показывают, что класс таких задач по существу совпадает с классом условно–корректных задач.

Теорема 1. *Пусть Y — полное метрическое пространство и задача $(G, D(G), X, Y)$ условно–корректна. Тогда эта задача является корректной на $D(G)$.*

Теорема 2. *Пусть пространство Y полное. Условно–корректные задачи $(G, D(G), X, Y)$ и только они допускают регуляризующий оператор вида $R_\delta(\cdot) \equiv R(\cdot)$.*

Условие полноты пространства Y в теоремах 1, 2 существенно уже при $X = \mathbb{R}^1$.

Теорема 2 применяется к некорректным операторным уравнениям $Ay = x$, $Ag(y) = x$, $x \in D(G)$ в паре гильбертовых пространств X, Y, определенным линейным оператором $A \in L(Y, X)$ и сильно монотонным оператором $g : Y \to Y$, на классах истокообразно представимых входных данных $D(G) = \{x \in X : x = A(A^*A)^p v, \|v\|_Y \leqslant d\}$ и $D(G) = \{x \in X : x = Ag(A^*v), \|v\|_X \leqslant d\}$ $(p, d > 0)$ соответственно. Рассматриваются также некорректные вариационные задачи

$$\min\{f(y) : y \in \Omega(x)\}, \quad \Omega(x) = \{y \in Q : x(y) \leqslant 0\}; \quad x \in D(G)$$

с сильно выпуклым функционалом $f : Q \to \mathbb{R}$, выпуклым функционалом $x : Q \to \mathbb{R}$ и выпуклым замкнутым множеством Q в гильбертовом пространстве Y, на классе $D(G)$, выделяемом условием типа истокопредставимости. Для этих задач указаны примеры регуляризующих операторов, не зависящих явно от δ, существование которых гарантируется теоремой 2.

Литература

1. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Итеративные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1989.

On regularization of conditionally well–posed problems

M. Yu. Kokurin

Mary State University, Yoshkar–Ola, Russia
kokurinm@yandex.ru

Об одном критерии единственности решения обратной задачи с нелокальным условием наблюдения

А. Б. Костин

НИЯУ «МИФИ», Москва, Россия
abkostin@yandex.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R^n}$ – ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ рассматривается задача нахождения пары функций $\{u(x,t); f(x)\}$ из условий:

$$u_t(x,t) - Lu(x,t) = h(x,t)f(x)\,, \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0\,, \quad x \in \Omega, \quad Bu(x,t) = 0\,, \quad (x,t) \in \Gamma \times [0,T], \tag{2}$$

$$l(u) := \int_0^T u(x,t)\,d\mu(t) = \chi(x)\,, \quad x \in \Omega\,, \tag{3}$$

где функции h, μ, χ – заданы, причём h, $h_t \in L_{\infty,2}(Q)$, $\chi(x) \in W_2^2(\Omega)$, $B\,\chi(x) = 0$ на Γ, а L равномерно эллиптический оператор вида:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x)\,u\,,$$

с коэффициентами $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $c(x) \in L_\infty(\Omega)$, $c(x) \leqslant 0$ в Ω; скалярная функция $\mu(t)$ в нелокальном условии (3) имеет ограниченную вариацию, $\mu(t) \not\equiv \mathrm{const}$ на $[0,T]$ и $\mu(0) = \mu(0+)$. Оператор краевых условий B имеет вид: либо $Bu = u$ либо $Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x)u$, где N – внешняя конормаль, $\sigma(x) \in C(\Gamma)$, $\sigma(x) \geqslant 0$ на Γ. В случае $Bu = \frac{\partial u}{\partial N}$ – второй краевой задачи, для удобства, дополнительно требуем, чтобы $c(x) \not\equiv 0$ в Ω.

Определение. *Обобщённым решением обратной задачи называется пара функций* $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$ *и* $f(x) \in L_2(\Omega)$, *удовлетворяющих условиям (1) - (3).*

Собственные функции и собственные значения задачи

$$-L\,v(x) = \lambda\,v(x)\,, \quad x \in \Omega\,; \quad Bv(x) = 0\,, \quad x \in \Gamma$$

обозначим $\{e_k(x)\}$ и $\{\lambda_k\}$, занумеровав λ_k в порядке возрастания модуля (с учётом кратности) и считая, что $\|e_k\|_{2,\Omega} = 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ Известно, что $e_k(x) \in W_2^2(\Omega)$, все $\lambda_k > 0$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, причём система $\{e_k(x)\}$ образует ОНБ в $L_2(\Omega)$.

Работа выполнена при частичной поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/11278).

Введём в рассмотрение следующую систему функций ($k = 1, 2, \ldots$)

$$\psi_k(x) := \lambda_k \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^t e^{-\lambda_k\,(t-\tau)}\, h(x,\tau)\, d\tau \right) d\mu(t)\, e_k(x) \equiv \beta_k(x)\, e_k(x)\,.$$

Единственность обобщённого решения обратной задачи (1)-(3) тесно связана с системой $\{\psi_k(x)\}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены все приведённые выше условия. Система функций $\{\psi_k(x)\}$ полна в $L_2(\Omega)$ только тогда, когда решение обратной задачи (1)-(3) единственно.*

Из этой теоремы и результатов по единственности решения обратной задачи получаем достаточные условия полноты $\{\psi_k(x)\}$.

Следствие. *Пусть выполнены все приведённые выше условия, функция $\mu(t)$ возрастает на $[0,T]$; $h(x,t)$ не изменяет знака по переменной $t \in [0,T]$ и $|l(h)(x)| > 0$ в Ω, а $h^0(x,t) := h(x,t)\,\mathrm{sgn}\, l(h)$. Предположим ещё, что выполняется хотя бы одно из условий:*

1. *$d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega(t) \in BV[0,T]$, которая убывает на $[0,T]$;*
2. *$h^0_t(x,t) \geqslant 0$ в Q.*

Тогда система $\{\psi_k(x)\}$ полна в $L_2(\Omega)$.

Следствие даёт достаточные условия полноты широкого класса систем функций, получаемых умножением каждой функции базиса $\{e_k(x)\}$ на соответствующий вес $\beta_k(x)$. Доказательство проводится методами близкими к [1] (см. также [2]).

Литература

1. *Костин А. Б.* Базисность одной системы функций, связанной с обратной задачей нахождения источника // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 2. — С. 246–256.
2. *Костин А. Б.* Разрешимость одной проблемы моментов и её связь с параболической обратной задачей // Вестник Моск. ун-та. Сер. 15. Выч. матем. и киб. — 1995. — № 1. — С. 28–33.

Uniqueness criterion in inverse problem with nonlocal observation

A. B. Kostin

National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia
abkostin@yandex.ru

Об определении амплитуды переднего фронта волны в приближении мелкой воды

О. И. Криворотько*, **С. И. Кабанихин**†

* *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*
krivorotko.olya@mail.ru

† *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия, kabanikhin@sscc.ru*

Построен численный алгоритм определения амплитуды переднего фронта волны, порожденной бесконечно малым по x и слабо меняющимся по переменной y разломом дна $\eta(x, y, 0) = g(y) \cdot \delta(x)$.

Система уравнений мелкой воды описывает динамику длинных волн (волны цунами) [**?**]. Систему уравнений мелкой воды можно свести к гиперболическому уравнению второго порядка:

$$\begin{cases} L\eta \equiv \eta_{tt} - div\,\left(c^2(x,y) grad\,\eta\right) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0; \\ \eta|_{t=0} = \phi(x,y), \quad \eta_t|_{t=0} = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\eta(x, y, t)$ — функция, описывающая колебания свободной поверхности, $H(x, y) > 0$ — известная функция, описывающая рельеф дна, g [м/с^2] —- ускорение свободного падения, $c(x, y) = \sqrt{gH(x, y)}$ — скорость распространения поверхностного возмущения, $q(x, y)$ — финитная функция, описывающая начальное возмущение свободной поверхности.

В предположении $q(x, y) = h(y) \cdot \phi(x)$, где $h(y)$ — некоторая гладкая функция, а $\phi(x) = x,\ x \in (-\varepsilon, 0)$, $\phi(x) = 0,\ x > 0$, ε — малый параметр, решение задачи (1) будет фундаментальным решением задачи распространения волн цунами.

Задача (1) при $\eta_t(x, y, t) = \omega(x, y, t)$ сводится к начально-краевой задаче на полуплоскости [2]

$$\begin{cases} L\omega = 0, & x, y > 0, t > 0; \\ \omega|_{t<0} = 0, & \omega_x|_{x=0} = -\frac{1}{2} g(y) \cdot \delta(t) + \tilde{h}(y, t). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, $g(y) = c^2(0, y)h(y)$ и $\tilde{h}(y, t)$ — гладкие функции.

Теорема 1. *При помощи замены переменных $z = \tau(x, y)$, $\alpha = y$, где τ является решением задачи Коши для уравнения эйконала [3]:*

$$\begin{cases} \tau_x^2 + \tau_y^2 = c^{-2}(x,y), & x > 0, y \in \mathbb{R}, \\ \tau(0,y) = 0, \quad \tau_x > 0, & y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00773, и интеграционного проекта СО РАН №14 «Обратные задачи и приложения: теория, алгоритмы, программы».

задача (2) сводится к решению уравнения в частных производных первого порядка на плоскости $t = z$:

$$\begin{cases} s_z + a_1(z,\alpha)s_\alpha + a_2(z,\alpha)s = 0, & z,\alpha > 0, \\ s(0,\alpha) = \tilde{g}(\alpha), & \alpha > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $s(z,\alpha)$ — амплитуда переднего фронта волны,

$$a_1(z,\alpha) = b^2(z,\alpha)\tau_y, \quad a_2(z,\alpha) = 0.5\cdot b^2(\tau_{xx}+\tau_{yy}) + b_z/b + bb_\alpha\tau_y,$$
$$b(z,\alpha) = c(x,y), \qquad \tilde{g}(\alpha) = 0.5\cdot g(\alpha)\left(b^{-2}(0,\alpha) - \tau_y^2\right)^{-1/2}.$$

В работе будет доказана теорема 1 и приведены результаты численных расчетов для модельного источника цунами [4, 5].

Литература

1. *Пелиновский Е. Н.* Гидродинамика волн цунами. — Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН, 1996.
2. *Владимиров В. С.* Уравнение математической физики. — М.: Наука, 1981.
3. *Кабанихин С. И.* Линейная регуляризация многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. — Новосибирск: Препринт Ин-та математики СО АН СССР, Т. 27, 1988.
4. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сиб. научн. изд., 2009.
5. *Kabanikhin S. I., Krivorotko O. I.* A numerical method for determining the amplitude of a wave edge in shallow water approximation // Appl. Comput. Math., 2013. (to appear)

On determining the amplitude of a wave edge in shallow water approximation

O. I. Krivorot'ko*, S. I. Kabanikhin†

* *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia*
krivorotko.olya@mail.ru

† *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
kabanikhin@sscc.ru

Локально экстраоптимальные методы решения некорректно поставленных задач

А. С. Леонов

НИЯУ МИФИ, Москва, Россия
asleonov@mephi.ru

1. Пусть $Z(T)$ – банахово пространство функций $z(s)$, определенных в области $T \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{D}$ – некоторое множество в $Z(T)$, U – нормированное пространство с элементами u, а $A : \mathcal{D} \to U$ – некоторый оператор, возможно, нелинейный. В пространстве $Z(T)$ зададим топологию сильной (или слабой) сходимости τ. Предположим, что операторное уравнение $Az = u$ имеет единственное решение $\bar{z}(s) \in \mathcal{D}$ для правой части $u \in U$. Для приближенного нахождения $\bar{z}(s)$ будем использовать приближенные данные $A_h : \mathcal{D} \to U, u_\delta \in U$ и регуляризующий функционал $\Omega[z]$, $z \in \mathcal{D}$ [1, гл.2]. Приближенные величины (A_h, u_δ), аппроксимирующие точные данные (A, u), заданы с погрешностями $\eta = (h, \delta)$ так, что $\|A_h z - Az\| \leqslant \Psi(h, \Omega[z])$, $\|u_\delta - u\| \leqslant \delta$. Мера аппроксимации $\Psi(h, \Omega[z])$ имеет свойства, указанные в [1]. Найдем с помощью некоторого регуляризующего алгоритма (РА) приближения $z_\eta(s) \in \mathcal{D}$ к $\bar{z}(s)$ такие, что $z_\eta \xrightarrow{\tau} \bar{z}$ и $\Omega[z_\eta] \to \Omega[\bar{z}]$ при $\eta \to 0$. Нас интересуют апостериорные оценки величины $\langle f_s, z_\eta - \bar{z}\rangle$. Здесь $\langle f_s, z\rangle$ – заданный линейный непрерывный функционал в $Z(T)$, зависящий от точки $s \in T$.

2. Зная $z_\eta(s)$, можно вычислить числа $Delta_\eta = \|A_h z_\eta - u_\delta\|$, $R_\eta = C\Omega[z_\eta]$, где $C > 1$ – выбранная константа. Введем множество $\mathcal{Z}_\eta = \{z(s) \in \mathcal{D} :\ \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \Delta_\eta,\ \Omega[z] \leqslant R_\eta\}$ и предположим, что $\bar{z} \in \mathcal{Z}_\eta$. Тогда выполнено неравенство

$$|\langle f_s, z_\eta - \overline{z}\rangle| \ \leqslant \sup\left\{|\langle f_s, z_\eta - \overline{z}\rangle| \ :\ z(s) \in Z_\eta\right\} \stackrel{\Delta}{=} F_s(\eta).$$

Определение 1. *Назовем функцию $F_s(\eta)$ локальной (в точке s по функционалу f_s) апостериорной оценкой точности приближенного решения z_η.*

Предположим, что выполнены условия: 1) функционалы $J[z] = \|Az - u\|$, $J_\eta[z] = \|A_h z - u_\delta\|$, $\Omega[z]$ τ-полунепрерывны снизу на $\mathcal{D}$; 2) непустые множества $\Omega_K = \{z \in D :\ \Omega[z] \leqslant K\}$ τ-секвенциально компактны. При этих условиях справедлива

Теорема. $\lim_{\eta\to 0} F_s(\eta) = 0$ $(\forall s \in T)$.

3. В докладе вводится величина $\Delta_s^{opt}(\eta; A_h, u_\delta, M)$ – локально (в точке s по функционалу f_s) оптимальная на некотором множестве $M \subset \mathcal{D}$ точность используемого регуляризующего алгоритма.

Определение 2. *Используемый РА называется локально (в точке s по функционалу f_s) экстраоптимальным на множестве M, если*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 11-01-00040-а, № 12-01-91153-ГФЕН-а.

найдется такая константа $C_0 > 0$, *что при достаточно малых* $||\eta||$ *выполнено неравенство* $F_s(\eta) \leqslant C_0 \Delta_s^{opt}(\eta; A_h, u_\delta, M)$.

В докладе показано, что методы регуляризации А.Н. Тихонова и М.М. Лаврентьева с выбором параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки, являются локально экстраоптимальными для типичных обратных задач. Приводятся численные алгоритмы нахождения локальных апостериорных оценок точности. На Рис.1 представлен пример локальной апостериорной оценки точности решения двумерной обратной задачи с помощью локально экстраоптимального тихоновского РА. В этом примере $\langle f_s, z \rangle$ есть среднее значение функции $z(s)$ на отрезке $[s - \sigma, s + \sigma]$, $\sigma = 0.05$, а относительные погрешности приближенных данных задачи $\eta = \left(\frac{\|A_h - A\|}{\|A\|}, \frac{\|u_\delta - u\|}{\|u\|} \right)$ составляют $(0.01\%, 3\%)$.

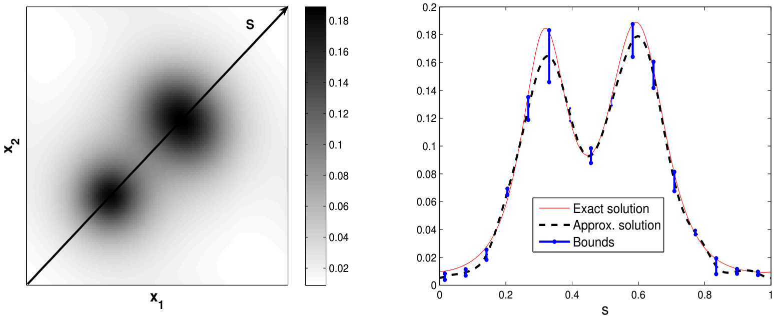


Рис. 1 Слева: точное решение $\bar{z}(x_1, x_2)$ и линия, на которой находятся оценки. Справа: оценки точности $z_\eta(s) - F_s(\eta) \leqslant \bar{z}(s) \leqslant z_\eta(s) + F_s(\eta)$.

Литература

1. *Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Нелинейные некорректные задачи. — М.: Наука, 1995.

Locally extra-optimal methods for solving ill-posed problems

A. S. Leonov

National Research Nuclear University 'MEPhI', Moscow, Russia
asleonov@mephi.ru

Об обратных коэффициентных задачах пороупругости

А. А. Ляпин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
alexlpn@hotmail.com

Представлен способ идентификации различных характеристик пороупругих сред путем сведения задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода и минимизации функционала невязки. Приведено соотношение взаимности для произвольных областей и произвольной анизотропии материала, на основе которого выведены интегральные уравнения Фредгольма для определения неизвестных коэффициентов. В качестве примера рассмотрена задача об идентификации характеристик пороупругой колонны.

В настоящее время исследование различных сред со сложной структурой приобретает все большую популярность. Примером таких структур являются пороупругие насыщенные жидкостью среды. Растущий интерес также связан с появлением такой новой области науки, как, например, биомеханика. Многие ткани организма, в том числе костная ткань, для своего математического описания требуют учета сложной структуры среды.

Костная ткань по своей природе является сильно неоднородной. Наружная часть трубчатой кости состоит из более плотного костного вещества. Внутренняя часть суставных головок состоит из губчатого костного вещества, образованного системой взаимно пересекающихся костных перегородок, между которыми в ячейках находится костный мозг. Средняя же часть кости обычно имеет внутри более или менее обширную полость, заполненную костным мозгом; у некоторых видов трубчатых костей центральная часть тела наполнена губчатым костным веществом.

Таким образом, для точного описания поведения костной ткани необходимо учитывать сложную пористую структуру, а также неоднородность пороупругих характеристик, как по сечению кости, так и по длине. Жидкая фаза, располагающаяся в порах скелета, значительно влияет на различные динамические процессы и требует особого внимания при описании среды.

В представляемом докладе речь пойдет о реконструкции упругих и пороупругих свойств кости. В качестве модели был взят пороупругий неоднородный по длине стержень, для описания поведения которого, была использована модель пороупругой среды, где неизвестными являются компоненты вектора смещений и давление жидкости в порах, а также учитываются высокочастотные слагаемые, что делает многие параметры комплексными функциями, зависящими от частоты [1]. Рассматриваемый стержень жестко защемлен на нижнем конце и подвергается нагружению продольной силой в режиме установившихся

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракты №14.132.21.1360, №14.132.21.1358).

колебаний на верхнем. Решение прямой задачи реализовано численно при помощи методы стрельбы. Приведены амплитудно-частотные характеристики задачи. Выведено операторное соотношение для анизотропных пороупругих сред в общем случае, на основе которого путем введения соответствующих гипотез и использования граничных условий. Решение обратной задачи сведено к последовательности решений интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода методом Тихонова с автоматическим выбором параметра регуляризации. Для различных законов неоднородности упругого модуля и модуля Био приведены результаты реконструкции в нескольких частотных диапазонах.

Литература

1. *Маслов Л.Б.* Математическое моделирование колебаний пороупругих систем. — Иваново: ПресСто, 2010. — 264 с.

About inverse coefficient problems of poroelasticity

A. A. Lyapin

Southern federal university, Rostov-on-Don, Russia
alexlpn@hotmail.com

Об условиях регуляризуемости интегральных уравнений

Л. Д. Менихес

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия
leonid.menikhes@gmail.com

Пусть E и F — банаховы пространства, $A : E \to F$ — линейный непрерывный инъективный оператор.

Отображение A^{-1} называется регуляризуемым, если существует семейство отображений $R_\delta : F \to E,\ \ \delta \in (0, \delta_0)$ такое, что для любого $x \in E$

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\|y-Ax\|\leqslant\delta} \|R_\delta y - x\| = 0.$$

В работах [1, 2] показано, что если для линейного инъективного оператора $A : C(0,1) \to L_2(0,1)$, непрерывного в L_2-норме, продолжение по непрерывности на некоторое $L_p(0,1)$, $p \geqslant 2$ имеет конечномерное ядро, то отображение A^{-1} регуляризуемо; также регуляризуемость A^{-1} следует из конечномерности ядра продолжения A на $\bigcap\limits_{p\geqslant 2} L_p(0,1)$ или на $L_\infty(0,1)$.

В работе [3] доказано, что эти достаточные условия регуляризуемости, связанные с $L_p(0,1)$ или с $L_\infty(0,1)$ являются различными, даже если ограничиться интегральными операторами с гладкими ядрами. Естественно возникает аналогичный вопрос об условии, связанном с $\bigcap\limits_{p\geqslant 2} L_p(0,1)$.

Оказывается, что и в этом случае все указанные достаточные условия различны при том же ограничении. Это следует из следующих двух теорем.

Теорема 1. *Существует инъективный интегральный оператор с гладким симметричным ядром $A : C(0,1) \to L_2(0,1)$, продолжение которого по непрерывности на любое $L_p(0,1)$, $\ p \geqslant 2$ имеет бесконечномерное нуль-пространство, а нуль-пространство его продолжения на $\bigcap\limits_{p\geqslant 2} L_p(0,1)$ конечномерно.*

Теорема 2. *Существует инъективный интегральный оператор с гладким симметричным ядром $A : C(0,1) \to L_2(0,1)$, продолжение которого по непрерывности на $\bigcap\limits_{p\geqslant 2} L_p(0,1)$ имеет бесконечномерное нуль-пространство, а его продолжение на $L_\infty(0,1)$ имеет конечномерное нуль-пространство.*

Здесь вместо термина ядро оператора мы употребляем термин нуль-пространство оператора, чтобы не возникла путаница с ядром интегрального оператора.

Литература

1. *Менихес Л. Д.* О регуляризуемости некоторых классов отображений, обратных к интегральным операторам // Матем. заметки. — 1999. — Т. 65, № 2. — С. 222–229.
2. *Менихес Л. Д.* Об одном достаточном условии регуляризуемости линейных обратных задач // Матем. заметки. — 2007. — Т. 82, № 2. — С. 242–247.
3. *Кондратьева О. А., Менихес Л. Д.* О сравнении условий регуляризуемости интегральных уравнений // Известия Челябинского научного центра. — 2009. — Вып. 1 (43). — С. 11–15.

On the regularizability conditions of integral equations

L. D. Menikhes

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia
leonid.menikhes@gmail.com

Численные методы решения обратных задач для некоторых гиперболических уравнений

Н. С. Новиков
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
novikov-1989@yandex.ru

В докладе рассматриваются обратные задачи для уравнения акустики и волнового уравнения. Обратная задача акустики заключается в определении функций $c(x, y), \rho(x, y)$ and $u(x, y, t)$, удовлетворяющих следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&c^{-2}(x, y)u_{tt} = \Delta u - \nabla ln\rho\nabla u,\ x > 0, y \in \mathbb{R}, t > 0;\\
&u|_{t<0} \equiv 0\ ;\\
&u_x(+0, y, t) = g(y, t);\\
&u|_{x=0} = f(y, t), y \in \mathbb{R}, t > 0.
\end{aligned}$$

Здесь функция $c(x, y)$ описывает скорость распространения волн в среде, $\rho(x, y)$ - плотность среды, $u(x, y, t)$ — акустическое давление, и $f(y, t)$ известные данные измерений на поверхности. В дальнейшем предполагается, что функция $c(x, y)$ известна, и задача заключается в определении функции $\rho(x, y)$.

Для решения этой задачи применяется многомерный аналог метода Гельфанда–Левитана–Крейна. Суть метода заключается в сведения нелинейной обратной задачи к однопараметрическому семейству линейных интегральных уравнений Фредгольма первого или второго рода. В частности, обратная задача акустики может быть сведена (в предположении, что все рассматриваемые функции имеют конечное разложение в виде рядов Фурье) к следующему семейству интегральных уравнений:

$$\Phi^k(x, t) = \frac{1}{2}\sum_m \int\limits_{-x}^{x} (f^k_m)'(t - s)\Phi^m(x, s)ds - \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)}dy,\ k \in \mathbb{Z}.$$

При этом искомая функция $\rho(x, y)$ связана с решением уравнений Гельфанда–Левитана–Крейна следующим соотношением:

$$\rho(x, y) = \frac{\pi^2}{\rho(0, y)}\left[\sum_m \Phi^m(x, x - 0)e^{-imy}\right]^{-2}.$$

Указанный метод также применяется для восстановления коэффициента $q(x, y)$ волнового уравнения $u_{tt}(x, y) = \Delta u(x, y) - q(x, y)u$. Соответствующая система интегральных уравнений имеет следующий вид:

$$\int_{-x}^{x} \sum_{m} f_m^k(t-s) w^m(x,s) ds = -\frac{1}{2}\left[f^k(t-x) + f^k(t+x)\right], \ |t| < x, \ k \in \mathbb{Z}.$$

В докладе будет рассмотрена возможность применения указанного подхода для решения обратных задач теории упругости и сейсмики. Кроме того, будут приведены результаты численных экспериментов решения поставленных задач с использованием метода сведения к СЛАУ, метода регуляризации С.К. Годунова, и стохастических методов(в частности, метода Монте-Карло).

Литература

1. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сиб. научн. изд., 2009.
2. *Белинская И. И.* Решение некоторых гиперболических уравнений методом Монте-Карло. — Новосибирск, 1998.
3. *Кабанихин С. И.* Линейная регуляризация многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. — Новосибирск: Препринт Ин-та математики СО АН СССР, Т. 27, 1988.
4. *Kabanikhin S. I., Shishlenin M. A.* Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gel'fand-Levitan-Krein equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2010. — Vol. 18, № 9, P. 979–995.
5. *Шишленин М. А., Новиков Н. С.* Сравнительный анализ двух методов решения уравнения Гельфанда–Левитана // Сиб. электр. мат. известия. — 2011. — С. 379–393.

Numerical methods for solving inverse problems for some hyperbolic equations

N. S. Novikov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
novikov-1989@yandex.ru

Обратная задача акустики для горизотнально-слоистых сред

Ж. О. Оралбекова*, К. Т. Искаков†, А. Л. Карчевский‡

* *Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан, oralbekova@bk.ru*

† *Евразийский национальный университет им. Гумелёва, Астана, Казахстан, kazizat@mail.ru*

‡ *Институт математики им. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия, karchevs@math.nsc.ru*

В докладе будет представлен алгоритм определения скорости звука и точек разрыва среды.

Решение обратной задачи основывается на минимизации функционала невязки. Для минимимизации будет использован метод сопряженных градиентов. Вывод градиента функциоанала невязки для скорости — это хорошо известная процедура. В докладе будет представлено доказательство дифференцируемости функционала невязки по координате точки разрыва среды и вид для этой производной. Градиент функционала невязки для скорости и производные по координатам точек среды могут быть объедены в единую формулу для градиента функционала невязки, что позволит построить единый алгоритм по поределению скорости звука в слоях и их мощностей. Будут представлены численные примеры, характеризующие эффективность предложенного алгоритма.

Inverse problem of acustics for horizontally stratified media

Zh. O. Oralbekova*, K. T. Iskakov†, A. L. Karchevsky‡

* *Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan, oralbekova@bk.ru*

† *Gumiliov Euroasian National University Astana, Kazakhstan, kazizat@mail.ru*

‡ *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia, karchevs@math.nsc.ru*

Работа поддержана грантом МОН РК Договор N 977 от 02.03.2012 и грантом РФФИ, проект 11-01-00105.

Неравенство наблюдаемости для волнового уравнения на критическом интервале времени

М. М. Потапов, А. А. Дряженков

Московский государственный университет, Москва, Россия
mpotapov@tochka.ru, andrja@yandex.ru

Для волнового уравнения с переменными коэффициентами

$$\rho(x)y_{tt} = (k(x)y_x)_x - q(x)y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l,$$

рассмотрены задачи с односторонним граничным управлением на левом конце $x = 0$ и однородным условием третьего рода на неуправляемом правом конце $x = l$ в классах *сильных* обобщенных решений. Требуется соответствующим выбором граничных управлений перевести систему из начального нулевого состояния в заданное конечное состояние

$$y\,|_{\,t=T} = f^0(x), \quad y_t\,|_{\,t=T} = f^1(x), \quad 0 < x < l.$$

По сравнению с [1] сужается класс обобщенных решений и длина T временного промежутка предполагается в точности равной пороговому моменту

$$T = T_* = 2\int_0^l \sqrt{\frac{\rho(x)}{k(x)}}\,dx.$$

При этом достижимыми оказываются уже не все целевые состояния. В настоящей работе описано множество достижимости и получено неравенство наблюдаемости с вычислимой константой, что позволяет применять вариационный метод [2] для построения устойчивых приближенных решений рассматриваемых задач граничного управления на временных промежутках критической длины с любыми достижимыми целями. Для недостижимых целей вариационный метод вырабатывает наилучшие приближения в соответствующих нормах. Приведены соответствующие вычислительные иллюстрации.

Литература

1. *Потапов М. М., Дряженков А. А.* Оптимизация порогового момента в неравенстве наблюдаемости для волнового уравнения с краевым условием упругого закрепления // Труды МИАН. — 2012. — Т. 277. — С. 215–229.
2. *Потапов М. М.* Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущённым оператором // Докл. РАН. — 1999. — Т. 365, № 5. — С. 596–598.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы.

Observability Inequality for the Wave Equation on the Critical Time Interval

M. M. Potapov, A. A. Dryazhenkov

Moscow State University, Moscow, Russia
mpotapov@tochka.ru, andrja@yandex.ru

Задачи граничного управления для волнового уравнения на докритических промежутках

М. М. Потапов, Д. А. Иванов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, michaelpotapov@hotmail.com, deniaru91@gmail.com

Для волнового уравнения с переменными коэффициентами

$$\rho(x)y_{tt} = (k(x)y_x)_x - q(x)y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l,$$

рассмотрены задачи с двусторонними граничными управлениями основных типов на докритических промежутках в классе сильных обобщенных решений. Известно, что такую систему за время $T < T_*$, где

$$T_* = \int_0^l \sqrt{\frac{\rho(x)}{k(x)}}\, dx$$

– так называемый *критический* или *пороговый* момент, невозможно перевести из начального нулевого состояния в произвольно заданное конечное состояние

$$y\,|_{\,t=T} = f^0(x), \;\; y_t\,|_{\,t=T} = f^1(x), \;\; 0 < x < l,$$

поэтому задача ставится как задача о наилучшем приближении заданных целевых состояний достижимыми конечными состояниями процесса в метриках, согласованных с гладкостью обобщенных решений. Установлены свойства непрерывной обратимости операторов управления, преобразующих граничные управления в финальные фазовые состояния. Эти свойства записаны в виде неравенств, в которых оценочные константы конструктивно выражаются через исходные данные, что позволяет применять вариационный метод [1, 2] для построения устойчивых приближенных решений рассматриваемых задач граничного управления на временных промежутках любой докритической длины, а также и в точности критической длины. Приведены результаты численных экспериментов.

Литература

1. *Потапов М. М.* Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущённым оператором // Докл. РАН. — 1999. — Т. 365, № 5. — С. 596–598.
2. *Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М., Разгулин А. В.* Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. — М.: Изд. отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2010. – 384 с.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Boundary Control Problems for the Wave Equation on Subcritical Time Intervals

M. M. Potapov, D. A. Ivanov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
michaelpotapov@hotmail.com, deniaru91@gmail.com

Прогноз-управление. Обратные и нелокальные задачи для нестационарных уравнений

А. И. Прилепко

Московский государственный университет, Москва, Россия
prilepko.ai@yandex.ru

В данной работе исследуются обратные задачи для нестационарных уравнений, которые иначе называются «задачи прогноз-управление». Рассматриваются также прямые нелокальные по времени задачи, которые взаимно связаны с обратными задачами. В ряде случаев нелокальные по времени задачи трактуются как задачи прогноз-наблюдение. В линейном случае вводятся определения слабых и точных (классических) решений, а также даются определения слабой и классической корректности (по Адамару) решений задач. Изучаются задачи как с ограниченным, так и с неограниченным оператором, порождающим полугруппу. Предложены различные методы доказательства корректной разрешимости таких задач. Отмечается существенное отличие даже в линейном случае задач прогноз-управление и прогноз-наблюдение от известных задач оптимального, программного и некоторых других типов управлений.

Постановка задач. Пусть заданы числа $T, T_0 \in \mathbb{R}$, $0 < T \leqslant T_0 < +\infty$, операторы $A_0(t)$, $A_1(t)$, B, $G(t)$, $\Phi(t)$, C, вектор-функция $g(t)$, $t \in J$, где $J = (0, T_0)$, либо $J = (0, +\infty)$, и элементы u_0, u_T из множества $D \in E$, E – банахово пространство.

1. Обратная задача. Найти пару: вектор-функцию $u(t)$ и соответственно один из параметров $p_0, q_0, \rho_0 \in E$, удовлетворяющую условиям

$$A_0(t)\frac{du}{dt} = A_1(t)u(t) + B(u,u) + f\left(t, u, \frac{du}{dt}; p_0, q_0, \rho_0\right), \quad t \in J, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

$$Cu \equiv \int\limits_{t_0}^{T} d\Phi(t) \cdot u(t) = u_T, \quad 0 \leqslant t_0 < T \leqslant T_0, \tag{3}$$

где вектор-функция $f(t)$ имеет соответственно вид

$$f(t) \equiv G(t)p_0 + g(t),\ f(t) \equiv q_0 G(t)u(t) + g(t),\ f(t) \equiv \rho_0 G(t)du/dt + g(t).$$

Отметим, что в обратной задаче условие (2), вектор-функция $g(t)$ и другие заданные величины означают задание *входных данных* (u_0 – начальные данные), а условие (3) есть условие *выходных* (*наблюдаемых* или переопределённых) данных. Иначе обратную задачу о нахождении одного из параметров p_0, q_0, ρ_0 из (1)–(3) будем называть абстрактной задачей прогноз-управление.

Параметры p_0, q_0, ρ_0 могут входить как неизвестные в «уравнение состояния», а также в граничные и другие условия. В случае, когда в (1), (2) все они одновременно неизвестны, кроме условия (3), требуется задавать ещё соответствующие дополнительные условия.

2. Нелокальная задача. Поставим теперь другие задачи. Заданы числа T, T_0, $0 < T \leqslant T_0 < +\infty$, операторы $A_0(t)$, B, C_0, $\Phi_0(t)$, вектор-функция $g_0(t)$, $t \in J$, банаховы пространства E_0 и E_*, а также элемент $p_* \in D_* \subset E_*$.

Нелокальная по времени (прямая) задача. Найти решение (вектор-функцию) $u(t)$ из некоторого класса в E_0, удовлетворяющее условиям

$$\frac{du}{dt} = A_0(t)u + B(u, u) + g_0(t), \quad t \in J, \tag{4}$$

$$C_0 u \equiv \int\limits_0^T d\Phi_0(t) \cdot u(t) = p_*, \quad 0 < T \leqslant T_0 < +\infty. \tag{5}$$

Отметим, что в нелокальной задаче (4), (5) вместо данных Коши в начальный момент $t = 0$ задаются «усреднённые» данные по времени (5) на, возможно, малом промежутке времени $(0, T)$, а неизвестным является решение $u(t)$ на большом промежутке времени J, кроме того, элемент $u(0) = \psi_0$ неизвестен. Задачу о нахождении элемента $\psi_0 = u(0)$ из E_0 в (4), (5) называем абстрактной задачей прогноз-наблюдение (начальных данных), см. [1].

Литература

1. *Прилепко А. И.* Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз-управление и прогноз наблюдение эволюционных уравнений. I // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 11. — С. 1560–1571.

Prediction-control. Inverse and nonlocal problems for nonautonomous equations

A. I. Prilepko

Moscow State University, Moscow, Russia
prilepko.ai@yandex.ru

Задача об определении ядра в уравнении вязкоупругости

В. Г. Романов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
romanov@math.nsc.ru

Для интегро-дифференциального уравнения, которое соответствует двумерной проблеме вязкоупругости, изучается задача об определении модуля упругости и ядра, входящего в интегральный член уравнения. Предполагается, что носитель искомых функций содержится в некоторой компактной области.

Рассматривается серия прямых задач, в которых источник локализован на некоторой прямой, касающейся границы ∂D единичного круга D в некоторой его граничной точке, пробегающей последовательно все множество граничных точек, эта точка является параметром задачи. Задаваемая информация о решении прямой задачи представляет собой след решения задачи Коши с нулевыми начальными данными на границе области D для моментов времени близких к времени прихода волны от источника в соответствующую точку границы. Ранее задачи об определении ядра $p(x,t)$ в уравнениях вязкоупругости, в предположении, что функция $p(x,t)$ представима в виде $p(x,t) = k(t)p_0(x)$, в котором $k(t)$ является заданной функцией, а $p_0(x)$ — неизвестной функцией, носитель которой содержится внутри некоторой компактной области, рассматривались в работах [1–3]. В настоящей работе не предполагается никакого специального вида функции $p(x,t)$, но предполагается, что она является бесконечно дифференцируемой по всем аргументам. Основной результат работы заключается в получении теорем об однозначности решения рассматриваемой задачи (см. [4]).

Литература

1. *Романов В. Г.* Двумерная обратная задача вязкоупругости // Докл. АН. — 2011. — Т. 440, № 3. — С. 310–313.
2. *Романов В. Г.* Трехмерная обратная задача вязкоупругости // Докл. АН. — 2011. — Т. 441, № 4. — С. 452–455.
3. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // Сибирский журн. индустр. матем. — 2012. — Т. XV, № 1. — С. 86–98.
4. *Романов В. Г.* Задача об определения ядра в уравнении вязкоупругости // Доклады АН. — 2012. — Т. 446, № 1. — С. 18–20.

Problem of kernel recovering for the viscoelasticity equation

V. G. Romanov

Sobolev Institute of Mathematics, SD RAS, Novosibirsk, Russia
romanov@math.nsc.ru

Неклассические вариационные задачи и их численная реализация

В. М. Савчин

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
vsavchin@yandex.ru

За последние годы получили значительное развитие методы решения обратных задач вариационного исчисления (ОЗВИ) для различных классов краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными [1, 2]. При этом в терминах необходимых и достаточных условий было доказано, что в рамках общепринятых функционалов Эйлера решения ОЗВИ могут не существовать. Однако, если расширить класс функционалов, то становится возможным получение вариационной формулировки исходной краевой задачи.

Для заданного уравнения

$$N(u) = 0, \quad u \in D(N),$$

где $N : D(N) \subseteq U \to V$ — дифференцируемый по Гато оператор; U, V — действительные линейные пространства, задача может быть сведена к отысканию, вообще говоря, локальной билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_u : V \times U \to R$ и вспомогательного линейного оператора B таких, чтобы выполнялось условие потенциальности вида

$$\langle N'_u h, Bg \rangle_u + \langle h; N(u), Bg \rangle_u = \langle N'_u g, Bh \rangle + \langle g; N(u), Bh \rangle_u$$

$$\forall u \in D(N), \forall g, h \in D(N'_u, B) = D(N'_u) \cap D(B).$$

Здесь $\langle g; v, h \rangle_u = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\langle v, h \rangle_{u+\varepsilon g} - \langle v, h \rangle_u \right]$, N'_u — производная Гато оператора N в точке $u \in D(N)$.

В этом плане представляет значительный практический интерес применение найденных функционалов для отыскания приближенных решений поставленных задач. Этот вопрос оставался не исследованным. Поэтому вполне логично было начать серию численных экспериментов в этом направлении, причем для сравнительного анализа естественно было начать с задачи с непотенциальным оператором, но допускающей вариационную формулировку с помощью отыскиваемого вариационного множителя, и в то же время для которой можно получить вариационную формулировку с использованием неэйлерового функционала.

В докладе приводится также одна численная реализация вариационного метода для простейшего линейного обыкновенного дифференциального уравнения с непотенциальным оператором, подтверждающая возможность эффективного применения таких функционалов для получения приближенных решений с высокой степенью точности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00524-а).

Литература

1. *Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — М.: ВИНИТИ, 1992. — Т. 40.
2. *Budochkina S. A., Savchin V. M.* On indirect variational formulations for operator equations // Journal of Function Spaces and Applications. — 2007. — Vol. 5, № 3. — P. 231–242.

Nonclassical variational problems and their numerical realization

V. M. Savchin

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
vsavchin@yandex.ru

Алгоритм послойного численного решения задачи трехмерной векторной томографии с использованием B-сплайнов

И. Е. Светов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
svetovie@math.nsc.ru

В данной работе задача векторной томографии рассматривается в следующей постановке. Пусть некоторое векторное поле v задано в ограниченной области $\mathbb{R}^3$, заполненной средой, в которой зондирующее излучение распространяется вдоль прямых. Требуется восстановить это поле по его известному лучевому преобразованию.

Будем рассматривать $\mathbb{R}^3$ как евклидово векторное пространство со стандартными скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нормой $|\cdot|$. Лучевое преобразование $\mathcal{I}$ в $\mathbb{R}^3$ преобразует векторное поле $v=(v_j)$ в функцию $[\mathcal{I}v]$, определенную на множестве ориентированных прямых $l=\{x+t\xi \mid x,\xi\in\mathbb{R}^3,\ |\xi|=1,\ \langle x,\xi\rangle=0,\ t\in\mathbb{R}\}$, по формуле

$$[\mathcal{I}v](l)=\sum_{j=1}^{3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi_j v_j(x+t\xi)\,dt.$$

Потенциальные поля, потенциал которых обращается в нуль на границе области, лежат в ядре лучевого преобразования [1]. Поэтому только соленоидальная часть ${}^s v$ векторного поля v может быть восстановлена по $[\mathcal{I}v]$.

Задача восстановления векторного поля ${}^s v$ по $[\mathcal{I}v]$ переопределена по размерности, так как необходимо восстановить функции ${}^s v_j(x)$, где $x\in\mathbb{R}^3$, по функции $[\mathcal{I}v]$, определенной на четырехмерном множестве ориентированных прямых (по совокупности переменные x,ξ имеют размерность 6, но на них наложены два условия: $|\xi|=1$, $\langle x,\xi\rangle=0$). Поэтому естественно рассматривать задачу восстановления ${}^s v$ по неполным данным $[\mathcal{I}v]|_{M^3}$, где M^3 — некоторое трехмерное множество ориентированных прямых.

В работе В.А. Шарафутдинова [2] предложены формулы для восстановления соленоидальной части векторного поля при параллельной схеме сбора данных по данным, имеющим размерность 3. В работе [3] на основе этих формул построен и реализован алгоритм численного решения задачи восстановления соленоидальной части векторного поля в $\mathbb{R}^3$ по его известным лучевым преобразованиям, вычисленным вдоль всех прямых, параллельных одной из координатных плоскостей. Для

Работа осуществлена при частичной поддержке РФФИ (проекты №12-01-31178 мол_а, №11-07-00447-а), СО РАН (проект фундаментальных исследований, выполняемых совместно со сторонними научными организациями, проект СО РАН и УрО РАН №2012-32).

единственности восстановления соленоидальной части векторного поля достаточно набора, состоящего из двух координатных плоскостей, но для устойчивого восстановления необходим набор, состоящий из трех координатных плоскостей.

В качестве альтернативы этому алгоритму в докладе предлагается алгоритм численного решения задачи векторной томографии, основанный на методе наименьших квадратов. В качестве аппроксимирующей последовательности выступают векторные поля, построенные на основе трехмерных B-сплайнов. Соленоидальная часть векторного поля восстанавливается по его известным лучевым преобразованиям, вычисленным вдоль всех прямых, параллельных одной из координатных плоскостей. Удачный выбор схемы сбора данных позволил получить точные формулы для вычисления лучевых преобразований от базисных векторных полей.

Литература

1. *Sharafutdinov V. A.* Integral Geometry of Tensor Fields. — Utrecht: VSP, 1994.
2. *Sharafutdinov V. A.* Slice-by-slice reconstruction algorithm for vector tomography with incomplete data. // Inverse Problems. — 2007. — № 23. — P. 2603–2627.
3. *Светов И. Е.* Восстановление соленоидальной части трехмерного векторного поля по лучевым преобразованиям, вычисленным вдоль прямых, параллельных координатным плоскостям // Сиб. Ж. Вычислительной матем. — 2012. — Т. 15, № 3. — С. 329–344.

Algorithm of slice-by-slice numerical solution of three-dimensional vector tomography problem with usage of B-splines

I. E. Svetov

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
svetovie@math.nsc.ru

Об одном обобщении метода проекционной регуляризации

А. И. Сидикова

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия
7413604@mail.ru

Пусть U, F и V — гильбертовы пространства, T — линейный замкнутый оператор, действующий из F в U, L — линейный неограниченный оператор, действующий из U в V, а

$$M_r = \{\ u\ : u \in R(T) \cap D(L), |Lu\| \leqslant r\},$$

где $R(T)$ — множество значений T, а $D(L)$ — область определения оператора L.

Рассмотрим задачу вычисления значений Tf оператора T и предположим, что при $f = f_0$ элемент $Tf_0 \in M_r$, но вместо f_0 нам известны $f_\delta \in F$ и $\delta > 0$, такие, что $\|f_\delta - f_0\| \leqslant \delta$. Требуется, используя f_δ, δ и M_r определить приближенное значение u_δ и оценить величину $\|u_\delta - u_0\|$.

Пусть $\{E_\alpha\ :\ \ 0 < \alpha < \alpha_0\}$ и $\{E'_\alpha\ :\ \ 0 < \alpha < \alpha_0\}$ — семейства проекционных операторов см. [1], действующих в пространствах F и U,

$$P_\alpha f = TE_\alpha f;\ f \in F, \tag{1}$$

а

$$m(\alpha) = \sup\{\|\bar{u}\| : \bar{u} = u - E'_\alpha u, |Lu\| \leqslant 1\}.$$

требуется определить.

Предположим, что нам известны функции $m_1(\alpha)$ и $g(\alpha) \in C(0, \alpha_0)$, такие, что

$$c_1 g(\alpha) \leqslant \|P_\alpha\| \leqslant c_2 g(\alpha)$$

и

$$c_3 m_1(\alpha) \leqslant m(\alpha) \leqslant c_4 m_1(\alpha),$$

где $c_1,\ c_2,\ c_3$ и $c_4 > 0$.

Теперь в качестве приближенного значения возьмем элемент $u_\delta^{\alpha(\delta)} = P_{\alpha(\delta)} f_\delta$, в котором значение $\alpha(\delta)$ является решением уравнения

$$c_3 r m_1(\alpha) = c_2 g(\alpha)\delta. \tag{2}$$

Тогда

$$\|u_\delta^{\alpha(\delta)} - u_0\| \leqslant c_2 g(\alpha(\delta))\delta + r c_4 m_1(\alpha(\delta)). \tag{3}$$

Найдены условия, при которых оценка (3) является точной по порядку, а также условия, при которых метод $\{P_{\alpha(\delta)}\ \ :\ \ 0 < \delta < \delta_0\}$, определяемый формулами (1) и (2), оптимален по порядку на классе M_r.

Литература

1. *Танана В. П., Сидикова А. И.* Об оптимальности по порядку одного метода вычисления значений неограниченного оператора и его приложения // Сиб. журн. индустр. матем. — 2009. — Т. 12, № 3. — С. 125–135.

About generalization of method of the projection regularization

A. I. Sidikova

South-Ural State University, Chelyabinsk, Russia
7413604@mail.ru

Интегральные уравнения Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами в моделировании развивающихся динамических систем

Д. Н. Сидоров

Иркутский госуниверситет, ИСЭМ СО РАН, Иркутск, Россия
contact.dns@gmail.com

Излагается метод построения параметрических семейств непрерывных решений $x(t) \in \mathcal{C}_{(0,T]}$ интегральных уравнений Вольтерра I рода

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), 0 \leqslant t \leqslant T,\ f(0) = 0.$$

где ядра $K(t,s)$ претерпевают разрывы первого рода на кривых $s = \alpha_i(t), i = \overline{1, n-1}$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, т.е.

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s), & 0 \leqslant s < \alpha_1(t), \\ K_2(t,s), & \alpha_1(t) \leqslant s < \alpha_2(t), \\ \quad \dots & \quad \dots\dots\dots \\ K_n(t,s), & \alpha_{n-1}(t) \leqslant s < t, \end{cases}$$

где $\alpha_0(t) \equiv 0 < \alpha_1(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < \alpha_n(t) = t$. Функции $K_i(t,s)$, $f(t)$, $\alpha_i(t)$ имеют непрерывные производные по t при $0 \leqslant t \leqslant T, K_n(t,t) \neq 0$. Функции $\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ возрастают в малой окрестности $0 \leqslant t \leqslant \tau$, $\alpha_i(0) = 0$. Предполагается, что кривые $s = \alpha_i(t)$ делят треугольную область $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ на n непересекающихся областей

$$D_i = \{s, t; \alpha_{i-1}(t) \leqslant s < \alpha_i(t)\}, i = \overline{1, n},$$

являющихся секторами с вершинами в нуле в плоскости s, t. Такие уравнения возникают в интегральных моделях развивающихся динамических систем (см., например, монографии [1, 2]).

В работе [4] получено алгебраическое характеристическое уравнение

$$L(j) = 0,$$

где

$$L(j) \equiv K_n(0,0) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\alpha_i'(0)\right)^{1+j} \left(K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)\right).$$

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки, проект программы «научные и научно-педагогические кадры инновационной России» №14.B37.21.0365.

Описан аналитико-численный метод для регулярного случая, когда характеристическое уравнение не имеет натуральных корней и решение интегрального уравнения единственное. В нерегулярном случае характеристическое уравнение имеет натуральные корни, а решение рассматриваемого интегрального уравнения содержит произвольные постоянные. Развиваются результаты, описанные в работах [3–6]. Приведены конструктивные теоремы существования решений.

Доказанные общие теоремы иллюстрируются численными расчетами на тестовых примерах.

Литература

1. *Hritonenko N. V., Yatsenko Yu. P.* Modeling and optimization of the lifetime of technologies. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
2. *Apartsyn A. S.* Nonclassical linear Volterra equations of the first kind. — Germany: Walter de Gruyter Acad. Publ., 2003.
3. *Сидоров Д. Н.* Слабо сингулярные уравнения Вольтерра первого рода: теория и приложения в моделировании развивающихся динамических систем. — Saarbrücken: Palmarium Acad. Publ., 2013.
4. *Sidorov D. N.* Volterra equations of the first kind with discontinuous kernels in the theory of evolving systems control // Studia Informatica Universalis. Hermann Editions. — 2011. — Vol. 9, № 3. — P. 135–146.
5. *Маркова Е. В., Сидоров Д. Н.* Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами в теории моделирования развивающихся систем // Изв. ИГУ. Сер. Математика. — 2012. — № 2. — С. 31–45.
6. *Сидоров Д. Н.* О параметрических семействах решений интегральных уравнений Вольтерра I рода с кусочно-гладкими ядрами // Дифференциальные уравнения. — 2013. № 2.

Volterra Integral Equations of the First Kind with Jump Discontinuous Kernels in Evolving Dynamical Systems Modeling

D. N. Sidorov

Irkutsk State University, ISEM SB RAS, Irkutsk, Russia
contact.dns@gmail.com

Существование и разрушение главных по Канторовичу непрерывных решений нелинейных интегральных уравнений

Н. А. Сидоров

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия
sidorovisu@gmail.com

Рассмотрено нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$x(t) = \int\limits_0^t K(t, s, x(s))\, ds, \tag{1}$$

где функция $K(t, s, x)$ определена, непрерывна и дифференцируема по x в области $D = \{0 < s < t < T, |x| < \infty, T \leqslant \infty\}$. Назовем непрерывную функцию $x(t)$, удовлетворяющую уравнению (1), *главным* по Канторовичу (см. [1], с.467) решением уравнения (1), если последовательность $x_n(t)$, где $x_n(t) = \int_0^t K(t, s, x_{n-1}(s))\, ds,\ x_0(t) \equiv 0$, сходится при $0 \leqslant t < T_1$, $T_1 < T$. Пусть существуют непрерывные положительные монотонно возрастающие функции $m(s)$, $\gamma(x)$, определенные при $0 \leqslant s < \infty$, $0 \leqslant x < \infty$, такие, что при t, s, x из области D выполняются неравенства $|K(t, s, x)| \leqslant m(s)\gamma(|x|)$, $|K'_x(t, s, x)| \leqslant m(s)\gamma'(|x|)$. Получены достаточные условия существования главного решения на полуоси и на конечном интервале. Дан способ вычисления границы этого интервала, за пределами которого решение разрушается (blow-up). Используются результаты работы [2].

Литература

1. *Kantorovich L. V, Vulikh B. Z., Pinsker A. Z.* Functional analysis in semi-ordered spaces. — Moscow-Leningrad: GITTL, 1950.
2. *Sidorov D. N., Sidorov N.A.* Convex majorants method in the theory of nonlinear Volterra equations. Banach Journal of Mathematical Analysis. — 2012. — Vol. 6, № 1. — P. 1–10.

Existence and blow-up of Kantorovich main continuous solutions of nonlinear integral equations

N. A. Sidorov

Irkutsk State University, Russia
sidorovisu@gmail.com

Работа поддержана грантом ФЦП, госконтракт №14.B37.21.0365.

Обратные задачи определения коэффициента в эллиптическом уравнении в цилиндре

В. В. Соловьёв

НИЯУ «МИФИ», Москва, Россия
soloviev.vyacheslav@gmail.com

Пусть $0 < \alpha < 1$ некоторое фиксированное число, в пространстве точек $x = (x_1, ..., x_n) \in R_x^n$ задана ограниченная область $D \subset R_x^n$ с гладкой границей ∂D класса $C^{2,\alpha}$. Будем далее считать, что пространство R_x^n вложено в пространство точек $(y, x) = (y, x_1, ..., x_n) \in R_y \times R_x^n$. Пусть заданы фиксированные числа $q_1, q_2 : q_1 < 0 < q_2$. Определим в пространстве $R_y \times R_x^n$ цилиндр $\Omega = (q_1, q_2) \times D$. Боковую поверхность этого цилиндра обозначим $\Gamma = (q_1, q_2) \times \partial D$. Определим пространства функций $U(\Omega), F(D)$ по правилам :

$$U(\Omega) = \{u \in C(\bar{\Omega}) : \ u \in C^{2,\alpha}(\Omega), \ u_{yy} \in C(\bar{\Omega})\},$$

$$F(D) = \{f \in C(\bar{D}) : \ f \in C^{\alpha}(D), \ f(x) \leqslant 0, \ x \in D\},$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u, f) \in U(\Omega) \times F(D)$из условий:

$$-(Lu)(y,x) = -(a(x)u_{yy} + (L_x u)(y,x)) = f(x)u(y,x) + g(y,x), \ (y,x) \in \Omega,$$

$$u(y,x) = \mu(y,x), \ (y,x) \in \Gamma, u(q_i, x) = 0, \ i = 1,2, \ x \in \bar{D}, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \chi(x), \ x \in D. \tag{2}$$

В условиях (1) оператор L_x имеет вид:

$$(L_x u)(y,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) u_{x_i x_j}(y,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i}(y,x) + c(x)u(y,x),$$

функции $a, g, a_{ij}, b_i, c, \mu, \chi$ заданные, достаточно гладкие функции. Определим пространство функций:

$$H(D) = \{\chi \in C(\bar{D}) : \ \chi \in C^{2,\alpha}(\Omega), \ L_x \chi \in C(\bar{D})\}.$$

Для того чтобы сформулировать теорему существования и единственности для обратной задачи (1)–(2) определим вспомогательную функцию $\bar{w} \in C^{2,\alpha}(D) \cap C(\bar{D})$ из условий:

$$-(L\bar{w})(y,x) = -g_{yy}(y,x), \ (y,x) \in \Omega, \ \bar{w}(y,x) = -\mu_{yy}(y,x), \ (y,x) \in \bar{\Gamma},$$

$$\bar{w}(q_i, x) = g(q_i, x)/a(x), \ i = 1,2, \ x \in \bar{D}.$$

Определим для задачи (1)–(2) условия согласования,необходимые для существования её решения:

$$\mu(q_i, x) = 0,\ -a(q_i, x)\mu_{yy}(q_i, x) = g(q_i, x),\ i = 1, 2,\ \mu(0, x) = \chi(x),\ x \in \partial D.$$

Теорема 1. *Пусть для коэффициентов строго эллиптического в цилиндре Ω оператора L справедливы включения a, a_{ij}, b_i, $c \in C^\alpha(D) \cap C(\bar{D})$, для функций g, μ, χ справедливы включения g, $g_{yy} \in C^\alpha(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, μ, $\mu_{yy} \in C(\bar{\Gamma})$, $\chi \in H(D)$, выполнены условия согласования и неравенства $\chi(x) \geqslant \chi_0 > 0$, $a(0, x)\bar{w}(0, x) - ((L_x\chi)(x) + g(0, x)) \leqslant 0$, $x \in D$, $g(y, x) \geqslant 0$, $g_{yy}(y, x) \leqslant 0$, $\mu(y, x) \geqslant 0$, $\mu_{yy}(y, x) \leqslant 0$, $(y, x) \in \Gamma$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (1)–(2) в указанном классе функций.*

Изучена также обратная задача определения коэффициента в эллиптическом уравнении в цилиндре для случая переопределения при $y = q_2$ и имеющего вид $u_y(q_2, x) = 0$.В этом случае получены условия однозначной разрешимости носящие аналогичный характер.

Inverse Problems of Coefficient Determination for Elliptic Equation in Cylinder

V. V. Solov'ev

National Research Nuclear University (MEPHI), Moscow, Russia
soloviev.vyacheslav@gmail.com

О моделировании нелинейной динамики квадратичными полиномами Вольтерра

С. В. Солодуша

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия, solodusha@isem.sei.irk.ru

Как известно, один из универсальных подходов к моделированию нелинейных динамических объектов типа вход-выход основан на построении полиномов Вольтерра N-ой степени [1]:

$$y(t) = P_N(x(t)) \equiv \sum_{m=1}^{N} \int\limits_0^t \dots \int\limits_0^t K_m(t, s_1, ..., s_m) \prod_{i=1}^{m} x(s_i) ds_i, \ t \in [0, T]. \tag{1}$$

Работы Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева (ИСЭМ) СО РАН в области построения интегральных моделей на базе полиномов Вольтерра были начаты в 90-х годах прошлого века. В публикациях [2, 3] предложена оригинальная методика идентификации ядер Вольтерра, основанная на задании многопараметрических семейств кусочно-постоянных тестовых входных сигналов. При этом задача идентификации сводится к решению линейных многомерных уравнений Вольтерра I рода с переменными верхними и нижними пределами. Данный подход был развит (см. библиографию в [4]) и применен для описания реальных процессов теплообмена на установке ВТК (высокотемпературный контур) ИСЭМ СО РАН, а также эталонной модели теплообмена [5].

Дальнейшие исследования коллектива связаны со следующим этапом математического моделирования. Если ядра K_m идентифицированы, то при заданном $y(t)$ (1) является полиномиальным относительно $x(t)$ интегральным уравнением, которое возникает в задаче автоматического управления динамическим объектом. Исследованию специфики полиномиальных уравнений Вольтерра посвящен цикл публикаций А.С. Апарцина (см. библиографию в [6]). Численному решению подобных уравнений, связанных с проблемой автоматического управления динамикой теплообмена, посвящены работы [7, 8]. Разработанные алгоритмы были реализованы в программном продукте [9].

Данная работа посвящена сравнению имеющихся подходов к моделированию нелинейной динамики в наиболее интересном для приложений квадратичном случае, когда $N = 2$ в (1). В качестве эталонной динамической системы рассмотрена математическая модель переходного процесса в элементе теплообменного аппарата (теплообменнике) с независимым подводом тепла, представленная в [10].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00722-а.

Литература

1. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1982. — 302 с.
2. *Apartsyn A.S.* Mathematical modelling of the dynamic systems and objects with the help of the Volterra integral series // EPRI-SEI Joint seminar. Beijing, China, 1991. — P. 117–132.
3. *Apartsyn A.S.* On some identification method for nonlinear dynamic systems // ISEMA-92. Shenzhen, China, 1992. — P. 288–292.
4. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1999. — 193 с.
5. *Апарцин А.С., Солодуша С.В., Таиров Э.А.* Математические модели нелинейной динамики на базе рядов Вольтерра и их приложения // Изв. РАЕН: Математика, Математическое моделирование, Информатика и управление. — 1997. — Т. 1, № 2. — С. 115–125.
6. *Апарцин А.С.* Полиномиальные интегральные уравнения Вольтерра I рода и функция Ламберта // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 1. — С. 69–81.
7. *Солодуша С.В.* Приложение нелинейных уравнений Вольтерра I рода к задаче управления динамикой теплообмена // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 6. — С. 133–140.
8. *Солодуша С.В.* Численное моделирование нелинейных динамических систем с векторным входом квадратичными полиномами Вольтерра // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. — 2012. — № 34. — С. 53–59.
9. *Солодуша С.В.* Программно-вычислительный комплекс для моделирования нелинейной динамики теплообмена на базе квадратичных полиномов Вольтерра // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2012614246 от 12. 05. 2012.
10. *Таиров Э.А.* Нелинейное моделирование динамики теплообмена в канале с однофазным теплоносителем // Изв. АН СССР: Энергетика и транспорт. — 1989. — № 1. — С. 150–156.

On modeling of nonlinear dynamics by quadratic Volterra polynomials

S. V. Solodusha

Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia
solodusha@isem.sei.irk.ru

О приближенном решении обратной задачи для нелинейного дифференциального уравнения

Е. В. Табаринцева

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия
eltab@rambler.ru

Пусть H — гильбертово пространство, A — линейный неограниченный положительно определенный самосопряженный оператор в H с областью определения $D(A)$, плотной в H.

Рассмотрим задачу вычисления элемента $\varphi \in H$ такого, что решение задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = -Au + f(t, u(t)); t \in (t_0; T), \tag{1}$$

$$u(t_0) = \varphi, \quad u_0 \in H, \quad 0 < t_0 < T$$

удовлетворяет условию $u(T) = \chi$. Здесь $f : [t_0; T] \times H \to H$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица по u и условию Гельдера по t, т.е.

$$\|f(u_1, t) - f(u_2, t)\|_H \leqslant L\|u_1 - u_2\|_H + |t_1 - t_2|^\alpha,$$

где $0 < \alpha < 1$, при всех $t \in [t_0; T]$. Предположим, что при заданном $\chi \in H$ существует точное решение $u_0 \in H$ поставленной обратной задачи ‘, принадлежащее заданному множеству $M \subset H$. Элемент $\chi \in H$ нам не известен, а вместо него дано приближенное значение $\chi_\delta \in H$ такое, что $\|\chi - \chi_\delta\| < \delta$. Требуется по исходым данным задачи определить приближенное решение задачи с обратным временем и оценить его уклонение от точного решения.

Рассмотрим задачу с обратным временем для соответствующего линейного уравнения, т.е. задачу вычисления элемента $\varphi_\tau \in H$ такого, что решение задачи Коши

$$\frac{dv}{dt} = -Au; \quad t \in (\tau; T), \tag{2}$$

$$v(\tau) = \hat{\varphi}_\tau, \quad v_0 \in H, \quad 0 < t_0 \leqslant \tau < T$$

удовлетворяет условию $v(T) = \hat{\chi}$, где $\hat{\chi} \in H$- заданный элемент.

Пусть $\Phi(\alpha, \mu)$ ($\alpha > 0$, $\mu > 0$)- функция, принимающая действительные значения, имеющая конечое число точек разрыва первого рода при любом $\alpha > 0$ и удовлетворяющая условиям, сформулированным в [1]. Рассмотрим семейство линейных операторов $R_\alpha^{T-\tau}$, определенных равенством $R_\alpha^{T-\tau} = \Phi(\alpha, e^{-A(T-\tau)}$. Из результатов [1] следует, что в качестве приближенного решения линейной обратной задачи (2) можно рассматривать элемент

$$v_\alpha^\delta(\tau) = R_\alpha^{T-\tau}\hat{\chi}_\delta \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00117.

при подходящем выборе зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$.

Обозначим $u_\alpha^\delta(t)$ решение интегрального уравнения

$$u_\alpha^\delta(t) = R_\alpha^{T-t}\hat{\chi}_\delta - \int_t^T R_\alpha^{s-t} f(s, u_\alpha^\delta(s)ds.$$

В качестве приближенного решения нелинейной обратной задачи будем рассматривать элемент

$$\varphi_\alpha^\delta = u_\alpha^\delta(t). \tag{4}$$

Рассмотрим следующие величины:

$$\Delta_M(\alpha,\delta) = \sup\{\|\varphi_\delta^\alpha - \varphi\| : \ \varphi \in M, \quad \|\chi - \chi_\delta\| \leqslant \delta\}$$

— погрешность метода приближенного решения нелинейной задачи (1), определенного формулой (4), на множестве M;

$$\hat{\Delta}_M(\alpha,\delta) = \sup\{\|R_\alpha^{T-t_0}\hat{\chi}_\delta - \hat{\varphi}_0\| : \hat{\varphi}_0 \in M, \quad \|\hat{\chi} - \hat{\chi}_\delta\| \leqslant \delta\}$$

— погрешность метода приближенного решения линейной задачи (2), определенного формулой (3), на множестве M. Выполняется

Теорема. *Существует постоянная $\delta_0 > 0$, такая, что для всех $0 < \delta < \delta_0 > 0$, $\alpha > 0$ выполняется неравенство*

$$\Delta_M(\alpha,\delta) \leqslant (1 + e^{L(T-t_0)})\hat{\Delta}_M(\alpha,\delta).$$

Литература

1. *Бакушинский А. Б.* Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве // ЖВМиМФ. — 1967. — Т. 7, № 3. — С. 672–677.

On an approximate solution to an inverse problem for a nonlinear differential equation

E. V. Tabarintseva

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia
eltab@rambler.ru

Об оценке погрешности в точке приближенного решения обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности

В. П. Танана, Т. С. Камалтдинова

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия
tvpa@susu.ac.ru, KamaltdinovaTS@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial ux,t}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \quad -\infty < x < \infty, \quad t \in (0,t_0], \quad t_0 > 0, \tag{1}$$

где $u(x,t) \in C\{(-\infty,\infty) \times [0,t_0]\} \cap C^{2,1}\{(-\infty,\infty) \times (0,t_0]\}$ для любого $t \in (0,t_0]$, $u(x,t), u'_x(x,t), u''_{xx} \in L_2(-\infty,\infty) \cap L_1(-\infty,\infty)$ и существует $\chi(x) \in L_1(-\infty,\infty)$ такая, что почти для любого $t \in (0,t_0]$

$$|u(x,t)| + \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant \chi(x), \quad x \in (-\infty,\infty).$$

Пусть нам дано распределение $\varphi(x) \in L_2(-\infty,\infty) \cap L_1(-\infty,\infty)$ в момент времени t_0

$$u(x,t_0) = \varphi(x); \quad -\infty < x < \infty, \tag{2}$$

а начальное распределение $u_0(x)$

$$u(x,0) = u_0(x); \quad -\infty < x < \infty \tag{3}$$

требуется определить.

Введем множество $Z \in L_2(-\infty,\infty)$.

$$u(x) \in Z \Leftrightarrow \ u(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + \psi_i(x),$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} a_i(x^2 - x_i^2), & |x| \leqslant x_i \\ 0, & |x| > x_i, \end{cases}$$

a_i и $x_i > 0$, а $\psi(-x) = \psi(x)$ и $\psi(x) \in W_2^{3/2}(-\infty,\infty)$, а $M_r = F^{-1}[\hat{M}_r]$, где F — преобразование Фурье,

$$\hat{M}_r = \{\hat{u}(\lambda) \ : |g(\lambda)\hat{u}(\lambda)\|_{L_2} \leqslant r\},$$

$g(\lambda) = g(-\lambda), g(\lambda) \in C(-\infty,\infty)$, $g(\lambda) > 0$, $g(\lambda)$ — строго возрастает на полуоси $[0,\infty)$ и стремится к бесконечности при $\lambda \to \infty$.

Предположим, что при $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ существует $u_0(x) \in Z$ такое, что решение задачи (1), (3) удовлетворяет условию $u(x,t_0) = \varphi_0(x)$, но точное значение $\varphi_0(x)$ нам не известно, а вместо него даны некоторое приближение $\varphi_\delta(x) \in L_2(-\infty,\infty) \cap L_1(-\infty,\infty)$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|\varphi_\delta(x) - \varphi_0(x)\|_{L_2} \leqslant \delta. \tag{4}$$

Требуется, используя исходные данные (φ_δ, δ) задачи (1), (2), (4), определить приближенное решение $u_\delta(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ и оценить величину $\|u_\delta(x) - u_0(x)|_{L_2}$.

Применив к задаче (1), (2), (4), преобразование Фурье F, сведем ее к задаче вычисления значений неограниченного оператора $\hat{T}$

$$\hat{T}\hat{\varphi}(\lambda) = e^{\lambda^2 t_0}\hat{\varphi}_\delta(\lambda) = \hat{u}(\lambda), \quad \|\hat{\varphi}_\delta(\lambda) - \hat{\varphi}_0(\lambda)\|_{L_2} \leqslant \delta. \tag{5}$$

Приближенное решение $\hat{u}_\delta(\lambda)$ задачи (5) определим формулой

$$\hat{u}_\delta(\lambda) = \begin{cases} e^{\lambda^2 t_0}\hat{\varphi}_\delta(\lambda), & |\lambda| \leqslant \alpha(\hat{\varphi}_\delta, \delta) \\ 0, & |\lambda| > \alpha(\hat{\varphi}_\delta, \delta), \end{cases}$$

где $\alpha(\hat{\varphi}_\delta, \delta)$ удовлетворяет условию $\int\limits_{\alpha(\hat{\varphi}_\delta,\delta)}^{\infty} |\hat{\varphi}_\delta(\lambda)|^2 d\lambda = 9\delta^2$. Введем оценку в точке $u_0(x)$

$$\Delta_\delta(u_0, t) = \sup_{f_\delta}\{\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \ : \varphi_\delta(x) \in L_2(-\infty,\infty), |\varphi_\delta - \varphi_0\| \leqslant \delta\}.$$

Теорема 1. *Предположим, что* $Z \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nM_r$, $\dfrac{g^2(\lambda)}{1+\lambda^4}$ *убывает на* $[0,\infty)$, $u_0(x) \in Z \cap M_r$ *и* $\|\varphi_\delta\| > 3\delta$, *где* $\lambda(\delta)$ *определено уравнением* $\lambda g(\lambda) = \dfrac{r}{\delta}$. *Тогда*

$$\Delta_\delta(u_0, \delta) \cdot g(\lambda(\delta)) \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

On point-wise error estimate in approximate solution of the Cauchy problem for heat conduction equation

V. P. Tanana, T. S. Kamaltdinova

South-Ural State University, Chelybinsk, Russia
tvpa@susu.ac.ru, KamaltdinovaTS@mail.ru

Аппроксимационно-итерационный метод решения обратной задачи геоэлектрики с использованием нейронных сетей

М. И. Шимелевич, Е. А. Оборнев, И. Е. Оборнев, Е. А. Родионов

Российский государственный геологоразведочный университет, Москва, Россия, shimelevich-m@yandex.ru, eugenyo@mail

Обратная задача геоэлектрики в заданном классе параметризованных геоэлектрических сред на практике сводится к решению системы нелинейных уравнений I рода относительно вектора $s = (s_1, \dots, s_N)$ параметров среды [2]:

$$A_N s = e, \quad s \in S \subset \mathbb{R}^N, \quad e \in \mathbb{R}^M, \quad M \geqslant N, \tag{1}$$

где A_N – нелинейный оператор прямой задачи, $e = (e_1, \dots, e_M)$ – вектор исходных данных, определенных с некоторой погрешностью δ, S – компактное множество допустимых решений, построенное на основе параметризации среды, т.е. аппроксимации множества априорных ограничений задачи (например, с помощью ε-сети). В работе рассматриваются эффективно параметризованные среды, для которых расчетные значения модуля непрерывности обратного оператора $\omega_N(\delta)$ не превышают заданной величины $\varepsilon_0(\delta)$ и, таким образом, решение обратной задачи (1) является практически устойчивым [1].

Для решения обратной задачи применяется *аппроксимационный нейросетевой подход* [2], при котором приближенное решение (1) ищется в виде заданной функции специального вида от входных данных $s \approx Z(a, e_1, \dots, e_M)$, которая называется *нейросетью* или *нейросетевым аппроксиматором* и зависит от набора $a = (a_1, \dots, a_{N_S})$ свободных (настраиваемых) коэффициентов аппроксиматора, определяемых в процессе его построения («обучения») на множестве эталонных (опорных) примеров решений прямых задач. Теоретическое обоснование применения нейросетевых конструкций для аппроксимации многомерных отображений опирается на теоремы Колмогорова [3] и Цыбенко [4]. Получаемое с помощью аппроксиматора Z решение уравнения (1) является интерполяционным и имеет интерполяционную ошибку

$$\Delta_{int} = \sup_{s \in S} ||Z(A_N s) - s||_\infty, \quad \text{где} \quad ||s||_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant N} |s_k|,$$

даже при отсутствии погрешности в правой части (1). На основе свойств НС аппроксиматора Z авторами разработан *аппроксимационно-итерационный* НС метод решения системы (1), который позволяет уменьшить интерполяционную ошибку получаемого приближенного решения. Идея

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-07-00662 и использовании ресурсов МСЦ..

метода заключается в построении последовательности НС аппроксиматоров на сужающихся подмножествах допустимых решений. Для найденного приближенного решения задачи (1) вычисляется апостериорная оценка погрешности [5]. Для численного определения свободных коэффициентов НС аппроксиматора, интерполяционной и апостериорной оценок погрешности решаются соответствующие нелинейные оптимизационные задачи с использованием методов группы Монте-Карло. Исследуется сходимость применяемых численных алгоритмов. В работе представлены примеры численных решений 2D и 3D обратных задач геоэлектрики и расчета их погрешностей для модельных данных.

Литература

1. *Шимелевич М. И., Оборнев Е. А., Оборнев И. Е., Родионов Е. А.* Численные методы оценки степени практической устойчивости обратных задач геоэлектрики // Физика Земли. — 2013. — № 3 (принята к печати).
2. *Шимелевич М. И., Оборнев Е. А.* Аппроксимационный метод решения обратной задачи МТЗ с использованием нейронных сетей // Физика Земли. — 2009. — № 12. — С. 22–38.
3. *Колмогоров А. Н.* О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 114. — С. 953–956.
4. *Cybenko G.* Approximation by superpositions of a Sigmoidal Function // Mathematics of Control, Signals and Systems. — 1989. — Vol. 2. — P. 303–314.
5. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990.

An approximation-iterative method for solving the geoelectric inverse problem with use of neural networks

M. I. Shimelevich, E. A. Obornev, I. E. Obornev, E. A. Rodionov

Russian State Geological Prospecting Univercity, Moscow, Russia
shimelevich-m@yandex.ru, eugenyo@mail

Алгоритмы регуляризации задачи продолжения волновых полей с части границы

М. А. Шишленин

Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия, mshishlenin@ngs.ru

Задачи продолжения электромагнитных и акустических полей с данными на времениподобной поверхности [1, 2] имеют важное прикладное значение. Продолжение поля в однородную среду на определенную глубину позволяет получить больше полезной информации о неоднородной среде находящейся ниже этой глубины.

Рассмотрим задачу продолжения электромагнитного поля в однородную среду в сторону залегания неоднородностей:

$$\varepsilon u_{tt} + \sigma u_t = \frac{1}{\mu}\Delta_{x,y} u, \quad x \in (0,h),\ y \in (0,L_y),\ t \in (0,T); \tag{1}$$

$$u(0,y,t) = f(y,t); \tag{2}$$

$$u_x(0,y,t) = g(y,t); \tag{3}$$

$$u(x,0,t) = u(x,L_y,t) = 0. \tag{4}$$

Здесь ε — диэлектрическая проницаемость, σ — удельная проводимость и μ — магнитная проницаемость среды.

Требуется найти решение $u(x,y,t)$ на глубине $x = h$.

Рассмотрим прямую задачу: к соотношениям (1), (3), (4) добавим условие на границе

$$u(h,y,t) = q(y,t). \tag{5}$$

Сформулируем задачу продолжения (1)–(4), как обратную задачу (1)–(5): определить функцию $q(y,t)$ по заданной дополнительной информации (2).

Запишем обратную задачу (1)–(5) в операторной форме

$$Aq = f, \qquad q(y,t) \to f(y,t).$$

Введем целевой функционал $J(q) = \langle Aq - f, Aq - f\rangle$ и рассмотрим задачу минимизации $J(q) \to \min$.

Введем сопряженную задачу в области $x \in (0,h)$, $y \in (0,L_y)$, $t \in (0,T)$:

$$\varepsilon\psi_{tt} - \sigma\psi_t = \frac{1}{\mu}\Delta\psi;$$

$$\psi|_{t=T} = \psi_t|_{t=T} = 0;$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00773 и при поддержке междисциплинарного проекта СО РАН 14 “Обратные задачи и их приложения: теория, алгоритмы, программы”.

$$\psi_x|_{x=0} = 2(u(0,y,t) - f(y,t)), \quad \psi|_{x=L_x} = 0;$$
$$\psi|_{y=0} = \psi|_{y=L_y} = 0.$$

Тогда градиент функционала вычисляется по формуле

$$J'(q) = \psi_x|_{x=L_x}.$$

Исследован дискретный аналог операторного уравнения $Aq = f$, проведен анализ стремления к нулю сингулярных чисел. В случае простой геометрии найдены сингулярные числа оператора продолжения.

Анализ сингулярных чисел показал, что с ростом волнового числа с одной стороны уменьшается глубина, на которую можно относительно устойчиво продолжить решение, с другой стороны, увеличивается чувствительность оператора A к вариациям данных. Это свойство отражает известные физические явления — скин-эффект и увеличение разрешающей способности с ростом волнового числа, а также дает количественную оценку известного ограничения на глубину волнового электромагнитного зондирования.

Литература

1. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980.
2. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

Regularization algorithms of electromagnetic field continuation from the part of the boundary

M. A. Shishlenin

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
mshishlenin@ngs.ru

Математическое моделирование и численный метод решения одной обратной задачи при оценке собственного состояния средств измерения

Н. М. Япарова

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия
ddjy@math.susu.ac.ru

Задача оценки собственного состояния средств измерения была рассмотрена на примере преобразователя температуры с термосопротивлениями из двух различных металлов. Решение этой задачи состоит из нескольких этапов. Целью первого этапа является построение математической модели, характеризующей зависимость температуры от сопротивлений и вычисление величины уклонения расчетной температуры T_k от эталонных значений t_k.

При построении математической модели используют широко применяемую на практике зависимость величины сопротивления от температуры, которую можно представить в виде уравнения [1]

$$\frac{R_{1k}}{R_{2k}} = \frac{R_{01}}{R_{02}} \frac{1 + a_1 t_k + a_2 t_k^2 + a_4 t_k^4 + a_6 t_k^6}{1 + b_1 t_k + b_2 t_k^2 - 100 b_4 t_k^3 + b_4 t_k^4}, \tag{1}$$

где R_{1k} — сопротивление первого материала, R_{2k}- сопротивление второго материала, измеренные при некоторой температуре t_k, R_{01}, $\{a_m\}_1^6$ — коэффициенты первого сопротивления, R_{02}, $\{b_m\}_1^4$ — коэффициенты второго сопротивления, определяемые соответствующими ГОСТами.

В то же время, непосредственно измеряемой в ходе эксперимента величиной являются сопротивления R_{1k} и R_{2k}. Поэтому возникает необходимость в решении обратной задачи, позволяющей моделировать значения температуры по результатам измерения сопротивлений.

Математическая модель, характеризующая зависимость температуры от сопротивлений, описывается системой алгебраических уравнений в левых частях которой стоят многочлены с неопределенными заранее степенями m и l, при этом коэффициенты A_i, B_j также подлежат определению.

Для решения сформулированной задачи предложен метод, основанный на методе регуляризации Тихонова [2] с выбором параметра регуляризации по принципу невязки. Получено теоретическое обоснование оценки погрешности найденных решений.

Построенная модель, характеризующая зависимость температуры от сопротивлений, были использованы для моделирования значений температуры T_k и оценки величины уклонения T_k от t_k.

На основании полученных результатов создан численный метод и проведен вычислительный эксперимент для серии модельных примеров.

Литература

1. *Белоусов М. Д., Шестаков А. Л.* Метод принятия решения в процессе работы о выходе термометра сопротивления за предел допускаемой погрешности // Вестник ЮурГУ. Серия: компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. — 2011. — № 23(240). — С. 19-25.
2. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.

Mathematical modeling and numerical solving for an inverse metrological self-test problem

N. M. Yaparova

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia
ddjy@math.susu.ac.ru

Секция 6. Проблемы математического образования

New law on educatiion in Russia: first impressions

O. V. Zimina*, A. I. Kirillov†

* *Moscow Institute of Power Engineering, Moscow, Russia*
AcademiaXXI@mail.ru

† *Russian Foundation for Basic Research, Moscow, Russia*
AcademiaXXI@mail.ru

We suggest to discuss the novelties of the Law that can change the educational processes in Russia. Those novelties concern the following six topics.

1. Definitions of the basic notions relevant to education.
2. Specifications of the levels and aims of education.
3. Statuses of people involved in education.
4. Teaching the bases of spiritual and moral cultures of peoples of Russian Federation.
5. Theological and religious education.
6. Education and scientific research.

Фундаментальное математическое образование в СПбГПУ

В. И. Антонов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Санкт-Петербург, Россия
antonovvi@mail.ru

Российская система образования формировалась в течение последних двух веков. Ее создавали выдающиеся отечественные педагоги, ученые, общественные деятели. В своей работе они использовали не только положительный опыт западных и восточных цивилизаций, но и особенности нашей многонациональной и самобытной культуры [1].

Несмотря на некоторую противоречивость, во многом связанную с историческим укладом жизни, в целом образование в большой степени отвечало потребностям общества и государства. Достижения нашей страны во многих областях науки и техники являются общепризнанными. Мы с полным основанием гордились нашей системой образования.

В течение длительного исторического периода образование относилось к категории «благо» и было важной частью государственной политики. В последнее время его все чаще стали относить к категории «оказание услуг».

Поведение сложных систем, к которым можно отнести и человеческое общество, определяется как детерминированными, так и случайными воздействиями. Рыночные отношения позволяют достаточно быстро отслеживать изменения в сфере производства и потребления, однако они в большой степени изменяют целевую функцию управления.

Поставив во главу угла извлечение наибольшей прибыли, рынок обращает все меньшее внимание на другие аспекты человеческих взаимоотношений.

Трудно противиться власти денег. Людям, которые их добились, часто начинает казаться, что за деньги можно купить все: любовь, дружбу, общественное признание и т.д. Однако вместо любви, важной частью которой является духовная близость, покупается всего лишь плотское удовольствие, вместо дружбы, предполагающей равенство прав обеих сторон, покупается подхалимаж или слепое подчинение. Если с помощью денег не удается добиться результата, то возникает желание устранить ненужный объект. Не удивительно, что многие бизнесмены вынуждены обращаться к психиатру.

Привнесение подобной морали в сферу нравственно - духовных отношений чревато серьезными последствиями. Поэтому необходимо принимать меры по устранению перекосов в сфере воспитания. И здесь не обойтись без разумной государственной политики. Необходимо осознавать, что будущее страны определяется не только тем, сколько мы произведем и сумеем потребить, но и тем, насколько устойчивым будет наше государство, общество, из каких индивидуумов оно будет состоять.

Огромную роль в развитии и становлении общества играют образование и наука. Важным аспектом системы образования являются фундаментальные науки. По настоящему образованный человек должен уметь донести до слушателя ясно изложенную мысль, не выходя при этом за границы нормативной лексики.

Важную роль в становлении логического мышления играет постановка математического образования. Его целью является не только выработка определенных навыков, но и развитие умения отделять главное от второстепенного, абстрагироваться от мелочей. Все эти качества должны сопровождаться тренировкой памяти, постоянными волевыми усилиями для преодоления трудностей. К сожалению, предпринятая в последние годы реформа школьного образования существенным образом снизила уровень подготовки выпускников. Сосредоточив основное внимание на сугубо второстепенных вопросах, в основном на формах и методах объективного контроля знаний, мы перестали развивать в учениках любовь к самостоятельной творческой деятельности, основанной на знании, а не знакомстве с предметом. Однако, хотим мы того или не хотим, сама жизнь требует от граждан необходимости постоянного самосовершенствования в сочетании с активной жизненной позицией. В противном случае нам не избежать массовых катаклизмов (техногенных катастроф, дорожных аварий), связанных с непрофессиональным отношением к делу.

Изучение математики не является панацеей от всех бед. Однако математическая грамотность способствует лучшему пониманию сути различных проблем и путей их разрешения.

Литература

1. *Антонов В. И.* Математическое образование в СПбГПУ // Научно-технические ведомости СПбГПУ. — 2005. — № 3. — С. 195–204.

Fundamental mathematical education at the SPbSPU

V. I. Antonov

Saint-Petersburg State Politechnic University, Saint-Petersburg, Russia
antonovvi@mail.ru

Структура и содержание нового задачника по дифференциальным уравнениям для студентов математических и информационных профилей по направлению «педагогическое образование»

Р. М. Асланов, А. С. Безручко

Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия, r_aslanov@list.ru, bezruchko_anna@mail.ru

Дифференциальные уравнения играют большую роль в фундаментальной подготовке, в плане формирования у студента научного мировоззрения, определенного уровня математической культуры, методической культуры, особенно по таким компонентам, как понимание сущности прикладной и практической направленности математики, овладение методом математического моделирования. Изучение курса дифференциальных уравнений и его методов дает еще один инструмент для познания мира, в котором мы живем, позволяет сформировать образное и научное представление о реальном физическом пространстве.

Многие курсы дифференциальных уравнений еще в недалеком прошлом были ориентированы на формальное решение стандартных типов дифференциальных уравнений. Поэтому в них значительную долю составляли систематические методы поиска решения. Многие студенты концентрировались на изучении и запоминании методов решения уравнений знакомых типов. Вследствие этого многие задачники включали в себя только примеры на нахождение аналитического решения дифференциального уравнения и исключали задачи прикладной направленности. Из-за этого при изучении данного раздела у студентов не формировалось научное мировоззрение, не развивалась прикладная направленность математики в целом [1].

С 1 сентября 2011 года все высшие учебные заведения приступили к обучению студентов в соответствии с утвержденными федеральными государственными образовательными стандартами (ФГОС) третьего поколения. В связи с этим перед системой образования встали новые проблемы организации учебного процесса. Ключевыми из них являются перевод подготовки студентов на качественно новый уровень, отвечающий современным требованиям, с учетом многоуровневой структуры высшего образования России, в строгом соответствии с нормативными актами; повышение фундаментальности образования, его гуманизация и гуманитаризация в сочетании с усилением практической направленности; интенсификация образовательного процесса за счет оптимального сочетания традиционных и нетрадиционных (инновационных) форм, методов и средств обучения, четкой постановки дидактических задач и их реализации в соответствии с целями и содержанием обучения; информатизация образования, основанная на творческом внедрении современных информационных технологий обучения. Последняя из названных проблем в настоящее время выдвинулась в ряд наиболее актуальных.

Из выше сказанного следует, что современному преподавателю требуется литература, которая будет отражать не только фундаментальные знания, но и предлагать разнообразные задачи, которые могут быть реализованы как с помощью ручки и бумаги, так и с помощью современных информационных технологий [2].

В настоящее время в вузе широко используются программные средства для решения дифференциальных уравнений, которые позволяют расширить возможности изучения данного раздела математики. Но слишком мало задачников, которые могли бы быть использованы при этом преподавателями.

Именно это послужило причиной создания нового задачника, который включил бы в себя не только ранее изучаемые темы, но и те разделы, которые ранее из-за своей трудоемкости оставались без внимания.

Структура данного задачника была составлена исходя из объемов изучения курса дифференциальных уравнений на разных профилях по направлению « педагогическое образование». Рассмотри таблицу, которая отражает объем изучения данной дисциплины на разных профилях.

Профиль	Общее	Аудиторное количество часов	Количество часов, отведенное на лекционные занятия	Количество часов, отведенное на практические занятия	Курс
Информатика – экономика	72	54	18 (9 пар)	36 (18 пар)	2
Математика - информатика	72	36	18 (9 пар)	18 (9 пар)	4
Информатика - математики	72	24	12 (6 пар)	12 (6 пар)	4
Информатика - Информатика	72	36	18 (9 пар)	18 (9 пар)	2
Математики (бакалавры)	144	72	36 (18 пар)	36 (18 пар)	4

Из таблицы видно, что наибольший объем практических занятий составляет 36 часов (18 пар). Именно поэтому в новом задачнике рассмотрено 18 практических занятий, которые отражают почти весь материал, связанный с теорией дифференциальных уравнений. Темы данных занятий следующие:

◇ Начальные сведения о дифференциальных уравнениях.
◇ Составление дифференциальных уравнений.
◇ Существования и единственность Задачи Коши.
◇ Уравнения с разделяющимися переменными.
◇ Однородные уравнения и приводящиеся к ним.

- ◇ Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.
- ◇ Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
- ◇ Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа, Клеро.
- ◇ Численные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка.
- ◇ Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные. Дифференциальные уравнения второго порядка. (Простейшие типы интегрируемых дифференциальных уравнений второго порядка. Случаи понижения порядка)
- ◇ Однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
- ◇ Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
- ◇ Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка. Простейшие интегрируемые дифференциальные уравнения высших порядков.
- ◇ Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.
- ◇ Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольной постоянной.
- ◇ Контрольная работа.
- ◇ Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.
- ◇ Общие методы интегрирования систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В начале каждого занятия приводятся краткие теоретические сведенья необходимые студентам для решения задач. Далее приводятся примеры, решенные аналитическими методами и примеры, связанные с прикладной направленностью дифференциальных уравнений. Очень часто трудно получить аналитическое решение дифференциального уравнения, которое описывает тот или иной процесс, поэтому авторы предлагают решать задачи прикладного характера графическими методами с помощью систем компьютерной математики. Таким образом, анализируя полученное решение, студенты смогут не только получить ответ на конкретно поставленный вопрос, но и проанализировать течение процесса в целом. Около каждого примера есть обозначение которое указывает на то каким метод его удобнее решать (аналитическим графическим или с помощью систем компьютерной математики). После разобранных примеров авторы дают задачи на самостоятельное решение, что бы у студентов была возможность закрепить полученные знания. Также в конце каждого занятия есть вопросы для самоконтроля и ответы, на задачи, предусмотренные для самостоятельного решения. В докладе будет более подробно изложено одно из занятий.

Таким образом, в данном задачнике студенты получают возможность не только освоить основные аналитические методы решения дифференциальных уравнений, но и познакомиться с графическим и аналитическим решением задач прикладного характера. Стоит отметить, что при решении задач прикладного характера студенты пользуются системами компьютерной математики и осваивают современные информационные технологии, связанные с их специальностью.

Таким образом, применении данного задачника на практических занятиях по дифференциальным уравнения позволит:

- ◇ освоить основные аналитические методы решения дифференциальных уравнений.
- ◇ усилить практическую значимость данного курса;
- ◇ расширить знания о методах решения дифференциальных уравнений;
- ◇ студентам моделировать процессы, описываемые дифференциальными уравнениями;
- ◇ будет способствовать повышению уровня знаний студентов о возможностях применения компьютера в математике и развитию навыков работы с системами компьютерной математики.

Литература

1. *Асланов Р. М.* Гуманитарный потенциал профессионально ориентированного курса дифференциальных уравнений в педвузе. Монография. М., «Прометей», 1996.-129с.
2. *Безручко А. С.* Расширения прикладного характера курса дифференциальных уравнений с помощью пакетов символьной математики // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования: Материалы IV Международной научной конференции «ПМТУММ-2011 12-17 сентября»/ Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011 –с. 29-31 Всего 333с.

Structure and contents of the new book of problems on the differential equations for students of mathematical and information profiles in the “pedagogical education” direction

R. M. Aslanov, A. S. Bezruchko

Moscow Pedagogical State University, Moscow, Russia
r_aslanov@list.ru, bezruchko_anna@mail.ru

Методология отбора содержания образования на основе фундирования

В. В. Афанасьев, Е. И. Смирнов

Интеграция различных уровней педагогического образования есть фактически восстановление и дальнейшее развитие традиций Российской системы образования. Еще Уставом учебных заведений, подведомственных университетам (1804 г.), закладывались основы системы педагогического образования. Согласно Уставу во главе учебных округов должны были стоять университеты - «маяки, разливающие свет на долгие пространства», по образному выражению Н.И. Пирогова. Они должны были выполнять не только учебные функции, но по отношению к нижестоящим учебным заведениям вести научно-методическую и отчасти управленческую работу. В свете этого одной из ведущих задач педагогического процесса подготовки учителя средней школы является преобразование студента в учителя – профессионала способного решать многообразные задачи, связанные с обучением и воспитанием школьников. Улучшение профессиональной подготовки учителя требует не только новых, более эффективных путей организации учебно-воспитательного процесса в вузе, но и пересмотра структуры и содержания предметной подготовки в направлении теоретического обобщения школьного содержания, поднятия ее на технологический уровень преподавания и учения. Исторически сложилось так, что объем и содержание фундаментальной подготовки учителя средней школы, и тем более, в направлениях подготовки бакалавра и магистра в области образования (физико-математического, естественнонаучного, филологического и т.д.) в педвузе представляет собой «урезанный» вариант классического университетского образования при постоянной тенденции к уменьшению этого объема и формализации содержания предметной подготовки. При этом качество и устойчивость овладения профессионально-направленным учебным материалом (расширение и обоснование школьной программы) остаются второстепенной составляющей подготовки учителя средней школы как по отведенному учебному времени, так и по глубине осмысления. Поэтому проблемы и противоречия профессиональной подготовки учителя средней школы в педагогическом вузе в свете Болонского процесса могут быть разрешены только в целостной парадигме развития и взаимообусловленности школьной и вузовской педагогических систем. В основе раскрытия структурообразующих факторов педагогических систем рассматривается личность обучаемого, анализ ее исходных характеристик и динамика развертывания профессиональных и личностных качеств в условиях дефицита информации о своих субъективных возможностях и учебно-профессиональных требованиях.

Разработка требований к профессиональным компетентностям в области педагогической деятельности были разработаны в 2006 году коллективом исполнителей под руководством В.Д.Шадрикова. Под профессиональным стандартом будем понимать систему требований к качествам (компетентности) субъекта деятельности, которые в своей целостности определяют возможность занятия конкретной должности и определяют успех в деятельности. Можно утверждать, что эти качества сводятся к знаниям, умениям, способностям и личностным характеристикам работника, которые в своих интегральных проявлениях лежат в основе профессиональной компетентности. Таким образом, мы можем сказать, что *профессиональный стандарт педагогической деятельности* профессиональный стандарт педагогической деятельности представляет собой систему минимальных требований к знаниям, умениям, способностям и личностным качествам педагога (его компетентности), позволяющим в своей целостности занятия педагогической деятельностью и определяющими успех в этой деятельности.

Требования и компетенции педагога будут определяться функциональными задачами, которые он должен реализовывать в своей деятельности. Иными словами, для реализации определенных функциональных задач (профессиональных компетенций) педагог должен обладать определенной компетентностью. Установление содержания профессиональной компетентности наиболее целесообразно с позиций психологической теории деятельности, конкретно, с позиций психологической *функциональной* системы деятельности, которая в общем виде списывает основные функциональные задачи любой деятельности.

По нашему мнению, педагогический процесс подготовки учителя средней школы нужно рассматривать как формирование целостной системы профессиональной деятельности будущего педагога в направлении соответствия профессиональному стандарту педагогической деятельности и ГОС общего образования (второго поколения). На первом, профессиональном, этапе должны формироваться предметные знания и умения, предназначенные для формирования ближайшего видового обобщения базовых учебных элементов школьного предмета, на втором этапе, фундаментализации, осуществляется их глубокое теоретическое обобщение, которое на третьем, методическом, этапе включается в структуру профессиональной деятельности как средство реализации учебно-воспитательных функций педагога. Чтобы включение обобщенных знаний происходило безболезненно, они должны быть организованы в форме, наиболее удобной для их освоения школьниками. Именно эту функцию перестройки освоения предметных знаний в соответствии с целями и задачами педагогической деятельности выполняет фундирование и наглядное моделирование. В основной образовательной программе вуза должны быть формализованы и материализованы в виде конкретных учебных дисциплин и форм учебной деятельности не только дидактические (когнитивные) процессы, формирующие целеполагание, приобретение, применение и преобразование опыта личности, а также адаптационные процессы, характеризующие профессиональные пробы принятия студентом профессии учителя, и личностные процессы, направленные на проявление способностей, развитие мотиваций и эмоций, рефлексии и саморегуляции, самооценки и выбора, интеллекта и креативности личности. Таким образом, проектирование инновационных технологий обучения естественнонаучным дисциплинам (особенно, математике) в профессиональной подготовке учителя соединяет в себе теоретический или объектно-сущностный (приобретение опыта), процессуально-деятельностный (приобретение и преобразование опыта) и личностно-адаптационный (развитие личностных характеристик и интеллектуальных качеств) компоненты, развертывающиеся в контексте будущей профессионально-педагогической деятельности. В основе инновационного подхода к отбору содержания и технологии профессиональной подготовки учителя естественнонаучного профиля должно лежать овладение студентами особым когнитивным стилем естественнонаучной и, что особенно важно, профессионально-педагогической деятельности в когнитивной области научения. В связи с этим дидактическую систему математического образования студентов- математиков следует представить как сложный целостный процесс, включающий в себя личностные (перцептивные, мнемические, метакогнитивные, креативные и др.), процессуальные (педагогические и технологические, когнитивные и проектировочные, управленческие и социальные и др.) и содержательные компоненты в триаде: учитель – ученик - взаимодействие. Определение и развертывание содержания учебных предметов обусловлены объемом, содержанием и логикой проектирования спиралей фундирования базовых учебных элементов школьной математики посредством построения родового теоретического обобщения и технологического осмысления видовых его проявлений на основе наглядного моделирования на трех уровнях: глобальном, модульном и локальном.

В то же время будущий педагог должен быть способен к управлению педагогическим общением и учебным взаимодействием на основе фундирования и развития личностных качеств и культуры, профессиональной идентичности и самосовершенствования.

Сформулируем основные *критерии эффективности* дидактической системы математического образования будущих педагогов:

- ◇ уровень усвоения базового (школьного) математического знания *(профессионально-предметный уровень)*;
- ◇ уровень усвоения базового фундаментального математического знания *(фундаментальный уровень)*;
- ◇ уровень развития общеучебных и профессиональных умений, творческой активности студентов *(общепрофессиональный уровень)*;
- ◇ уровень развития личностных качеств и интересов студентов (интеллектуальных, мотивационных, оценка черт личности) *(уровень самореализации)*;
- ◇ *уровень профессиональной идентичности* личности (профессиональная самооценка, удовлетворенность профессией, взаимоотношениями, уровень тревожности и т.п.);
- ◇ *уровень социализации* и взаимодействия в процессе обучения математике.

Таким образом, организация заблаговременной и целенаправленной успешной реализации образовательных программ профессионального педагогического образования может стать интегративным условием развития педагогической системы учебного заведения, особенностью которой является оптимизация педагогического процесса, развитие мышления, самостоятельности, творческой активности учащихся, формирование основ профессионального мастерства. В связи с желанием создать такие педагогические системы, у учителей создаются благоприятные возможности появления новых потребностей педагогического самосовершенствования.

Литература

1. *Афанасьев В. В., Поваренков Ю. П., Смирнов Е. И., Шадриков В. Д.* Подготовка учителя математики: инновационные подходы. — М.: Изд-во «Гардарики», 2001. — 384 с.
2. Профессиональный стандарт педагогической деятельности / Под ред. Я. И. Кузьминова, В. Л. Матросова, В. Д. Шадрикова // Вестник образования, 7 (2007). — С. 20–34.
3. *Смирнов Е. И.* Технология наглядно-модельного обучения математике. Монография. — Изд-во ЯГПУ, 1997. — 323 с.

Methodology of selection of the content of education on the basis of foundation

V. V. Afanasiev, E. I. Smirnov

К вопросу о формировании математической компетентности будущих экономистов

И. А. Байгушева

Астраханский государственный университет, Астрахань, Россия
iabaig@mail.ru

В соответствии с концепцией компетентностного подхода, который является концептуальной основой ФГОС ВПО, цель математической подготовки будущих специалистов в области экономики в вузе - сформировать математическую компетентность экономиста.

В качестве теоретической основы формирования математической компетентности специалистов нами была выбрана идея, высказанная Н.Ф. Талызиной: при разработке целей обучения конкретному предмету, прежде всего, необходимо выделить систему типовых задач, для решения которых готовится обучаемый [1]. Это позволило уточнить содержание понятия математической компетентности специалиста: это способность и готовность решать методами математики типовые профессиональные задачи. Под типовой профессиональной задачей (ТПЗ) мы понимаем цель, которую специалист многократно ставит перед собой в процессе своей профессиональной деятельности.

Типовых профессиональных задач (ТПЗ) у каждого специалиста много, но всё же их конечное число. Если выделить ТПЗ, решение которых требует использования математических знаний, то станет ясно, методами решения каких профессиональных задач должен овладеть специалист в процессе математической подготовки. Тогда можно уточнить цель обучения математике по данному направлению подготовки в вузе. Эта цель контролируема и реально достижима.

Для выявления таких задач и их типологии были использованы следующий методы: (1) анализ требований ФГОС подготовки бакалавров по направлению «Экономика» к результатам их математической подготовки; (2) анализ квалификационных характеристик специалистов в области экономики; (3) отбор профессиональных задач, решение которых требует использования математических знаний; (4) опрос представителей каждой квалификации, в результате которого мы уточняли какие профессиональные задачи им приходится решать.

В результате были выделены пять типов профессиональных задач экономистов, решение которых требует использования математических знаний:(1) сбор и обработка информации; (2) нахождение или оценка значений показателей, характеризующих экономическую деятельность; (3) выявление зависимости между параметрами экономической деятельности, её вида и свойств; (4)прогнозирование экономической деятельности; (5) планирование экономической деятельности.

Чтобы включить ТПЗ в цели обучения математике, необходимо дополнить формулировки задач обобщенными методами их решения. Обобщенность метода решения ТПЗ понимается в том смысле, что метод применим для решения любой конкретной задачи данного типа.

Тогда судить об уровне сформированности математической компетентности, как цели и результату математической подготовки экономистов в вузе, можно оценивая способность и готовность выпускников решать ТПЗ математическими методами.

Литература

1. *Талызина Н. Ф.* Пути разработки профиля специалиста. Саратов, Изд-во СГУ, 1987. — 176 с.

To a question of formation of mathematical competence of economists in hich school

I. A. Baygusheva

Astrakhan State University, Astrakhan, Russia
iabaig@mail.ru

Система учебных задач в курсе высшей математики

В. П. Барашев, Т. Р. Игонина, Е. В. Кольцова , О. А. Малыгина, Л. И. Таланова

Московский государственный технический университет МИРЭА, Москва, Россия
barashev@inbox.ru, t-igonina@mail.ru, malygina58@mail.ru, talanova-l@yandex.ru

Значимыми компонентами основной образовательной программы подготовки современного специалиста, бакалавра, магистра является система учебных заданий и деятельность решения, обеспечивающие в своем единстве формирование общекультурных и профессиональных компетенций, а также организация процесса усвоения знаний, умений, общих и частных методов познания. Традиционная модель обучения высшей математике в основном ограничивается рассмотрением стандартных задач (вычисление предела функции, нахождение производной, вычисление определителя и др.). Деятельность решения таких заданий представлена перед студентами в готовом, свернутом виде, а организация процесса усвоения материала осуществляется на основе объяснительно-иллюстративного метода, что в совокупности снижает результативность процесса обучения.

Авторы связывают решение проблем эффективности изучения математики в высшей школе с широким использованием принципов деятельностной теории и системного подхода. Предлагается ввести в курс высшей математики специальную систему заданий. В основу разработанной классификации задач положена деятельность их решения, описанная в учебных картах в материальном, обобщенном, развернутом виде. При соответствующей организации учебного процесса (поэтапное формирование умственных действий) использование такой системы заданий в единстве с учебными картами обеспечивает полноценное усвоение содержания обучения. Детально система заданий по курсу математического анализа представлена в работе [1]. Введены, например, задачи, в процессе решения которых формируется деятельность системного анализа изучаемого объекта, деятельность построения математической модели, деятельность установления противоречия и формулировки проблемы, а также математические задачи, в процессе решения которых формируются математические компетенции (умения дифференцировать, интегрировать и др.).

В целях реализации контрольно-коррекционной функции обучения описанная система заданий дополнена специальными тестовыми задачами [2], обеспечивающими проверку прочности усвоения материала.

Представленная система задач позволяет в курсе высшей математики обеспечить полноценное усвоение не только математических знаний и умений, но и целого ряда методологических компетенций, заложить основы профессиональных компетенций.

Литература

1. *Малыгина О. А.* Изучение математического анализа на основе системно-деятельностного подхода. М.: URSS, 2007.
2. *Аксененкова И. М., Малыгина О. А. Чекалкин Н. С., Шухов А. Г.* Ряды. Интеграл Фурье и преобразование Фурье. Приложения. М.: URSS, 2009.

System of training task in course of high mathematics

V. P. Barashev, T. R. Igonina, E. V. Koltsova, O. A. Malygina, L. I. Talanova

Moscow State Technical University MIREA, Moscow, Russia
barashev@inbox.ru, t-igonina@mail.ru, malygina58@mail.ru, talanova-l@yandex.ru

Развитие образного мышления при решении текстовых задач

Я. Д. Батаева*, **М. М. Ахмадов**†

* *Чеченский государственный педагогический институт, Грозный, Россия*
iaha72@mail.ru

† *Государственное бюджетное образовательное учреждение «Центр образования», Грозный, Россия*
musa.cdo@mail.ru

Формирование образного мышления - важная составная часть педагогического процесса. Помочь учащимся в полной мере проявить свои способности, развить инициативу, самостоятельность, творческий потенциал - одна из основных задач современной школы.

Математика даёт реальные предпосылки для развития образного мышления, задача учителя - полнее использовать эти возможности при обучении детей математике. Однако, конкретной программы развития образного мышления, при изучении данного предмета, нет.

Принято считать, что развитию образного мышления учащихся способствует решение нестандартных задач. Существуют приемы и формы организации работы при обучении школьников решению задач, которые способствуют развитию мышления учащихся, вырабатывают стойкий интерес к решению текстовых задач и которые недостаточно часто применяются в практике работы.

Математик Жерофски замечал: «Утверждение, что текстовые задачи дают практику в решении проблем реальной жизни, малоубедительны, поскольку истории эти гипотетичны, практической ценности не представляют и, в отличие от реальных ситуаций, дополнительную информацию привлечь нельзя. Тем не менее, они имеют долгую и непрерывную традицию в математическом образовании и эта традиция значима» [1, с. 56].

Текстовые задачи как прикладные: в этом случае задача дает приложение математики к некой ситуации, возможной в повседневной жизни. Задачи из реального мира не могут составлять единственную или даже основную часть задач, используемых в классе.

Текстовые задачи как умственные манипуляторы: эти задачи имеют дело с воображаемыми ситуациями, которым необязательно встречаться в повседневной жизни. Задачи должны быть математическими проблемами, представленными в доступной для детей форме, и их качество зависит, в первую очередь, от качества их внутренней математической структуры, а также от их изящества и доступности. Многие из так называемых задач «реального мира» запутаны и небрежны. Реальный мир полон хлама, излишеств, нелепости и скуки - всего того, чего следует избегать на уроках математики [2, с. 35].

В методике работы по решению каждой из задач просматриваются определенные этапы.

Сообразуясь с целями работы, следует каждый раз подбирать соответствующую форму организации занятий: продумать, будут ли дети решать задачи индивидуально или объединяться группами (парами, тройками или по-другому).

Большое значение в решении текстовых задач имеет моделирование. Обучение моделированию необходимо вести целенаправленно, соблюдая ряд условий.

Решение математических задач требует применения многочисленных мыслительных умений: анализировать заданную ситуацию, сопоставлять данные и искомые, решаемую задачу с решенными ранее, выявляя скрытые свойства заданной ситуации; конструировать простейшие математические модели, осуществляя мысленный эксперимент; синтезировать, отбирая полезную для решения задачи информацию, систематизируя ее; кратко и четко, в виде текста, символически, графически и т. д. оформлять свои мысли; объективно оценивать полученные при решении задачи результаты, обобщать или специализировать результаты решения задачи, исследовать особые проявления заданной ситуации. Необходимо учитывать при обучении решению текстовых задач современные достижения психологической науки.

Эффективность учебной деятельности по развитию образного мышления во многом зависит от степени творческой активности учащихся при решении математических задач. Следовательно, необходимы математические текстовые задачи и упражнения, которые бы активизировали мыслительную деятельность школьников.

Литература

1. *Фридман Л. М., Турецкий Е. Н.* Как научиться решать задачи. — М., 1989.
2. *Сафонова Л. А.* О действиях, составляющих умение решать текстовые задачи // Математика в школе, 2000. — № 8. — С. 34–36.

Formation of figurative thinking when solving the task on text

Y. D. Bataeva*, M. M. Akhmadov†

* *Chechen State Pedagogical Institute, Grozny,Russia*
iaha72@mail.ru

† *The Centre of Education. Grozny, Russia*
musa.cdo@mail.ru

Организация исследовательской деятельности студентов высшего профессионального образования в процессе изучения математики

Г. Г. Битнер

Казанский научно-исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, филиал «Восток», Чистополь, Россия
ggbitner@mail.ru

Одной из ведущих задач высшего профессионального образования является вовлечение студентов в исследовательскую деятельность, представляющую неотъемлемую составную часть любой деятельности и потребности инновационной экономики знаний. Специалист, обладающий исследовательской компетенцией, умеет самостоятельно продуктивно анализировать фактическую информацию, создавать и выбирать более эффективные алгоритмы, ресурсы, технологии. Все эти требования заложены в федеральных государственных образовательных стандартах высшего профессионального образования (ФГОС ВПО).

Кроме того, ФГОС ВПО требуют увеличения времени, предназначенного для самостоятельной работы, самоподготовки студентов. В этой связи обостряется необходимость формирования у студентов познавательной деятельности, способствующей развитию умений ориентироваться в быстро меняющемся потоке информации, самостоятельно приобретать знания, критически их осмысливать и применять на практике, размышлять, сопоставлять разные факты, точки зрения, формулировать и аргументировать собственную позицию. В качестве такой деятельности может быть рассмотрена исследовательская деятельность обучающихся.

Исследовательский метод обучения, при котором обучающийся как бы ставится в положение исследователя, возник и применялся уже в двадцатых годах прошлого века. Сегодня исследовательская деятельность является не только одним из важнейших способов получения и осмысления обучающимися знаний, но и выступает как средство самореализации, самообразования, развития человека, оказывает положительное влияние не только на интеллектуальную, но и на эмоционально-волевую сферу личности.

Выявленные особенности отдельных этапов исследовательской еятельности (ИД) в предметной области (математика) позволяют не только определить специфику самой ИД при изучении математики, раскрыть содержание этой деятельности, но и в дальнейшем целенаправленно моделировать этапы ИД в процессе изучения математики.

Под математической исследовательской деятельностью (МИД) мы понимаем деятельность, для которой характерны следующие умения (структурные компоненты, этапы):

- выделение проблемы;
- выдвижение гипотезы;
- проверка гипотезы;
- формулирование выводов;
- высокая степень самостоятельности.

Для исследовательской деятельности характерно развитие внутренней мотивации учения, интерес к самой МИД. Психологи утверждают, что наличие внутренней мотивации является стартовым моментом в исследовании. Мотивационными стимулами от содержания учебного исследования могут быть новые для обучающихся факты, исторические сведения, практическая значимость, внутри- и межпредметные связи, дополнительные исследовательские вопросы, самостоятельно выбранные студентами в соответствии с собственными интересами и возможностями. Благоприятны для развития мотивации к МИД также разнообразные формы учебного исследования, задачи, учет исследовательских возможностей студентов, подчеркивание преподавателем значимости исследовательской деятельности и результата учебного исследования, одобрение однокурсников, родителей, администрации, общественности.

Общая цель МИД заключается в получении обучающимися субъективно новых знаний, в том числе методологических знаний, знакомстве с общей структурой исследования, приобретении опыта выполнения этапов исследования, развитии исследовательских умений. Планирование своей МИД студентами связано, во-первых, с продумыванием общей схемы исследования, во-вторых, с осуществлением действий на отдельных этапах исследования. Для возможности планирования обучающимися своей исследовательской деятельности необходимо, чтобы они имели представление об общих структурных компонентах (этапах) исследования. Каждый этап исследования требует выполнения целого ряда действий.

Некоторые педагоги [1–3] придерживаются представления о трех уровнях исследовательской деятельности обучающихся. На первом уровне преподаватель ставит проблему и намечает путь ее решения. Обучающемуся предстоит самостоятельно осуществить ее решение. На втором уровне преподаватель только ставит проблему, а само решение, его поиск студент осуществляет сам. На высшем уровне постановка проблемы, поиск и разработка самого решения осуществляется студентом самостоятельно. Такое постепенное увеличение самостоятельности позволяет проводить исследования со студентами, готовность которых к полному самостоятельному исследованию недостаточна.

Результаты проведенной нами диагностики свидетельствуют о низком уровне владения обучающимися общими и специальными математическими исследовательскими умениями. Однако развить эти умения возможно лишь при непосредственном осуществлении студентами МИД. В связи с этим необходимо специальное обучение студентов отдельным элементам учебного исследования и выделения второго направления организации МИД студентов при изучении математики – формирование отдельных исследовательских умений.

Исследовательские умения в математической исследовательской деятельности реализуются комплексно с другими познавательными умениями. В то же время студент, систематически включаемый в математическую исследовательскую деятельность, успешнее осуществляет и другие виды познавательной деятельности, что является свидетельством развивающего эффекта математической исследовательской деятельности.

Литература

1. *Кларин М. В.* Инновации в мировой педагогике: обучение на основе исследования, игры, дискуссии. (Анализ зарубежного опыта). – Рига: НПЦ «Эксперимент», 1998.
2. *Лернер И. Я.* Дидактические основы методов обучения. – М.: Педагогика, 1981.
3. *Обухов А. С.* Исследовательская позиция личности // Развитие личности. 2004. № 3.

Organization of research activity of higher professional education students during study of mathematics

G. G. Bitner

Kazan State Research Technical University named after A. N. Tupolev, Branch "Vostok", Chistopol, Russia
ggbitner@mail.ru

О необходимых математических знаниях для решения задач вступительных олимпиад МГУ

А. Б. Будак

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
abbudak@cs.msu.su

В работах автора [1] и [2] рассматривались вопросы о важности ряда теоретических знаний по элементарной математике и ряд вопросов об использовании характерных для многих современных курсов элементарной математики терминологий. Приводились важные примеры из опыта вступительных испытаний по математике в МГУ, которые иллюстрировали существенные недостатки этих терминологий.

В данном докладе попытаемся проанализировать, какие из указанных в [1] и [2] необходимых теоретических знаний можно было применить, решая задачи заочных и очных туров олимпиад МГУ по математике таких, как «Покори Воробьёвы горы» (ПВГ) и «Ломоносов».

Указанные олимпиады проводятся в МГУ каждый год, начиная с 2005 г. Первая из них состояла из двух частей: заочного и очного туров, вторая провдится двумя турами в течение последних трёх лет (2011-13 гг.)

В вышедшем в 2013 г. сборнике [3] приводятся условия, решения задач и ответы к ним туров олимпиады «Ломоносов» МГУ, проходивших в 2005 - 2012 гг. Причем в 2010/11 и 2011/12 учебных годах приводятся задачи как очных (заключительных) туров олимпиад, так и заочных (отборочных) туров, начиная аж с 7 класса. Если внимательно ознакомиться с содержанием сборника [3], то можно убедиться в том, что задачи могут быть на самые различние тамы школьного курса математики: алгебры и начал анализа, тригонометрии, геометрии (как планиметрии, так и стереометрии). Поэтому без глубоких качественных знаний теории и соответствующей практики решения олимпиадных задач, практически в каждой из которых надо проводить определенного рода исследование, самостоятельно справиться с ними едва ли возможно.

Постараемся кратко остановиться на некотором анализе задач заочных (отборочных) туров олимпиад «ПВГ» и «Ломоносов» для старших классов (10-11) в нынешнем 2012/13 учебном году.

Условия всех этих задач приводятся на соответствующих сайтах указанных олимпиад в интернете. Поэтому ввиду ограниченности объема данного доклада мы, не приводя условий самих задач, будем только указывать их темы.

1) Задача 1 «ПВГ» вполне стандартная задача школьной стереометрии, касающаяся отношения объемов подобных конусов с данным коэффициентом подобия.

2) Задачи на целые числа (1,4,7,10) «Ломоносов», (2,5,6,9) «ПВГ». При их решении следовало бы знать и теорию делимости, и о представлении натуральных чисел в различных системах счисления, на основе

чего можно было свести решение задачи 7 «Ломоносов» к использованию делимости чисел и умению проводить двусторонние оценки выражений. Надо было еще уметь проводить и чисто логические рассуждения, проводя, в частности оценки сверху и снизу возможных ситуаций и, в общем, уметь применять метод математической индукции, который мог быть применен в решении задачи 10 «Ломоносов» (о знании этого метода говорилось в [1,2]). Правда, эта задача могла быть решена и без метода математической индукции, но весьма нетривиальными рассуждениями, говорящими об умении проводить тщательные математические исследования. При решении задачи 9 «ПВГ» удобно было применять некие геометрические методы, хотя и используемые порой в теории графов, существенно выходящей за пределы школьной программы. Разумеется, не ссылаясь на теорию графов, эту задачу можно было решить тонкими логическими рассуждениями.

3) Задачи логического плана (2 «Ломоносов»), хотя при ее решении могла бы использоваться и бесконечно убывающая геометрическая прогрессия).

4) Задача, в которой надо было оценить определенный член последовательности, заданной рекуррентным соотношением (n+1 член выражался через n-ый при заданном первом члене). При ее решении путем возведения указанного соотношения в кадрат удавалось выразить и затем оценить указанный член последовательности через первый ее член.

5) Тригонометрические задачи (3 из «ПВГ» , 6 из «Ломоносов»), для решения которых требовалось с одной стороны (задача 3 «ПВГ»), уметь проводить сложные тригонометрические преобразования, что доступно, учещемуся хорошо владеющему техникой таких преобразований. Такого рода владение невозможно без глубокого знания теории. С другой стороны, (задача 6 «Ломоносов») помимо владения техникой тригонометрических преобразований требовалось умение проводить тонкие логические рассуждения, характерные при решении задач с параметрами, и строить фигуры на координатной плоскости.

6) Задачи, явно содержащие параметр (7 «ПВГ»), и использующие взаимное расположение кривых на координатной плоскости (8 «Ломоносов»), решение которых предполагает умение проводить нетривиальные исследовательские рассуждения, что в свою очередь требует глубокого знания теории.

7) Геометрические задачи: 5 «Ломоносов» о падающем и отраженном луче - в общем с применением законов геометрической оптики из школьного курса физики, которую можно было решать изучаемыми в школьном курсе математики методами векторной алгебры, использующей скалярное произведение векторов, 9 «Ломоносов», требующая глубоких квалифицированных знаний свойств линий в треугольнике, 8 «ПВГ», о кратчайшем пути между точками, лежащими на поверхности примоугольного параллелепипеда в координатном пространстве, решение которой требовало исследовать необходимые для этого разворачивания (развертки) параллелепипеда, причем такие, на которых действительно реализуется искомый кратчайший путь.

Литература

1. *Будак А. Б.* О некоторых традициях (стереотипах) изложения материала в курсах элементарной и высшей математики и необходимости их преодоления // Математика в образовании. — Вып. 7. — Чебоксары: Издательство Чувашского университета, 2011 — С. 45–58, ISBN 978-5-7677-1579-4.
2. *Будак А. Б.* О предварительных знаниях, необходимых для изучения математического анализа и других начальных курсов высшей математики, и преодолении стереотипов (стандартов) в изучении элементарной и высшей математики // Материалы докладов выездного заседания Научно-методических советов по математике и информатике Министерства образования и науки РФ на базе Самарского гос. аэрокосмического университета им. С.П. Королева, 2012, ISBN 978-5-7883-0877-7.
3. *Бегунц А. В., Бородин П. А., Горяшин Д. В., Панферов В. С., Сергеев И. Н., Шейпак И. А.* Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике (2005–2012). — М.: МГУ, 2013, ISBN 978-5-4439-0059-9.

About necessary mathematical knowledge for problem solving introductory contentions of Moscow State University

A. B. Budak

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
abbudak@cs.msu.su

Методы исследования функции без использования производной

К. Е. Воказе, М. А. Жайнибекова

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан
Vokaze61@mail.ru

Несмотря на давность возникновения понятия функции в связи с развитием механики и геометрии, и тому, какое занимает в математике понятие функции, в математику средней школы оно было введено два века спустя. Введение понятия функции в полном объеме согласно программе современной средней школы рассматривалось нами в статьях [**?**, 1, 2, 4].

Мы остановимся на таких понятиях и свойствах функции, рассматриваемых в различных классах, как множество определения функции, множество значений функции, монотонность, четность – нечетность, периодичность, непрерывность, выпуклость – вогнутость, ограниченность множества значений, наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке.

В школьной математике хотя часто и упоминается множество значений, но способы его нахождения не даются. Мы считаем, что начиная с 7 класса при решении примеров на построение графиков функции целесообразно изображать и указывать множество значений функции. Таким образом, ученики 9 класса, прошедшие эти подготовительные ступени уверенно подошли бы к формальному определению множества определения и множества значений функции.

В школе в качестве периодических функций рассматриваются только тригонометрические функции, не прививаются навыки решения задач на выяснение периодичности других функций, нахождение периода различных функций, что является, как нам кажется, методической ошибкой. Так же, в большинстве школьных учебников математики (кроме [5]) монотонность функции показывается графически, аналитический метод не рассматривается.

Хотя в школьной математике тема ограниченности функции не выделена отдельно, но все же это понятие встречаются очень часто. Поэтому, не давая точного определения этому понятию, начиная с 7-го класса посредством графического метода можно сформировать интуитивное представление о нем.

Аналогично, рассматривая графики функций, их изображение непрерывными или кусочными линиями, можно ознакомить учащихся с понятиями неперывной и разрывной функции. С понятием выпуклости и вогнутости можно ознакомить учащихся наглядно после рассмотрения графиков квадратичной, кубической функций. Конечно, в зависимости от уровня усвоения учебного материала и от возрастных особенностей учащихся (т.е. в каком классе что пояснить, например, 9-классник воспримет и поймет лучше, чем 7-классник) можно дать и точные формулировки определений этих понятий. По нашему мнению, это напрямую зависит от практического опыта учителя–методиста.

После целенаправленного рассмотрения на таком уровне свойств и графиков функций можно говорить и о нахождении наибольшего и наименьшего значений функций, экстремума функций. Таким образом можно провести хорошую иллюстративно-подготовительную работу для формирования на высоком уровне у учащихся 10 классов понятия производной функции, нахождения ее экстремумов. Итак, уже в 7-9 классах и не зная понятия производной можно исследовать функции.

Литература

1. *Жайнибекова М.А., Теміргалиев Н., Воказе К.* Жаңа тақырыпқа арналған сабақты өткізу схемасы // Математика және физика. № 1(43). 22–26 б.
2. *Жайнибекова М.А., Теміргалиев Н., Воказе К.* Жаңа тақырыпқа арналған сабақты өткізу схемасы // Математика және физика. № 2(44). С. 26–29.
3. *Жайнибекова М.А.* Как вводить понятие функции в средней школе // Математическое образование. — 2010. — № 2. — С. 47–51.
4. *Воказе К.Е.* Алгоритмический подход к изучению числовых функций в средней школе. Фестиваль педагогических идей «Открытый урок». — 2009. `http://1september.ru`.
5. *Виленкин Н.Я.* Алгебра. Учебное пособие для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики. — М.: «Просвещение», 1999.

The methods of research of function without using a derivative

K. Y. Vokaze, M. A. Zhainibekova

L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
Vokaze61@mail.ru

Формирование общекультурных компетенций студентов - необходимое условие повышения качества математического образования

О. Н. Волкова

Орловский государственный университет, Орел, Россия
vol_ olga@mail.ru

На рубеже XX и XXI веков проблема качества образования является первоочередной в обществе. При обучении математике в школе стали меньше обращать внимание на доказательство теорем, ведь ЕГЭ теперь этого не требует, катастрофически сократился объем знаний по геометрии, уменьшилось количество задач, формулирующих основные математические умения и, увы, понизился уровень их сложности, за редким исключением профильных школ и классов.

А что показывает итоговая аттестация? Форма ее проведения в школах с 2009 года — ЕГЭ, содержит, в основном тестовые задания, которые далеко не все учащиеся выполняют на должном уровне, и что особенно печально, значительно снизилась математическая культура школьников. Анализируя традиции русской и советской школ в период их расцвета, Л.Д. Кудрявцев предостерегал: «С помощью подобных тестов можно проверить быстроту реакции, скорость усвоения информации…но нельзя проверить знания по математике, …в которых важно выяснить, как и что думает экзаменуемый» [2, с.22]. Поэтому, отмечается низкий средний уровень качества математического образования выпускников школ, например, по статистическим данным в Орловской областисредний балл ЕГЭ (математика) в 2012 году-52,1, а 100 баллов среди выпускников не набрал никто [3].

Однако преподаватель математики вуза за такими статистическими данными должен видеть гораздо более серьезные проблемы:неумение большей части абитуриентов логически мыслить, затруднения их при анализе практических задач и составлении математических моделей к ним, слабые навыки в работе с математической литературой (порой такая работа заменяется «компьютерным поиском» без должного анализа его результата).И этот список недостатков, на наш взгляд, каждый преподаватель может только продолжить.

Для решения обозначенных проблем в Орловском государственном университете разработан и реализуется адаптационный курс по математике для студентов 1 курса [1], проводятся обобщающе-систематизирующие занятия по трудным вопросам отдельных разделов высшей математики, успешно работает школьный лицей для учащихся начиная с 8 класса.

Вместе с тем обучение высшей математике в вузе преподавателю целесообразно начать с формирования у студентов общекультурных компетенций, которые включают в себя способности к восприятию информации; построению логически верной устной и письменной речи;обобщению, анализу и систематизации математического материала;постановке цели и рациональному выбору путей ее достижения и др.

Нами разрабатывается методика формирования общекультурных компетенций. Например, формирование навыков построения логически верной письменной речи проводится поэтапно:

1) студентам предлагается лекция-образец, которая построена в строго логической последовательности;

2) самостоятельное изучение конкретного материала по предложенным вопросам;

3)после самостоятельно рассмотренной определенной темы преподаватель совместно со студентами составляет план изученного материала, выделяя и записывая теоретические вопросы и ключевые задачи;

4) написание конспекта в соответствии с указанным планом.

Такой подход к формированию общекультурных компетенций значительно повышает уровень качества математической подготовки студентов, о чем свидетельствует срезовые самостоятельные и контрольные работы; вселяет веру студентов в собственные силы при изучении математического материала и тем самым готовит их к дальнейшему самообразованию.

Литература

1. *Байдак В. Ю.* Адаптационный курс математики для студентов — первокурсников вузов. Орел, 2003.
2. *Кудрявцев Л. Д.* Среднее образование. Проблемы. Раздумья. М.: МГУП, 2003.
3. URL: `http://ege.orcoko.ru/news/view/337`

Formation of common cultural competences of students - a necessary condition of improvement of quality of their mathematical education

O. N. Volkova

Orel State University, Orel, Russia
vol_ olga@mail.ru

Роль «открытых» межпредметных задач в формировании универсальных учебных действий

Э. Х. Галямова

НИСПТР, Набережные Челны, Россия
egalyamova@yandex.ru

В ФГОС среднего образования в качестве одних из основных результатов обучения выделены метапредметные результаты, которые включают в себя умения самостоятельно определять цели и составлять планы, использовать различные ресурсы для достижения целей, владение навыками познавательной учебно-исследовательской и проектной деятельности, способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач. В современных исследованиях утверждается, что в процессе решения «открытых» задач происходит достижение метапредметных результатов (межпредметных понятий и универсальных учебных действий (УУД)) [1]. Под УУД понимают совокупность способов действий учащегося, обеспечивающих его способность к самостоятельному усвоению новых знаний и умений, включая организацию этого процесса. В настоящее время овладение учащимися УУД через решение «открытых» задач, рассмотрено недостаточно. В этой связи возникает необходимость исследовать способность учащегося самостоятельно успешно усваивать новые знания и умения в процессе решения «открытых» задач межпредметного содержания. Составление открытых задач с экологическим, физическим или химическим направлением позволяет обобщить знания, полученные из разных областей. Такие задачи способствуют формированию системы конкретных представлений о единстве природы, что позволяет развивать мировоззрение учащихся.

Использование «открытых» задач позволяет обучить школьника поиску вариативных решений, выбору лучших результатов и формированию способности и готовности к решению практических задач. Одним из направлений методико-математической подготовки будущего учителя может стать обучение приемам переформулировки «закрытых» задач в «открытые». Выделим требования к формулированию «открытых» задач:

- формулировка должна отражать цель исследования;
- предполагается развитие рассуждения, приводя к обобщению;
- формулировка позволяет замечать некоторые закономерности, сталкивать с проблемой, выдвигать и проверять гипотезы;
- создает возможность пользоваться разными математическими методами;
- формулировка вынуждает вести нестандартные, рассуждения;
- она побуждает проводить работу по уточнению данных и т.д.

Пример 1. Сформулируйте различные требования так, чтобы получилась задача, решение которой требовало бы применения знаний из области физики, химии, биологии, экологии, географии, геометрии. При необходимости внесите в задачную ситуацию недостающие данные. *Задачная ситуация. Легковая машина за два дня прошла путь в* 560 *км. В первый день она прошла* 30% *пути, пройденного ею во второй день.*

Пример 2. Листья ивы за летний период могут осаждать на своей поверхности 26 кг пыли, клена – на 5 кг меньше, ясеня – на 5 кг меньше, чем клена, вяза - на 5 кг меньше, чем ясеня, сирени – на 8 кг меньше, чем вяза, акации – на 2 кг 800 г меньше, чем сирени. Поставьте несколько вопросов к этой задаче и ответьте на них.

Разработанный нами комплекс задач способствует формированию таких универсальных учебных действий как выявление причинно-следственных связей, классификация, моделирование, самостоятельный поиск информации и т.д.

Литература

1. *Миронов А. В.* Как построить урок в соответствии с ФГОС. НИСПТР, 2011

The role of the «open» interdisciplinary tasks in the forming of the universal educational actions

A. H. Galyamova

NISPTR, Naberezhnye Chelny, Russia
egalyamova@yandex.ru

Предложения в концепцию развития математического образования

В. В. Гарбарук, В. Г. Дегтярев, В. А. Ходаковский

Петербургский государственный университет путей сообщения
Санкт–Петербург, Россия

Основаниями применения неотложных мер по резкому улучшению математической подготовки и применению математических знаний в научных и технических разработках является необходимость возрождения отечественной науки, повышения востребованности экономикой России передовых технологий, научных достижений, квалифицированных инженерных кадров и т.д. Снизились стимулы социальной мобильности специалистов с высшим образованием, выпускники вузов работают не по специальности иногда даже на рабочих должностях, что приводит к деградации системы образования.

Поскольку система образования является общесистемной и общесоциальной, то в процессе её модернизации должны во взаимосвязи решаться генеральные (узловые) проблемы общества, экономики, и системы образования. Это позволит **достичь главных целей модернизации математического образования**: – роста человеческого капитала и качества нации, повышения дисциплины и культуры мышления; – повышения потребности экономики в инновационном развитии научно-технического потенциала, а общества в профессионализме, востребованности математических знаний; – роста личностных и физических качеств выпускников вузов.

Эти главные цели модернизации могут быть достигнуты только при внедрении изменений в следующих **направлениях**:

1. Среднее образование

- встандартах среднего образования: предусмотреть увеличение часов, нормативно выделенных для освоения математики;
- в подготовке учителей: назначение на должности учителя математики осуществлять только из выпускников педагогических вузов или классических университетов математико-механического или физико-математического факультетов.
- разрабатываемые новые учебники по математике для средних школ должны проходить обязательное рецензирование в Учебно-методических объединениях головных университетов России;
- возродить систему сопутствующего математического образования: кружки; журналы типа «Квант», популяризацию эффективности математики в телевизионных передачах, объединения юных математиков (за счет бюджетного финансирования) при Домах юного творчества;
- возродить физико-математические заочные школы (за счет бюджетного финансирования) при университетах для школьников 8 – 11 классов;
- возродить периодическую организацию школьных олимпиад по математике для школьников 6 – 11 классов, в крупных университетах с

основной задачей повышения престижа математических знаний, повышение личных мотиваций молодого человека в области постижения наук, а не получения сертификата для поступления в вузы.
- прекратить практику назначениясверху минимального бала ЕГЭ для успешной школьной аттестации и поступления в вуз в районе 30 – это реальная «двойка», для успешной аттестации по каждому предмету должно быть не менее 55 баллов. Иначе студент не освоит программу, будет отчислен и государство впустую потратит деньги.
- прекратить практикуподачи абитуриентами документов в 3 вуза на 5 специальностей, оставить 3 вуза но на однотипные специальности. Иначе получается не отбор лучших абитуриентов, а рулетка и соревнование – кто быстрее принесет оригинал. Специальность должна быть осознана и выбрана заранее.

2. **Высшее образование**

Для существенного повышения уровня математических знаний необходимо разрушить систему подавления востребованности математических методов и ресурсов во всех сферах жизни, гуманитарных, технических и других науках.

Произошла очень сильная специализация в науках: программист не понимает математика, математик не понимает технической постановки задачи, инженер не может дать математическую постановку технической задачи, т.е. необходимы некоторые контактные ресурсы и междисциплинарные курсы.

Необходимо нормативно определить уровни высшего образования в шкале порядка, создать единый квалификационный справочник замещения должностей выпускниками с высшим и средним специальным образованием. При подготовке:
- Бакалавров - в стандартах и учебных планах важнейших направлений и профилей подготовки предусмотреть возможность увеличения часов на освоение высшей математики, поскольку в стандартах 3-го поколение произошло сокращение часов по сравнению со стандартами 2-го поколения, то есть стандарт стал, в смысле математических знаний, хуже и произошло сокращение штатных единиц на математических кафедрах.
- Специалистов – в крупных университетах возродить группы целевой интенсивной подготовки (ЦИПС) со сроком обучения 6 лет. В данные группы набирать особо одаренных абитуриентов, обеспечивая им по выпуску возможность назначения на должности в НИИ, исследовательские подразделения вузов и т.д.
- Магистров – в государственном заказе на подготовку магистров предусмотреть существенное увеличение их доли в общем заказе на выпускников, получающих высшее профессиональное образование.
- Аспирантов в планах подготовки аспирантов перспективных технических специальностей предусмотреть факультативные лекционные курсы по динамичным разделам математики: вычислительной, исследованию операций и системному анализу и т.д.;

3. **Переподготовка кадров и повышение квалификации**

За счет бюджетного финансирования обеспечить учителям математики средних школ возможность повышения квалификации не только при отделах районного образования, но и в классических и основных технических университетах, имеющих лицензию образовательную деятельность в виде повышения квалификации.

4. **Научные разработки, НИР, ОКР**

Структура заказа, приемки формирования и оплаты НИР требует существенного пересмотра. При формировании технического заказа, выполнении промежуточных этапов и подготовке итогового отчета в крупных проектах должна дополнительно проводиться независимая математическая экспертиза, с целью обеспечения невозможности защиты неэффективных проектов.

Offers in the concept of development of mathematical education

V. V. Garbaruk, V. G. Degtyarev, V. A. Hodakoskiy

Peterburg State Transport University, Sankt–Peterburg, Russia

Инженерное образование и математика - пути объединения

В. С. Герасимчук

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Киев, Украина
Viktor.Gera@gmail.com

Известно, что процесс обучения на каждом этапе развития человеческого общества имеет целью приближение преподавания к потребностям общества. Не секрет, что нынешний уровень подготовки инженерных кадров, за редким исключением, оставляет желать лучшего. Объективно назрела необходимость срочных преобразований в математической подготовке будущих инженеров на всех уровнях реального образовательного процесса.

Поэтому уместно ставить вопрос «чему учить инженера?». Как известно, базовый курс высшей математики, изучаемый в высших технических учебных заведениях, практически полностью опирается на классический математический анализ. Однако сегодня, видимо, нельзя ограничиваться только рамками математического анализа, на чем, к сожалению, чаще всего, и замыкается курс высшей математики во ВТУЗах. Этот курс отражает только настоящее, сегодняшнее понимание роли и значимости тех или иных математических понятий и представлений в инженерном образовании. При этом значительное количество безусловно важных и необходимых математических представлений в целом ряде областей инженерной деятельности не имеют своего отражения в стандартных курсах высшей математики и лишь иногда составляют предмет специальных курсов или факультативов.

Однако прогресс возможен только на основе новых знаний. В математической науке в последние десятилетия сформировались новые идеи, теории и направления, получили развитие новые математические методы. Самостоятельным направлением научного поиска стало математическое моделирование и математический (компьютерный) эксперимент.

Новые математические курсы могут быть внедрены в учебный процесс: (1) частично за счет некоторого уплотнения программ по стандартному курсу высшей математики (это вполне возможно, поскольку с ключевыми понятиями математического анализа производной и определенным интегралом учащиеся знакомятся, хотя и плохо, еще в средней школе); (2) частично за счет необязательного, невостребованного (специалистами данного профиля) материала, а значит, целесообразного перераспределения академических часов между темами внутри самого курса; (3) частично за счет новых спецкурсов. В зависимости от аудитории слушателей и их специализации это могут быть теория групп или теория вейвлетов, матричный анализ или методы решения нелинейных уравнений и т.д.

Особого внимания заслуживает обязательный в университетах курс методов математической физики. По сей день он излагается так же как и в начале (или в середине) прошлого столетия. Сегодня этого недостаточно, этот курс в обязательном порядке следует дополнить новейшими аналитическими методами решения нелинейных уравнений, теорией солитонов и методами компьютерной симуляции. А еще лучше выделить этот, бурно развивающийся в последние десятилетия, раздел математической физики в отдельный курс: нелинейная математическая физика. Парадоксально, но факт, многие сегодняшние выпускники физико-математических факультетов не знают смысла слов “солитон” или “странный аттрактор”.

Если этого не сделать в ближайшее время, то говорить о качественной фундаментальной подготовке будущих инженеров вряд ли уместно. При этом следует немедленно остановить, а лучше - направить вспять процесс сокращения учебных часов на фундаментальные дисциплины.

Ни в коем случае не следует считать исчерпывающими названные проблемы фундаментальной подготовки будущих специалистов - мы только обозначили их. Например, нельзя не заметить среди них и такой важной проблемы нашего инженерного образования как низкая востребованность математических знаний при изучении специальных дисциплин. Аргументированный ответ на этот вопрос хотелось бы услышать от специалистов выпускающих кафедр.

Engineering Education and Mathematics - Ways of Their Integration

V. S. Gerasimchuk

National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”, Kiev, Ukraine, Viktor.Gera@gmail.com

Об опыте изложения некоторых разделов высшей математики

Н. Г. Голикова, Н. В. Днепровская, Н. И. Сураева

Московская государственная академия коммунального хозяйства и строительства, Moscow, Russia

В связи с переходом системы нашего вузовского образования на двухуровневую, произошло значительное сокращение количества часов по высшей математики. Поэтому, при чтении лекций по аналитической геометрии для студентов-бакалавров, мы решили излагать большинство тем. связанных с приложением векторной алгебры к решению (в общем виде) геометрических задач на плоскости и в пространстве одновременно, т.е. параллельно. Для этого мы делим доску пополам, а студенты - очередную страницу конспектов лекций. Приведем перечень тем. которые можно излагать таким образом:

на плоскости	**в пространстве**
1. уравнение прямой с заданным нормальным вектором через данную точку	1. уравнение плоскости с заданным нормальным вектором через данную точку
2. общее уравнение прямой на плоскости	2. общее уравнение плоскости
3. каноническое уравнение прямой на плоскости	3. канонические уравнения прямой в пространстве
4. уравнение прямой через две заданные точки на плоскости	4. уравнение прямой через две заданные точки в пространстве
5. параметрические уравнения прямой на плоскости	5. параметрические уравнения прямой в пространстве
6. уравнение прямой в отрезках на осях на плоскости	6. уравнение плоскости в отрезках на осях
7. вывод формулы для вычисления величины угла между прямыми вида 2)	7. вывод формулы для вычисления величины угла между плоскостями вида 2)
8. вывод формулы для вычисления величины угла между прямыми вида 3)	8. вывод формулы для вычисления угла между прямыми вида 3)
9. расстояние от точки до прямой на плоскости	9. расстояние от точки до плоскости в пространстве

В докладе будут приведены примеры изложения некоторых тем указанным образом.

Обычно тему слева излагает лектор, аналогично можно изложить тему справа, здесь всего лишь добавляется третья координата и меняется чертеж. Часто тему справа доказывают сами студенты. Для первокурсников - это творчество, и в то же время, они бывают довольны тем, что сами сделали вывод формулы и лучше воспринимают ее.

Кроме того, аналогично можно изложить основные разделы дифференциального исчисления функций одной и нескольких переменных.

Подобное изложение сокращает время и дает хорошую сравнительную характеристику для понимания студентами материала.

Эксперимент такого рода был проведен на нашей кафедре в 1987г. для студентов-заочников с использованием технического средства - кодоскопа и этот эксперимент дал в свое время хорошие результаты.

В настоящее время, когда есть более совершенные технические средства, можно значительно облегчить изложение многих тем, вот почему мы решили вновь обратиться к опыту двадцатипятилетней давности.

Humanistic approach to teaching mathematics courses

V. G. Golikova, N. V. Dneprovskaya, N. I. Suraeva

Роль кафедры математики в обеспечении преемственности подготовки военных специалистов

И. А. Голицына

Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского (филиал г.Ярославль), Ярославль, Россия
rengoli@yandex.ru

В высшем военно-учебном заведении кафедра является основным учебно-научным подразделением, осуществляющим проведение учебной, воспитательной, методической и научной работы, а также мероприятий по совершенствованию учебной материально-технической базы. Кафедра математики военного вуза относится к общенаучным кафедрам. Положение структурного подразделения кафедры математики в завершающем списке всех кафедр фактически определяет степень ее значимости в структуре военного заведения. Трудно переоценить роль деятельности кафедры математики по подготовке качественного профессионала-инженера. Многие проблемы по усвоению инженерных дисциплин курсантами связаны именно с непониманием математической и физической составляющей рассматриваемых текстов.

Курсанты, для которых русский язык является иностранным, не до конца осознают необходимость изучения математики на подготовительных курсах и на первом курсе военного учебного заведения. Это осознание первоначально формируется при представлении военно-инженерной литературы и некоторой специальной литературы, большая часть текстов которых написана на предметных языках математики и физики. Полученные нами данные свидетельствуют о том, что изначально определенная часть иностранных курсантов ориентирована на изучение русского языка как иностранного, возможно, на бытовом уровне и на непосредственный переход к изучению только специальных дисциплин.

В статье, тезисы которой здесь представлены, показано, каким образом может быть осуществлена координационная деятельность кафедры математики по обеспечению качественного перехода от изучения русского языка как иностранного к освоению военно-инженерных и тактико-специальных дисциплин. Определены формы и методы взаимодействия подразделений по обеспечению преемственности подготовки военных специалистов. Выявлены проблемы, с которыми сталкиваются иностранные курсанты при изучении русского языка как иностранного и предметного языка математики. На основе проделанной опытной работы нами пересмотрена концепция обучения иностранных студентов на подготовительном отделении военного вуза.

В данной статье мы также обращаем внимание на выделенные нами уровни обученности иностранных студентов, которые мы рассматриваем как совокупность знаний, умений, навыков, сформированных профессионально значимых качеств на определенном конкретном этапе подготовки специалиста. Уровни обученности мы подразделяем на несколько групп, каждый из которых завершается количественным и качественным оцениванием на основе разработанных нами методик. В статье отмечается, каким образом информация об уровнях обученности иностранных студентов может преобразовываться в различные формы деятельности по осуществлению преемственности подготовки военных специалистов, какая роль при этом отводится кафедре математики.

Обеспечение преемственности при подготовке военных специалистов спо-собствует тому, что каждый предыдущий и последующий участник образовательного процесса располагает полной информацией о том, каким образом его деятельность найдет отражение в последующей работе по подготовке специалистов, насколько прицеленной была его собственная деятельность.

The role of the Department of Mathematics in ensuring the continuity of training foreign military specialists

I. A. Golitsyna

Military Space Academy named after AF Mozhaiskogo (branch Yaroslavl), Yaroslavl, Russia rengoli@yandex.ru

Система исследовательских умений учащихся при решении школьных геометрических задач, как основа функционирования ЕГЭ

В. А. Гусев

Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия
gusevvalmat@yandex.ru

У человечества существует одна из вечных нерешенных проблем «Как решать задачу?», огромное количество математиков, методистов и педагогов пытались и пытаются ответить на этот вопрос. В 2003 году вышла книга В. А. Гусева — «Психолого-педагогические основы обучения математики. – М.: Вербум-М», где впервые на странице 107 появился раздел «Система исследовательских умений при решении геометрических задач». Рассмотренные в этом разделе проблемы очень близки к указанной выше проблеме «Как решать задачу?».

На нас произвела сильное впечатление недавно появившаяся книга известных математиков В. Г. Болтянского и А. П. Савина — «Беседы о математике. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2002», где есть очень любопытный раздел «Поиск решений», в котором авторы, используя английский термин «insite» (в переводе с английского означает «озарение»), также говорят о проблемах, связанных с решением математических задач. Материалы именно этой книги заставили нас вновь вернуться к этой проблеме. Авторы пишут, что «Математическая логика вовсе не отвечает на вопрос, как мы мыслим при решении задач. По существу, математическая логика позволяет оформить уже найденное решение в таком виде, что мы можем убедить другого человека в правильности решения: шаг за шагом рассуждение проверяется на его строгость, логическую безупречность, и в конце доказательства получается подтверждение установленного факта. Но когда мы ищем еще не известное нам решение, ищем путь решения, мы, как правило, мыслим иначе. Как именно? На это должна ответить еще не созданная «математическая психология».

Было бы нескромно утверждать, что мы, учитывая выход еще одной книги В. А. Гусева [Теоретические основы обучения математике в средней школе: психология математического образования. — М.: Дрофа, 2010], создали ту самую математическую психологию, о которой писали В. Г. Болтянский и А. П. Савин. Но вместе с тем, несомненно то, что мы приблизились к созданию психологии математического образования, которая, в свою очередь, позволит нам подойти к решению поставленных выше глобальных проблем.

Кроме этого в России появилась новая проблема, которая очень сильно волнует и учителей математики, и родителей, и школьников — это организация и проведение единого государственного экзамена (ЕГЭ). В связи с тем, что ЕГЭ призвано, посредством решения соответствующего набора задач, выявить уровень математического развития школьников, то естественно, что это тоже относится к общей глобальной проблеме «Как решать задачу?».

В нашей статье мы хотим на основании всех указанных выше источников выработать наш взгляд на решение этой глобальной проблемы.

Сделаем несколько общих замечаний:

1. Мы будем рассматривать математические задачи разного уровня сложности: как простые задачи, так и задачи повышенной сложности. Тем более что при проведении ЕГЭ постоянно идет дискуссия об уровне этих трудностей для используемых математических задач. Например, в сложившейся системе ЕГЭ существуют задачи самой высокой степени трудности, например задачи С5 и С6. При рассмотрении таких задач самой высокой степени трудности возникает вопрос: «А должны ли вообще на уровне ЕГЭ решаться такие задачи, так как практика показывает, что с этими задачами справляется не более 5% учащихся. Все сказанное заставляет задуматься над проблемой о том, какого уровня сложности задачи следует включать в ЕГЭ».
2. Чрезвычайно важное значение в этом вопросе имеет описание процесса моделирования учебной математической деятельности учащихся по решению математических задач. Как это ни странно, этот процесс недостаточно изучен и недостаточно хорошо описан. В описаниях есть много субъективного, личного. Однако, мы считаем, что именно в описании этой деятельности и содержится вся методика эффективного решения математических задач.
   Сразу же следует сказать, что моделируя учебную математическую деятельность учащихся, связанную с решением математических задач, мы договоримся фиксировать по возможности всю эту деятельность. Математики очень любят такие слова как «очевидно», «понятно», «тривиально». Так вот, этих слов не должно быть, хотя понятно, что у многих ученых и учащихся какая-то часть умений срабатывает автоматически, на нее не обращают внимание и приходят к решению. Вместе с тем, так как мы говорим о массовом ученике, то следует думать и о тех, для которых этот процесс вовсе не является тривиальным. Еще раз скажем о том, что не нужно стесняться описывать достаточно очевидную учебную деятельность, так как без нее часто невозможно решить задачу.
3. И учителям и учащимся всегда хочется как можно быстрее получить решение. И при этом хочется на этот процесс истратить как можно меньше времени и исписанной бумаги. Но это не реально, не на этом надо экономить время. При рассмотрении исследовательских умений нам приходится выделять элементы задачи, выделять фигуры, попадающие под элементы задачи, перечислять свойства найденных фигур и связи между ними. Совершенно невозможно сразу представить себе все ли из перечисленного будет необходимо для получения решения. И, безусловно, приходится делать, в каком-то смысле лишнюю работу. Но без этой работы невозможно получить решение. Конечно, мы будем стремиться оптимизировать нашу деятельность, но вместе с тем, надо делать ту работу, которая получается и которая в дальнейшем приведет к успеху.

Перейдем к краткому описанию самих исследовательских умений по решению математических задач.

Выделение элементов задачи. Безусловно, начиная решать задачу, мы должны понимать ту предметную область, откуда она берется, полезно знать тему, к которой относится эта задача и многое другое. Все это у различных авторов называется примерно одинаково - «выделение элементов задачи». Выделение элементов задачи кратко означает, что мы должны увидеть, перечислить, отметить эти элементы. К элементам, в частности геометрической, задачи, относятся, прежде всего, те фигуры, которые участвуют в тексте задачи и те основные отношения между этими фигурами, которые так же зафиксированы в тексте задачи. Отметим, что к основным отношениям мы относим очень немногие: равенство, подобие, параллельность, перпендикулярность и практически все (например, отношение «принадлежности» мы отдельно не фиксируем, считая его наглядно очевидным). Эта деятельность не представляет особых затруднений у учащихся, но было бы ошибкой считать, что она не нужна, так как незамеченный учеником элемент задачи не позволит прийти к искомому решению. Сразу отметим, что, безусловно, у любого ученика с любым уровнем знаний это выделение происходит автоматически, но четкое понимание этого процесса помогает прийти к нужному решению. У этого умения есть еще одна очень важная особенность – число элементов задачи может быть сокращенно, но для этого нужно провести соответствующий анализ этих элементов. Здесь срабатывают наши общие замечания, о которых мы сказали выше. Можно ничего не сокращать и получить нужное решение, но, безусловно, если есть возможность сделать это экономно – это хорошо. При решении большого количества конкретных задач это умение достаточно хорошо усваивается.

Нахождение фигур, попадающих под данный элемент задачи. Это умение состоит из двух частей. Первое – это непосредственное нахождение указанных фигур. И второе, что очень важно для решения геометрических задач, это построение рисунка или чертежа к задаче. В целом, это умение для решения достаточно простых геометрических задач не вызывает особых затруднений, хотя вряд ли можно утверждать, что все учащиеся видят именно те фигуры, которые должны участвовать при решении данной задачи. Мы выше в общих замечаниях указывали на то, что очень трудно научить учащихся выделять именно те фигуры, которые нужны для решения задачи и ничего не говорить о фигурах, которые якобы не нужны для решения задачи. Совершенно ясно, что опыт по решению задач научит ученика выделять нужные для решения фигуры. Что касается построения рисунка или чертежа к задаче, то это и просто и трудно, так как какой-то рисунок мы всегда нарисовать можем, но достаточно почитать литературу по теории и методике обучения геометрии, чтобы понять, что это очень не простой вопрос, особенно при решении пространственных задач. Мы здесь сейчас об этом нечего больше писать не будем, но к этой проблеме необходимо постоянно возвращаться. Итак, второе умение очень важное, очень интересное, без овладения этим умением решать задачи невозможно. Вместе с тем, оно достаточно доступно для массового школьника, так как решать геометрическую задачу, не умея построить соответствующий рисунок, невозможно.

Прежде чем формулировать третье исследовательское умение отметим, что предыдущие два выполняют как бы подготовительную работу к решению. Иногда их даже и не относят непосредственно к решению, так как считают это дело достаточно очевидным. Но это, безусловно, не так, так как владение этими первыми двумя умениями закладывает весь фундамент решения проблемы.

Выявление свойств фигур, попадающих под данный элемент задачи. Чаще всего именно с реализации этого умения и начинается любое решение любой задачи. Итак, что же мы имеем на данный момент? Первое, мы имеем естественно текст задачи, который мы внимательно изучили. Чаще всего учителя всего мира говорят учащимся следующие слова: «Прочитайте текст задачи. Понятно?!» Удивительно неудачная команда, так как собственно, что понятно? Понять невозможно. Второе, на поставленный выше вопрос мы имеем элементы задачи и систему уменьшения числа этих элементов, что является, как мы уже указывали, непростым делом. Третье, очень важно для будущего решения увидеть все фигуры, попадающие под данный элемент задачи (может быть даже лишние). И, четвертое, мы строим рисунок (чертеж) к данной задаче. Теперь на уровне третьего исследовательского умения мы должны для каждого элемента задачи и для каждой фигуры, попадающей под данный элемент задачи выписать, выделить, выявить все свойства соответствующих фигур. Здесь очень смущает слово «все», но другое слово подобрать трудно, так как если мы скажем существенные, очень важные, главные свойства, то откуда мы это знаем. Здесь не стоит усложнять проблему, так как ученик будет выделять, выписывать, фиксировать все те свойства фигур, которые он знает. Заметим, что, например, для проведения ЕГЭ эта деятельность является главной, так как после того, как ученик ее выполнит, сразу станет ясно, каких свойств соответствующих фигур ученик или не знает или не замечает. Научить учащихся сразу выделять все нужные свойства невозможно – это придет со временем и, безусловно, будут выделяться самые разные свойства, которые могут совершенно и не участвовать в решении задачи. Очень важно, чтобы учитель не критиковал ученика за выделение лишних свойств, так как только появление этой системы свойств и приводит к решению задач.

Очень интересно, что и это исследовательское умение не представляет очень больших трудностей для учащихся, кроме одного момента: если ты не знаешь факты базового курса – ты с этим умением не справишься. И еще раз отметим, что выполнение этого умения чрезвычайно важно для ЕГЭ, так как ЕГЭ именно и проверяет, усвоены ли знания учащимися или нет.

Перейдем к описанию наиболее важного четвертого исследовательского умения – **установление связей между свойствами выделенных фигур математических задач.** Мы перечислили выше, что мы имеем на данный момент по решению задачи и отметили, что мы имеем большое количество всевозможных свойств, характеризующих элементы задачи и фигуры, попадающие под эти элементы. Здесь возможно несколько принципиально разных ситуаций (особенно для проведения ЕГЭ, выставления оценки, рейтинга учащихся):

A) В самом простом случае, который, кстати, является достаточно типичным и массовым, полученные свойства уже составляют решение задачи, ученик должен их увидеть и выписать. Заметим, что таких задач в существующей системе ЕГЭ много, а еще больше их ученик решает на уроке и в качестве домашних заданий.
B) Полученные на уровне выполнении первых трех умений свойства содержат решение, но для его получения эти свойства надо как-то преобразовать, систематизировать, перестроить. Естественно, что все это может иметь разный уровень трудности. Но главное, надо понять, что в данном случае для получения решения не нужны нестандартные идеи и методы. В данном случае все ограничивается типичной учебной математической деятельностью. Вместе с тем уже здесь некоторые учащиеся испытывают существенные затруднения.
C) Возможны такие ситуации, когда простой просмотр полученных свойств не приводит к решению. И для получения решения на базе этих имеющихся свойств нужна какая-то нестандартная идея или идеи. По поводу этой идеи В. Г. Болтянский и А. П. Савин, в указанной выше книге пишут: «Каждый из нас многократно наблюдал такую картину. Решающий долго и напряженно думает над задачей... Вдруг вспышка, озарение, инсайт... Откуда-то в сознании появляется путь решения задачи, «видна» та последовательность упражнений, которую надо выполнить, чтобы получить решение задачи. Что же произошло, что означает это озарение?».

Мы привели теоретическую часть нашей методической концепции. Практическую часть этой работы Мы сейчас проводим и приглашаем Вас к ней присоединиться.

System of research abilities of pupils at the solution of school geometrical tasks, as a basis of functioning of USE

V. A. Gusev

Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia
gusevvalmat@yandex.ru

Профилизация математической подготовки студентов нематематических специальностей

П. Г. Данилаев, С. И. Дорофеева

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань, Россия
dpgvm@yandex.ru, drfsvetlana@yandex.ru

Под профилизацией математической подготовки студентов подразумевается профессионально ориентированная математическая подготовка, учитывающая комплекс знаний, необходимый для выбранной специальности, умение применять их в профессиональной деятельности, пополнять и совершенствовать для профессионального роста. Предполагаем, что студент осознанно выбрал профессию, представляет требования отрасли, в которой предполагает работать, объем знаний, усилий, способностей для построения успешной карьеры. По результатам анкетирования первокурсников – целеустремленных, осознающих свое предназначение студентов, менее половины. Любая продуктивная деятельность возможна, если только она востребована. Потребность в познавательной деятельности, в построении и исследовании реальных процессов с помощью математических моделей должна осознаваться студентом как цель, достижение которой мотивирует ее [1].

Необходимость использования в процессе обучения профессиональноориентированнных задач вызвана несколькими факторами:

- ◇ Время, отводимое на освоение курса математики, невелико. Важно повысить мотивацию ее изучения, демонстрируя применение математических методов в профессиональной деятельности;
- ◇ Математические, общеобразовательные и специальные курсы изучаются параллельно. Их временная и содержательная корреляция не всегда выдержана. Математика может быть системообразующим фактором, она связывает фундаментальные и специальные дисциплины;
- ◇ Акцент на изучение математики стали делать многие выпускающие кафедры. Математика учит студентов четкости изложения, логике суждений, доказательности выдвигаемых предложений. Математика приучает студентов работать.

Профилизация курса математики положительно сказывается на качестве подготовки и конкурентоспособности специалистов. Но возникает ряд проблем.

- ◇ Проблема содержания математических курсов, учитывающая потребности направления подготовки студентов: расстановка акцентов на разных разделах, объем и глубина изложения материала. На это обращал внимание Л.Д. Кудрявцев [2].
- ◇ Проблема подбора примеров, иллюстрирующих применение математики в будущей профессии. В технических университетах кафедры математики ведут курсы для нескольких направлений. Преподаватель математики должен хорошо ориентироваться в каждом из них, работать в тесном контакте с выпускающей кафедрой. Сдерживающий фактор — недостаток времени.

◇ времени сказывается на количестве профессионально ориентированных задач. На помощь приходит учебно-методическое обеспечение, разработанное преподавателями математики совместно с выпускающими кафедрами. Присутствие математиков в авторском коллективе задает должный уровень изложения материала, гарантирует непрерывность математического образования, единство методического стиля. Задача специалиста — определить объем и содержание математических сведений, их место и роль в системе специальных курсов [3, 4].

Применение профессиональноориентированного методического обеспечения позволяет решить одну из основных педагогических задач: «Не принуждать, а побуждать к получению знаний».

Литература

1. *Garaev K. G., Danilaev P. G., Dorofeeva S. I.* Mathematical culture and society // The 8th Congress of the International Society for Analyses, its Applications and Computation. — M.: PFUR, 2011. — Pp. 431–432.
2. *Кудрявцев Л. Д.* Избранные труды. Т. 3. Мысли о современной математике и ее преподавании. — М.: Физматлит, 2008. — 434 с.
3. *Гараев К. Г., Данилаев П. Г., Дорофеева С. И.* Разработка и внедрение организационнометодического обеспечения самостоятельной работы студентов по математике в технических университетах / Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Т. 4 // Материалы VII Международного симпозиума. — М.: РАН, 2012. — С. 204–210.
4. *Дорофеева С. И., Данилаев П. Г.* Разработка и внедрение учебнометодических комплексов по математике // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. — 2012. — № 2. — С. 350–354.

Tradeoriented mathematical training of students of nonmathematical professions

P. G. Danilaev, S. I. Dorofeeva

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russia
dpgvm@yandex.ru, drfsvetlana@yandex.ru

Кластерный поход выбора стратегии развития образовательного пространства

В. П. Данилович*, М. Л. Данилович-Кропивницкая†

* *Закарпатский государственный университет, Львов, Украина*

† *Национальный университет «Львовская политехника», Львов, Украина*
mdanylovych@gmail.com

Процесс объединения Европы сопровождается формированием общего культурного, образовательного и научного пространства и разработкой критериев и стандартов в этой сфере в масштабах всего континента. Рассматривая европейские перспективы Украины с позиций социально-экономического развития, следует отметить важность межрегионального и транснационального сотрудничества. Одной из важнейших сфер развития евроинтеграции является сфера высшего образования, которая вошла в процесс реформирования согласно содержанию и форм Болонского процесса.

В начале XXI века весь цивилизованный мир пересматривает свое отношение к образованию, вся система котрого является в совершенном обществе центральным звеном формирования личности человека, его мировоззрения, готовности к принятию нестандартных решений, освоению новых знаний.

Для повышения конкурентоспособности образования Украины в рамках зоны Европейского системы высшего образования необходимо, чтобы она соответствовала требованиям развитого общества и инициировала поддержку интеллектуального процесса. Образование, построенное на европейских традициях способствует развитию личности, непрерывному образованию и социальной ответственности, т.е. базируется на дарвинской триаде образования: непрерывность, фундаментальность и профессионализм, гуманитарное саморазвитие.

Исследование кластеризации знаний как процесса имплементации образования Украины в Болонскую систему, является одной из составляющих конкурентоспособности региона и составляющей трансграничного сотрудничества. В Закарпатском государственном университете совместно с университетами Венгрии (г. Мишкольц) и Словакии (г. Кошице) создана группа промоутеров Болонского процесса.

Процесс глобализации и интеграции в условиях информационного пространства показывает, что капитал и инвесторы переносятся в те регионы, которые специализируются на развитии кластеров.

Стратегия формирования трансграничных кластеров обеспечивает новые возможности создания, передачи и распространения знаний, которые трансформируются в качество жизни, для которой знания являются гарантом успеха в экономической и социальной сферах. Кластеры и основанная на них региональная политика, являются успешным инструментом экономического развития региона, залогом повышения социальных стандартов. Для повышения инновационного развития региона целесообразно создать кластерную систему знаний. Новые кластерные объединения должны обеспечить весь цикл инновационного процесса: от идеи через наукоемкие технологии до выхода нового продукта на рынок.

В идее создания зоны европейского высшего образования уже заложена концепция кластерного подхода к одновременному и параллельному созданию зоны европейских и научных исследований, т.е. творческих кластерных объединений.

Кластеризация является одним из путей развития не только экономики в системе мировых хозяйственных отношений, но и стратегическим заданием развития государственной политики регионального развития инновационного процесса, базирующегося на знаниях и научных исследованиях.

Особенность современного этапа развития экономики Украины заключается в интенсивном динамическом процессе обмена технологиями в самих различных сферах и структуризацией экономических процессов. Этот процесс включает прямой обмен технологиями, проектирование новых технологий и реинжиниринг экономических процессов. Как и любые инновационные процессы, изменения социального статуса и образовательного ценза выпускника вуза, выдвигает требования непрерывного образования, связанного с комплексом инновационных междисциплинарных специализаций, основанных на современной системе образования, обеспечивающей социальную адаптацию человека.

Комплексный подход к развитию Украины предполагает широкий спектр научно-практических и научно-технических исследований, среди которых важными являются системное моделирование новых экономических и социальных процессов.

Особенностью обеспечения условий для профессиональной самоорганизации человека является создание гибких систем образования, основанных на принципах гуманитарного саморазвития. Эти принципы, основанные на дарвиновской триаде, позволяют сформировать структуры «непрерывного формирования способа профессиональной деятельности» и обеспечить механизм гуманитарного саморазвития структур обучения при непрерывном изменении требований к качеству и системам управления.

Cluster-based Selection of a Strategy for the Development of a Learning Environment

V. P. Danylovych*, M. L. Danylovych-Kropyvnytska†

* *Transcarpathian State University, Lvov, Ukraine*

† *National University Lvov Polytechnic, Lvov, Ukraine*
mdanylovych@gmail.com

Инновационная технология обучения математике в вузе на основе диалога естественнонаучной и гуманитарной культур

С. Н. Дворяткина

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия
sobdvor@yelets.lipetsk.ru

Переход в XXI веке от индустриального общества и простых технологических действий к постиндустриальному типу требует специалистов с высоким уровнем потенциала развития и саморазвития интеллектуальных способностей, духовно-нравственных и профессиональных качеств, способных работать с современными технологиями в динамично изменяющихся внешних условиях, умеющих самостоятельно оценивать ситуацию и оперативно принимать обоснованные решения в ситуациях неопределенности.

Значительный потенциал для формирования современной компетентностной модели выпускника вуза имеется у дисциплин математического цикла. Математическое образование – это не только освоение способов, норм математической деятельности и профессиональных ценностей, но и приобщение к математической культуре как части общечеловеческой, развитие интеллекта, формирование духовно-нравственных идеалов и ориентиров. Это вид деятельности, реализующий процесс становления профессионала, средство адаптации к социально-экономическим реалиям, способное обеспечить широту будущего профессионального маневра выпускника.

В контексте разрабатываемой Концепции развития российского математического образования актуализируются важнейшие методологические вопросы математической подготовки современных специалистов, связанные с переходом от жесткой специализации знаний и возможностью использования "мягких" моделей в обучении на основе вероятностного детерминизма. Значимость и актуальность вероятностно-статистических концепций определяется не только умелым применением ее методов и идей в профессиональной деятельности, но и широким воздействием на познавательную сферу – формированием вероятностного стиля мышления. Переход образования на постнеклассическую рациональность и акцентуализация на междисциплинарной системе знаний определяет стратегию действий на взаимное обогащение и взаимодействие естественнонаучной и гуманитарной культур, связанной с познанием новых возможностей современного студента, характера развития его мыследеятельности.

Диалог естественнонаучной и гуманитарной культур в образовательном пространстве понимаем как взаимодействие, взаимовлияние, взаимообогащение областей знания, которое даёт представление о разных способах познания действительности (рациональном естественнонаучном и иррациональном гуманитарном), принципиально различных, несоизмеримых типах мышления (логическом и интуитивном), способах восприятия информации (дигитальном и визуальном), формирует у студентов целостное понятие о природе, обществе, человеке. Возможность глубокого проникновения диалога культур в обучение математики рассматриваем как феномен, обеспечивающий создание эффективной развивающей среды. Между тем значительное сокращение прежних объемов общенаучной составляющей по гуманитарным специальностям и гуманитарной составляющей по инженерным направлениям подготовки может привести к дальнейшему нарастанию дисбаланса формально-логического и интуитивно-образного компонентов мышления, т.е. к проблемности формирования естественнонаучного мировоззрения у студентов-гуманитариев и гуманитарного – у студентов-инженеров. Решение обозначенной задачи – во внедрении новых образовательных технологий, обеспечивающих взаимопроникновение естественнонаучной и гуманитарной парадигм в профессиональном образовании, во взаимообогащающем синтезе результатов освоения естественнонаучных и гуманитарных дисциплин.

Инновационная технология обучения математике в вузе на основе диалога естественнонаучной и гуманитарной культур, используя качественно новое структурно-функциональное и содержательно-информационное обновление вероятностно-статистического материала, позволяет осуществлять оперативный контроль и гибкое интерактивное управление процессом обучения с регулируемым шагом дискретизации, обеспечивая адаптацию педагогического процесса под индивидуальные особенности каждого студента с учетом их типологических особенностей и направлений профессиональной подготовки.

The innovation technology of teaching math in high school based on dialogue sciences and the humanities culture

S. N. Dvoryatkina

Yelets State University by I.A. Bunin, Yelets, Russia
sobdvor@yelets.lipetsk.ru

Об основной задаче преподавания математики

В. Г. Евстигнеев, И. М. Тарарин

Государственный университет управления, Москва, Россия

Авторы делятся своими методами выполнения основной задачи преподавания математики в условиях бакалавриата. Методы направлены на создание в аудитории обстановки свободного общения со студентами и взаимного творчества. Приведены наглядные и достаточно простые примеры, позволяющие достичь этого. Примеры взяты из различных математических дисциплин, изучаемых бакалаврами: математический анализ, линейная алгебра, дискретная математика, теория вероятностей.

V. G. Evstigneev, I. M. Tararin

The State University of Management, Moscow, Russia

Обучение студентов-гуманитариев алгебраическим методам

Е. А. Ефимова

Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия
yefimova-elena@yandex.ru

Обучение студентов на отделении интеллектуальных систем в гуманитарной сфере института лингвистики РГГУ сталкивается с проблемами, связанными с противоречиями, во-первых, между гуманитарной ориентированностью студентов и технической составляющей программы профессиональной подготовки и, во-вторых, между трудностями восприятия математических абстракций и необходимостью дальнейшего усложнения курсов, вызванной новыми задачами (которые, в частности, выдвигает робототехника – отделение приобрело гуманоидного робота NAO и некоторых других роботов).

Студентам отделения читаются два годовых алгебраических курса – курс «Алгебра» [1] (элементы теории множеств, линейной алгебры, аналитической геометрии и линейного программирования) и курс «Алгебраические методы в информатике» [2] (алгебраическое моделирование абстрактных типов данных, представление понятий общей алгебры в виде алгебраических систем, системы переписывания термов и вычисления в инициальных алгебрах, применение SQL в СУБД и понятие категории и его использование для представления знаний).

Содержание курсов адаптировано для студентов-гуманитариев (занимающихся программированием). Поэтому многие понятия, важные для программистов, но традиционно непростые для восприятия студентами не только гуманитарных, но и технических направлений, отсутствуют в программе обучения. Например, отсутствует понятие действия группы на множестве. Мы предлагаем ввести его в обучение с помощью двух известных с детства задач – задачи о рыцарях и оруженосцах (задачи о мужчинах и их незамужних сестрах, в оригинале [3]) и задачи о миссионерах и каннибалах.

Иллюстрация понятия действия группы на множестве посредством действия симметрической группы S_n на множество состояний задачи о рыцарях и оруженосцах, с установлением биекции между орбитами состояний этой задачи и состояниями задачи о миссионерах и каннибалах, и, далее, выявление связи между решениями этих задач, с последующим переходом к соответствующим категориям, позволяет сделать абстрактные понятия близкими и доступными студентам-нематематикам.

Алгебраические курсы, читаемые на отделении, носят завершенный характер, но ввести понятие действия группы на множестве вполне можно и в других курсах. Например, в годовом курсе «Логическое программирование». Задача о рыцарях и оруженосцах и задача о миссионерах и каннибалах обычно используются в курсах интеллектуальных систем для иллюстрации методов искусственного интеллекта. В курсе логического программирования эти задачи решаются на языке Пролог с помощью применения методов поиска в глубину и в ширину в пространстве состояний.

Последующее написание программ, в которых учет симметрии сильно сокращает перебор (например, самообучающей программы игры в крестики-нолики, где рассматривается действие группы диэдра D_4 на множество позиций), позволяет закрепить владение данными понятиями.

Таким образом, знакомые с детства головоломки позволяют поднять преподавание алгебраических методов на новый уровень – ввести, фактически, в повседневную практику, в том числе практику программирования, такие сложные для студентов гуманитарных направлений понятия, как понятие действия группы на множестве и основные понятия из теории категорий.

Литература

1. *Ефимова Е. А.* Алгебра (учеб. пособие). — М.: РГГУ, 2013 (в печ.).
2. *Бениаминов Е. М., Ефимова Е. А.* Элементы универсальной алгебры и ее приложений в информатике (учеб. пособие). — М.: РГГУ, 2004.
3. *Singmaster D.* Problems to sharpen the young. An annotated translation of 'Propositiones ad acuendos juvenes'. The oldest mathematical problem collection in Latin attributed to Alcuin of York. Translated by *John Hadley*, annotated by *David Singmaster* and *John Hadley* // Mathematical Gazette. — Vol. 76, № 475, March 1992. — P. 102–126.

Teaching Algebraic Methods to the Humanities Students

E. A. Efimova

Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia
yefimova-elena@yandex.ru

Выявление возможностей применения мультифрактальных численных методов к исследованию временных рядов биомедицинского происхождения

А. И. Загайнов, В. И. Антонов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Санкт-Петербург, Россия
zagainov239@gmail.com, antonovvi@mail.ru

Доклад разделен на две части – мультифракталы при исследовании временных рядов и обучение студентов практике научных исследований. Первая часть посвящена проблемам численных мультифрактальных методов, в ней приводится постановка задачи, возможные подходы к исследованию (метод структурных функций, метод модулей максимумов вейвлет-преобразования (ММВП)), существующие программные реализации (напр. модуль FracLab пакета MatLab), численные исследования и моделирование в этом пакете, примеры применения для баз вариабельности сердечного ритма, возможные изменения в методологии ММВП, предложение к разработке собственного программного обеспечения. Вторая часть описывает построение методики научно-исследовательской работы студентов (НИРС), в частности создание лекционного курса при постановке фундаментальной проблемы и ее описания, разделение локальных задач внутри коллектива, обучение новым вычислительным инструментам (FracLab), повышение квалификации при создании собственных программных реализаций, первый этап при введении подобной НИРС. В заключении отмечены дальнейшие пути рассмотренных исследований и работы молодежного коллектива.

Identify opportunities to use multifractal numerical methods to the study of time series of biomedical origin

A. I. Zagainov, V. I. Antonov

Saint-Petersburg State Politehnic University, Saint-Petersburg, Russia
zagainov239@gmail.com, antonovvi@mail.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-08-31108-мол_а.

Развитие у учащихся профильной школы критического мышления, самостоятельности и других навыков будущих исследователей

А. С. Зеленский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, asz1956@yandex.ru

Рассматривается ряд методических особенностей преподавания математики в профильных математических классах, в частности, опыт использования методик, позволяющих развивать в школьниках самостоятельность, аналитическое мышление, самоконтроль и критическое отношение к излагаемому материалу.

1. Описывается методика, связанная с использованием ошибочных решений задач, некорректных формулировок определений и теорем [1]. Этот прием особенно эффективен для повторения материала (особенно в группах учащихся, которые ранее занимались в разных школах, по разным программам, у разных учителей) и коррекции знаний, умений и навыков учащихся. Применяются две основные формы работы с ошибочными решениями: либо учитель приводит такое решение на доске, либо школьникам раздаются листочки с подборкой "решений"задач по данной теме (обычно в качестве домашнего задания). Задача учащихся - найти ошибки и исправить их. В процессе дальнейшего разбора в классе все ошибки тщательно анализируются. Кроме того, обсуждаются различные подходы к решению.

Данная методика имеет ряд достоинств: интерес у ученика к излагаемому материалу сохраняется даже тогда, когда ему кажется, что "он это знает"; в результате подробного анализа какого-либо дефекта или ошибки все учащиеся концентрируются на этом пункте; класс постоянно держится в "тонусе": ученики привыкают не принимать "на веру"ни одну из фраз учителя; воспитывается необходимый самоконтроль и критическое отношение к излагаемому материалу; у школьника вырабатываются необходимые навыки и алгоритмы поиска ошибок и недочетов в его собственных рассуждениях и выкладках.

2. С той же целью в процессе обучения также активно используются задачи с нестандартными формулировками условий. Привычные школьные задачи (решить уравнение или неравенство; найти сторону треугольника; найти точку максимума функции и т.д.) нужно время от времени "разбавлять"задачами необычного вида: от слегка непривычных до совсем нестандартных формулировок. Иначе мы сталкиваемся с тем, что школьник умеет решать уравнение с неизвестным x, но теряется, когда вместо x в таком же уравнении стоит t; или же легко решая уравнение $f(x) = g(x)$, не может найти абсциссы точек пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и т.д.

В первую очередь используются задачи с неполными или избыточными условиями. Дело в том, что при постановке и решении реальных задач далеко не всегда имеется ровно столько данных, сколько требуется. Их может быть и меньше, и больше. Важно поэтому уметь из всех параметров задачи выделить существенные и отбросить малосущественные. Использование при обучении таких задач очень полезно для будущих исследователей.

Также используются задачи с противоречивым условием. Очень полезно для обучающегося самостоятельно разобраться в такой задаче и прийти к выводу о наличии того или иного противоречия.

Разнообразят урок и провоцирующие задачи - задачи, условия которых содержат упоминания, намеки, подталкивающие решающего к выбору неверного пути решения или неверного ответа. Часто это бывают задачи-ловушки или задачи-шутки. Они способствуют воспитанию критичности, приучают к анализу и всесторонней оценке информации, повышают интерес к занятиям математикой.

3. Еще одним типом задач с нетрадиционной формулировкой являются прикладные задачи - имеются в виду задачи, в которых четкая математическая постановка в условии отсутствует. Учащийся должен самостоятельно построить математическую модель описанной в условии ситуации и только после этого решать математическую задачу. Чаще всего это бывают задачи с естественнонаучным содержанием, экономические и другие прикладные задачи.

Особенно полезны прикладные задачи, допускающих несколько способов решения, тем более, если среди них есть решения разных типов: алгебраические, геометрические, физические.

Литература

1. *Зеленский А. С.* Использование специально сконструированных ошибочных и нерациональных решений задач для повторения и коррекции знаний учащихся // Математика в школе. — 2012. — № 2. — С. 24–33.

Development of critical thinking, independence and other skills of future researchers at students of profile school

A. S. Zelenskiy

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
asz1956@yandex.ru

О программно-методическом обеспечении курса «Дифференциальные уравнения» для будущих учителей математики

О. Г. Игнатова

Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия
markovka0@mail.ru

В условиях перехода к ФГОС ВПО актуальной становится проблема проектирования рабочих программ, удовлетворяющих требованиям нового стандарта. Главное отличие образовательных стандартов третьего поколения от предшествующих заключается в отсутствии обязательного минимума содержания дисциплин и формулировке требований к результатам освоения ООП в понятиях «компетенция» и «компетентность». В требованиях ФГОС ВПО результатами освоения конкретных дисциплин ООП бакалавров является овладение определенным набором компетенций – общекультурных и профессиональных. В связи этим меняются и средства и формы контроля результатов освоения дисциплины.

Структура рабочей программы должна соответствовать не только требованиям стандарта, но быть максимально профессионально ориентированной, а так же учитывать достижения современной педагогической науки.

Разработку полного комплекта материалов по проведению занятий по курсу «Дифференциальные уравнения» мы разбили на ряд этапов:

1. Анализ требований ФГОС ВПО по курсу «Дифференциальные уравнения»
2. Анализ классических курсов дисциплины.
3. Построение логической структуры тем по курсу.
4. Построение краткого содержания тем курса.
5. Разработка содержания тем курса
6. Разработка контрольно-измерительных и учебных материалов.

Содержание курса было разбито на следующие разделы:

- ◇ Основные определения и понятия, связанные с дифференциальными уравнениями;
- ◇ Элементарные типы дифференциальных уравнений первого порядка. Дифференциальные уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной;
- ◇ Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами;
- ◇ Системы линейных дифференциальных уравнений.

Применение информационных технологий в дифференциальных уравнениях.

Согласно действующим на математическом факультете МПГУ нормам на изучение дисциплины «Дифференциальные уравнения » отводится 36 часов.

Самостоятельная работа студентов прописана в программе в рамках дистанционных лабораторных работ, так же разработана тематика курсовых работ.

Заключительным этапом проектирования является разработка контрольно – измерительных материалов, причем не только в традиционной форме, но и с использованием современных информационных технологий. В рамках данной программы представлены вопросы к экзамену.

Литература

1. *Асланов Р. М., Матросов В. Л., Топунов М. В.* Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. — М.: Владос, 2011. — 376 с.
2. *Асланов Р. М., Мань Н. Д., Синчуков А. В.* Лабораторный практикум по дифференциальным уравнениям: учебное пособие. — Архангельск: КИРА, 2011. — 203 с.

On the courseware of «Differential equations» course for future mathematics teachers

O. G. Ignatova

Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia
markovka0@mail.ru

Роль и место самостоятельной работы студентов младших курсов педвуза при изучении математического анализа

Л. Н. Ильинская

Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия
lubov-ilinskaya@yandex.ru

Роль самостоятельной работы студентов в педвузе значительно возросла. В условиях фундаментализации образования доля её по математическим дисциплинам (в соответствии с ГОС ВПО третьего поколения) составляет более 50%. Самостоятельная работа студентов является естественным продолжением их деятельности на лекциях и практических занятиях.

В процессе самостоятельной познавательной деятельности у студентов младших курсов формируются умения работать с математической литературой, подбирать примеры, решать задачи, проводить доказательство теорем, составлять историческую справку по теме и т.д.

Основная часть времени, отводимого на самостоятельную работу, приходится на решение задач, поэтому, на наш взгляд, целесообразно применять дифференцированные задания с отчетом. На младших курсах для принятия отчета по такому индивидуальному заданию в качестве ассистентов можно привлекать студентов старших курсов, что позволит им совершенствовать свою методическую подготовку.

Курс математического анализа является основным из числа математических дисциплин, изучаемых студентами - будущими учителями математики. Например, понятие предела является фундаментальным в математическом анализе. Для вчерашних школьников начальные сведения о пределе известны еще из школьного курса. Так, например, в алгебре с понятием предела связан вопрос о сумме членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии; в геометрии - вопрос о вычислении длины окружности, площадей круга и поверхностей, объемов круглых тел. В курсе математического анализа вводятся понятия производной, определенного интеграла и др. Поэтому при изучении математического анализа студентами на младших курсах важен вопрос преемственности между школьным и вузовским курсами данной дисциплины.

Отметим необходимые требования к самостоятельной работе студентов по математическому анализу. На наш взгляд, при доказательстве теорем следует давать студентам задания для самостоятельной работы типа: сформулировать обратную теорему и установить, верна ли она, и при положительном ответе доказать её; если теорема выражает необходимое условие, то проверить, является ли это условие достаточным и обратно, привести соответствующие примеры, привести схему доказательства теоремы, выделить главную идею и др. Кроме того, можно при введении понятий и доказательстве теорем предоставлять студентам возможностьсформулировать по аналогии понятие или теорему, провести доказательство теоремы по аналогии с ранее доказанной и т.д.

Как показывает практика, студенты младших курсов не усмеют самостоятельно работать с задачей. Они не проводят анализ того, что дано в задаче, и сразу же начинают выполнять какие-либо действия без должного обоснования их. Поэтому, основные требования, которые должны предъявлять преподаватели к самостоятельной работе студентов должны заключаться в следующем: проводить подробный анализ задачи, обосновывать все предложенные способы решения и выбирать из них наиболее рациональный; объяснять, на основе какого теоретического факта совершается то или иное действие; формулировать выводы по решению данной задачи; предлагать задание на составление аналогичной или какой-либо другой задачи, основанной на изучаемом теоретическом факте; приводить примеры к данному заданию.

The role and place of independent work of students of Junior courses of teacher training colleges in the study of mathematical analysis

L. N. Ilinskaya

Moscow pedagogical state University, Moscow, Russia
lubov-ilinskaya@yandex.ru

К вопросу о преподавании теории меры и интеграла в педвузах

Т. Н. Казарихина

Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия
tn_k@hotbox.ru

В общеобразовательной школе изучаются конечно-аддитивные меры, к категории которых принадлежит жорданова мера. Однако фактически школьная математика имеет дело со счетно-аддитивной мерой Лебега. Являясь сужением лебеговой, классическая жорданова мера счетно-аддитивна на квадрируемых множествах. Этим оправдывается рассмотрение в школе конечных процедур, однако школьный учитель должен хорошо понимать, что счетные расширения можно использовать, и быть готовым ответить на вопросы школьников по этому поводу.

Нами был проведен опрос в период 2008-2012гг выпускников школ, студентов и выпускников педвузов. В результате опроса было выяснено, что более половины опрошенных выпускников школ не знают одно и то же понятие *площадь*, введенное в курсе геометрии и используемое в курсе алгебры и началах анализа, или нет. Студентам старших курсов педвузов был задан вопрос «К категории каких мер относится изучаемая в школьном курсе математики площадь?». Цель этого вопроса была выяснить связывают ли студенты получаемые знания с будущей профессией. Подавляющее большинство опрошенных не знают ответа на этот вопрос. И год от года ситуация не меняется. Также предлагалось следующее задание. Возможно ли вычислить площадь фигуры, которая есть объединение квадратов $P_n = \{(x, y)| \frac{1}{2^n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\}, n = 1, 2....$ Как правило, студенты не задумываются над проблемой квадрируемости данной фигуры. Заметим, что знаний по математическому анализу, полученных студентами в педвузе, вполне хватает для того, чтобы ответить на этот вопрос, теория интеграла Римана и теория меры тесно связаны с понятием квадрируемости. Далее возникает вопрос о правомерности «бесконечного суммирования» площадей соответствующих квадратов, так как мера Жордана конечно-аддитивна.

Таким образом, опрос студентов педвуза показал, что понятие «мера» они воспринимают как «отвлеченное» понятие и, в своем большинстве, никаким образом его не связывают со своей будущей профессиональной деятельностью.

Все это, на наш взгляд, характеризует неэффективность существующего подхода к обучению студентов математических факультетов педвузов таким важным понятиям как мера и интеграл, что, в свою очередь, проецируется на школьное образование.

Дальше речь будет идти о конечно-аддитивных мерах. Приведем здесь нашу точку зрения, изложенную в [2] . С одной стороны, мы имеем дело с материалом, который должен рассматриваться в курсе теории меры и интеграла Лебега, а с другой — приводит к интересным математическим задачам.

Рассмотрим инвариантные конечно-аддитивные меры на полукольце стрелок. Оказывается, что таких мер «не так много». В [1, с. 59] в качестве упражнения предложено доказать следующее утверждение: *Пусть μ – мера, заданная на полукольце стрелок. Для того, чтобы μ была конечно-аддитивной и инвариантной относительно сдвигов необходимо и достаточно, чтобы была пропорциональна лебеговой мере.* Иначе говоря, на прямой мер инвариантных относительно сдвигов, кроме лебеговой, фактически, нет. В этом случае, из конечной аддитивности меры вытекает счетная аддитивность. Доказательство этого факта сводится к решению функционального уравнения Коши-Абеля. Аналогичный результат имеет место для инвариантных мер на полукольце n-мерных стрелок.

Далее возникает вопрос о возможности распространения факта единственности инвариантной меры в условиях конечной аддитивности на другие топологические группы и однородные пространства.

На наш взгляд, учителям математики полезно знать эти факты, поскольку из конечной аддитивности инвариантной относительно сдвигов меры на прямой, плоскости и т.д. следует ее счетная аддитивность. С другой стороны, это оправдывает рассмотрение в школьном курсе только конечно-аддитивной меры.

Литература

1. *Горин Е. А.* Введение в теорию множеств и теорию меры. — М.: Изд-во МПГУ, 2005.
2. *Казарихина Т. Н.* К вопросу об интегрируемости и квадрируемости [Текст] // Всероссийский съезд учителей математики: Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 28–30 октября 2010 г.: Тезисы докладов. — М.: МАКС Пресс, 2011. — С. 604–605.

On teaching the theory of measure and integral at pedagogical universities

T. N. Kazarikhina

Moscow state pedagogical university, Moscow, Russia
tn_k@hotbox.ru

Математика. Жизнь после ЕГЭ

В. В. Калинин, Б. М. Писаревский

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина, Москва, Россия
vm@gubkin.ru

Единый государственный экзамен в нашей стране начали поэтапно вводить с 2001 года. В 2009 году он становится обязательным для всех выпускников средней школы и заменяет вступительный экзамен для подавляющего большинства ВУЗов. Федеральный институт педагогических измерений (ФИПИ), отвечающий за составление вариантов ЕГЭ, проведение самих экзаменов и анализ результатов, ежегодно публикует итоговый отчет по каждому предмету. Дальнейшую судьбу выпускников школ, поступивших в ВУЗы, ФИПИ не изучает.

Накопленный четырехлетний опыт преподавания высшей математики студентам, поступившим в РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина по результатам ЕГЭ, позволяет сделать некоторые выводы о готовности выпускников к обучению в техническом ВУЗе. Отметим, что абитуриенты с высокими баллами охотно подают заявления в наш ВУЗ. В итоге в рейтинге технических ВУЗов по среднему баллу абитуриентов он занимает второе место после Московского Физико-Технического Института. МФТИ, который лишь условно можно отнести к числу технических ВУЗов, попал в этот рейтинг по недоразумению.

При этом у абитуриентов с низким баллом по математике (менее 50) документы вообще не принимаются. В результате средний балл ЕГЭ по математике абитуриентов бюджетного набора, зачисленных на 1 курс, (а их более 1000), составляет 72 . Это означает, что средний абитуриент должен был решить на ЕГЭ все задачи раздела В, а также более серьезные задания С1 и С2.

Казалось бы, при таком высоком балле студенты 1-го курса должны прочно владеть основными понятиями и навыками школьной математики. Для проверки этого факта ежегодно на второй неделе занятий кафедра проводит контроль во всех группах всех специальностей первого курса. Студентам предлагается небольшой тест по простейшим задачам, подобным заданиям раздела В из ЕГЭ. Как ни странно, ежегодно полностью справляется с этим тестом лишь очень малая часть студентов – не более 10%. Еще более удивительно, что среди студентов с 70-ю и более баллами ЕГЭ по математике, порядка 15% вообще не могут выполнить элементарные математические действия.

В соответствии с ГОСами 3-го поколения материал, изучаемый в курсе высшей математики 1-го семестра технических специальностей ВУЗов, в значительной степени дублирует школьную программу. Можно также ожидать, что результаты первой сессии будут коррелированы с баллом ЕГЭ. В реальности оказывается, что среди студентов, имевших более 70 баллов по ЕГЭ, около 30% остаются с неудовлетворительной оценкой даже после первой пересдачи.

Получается, что либо «усиление мер по повышению честности экзамена», декларируемое в отчете ФИПИ, практически не сказалось на объективности его результатов, либо содержание заданий ЕГЭ не отвечает в полной мере потребностям современной высшей технической школы.

В хорошем техническом ВУЗе нормального и мотивированного студента научат находить производные и интегралы, строить графики, вычислять вероятности событий. Научат, если он уже умеет уверенно складывать дроби, выполнять алгебраические преобразования, оперировать корнями, логарифмами и синусами!

Mathematics. Life after USE

V. V. Kalinin, B. M. Pisarevsky

Russian Gubkin State University of Oil and Gas, Moscow, Russia
vm@gubkin.ru

USE — Unified State Exam

Теорема Ролля в аспекте характеризации работы с утверждением на этапе обобщения

С. И. Калинин

Вятский государственный гуманитарный университет, Киров, Россия
kalinin_gu@mail.ru

Доклад посвящается осмыслению такой деятельностной составляющей содержания обучения студентов математическому анализу, как работа с теоремой. Более подробно автор останавливается на характеризации одного из наиважнейших этапов такой работы – этапа обобщения теоремы. В качестве иллюстрации рассматривается работа с хорошо известным классическим утверждением Ролля о среднем значении для дифференцируемой функции: если $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ непрерывная функция, дифференцируемая на интервале $(a; b)$, для которой выполняется условие $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка ξ, $\xi \in (a; b)$, такая, что $f'(\xi) = 0$.

К обсуждению предлагаются следующие обобщения теоремы Ролля.

Теорема А. *Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(a; b)$, $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ числовой прямой и в каждой точке этого интервала обладает либо конечной, либо бесконечной (равной $+\infty$ или $-\infty$) производной. Пусть, далее, существуют пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, равные одному и тому же значению C, $C \in \mathbb{R}\bigcup\{-\infty; +\infty\}$. Тогда найдется хотя бы одна точка ξ, $\xi \in (a; b)$, такая, что $f'(\xi) = 0$.*

Теорема Б. *Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(a; b)$, $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ числовой прямой и в каждой точке этого интервала обладает либо конечными, либо бесконечными (равными $+\infty$ или $-\infty$) односторонними производными $f'_-(x)$, $f'_+(x)$. Пусть, далее, существуют пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, равные одному и тому же значению C, $C \in \mathbb{R}\bigcup\{-\infty; +\infty\}$. Тогда найдется хотя бы одна точка ξ, $\xi \in (a; b)$, такая, что значение $y = 0$ будет принадлежать промежутку с концами в точках $f'_-(\xi)$, $f'_+(\xi)$.*

В отношении последней теоремы следует подчеркнуть то, что предложенная редакция использует соглашение: под словами «промежуток с концами в точках a и b $(a < b)$» необходимо понимать отрезок, если a и b – числа; луч $(-\infty; b])$, если $a = -\infty$, b – число; луч $[a; +\infty)]$, если $b = +\infty$, a – число; интервал $(-\infty; +\infty)$, если $a = -\infty$, $b = +\infty$. Кроме того, при совпадении значений $f'_-(\xi)$, $f'_+(\xi)$, считается, что порождаемый ими промежуток вырождается в точку.

Очевидно, теорема (А) существенно расширяет класс объектов, к которым применима закономерность классической теоремы Ролля. Данная теорема получается посредством ослабления каждого из условий последней теоремы.

Нетрудно видеть также, что теорема (Б) обобщает теорему (А). Она получается ослаблением условия существования производной у функции $y = f(x)$ в точках интервала $(a; b)$.

Теорема (А) открывает путь к построению дифференциального исчисления функций, обладающих не только конечной производной, но и, возможно, бесконечной. Теорема Б, аналогично, позволяет конструировать исчисление функций, обладающих конечными или бесконечными односторонними производными.

Замечание. Теорема (А) автором анонсирована в работе [1] и рассмотрена с доказательством в работе [2]. Теорема (Б) развивает соответствующее обобщение теоремы Ролля, принадлежащее B. Finta [3].

Литература

1. *Калинин С. И.* О теореме Ролля в редакции Франклина и ее обобщении // Традиции гуманизации в образовании: Материалы II Международной конференции памяти Г. В. Дорофеева / Сост. Е. А. Седова, Н. И. Рыжова. — М.: Семпре анте, Смоленск: Ассоциация XXI век, 2012. — С. 173–174.
2. *Калинин С. И.* Обобщение теоремы Ролля в редакции Франклина // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Выпуск 14.: Период. межвуз. сб. науч.-метод. работ. — Киров: Изд-во ВятГГУ, 2012. — С. 97–104.
3. *Finta B.* A generalization of the Lagrange mean value theorem // Octogon. — 1996. — Vol. 4, № 2. — C. 38–40.

Rolle's Theorem in Aspect of Characterization of Work with the Proof on the Generalization Stage

S. I. Kalinin

Vyatka State University of Humanities, Kirov, Russia
kalinin_gu@mail.ru

Использование электронных конспектов лекций в формате базы знаний

В. С. Кацуба

Мурманский государственный технический университет, Мурманск, Россия
cazubav@yandex.ru

Электронный конспект лекций (ЭКЛ) как основной образовательный ресурс в высшей школе дает возможность представления знаний в различных авторских форматах в соответствии с задачами профессионального обучения и с необходимостью адаптации содержания к уровню подготовки аудитории обучаемых. Основным дидактическим преимуществом ЭКЛ, отличающим его от традиционных учебных ресурсов, является нелинейность структурной модели представленной в нем информации [1, 2].

Если процесс обучения построить на традиционной линейной технологии передачи знаний по дисциплине, то надежными учебными ресурсами могут быть учебник или конспект лекций, в том числе и в электронном виде, например, представленный в информационной среде Microsoft Word. С помощью организации гиперссылок и формирования некоторых обучающих элементов можно получить ЭКЛ в формате MS Word, однако представление контента в нем остается преимущественно линейным. При этом далеко не в полной мере реализуется образовательный потенциал информационных и компьютерных технологий, с использованием которого можно обеспечить условия для решения многих задач современного обучения, например, математике в техническом вузе.

Новым удобным форматом создания, хранения и воспроизведения ЭКЛ является учебная база знаний (УБЗ), которая определяется как специализированная база данных, разработанная для оперирования структурированной учебной информацией [3]. Под оперированием при этом понимаются интерактивные диалоги пользователя с программной системой, например, для быстрого доступа к актуальным фрагментам учебной информации, для формирования различных информационных подмножеств и обучающих элементов, для формирования индивидуальных траекторий обучения.

Формат УБЗ дает возможность разрабатывать учебные ресурсы на основании следующей концепции: содержание учебного курса представлять в виде отдельных порций (фрагментов) и связей между ними, а затем формировать из этих фрагментов конспект лекций нужного уровня адаптации или оперативно («на лету») составлять список определений, свойств или примеров по конкретному запросу пользователя.

На кафедре ВМ и ПО ЭВМ МГТУ разработана пробная версия специализированной УБЗ, в которой создана справочная система по нескольким разделам курса «Математический анализ». Разработан комплекс программных средств, осуществляющих структурирование, разметку и конвертирование ЭКЛ из формата MS Word в формат

XML, интерпретируемый базой знаний. Также разрабатываются программные средства, предназначенные для формирования на основе УБЗ индивидуальных траекторий обучения.

Литература

1. *Кацуба В. С., Лазарева И. М.* Методика проектирования электронных конспектов // Труды Международной конференции «Образование, наука и экономика в ВУЗа» в г.Плоцк (Польша): изд-во NOVUM, 2008. — С. 736–742.
2. *Кацуба В. С., Лазарева И. М., Хохлова Л. И.* Опыт разработки электронных учебных ресурсов по математике для студентов технического вуза // Материалы докладов выездного заседания Научно-методических советов по математике и информатике Министерства образования и науки РФ, 1–5 июня 2012 г. – Самара: СГАУ, 2012. — С. 13–18.
3. *Роберт И. В.* Теория и методика информатизации образования (психолого-педагогический и технологический аспекты). — М.: ИИО РАО, 2008. — 274 с.

The using of electronic lecture notes in knowledge base format

V. S. Katsuba

Murmansk State Technical University, Murmansk, Russia
cazubav@yandex.ru

Изучение элементов стохастики в 5-6 классах на основе ФГОС второго поколения

И. О. Ковпак

Московский городской педагогический университет, Москва, Россия
irina-kovpak@yandex.ru

В течение нескольких последних лет, согласно утверждённым ФГОС, стохастическая содержательно-методическая линия, включающая элементы комбинаторики, вероятности и статистики, входит в школьные учебники по математике, а также в дополняющие их дидактические материалы, на ступенях начального и общего образования.

Тем не менее, учителя испытывают значительные трудности на практике при преподавании этого материала школьникам 5-6 классов. Это объясняется рядом причин, среди которых можно выделить основные:

1) обособленность стохастического материала от традиционного школьного курса математики;

2) отсутствие преемственности в преподавании элементов стохастики между начальной школой и 5-6 классами.

В качестве одного из возможных путей решения данных проблем математического образования нами предлагаются методические подходы к изучению элементов стохастики в 5-6 классах, разработанные с учётом требований ФГОС НОО и действующей Программы по математике для 5-6 классов.
Изучение стохастического материала предполагается вести непрерывно и последовательно, на протяжении всего учебного года, связывая, по мере необходимости, содержание заданий с изучаемыми параллельно темами традиционного ШКМ.

Приведём фрагмент содержания данного стохастического материала по курсу математики для 5 класса. Ниже **жирным** шрифтом выделены темы традиционного ШКМ, а *наклонным* - содержание соответствующего им по времени изучения стохастического материала.

1. Отрезок, длина отрезка $\leftrightarrow$ *Шкалы и координаты. Линейная диаграмма. Чтение и интерпретация линейных диаграмм. Построение линейных диаграмм по готовым таблицам. Работа с целочисленными данными.*

2. Меньше или больше $\leftrightarrow$ *Введение понятия события (примеры событий и не событий, формирование первичного навыка работы с эмпирическим материалом) Введение понятия опыта (случайного эксперимента).*

3. Сложение натуральных чисел $\leftrightarrow$ *Формирование умения распознавать события, определять наступление/ненаступление события.*

4. Вычитание натуральных чисел $\leftrightarrow$ *Формирование умения самостоятельно формулировать события, составлять сложные события из более простых, распознавать определённое событие по различным его словесным описаниям.*

При разработке методических подходов к изучению стохастической линии в 5-6 классах необходимо осуществлять преемственность с содержанием заданий данного раздела из курса математики начальной школы. Это даст в дальнейшем возможность школьникам в основной и старшей школе закрепить уже знакомый из начальной школы материал и повысить качество усвоения нового.

Study of the elements of stochastics in 5-6 classes based on the new educational standards

I. O. Kovpak

Moscow City Education University, Moscow, Russia
irina-kovpak@yandex.ru

О методах доказательства теоремы Жегалкина

С. В. Костин

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики (МГТУ МИРЭА), Москва, Россия

В теории булевых функций (б. ф.) крайне важную роль играет реализация б. ф. в виде формул над той или иной системой Q основных б. ф. Чаще всего рассматривают формулы над булевой системой $Q_B = \{\rceil, \wedge, \vee\}$ и над системой Жегалкина $Q_Z = \{1, \wedge, \oplus\}$.

Напомним, что произведение переменных, в которое каждая переменная входит не более одного раза (либо без отрицания, либо с отрицанием), называется элементарной конъюнкцией. Единица 1 также считается элементарной конъюнкцией. Если конъюнкция K не содержит отрицаний, то она называется положительной.

Пусть K_i, $i \in [\,1\,..\,m\,]$, — попарно различные элементарные конъюнкции. Формула вида $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m = \bigvee\limits_{i=1}^{m} K_i$ называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ). Если все конъюнкции являются положительными, то формула вида $K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_m = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} K_i$ называется *многочленом Жегалкина* (МЖ).

Имеют место следующие две важные теоремы:

Теорема 1. *Любая б. ф., отличная от тождественного нуля, может быть реализована в виде ДНФ.*

Теорема 2 (теорема Жегалкина). *Любая б. ф., отличная от тождественного нуля, может быть реализована в виде МЖ.*

Теорема 1 доказывается относительно несложно. А именно, для любой б. ф. $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n$, отличной от тождественного нуля, можно в явном виде предъявить ДНФ, которая реализует эту б. ф. В качестве такой ДНФ проще всего взять так называемую совершенную ДНФ:

$$f(\mathbf{x}) = D_{\text{СОВ}}(f) = \bigvee_{\mathbf{p} \in N(f)} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}. \tag{1}$$

Здесь $N(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n \mid f(\mathbf{x}) = 1\}$ — носитель б. ф. f. В формуле (1) использовано стандартное обозначение $x^0 = x$, $x^1 = \overline{x}$.

Теорема 2 доказывается сложнее. Обычно используется следующее рассуждение. Конъюнкции, входящие в совершенную ДНФ (1), попарно ортогональны (для любых двух конъюнкций найдется переменная, которая в одну из них входит без отрицания, а в другую с отрицанием). Можно доказать, что дизъюнкция попарно ортогональных конъюнкций равна их сумме по модулю 2, то есть

$$f(\mathbf{x}) = \bigoplus_{\mathbf{p} \in N(f)} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}. \tag{2}$$

Если теперь в правой части формулы (2) заменить все отрицания $\overline{x}$ на $1 \oplus x$ и раскрыть все скобки, то после сокращения совпадающих конъюнкций мы получим МЖ, реализующий б. ф. f.

Цель нашей работы заключается в том, чтобы предложить альтернативное доказательство теоремы 2, не опирающееся на теорему 1 и вообще не использующее понятие ДНФ. В основе предлагаемого нами доказательства теоремы 2 лежат следующие две леммы.

Лемма 1. *Для любого МЖ* Φ *существует булев вектор* $\mathbf{x}$ *такой, что* $\Phi(\mathbf{x}) = 1$.

Лемма 2. *Для любых двух различных МЖ* Φ_1 *и* Φ_2 *существует булев вектор* $\mathbf{x}$ *такой, что* $\Phi_1(\mathbf{x}) \neq \Phi_2(\mathbf{x})$.

Лемма 1 доказывается индукцией по числу переменных, от которых зависит МЖ. Лемма 2 доказывается на основе леммы 1.

Из леммы 2 следует, что различные МЖ реализуют различные б. ф. А поскольку, как можно доказать, количество различных МЖ от n переменнных равно количеству различных б. ф. от n переменнных, отличных от тождественного нуля, то, следовательно, для любой б. ф. существует реализующий ее МЖ.

Описанный выше подход к доказательству теоремы Жегалкина был с успехом опробован автором при чтении лекций по дискретной математике в МГТУ МИРЭА. В докладе обсуждаются преимущества предлагаемого подхода, а также приводятся опущенные в данном тезисе детали доказательств.

On methods of proof of Zhegalkin theorem

S. V. Kostin

Moscow State Technical University of Radio-Engineering, Electronics and Automation (MSTU MIREA), Moscow, Russia, kostinsv77@mail.ru

Об определении кратного несобственного интеграла

Н. Л. Кудрявцев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
nilkud@mech.math.msu.su

Стремление к лаконичности при изложении теоретического материала, желание избежать использования дополнительных понятий не всегда оказывается оправданным. Необходимо соблюдать разумный баланс, чтобы не входить в противоречие с удобством применения введенных определений и полученных результатов. Естественно, при этом надо учитывать, что глубина и общность изложения материала должна соответствовать целевой аудитории.

В качестве примера рассматривается, как вводятся кратные несобственные интегралы в общепринятых учебниках по математическому анализу [1–3]. Сравнение определений (их общности и простоты в применении в конкретных случаях) показывает, в частности, что ни одно из них не позволяет говорить о несобственном интеграле для функций, заданных в (некоторых) своих особых точках. Имеющиеся условия сужают классы функций, для которых применимы эти определения, и могут несколько усложнять выкладки. Поэтому, если не в учебниках, то, по крайней мере, в задачниках и при практических занятиях со студентами целесообразно использовать более общее определение, свободное от дополнительных ограничений, но которое в отличие от определений из [1] и [2] использует понятие особых точек функций.

Литература

1. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 2. — М.: Юрайт, 2012.
2. *Зорич В. А.* Математический анализ. Часть II. — М.: МЦНМО, 2002.
3. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2004.

On definition of multiple improper integral

N. L. Kudryavtsev

Moscow State University, Moscow, Russia
nilkud@mech.math.msu.su

Особенности организации самостоятельной работы и проведения контроля знаний студентов при изучении курса «Дифференциальные уравнения и ряды» в техническом университете

Г. Д. Лёвшина

Национальный исследовательский технологический университет (МИСиС), Москва, Россия
karasev-v-a@yandex.ru

В докладе излагается опыт преподавания высшей математики на кафедре высшей математики в Национальном Исследовательском Технологическом Университете (МИСиС). Обучение высшей математике в техническом университете должно ставить своей целью повышение уровня математической культуры будущих специалистов до уровня, позволяющего применить математические методы при решении практических задач.

Уменьшение часов аудиторных занятий и увеличение роли самостоятельной работы при изучении дисциплин математического цикла потребовало от преподавателей значительного совершенствования работы по двум направлениям:

◇ организации самостоятельной работы студентов;
◇ усиления контроля знаний студентов.

Важным фактором для достижения этих целей является система индивидуальных заданий (типовых расчетов) по различным разделам высшей математики. Данная система существует уже давно в системе высшего математического образования. В различных вузах выпущено большое количество пособий, содержащих индивидуальные задания и пояснения к ним.

Однако, на данном этапе существующая система типовых расчетов показала свою несостоятельность. К сожалению это связано со снижением мотивации студентов к учебе и недостаточной подготовленностью абитуриентов к обучению в вузе. Большинство пособий содержит максимум 30 вариантов задания (это связано с количеством человек в учебной группе). Подготовка таких заданий достаточно трудоемкий процесс, переиздание пособий происходит достаточно редко, поэтому вскоре после издания, все решения становятся известны и используются недобросовестными студентами. Кроме того, в данной системе контроль правильности решения осуществляется только преподавателем, что существенно увеличивает его нагрузку и удлиняет время между выполнением студентом задания и его коррекцией.

Для решения этой проблемы на кафедре высшей математики НИТУ МИСиС была разработана автоматизированная компьютерная система обеспечения практикума по высшей математике (электронный задачник). Система генерирует произвольное число неповторяющихся вариантов типовых расчетов (индивидуальных заданий) для студентов примерно одинаковой сложности практически по всем разделам высшей математики, изучаемым в технических вузах. Практикум разработан в ОС Windows, функционирует в среде Internet с доступом через Web-сервер в режиме самостоятельных занятий студентов.

Количество индивидуальных заданий равно количеству студентов, проходящих обучение по данному курсу, каждый семестр все задания изменяются, что делает невозможным использование решений, выполненных другими студентами. Кроме того, система позволяет студентам в диалоговом режиме самостоятельно контролировать ход решения без участия преподавателя, содержит большое количество справочных материалов и примеров выполнения типовых расчетов.

Разнообразие вариантов типовых заданий формируется с помощью датчика псевдослучайных чисел. Тем самым обеспечивается неповторяемость вариантов у различных студентов, а также их изменение в последующие годы. Пример типового расчета в курсе «Дифференциальные уравнения»:

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$$

с начальными условиями $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$.

Здесь в различных вариантах варьируются числовые значения параметров и функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Программа формирования исходных данных составлена так, чтобы по возможности минимизировать для студента громоздкость расчетов при решении задачи (задача решается в целых числах).

Пример конкретного задания. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + 5y = f_1(x) + f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = e^{3x}(60x^2 + 108x + 70),$$
$$f_2(x) = e^{-x}[(-24x + 2)\cos 2x + (8x + 2)\sin 2x];$$
$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$$

Пример типового расчета в курсе «Ряды».

1. Найти сумму ряда, исходя из определения, т.е. как предел частичных сумм: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an + b}{n(n + c)(n + d)}$ (в условии заданы a, b, c, d – параметры).

2. С точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ вычислить два интеграла. Для этого разложить подынтегральную функцию в степенной ряд и исследовать его на сходимость. Затем проинтегрировать его почленно и вычислить сумму полученного ряда с заданной точностью.

Пример задания:

1. $\int_0^b \cos(cx^2 + d)dx$; 2. $\int_0^b \frac{arctg(x^c)}{x^d}dx$.

В условии заданы номера интегралов из приведенного списка и значения параметров b, c, d.

Отличительной особенностью образования современного инженера является свободное владение информационными технологиями Повышению эффективности учебного процесса может служить последовательное использование компьютерных технологий в процессе решения математических задач. Для приобретения навыков работы с компьютером следует демонстрировать и стимулировать студентов к выполнению самостоятельных работ на компьютере. С этой целью в типовом расчете «Разложение функций в ряд Фурье по тригонометрической системе» необходимо разложить заданную функцию в неполные ряды Фурье двумя способами: по косинусам и по синусам, вычислить несколько первых коэффициентов разложения, а затем с помощью компьютера построить графики суммы ряда Фурье и нескольких первых частичных сумм ряда Фурье, иллюстрируя приближение этих частичных сумм к сумме всего ряда.

Опыт использования данного электронного задачника на кафедре математики НИТУ МИСиС показал эффективность внедрения современных информационных технологий в такую традиционную область как обучение высшей математике:

- Существенно увеличилось количество студентов успешно справляющихся с экзаменационными заданиями, проработанными в течении семестра по электронному задачнику.
- У преподавателей появилась возможность проведения индивидуальных контрольных мероприятий для любого количества студентов на потоке.
- Сократилась время между выдачей индивидуального задания, его проверкой и исправлением неверных решений.

В докладе приводятся демонстрационные материалы, используемые на лекциях, варианты контрольных работ, конкретизируется формирование типовых расчетов различного типа, демонстрируется работа электронного задачника-тренажера.

Features of organization of independent work and the control of knowledge of students at studying of a course in «Differential equations and series» at the technical university

G. D. Levshina

National University of Science and Technology «MISIS», Moscow, Russia
karasev-v-a@yandex.ru

Психолого – педагогический аспект организации самостоятельной работы по курсу «Математический анализ» в педагогическом вузе

О. В. Ли

Московский педагогический государственный университет,
Москва, Россия
essyya@gmail.com

Самостоятельная работа студентов в курсе математического анализа направлена не только для овладения данной дисциплины, но и для формирования навыков выполнения самой работы так таковой. Студент должен самостоятельно решать проблемы, возникающие при изучении математического анализа, находить более рациональные решения, выходы из кризисных ситуаций и т.д.

Проблема самостоятельной работы в психолого-педагогической и методической литературе рассматривается многоаспектно. Нет конкретного единого мнения в определении самостоятельной работы. Так как по-разному раскрываются ее сущность, признаки, классификации ее видов.

Ключевые компоненты самостоятельной работы составляют: мотивация, цели, изложенные в квалификационной характеристике и требованиях ГОС ВПО, способы выполнения, контроль, оценивание.

На сегодняшний день мы наблюдаем развитие и широкое распространение применения информационных технологий в образовании. Информационные технологии предлагают комфортные условия для самообразования студентов [1].

Информационные технологии могут благотворно повлиять на мотивацию студентов в изучении математического анализа, на достижение поставленных целей и на способы их выполнения, также облегчить задачу преподавателя в контроле и оценивании самостоятельной работы.

Сознательность студентов играет важную роль в обучении. Преподаватель должен обращать внимание на понимание студентов по данному учебному материалу, на начальный уровень знаний и умений студентов.

Рассмотрим основные требования, которые должен учесть преподаватель, к выполнению самостоятельной работы по математическому анализу студентов педагогических вузов:

- ◇ методологическая осмысленность учебного материала;
- ◇ сложность задания должна быть посильной для выполнения;
- ◇ последовательность подачи материала с учетом логики предмета и психологии усвоения студентов;
- ◇ дозировка учебного материала, соответствующая типологическим и индивидуальным особенностям студентов;
- ◇ деятельностная, творческая, исследовательская, проектно-конструктивная, в целом поисковая ориентация самостоятельной работы [2].

При разработке учебных заданий для самостоятельных работ следует учитывать не только основные требования, но и требования, которые призваны усилить профессиональную направленность заданий.

Профессиональная направленность заданий обеспечивается усилением прикладной направленности их содержания, которая связана со спецификой будущей профессии учителя, а также методологическими особенностями, связанными с формированием у студентов профессионального педагогического мышления.

Литература

1. *Лобанов Ю. И., Ильченко О. А.* Самообразование в открытой сетевой информационной среде // Высшее образование в России. — 2009. — № 8. — С. 99–103.
2. *Асланов Р. М., Синчуков А. В.* Психолого-педагогический аспект организации самостоятельной работы и контроля учебного материала процесса по курсу «математическая физика» в педагогическом вузе // Образование как интегративный фактор цивилизационного развития: материалы Международной научно практической конференции. В 5 ч.: Ч.5. – Казань: Издательство «Таглимат» Института экономики, управления и права (г. Казань), 2005. — 272 с.

Psychological – pedagogical aspect of the organization of independent work on the course «Mathematical analysis» at pedagogical university

O. V. Lee

Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia
essyya@gmail.com

Построение курса теории рядов для технического университета с учетом межпредметных связей и приложений

О. А. Малыгина, Н. С. Чекалкин, А. Г. Шухов

Московский государственный технический университет МИРЭА, Москва, Россия
malygina58@mail.ru, chekalkin@mirea.ru, shuhovalexey@mail.ru

Решение проблем модернизации российской науки и образования непосредственно связано с совершенствованием математической подготовки выпускников технических университетов. В процессе обучения высшей математике в вузе должны формироваться, в частности, следующие компетенции: методологические и математические знания и умения, способность и готовность учиться самостоятельно, решать исследовательские и прикладные задачи. В связи с этим по-прежнему актуальным является построение содержания курса высшей математики с учетом межпредметных связей, введение прикладных и профессиональных задач.

Авторами разработан и внедрен в МИРЭА курс теории рядов, представленный в книге [1], включающий изложение теории рядов, основных сведений об интеграле Фурье и преобразовании Фурье. Традиционно в процессе обучения рассматриваются отдельные приложения данного материала в математическом анализе и дифференциальных уравнениях. К особенностям предлагаемого курса можно отнести следующие. Во-первых, значительно расширены приложения в математическом анализе, при решении дифференциальных уравнений и задач математической физики. Значительное место в курсе отводится использованию теории рядов, интеграла Фурье, преобразования Фурье в задачах теории вероятностей, комбинаторики, теории случайных процессов, теории чисел, радиотехники и теории автоматического управления. Предлагаемый студентам материал раскрывает взаимосвязи высшей математики с некоторыми специальными дисциплинами технического университета, демонстрирует применение математики при курсовом или дипломном проектировании. Во-вторых, в данном курсе помимо традиционных задач по теории рядов рассматривается значительное количество прикладных задач и задач с элементами профессионального содержания. В-третьих, еще одной особенностью курса является его ориентация на формирование мотивации студентов к активному изучению математики. Предлагаемый материал, с одной стороны, освещает математическую теорию, с другой - демонстрирует универсальность математики как мощного средства решения практических задач в разных областях, а также содержит исторические данные о развитии теории рядов. Список рекомендуемой студентам литературы помимо учебников по математическому анализу содержит перечень пособий по ряду математических и специальных дисциплин (радиотехника, теория автоматического управления, теория вероятностей, теория случайных процессов и другие), в которых применяется теория рядов, интеграл Фурье и преобразование

Фурье, а также книги по истории математики. Наконец, формирование компетенций студента осуществляется на основе использования системно-деятельностной технологии обучения [2].

В результате внедрения описанного курса перед учащимися раскрываются взаимосвязи не только между математическими дисциплинами, но и взаимосвязи высшей математики с профессиональными предметами, формируется мотивация успешного обучения, осуществляется усвоение системного подхода и теории деятельности.

Литература

1. *Аксененкова И. М., Малыгина О. А. Чекалкин Н. С., Шухов А. Г.* Ряды. Интеграл Фурье и преобразование Фурье. Приложения. — М.: URSS, 2009.
2. *Малыгина О. А.* Формирование основ профессиональной мобильности в процессе обучения высшей математике. — М.: URSS, 2010.

Construction course theory of series for Technical University with account of intersubject communications and applications

O. A. Malygina, N. S. Chekalkin, A. G. Shuhov

Moscow State Technical University MIREA, Moscow, Russia
malygina58@mail.ru, chekalkin@mirea.ru, shuhovalexey@mail.ru

Развитие математических способностей учащихся в условиях летних математических школ

Д. К. Мамий

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия
dmami@yandex.ru

Традиция летних математических школ в России имеет давнюю историю. В целом ряде регионов школы проводятся на протяжении многих лет. Каждая из них имеет свои особенности. В Адыгее летние школы проводятся с 1995 года и ориентированы на реализацию следующих целей и задач:

- повышение познавательного интереса учащихся к занятиям математикой; развитие математического мышления у школьников, имеющих склонности к изучению точных наук;

- формирование у школьников навыков самостоятельной работы; укрепление здоровья школьников;

- повышение общей культуры учащихся; формирование у учащихся коммуникативных качеств, психологическая адаптация к условиям интенсивных занятий в состязательной атмосфере.

При выполнении поставленных задач в летней школе предпочтение отдается самостоятельной работе. Ежедневно учащиеся выполняют задания, среди которых есть и фундаментальные результаты, оформленные в виде задач. При этом акцент делается на обучение не самим фактам, а методам их получения и применения. Отличительная особенность летних школ — особая творческая атмосфера сотрудничества между преподавателями и учащимися, высокий уровень требований и большой объем занятий.

Преподавателями летней школы являются как опытные специалисты по работе с одаренными детьми, так и студенты и аспиранты, в прошлом – участники многих летних школ, некоторые из которых сильные в прошлом олимпиадники.

Помимо занятий математикой особое внимание в летней школе уделяется общему развитию и отдыху учащихся. В течение всей школы проводятся культурные и спортивные мероприятия, включающие в себя традиционные чемпионаты по футболу кубок по настольному теннису, походы в горы.

Традиционно летняя школа проходит в июле в течение 19 дней. Учебная программа включает 15 полных учебных дней; 2 дня отводятся на различные математические соревнования, олимпиады, конкурсы.

Учебный процесс в школе сопровождается непрерывным конкурсом. Упор в обучении делается на получение знаний через решение задач. Как правило, занятия занимают 6 часов в день, из которых 2–3 часа уходит на прием преподавателями домашнего задания. Остальное время отводится на разбор домашних задач, обсуждение идей. Домашние задания являются важной составляющей системы обучения и выдаются ежедневно в довольно большом объеме.

Многолетний опыт проведения летних школ в Адыгее показывает, что сочетание интенсивных форм занятия математикой с активным отдыхом в условиях дружеской, благоприятной атмосферы, способствует раскрытию математических способностей учащихся и формированию у них устойчивой мотивации к углубленным занятиям математикой.

Developing of Students Mathematical Abilities in a Summer Math Camps

D. K. Mamiy

Adyghe State University, Maikop, Russia
dmami@yandex.ru

Исторические, фольклорные и краеведческие математические задачи в курсе «Математика и информатика» для гуманитариев

Н. И. Мерлина, С. А. Карташова

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, Чебоксары, Россия, merlina@cbx.ru

Большие возможности для развития интереса к математике, как школьников, так и студентов имеют задачи, содержащие краеведческий и исторический материал. Использование на уроках математики или лекциях таких задач дает возможность повысить познавательную активность обучаемых. Особенно это касается студентов гуманитарных факультетов, изучающих курс «Математика и информатика». Часов для него выделено очень мало, упор сделан на самостоятельную работу, объем материала большой как по математике, так и по информатике и самостоятельно студенту–гуманитарию разработать какой-то раздел или тему просто невозможно.

Нынешнему молодому поколению, растущему в условиях стремительных перемен, жить придется в совершенно ином обществе, динамически изменяющемся, поэтому важнейшей становится проблема подготовки молодежи к самостоятельной деятельности, к умению принимать решения, не потеряв при этом своей личностной самобытности, нравственных начал, способности к самопознанию и самореализации.

Особенно актуальной является проблема овладения новыми информационно-коммуникационными технологиями студентов–гуманитариев, которых традиционно считают далекими от точных наук. К гуманитариям в нашем исследовании мы относим студентов, обучающихся на таких специальностях, как «История» и «Журналистика», «Филология» и др.

Особую актуальность в настоящее время приобретает проблема развития познавательной активности студентов в образовательном процессе. В связи с этим в процессе обучения математике необходимо изменить подходы к организации самостоятельной учебно-познавательной деятельности студентов, поскольку эффективная организация таковой способна не только создавать условия для повышения качества обучения, но и влиять на развитие творческих способностей, самостоятельности и активности, то есть способствовать становлению и развитию профессиональной компетентности человека.

Одним из путей реализации такого развития познавательной активности на наш взгляд является использование учебных проектов, как индивидуальных, так и коллективных в курсе «Математика и информатика» на основе применения краеведческих и исторических математических задач. При работе над таким проектом, студент вынужден будет самостоятельно получать необходимый ему исторический, краеведческий материал, осуществлять поиск , используя интернет ресурсы, создавать красивые презентации, опять таки с использованием компьютерных технологий.

Авторами разработан спецкурс: «Краеведческие, исторические, фольклорные математические задачи народов России» для студентов-гуманитариев в котором будут использованы материалы коллективной монографии [1], которая содержит в себе математические задачи: русские, татарские, чувашские, удмуртские, адыгейские, якутские, бурятские и монгольские, а также предложена тематика и содержание учебных проектов для студентов, изучающих курс «Математика и информатика».

Каждый исторический или иной культурный объект, описанный на языке гуманитарных наук, может послужить основой для математических задач разного типа. Кроме того, в математических задачах есть гуманитарный аспект. У народов, имеющих сопредельные территорию или живущих на общей территории, или имеющих общую историческую судьбу, встречаются задачи, разные по вербальной формулировке, но имеющие одинаковую математическую сущность. Гуманитарность проблемы может быть в выяснении исторических истоков сходства.

Все вышесказанное показывает необходимость создания учебных пособий, построенных на национальном, краеведческом и историческом материале. Текстовая задача, составленная на основе местного краеведческого и исторического материала, развивает познавательные интересы студентов, позволяет сделать обучение математике и информатике содержательным и интересным. При таком подходе усвоение предметного содержания происходит в единстве с творческой деятельностью по извлечению научной информации в ходе целенаправленного интеллектуального труда по составлению и решению творческих задач, в предоставлении учащимся доступа к огромному объему информации, хранящейся в удаленных базах данных и архивах и может быть использовано в будущей профессиональной деятельности.

Приведём слова академика Г.Н. Волкова: «Мудрость народов, мудрый образ их мудрой жизни и культура вечного фольклора незаменимое средство воспитания подрастающих поколений и, быть может, перевоспитания и самовоспитания взрослых» [2].

В докладе будет приведена тематика учебных проектов, требования к их содержанию, а также фольклорные, краеведческие и исторические задачи народов России, входящие в вышеназванный спецкурс.

Литература

1. *Мерлина Н. И., Мерлин А. В., Карташова С. А. и др.* Фольклорные и краеведческие математические задачи народов России / под общ. ред. Н.И. Мерлиной. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2012. — 290 с.
2. *Волков Г. Н.* Этнопедагогическая пансофия. — Чебоксары, 2009. — 573 с.

Historical, folklore and local history mathematical tasks in the course “Mathematics and Informatics” for humanists

N. I. Merlina, S. A. Kartashova

Chuvash State University named after I.N. Ulyanov,
Cheboksary, Russia, merlina@cbx.ru

О возможностях совместного учета уровня восприятия учебного материала, его структуры и содержательности индивидуальной рефлексии

В. М. Михайлов

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики, Москва, Россия
valery2m@rambler.ru

Для повышения эффективности школьного обучения математики потребуется разработка и комплексное внедрение следующих методических положений.

– Введение понятия *восприятие*[1] учебного материала, идентификация стадий его формирования и *уровня восприятия* в качестве формального критерия качества его усвоения (воспринимается материал или нет, если да, то на каком *формальном уровне* его сложности).
– Введение в учебные программы в виде приложений ко всем разделам теории комплексов необходимых материалов по обобщенным ассоциациям, опорным сигналам и типовым схемам выполнения заданий [2, 3], упрощающих её восприятие и использование.
– Введение шкалы уровней сложности дидактического материала по формальным признакам. Существующее одноступенчатое их представление без выделения градаций сложности в условии заданий не позволяет ученику самостоятельно определять причины неверных действий. Предлагаемая шкала оценки сложности условий задач в 5 уровней в зависимости от количества затрагиваемых тематических или логических вопросов наглядно показывает их структуру, что способствует выработке навыков их распознавания и формирования последовательности действий в дальнейшем, при рассмотрении заданий уже с обычным представлением их сложности. Использование данного способа представления дидактических заданий дает также и формальную основу для содержательно-критериальной оценки усвоенных знаний. Существующие же критерии оценки знаний в значительной степени являются качественными.
– Повышение как уровня *рефлексии* учащихся в анализе учебного материала, так и качества обратных связей «учитель-ученик» в классе на основе создания индивидуально адаптированных схем (способов) выполнения заданий по изучаемым темам [1].
– Использование в диалоге с учащимися методических материалов только с воспринимаемой наглядностью для обеспечения привлекательности их участия.

[1]Восприятие – способность ученика самостоятельно идентифицировать тематическую принадлежность рассматриваемого теоретического и дидактического материала, распознавать вид (тип) задания, определять перечень и последовательность необходимых действий по его выполнению [1].

Комплексная реализация отмеченных мероприятий позволяет сформировать *циклическую схему* формирования навыков и получения знаний по математике. Вначале определяется уровень восприятия по теме на основе существующих знаний. Затем после рассмотрения теории по рассматриваемой теме по результатам решений задач учеником вносятся индивидуальные дополнения в типовые схемы. Содержательность рефлексии возрастет с каждым обращением к новому заданию с многоуровневым представлением его сложности, пока не сформируется необходимый навык, т.к. при этом наглядно выявляются все имеющиеся пробелы в восприятии темы. Поэтому полезным будет использование такого подхода в начале рассмотрения темы в 25 – 30% от общего количества дидактических материалов, а также и в заключительной проверочной работе.

Потенциал предложения в обеспечении результативного обучения в полном соответствии с индивидуальными возможностями учащихся на базовом уровне требований усвоения учебного материала. При наличии востребованности, предлагаемая схема также обеспечивает выход и на профильный (творческий) уровень сложности использования теории, где при решении необходим уже более глубокий анализ ее положений, а также синтез решения часто из весьма разнородных блоков (понятий) теоретического материала.

Литература

1. *Михайлов В. М.* Блок–схему — один из этапов решения задач // Математика в школе. — 2012. — № 7. — С. 23–27.
2. *Груденов Я. И.* Психолого-дидактические основы методики обучения математике. — М.: Педагогика, 1987. — 160 с.
3. *Шаталов В. Ф.* Быстрая тригонометрия. — М.: ГУП ЦРП Москва–Санкт–Петербург, 2005. — 72 с.

On combined consideration potential of educational material structure, student's material perception level and his or her individual reflection dept

V. M. Mikhaylov

Moscow State Technical University of Radio-engineering, Electronics and Automation, Moscow, Russia
valery2m@rambler.ru

Функциональная линия как ведущая содержательно-методическая линия школьного курса алгебры

А. Г. Мордкович

Московский городской педагогический университет, Москва, Россия
amordkovich@yandex.ru

Школьный курс алгебры есть синтез четырёх содержательно-методических линий: числовая, функциональная, уравнения и неравенства, преобразования (формулы). При работе над школьным учебником каждый авторский коллектив выбирает одну из этих линий в качестве приоритетной. С нашей точки зрения, приоритетной является *функционально-графическая* линия. Это выражается прежде всего в том, что какой бы класс функций, уравнений, выражений ни изучался, построение материала практически всегда следует осуществлять по жесткой схеме: *функция – уравнения – преобразования.*

Приоритет функционально-графической линии — не наше изобретение. На необходимость этого в свое время указывали Феликс Клейн, А.Я. Хинчин, В.Л. Гончаров. Следует учесть, что выход функционально-графической линии на первый план имеет весомую психологическую подоплеку: рисовать картинки (графики функций) семиклассникам приятнее и естественнее, чем работать с непонятными формулами

С реализацией в школе функционально-графической линии связан ряд методических проблем:

- когда и как дать учащимся формальное определение функции;
- какова должна быть стратегия и тактика изучения свойств функций на весь период обучения в школе;
- какова должна быть система упражнений по функциональному материалу (учитывая огромное разнообразие возможных сюжетов).

Во многих учебниках алгебры для основной школы определение функции предлагают учащимся 7 класса, что по сути бесполезно: дети к восприятию этого определения ещё не готовы. Мы привычно не задумываемся над тем, что у семиклассников нет даже необходимого вербального опыта: слово «зависимость», которое обычно используют для определения функции, дети полноценно не воспринимают.

На наш взгляд, понятие функции должно «созревать» постепенно. Поначалу, в 7–8 классах, пока изучаются простейшие функции (линейная, обратная пропорциональность, квадратичная) следует отказаться от формального определения функции и ограничиться описанием, не требующим заучивания. И только в 9 классе, проанализировав накопленный учащимися *опыт* в использовании понятия функции, следует попытаться убедить учащихся в том, что у них появилась и *потребность* в формальном определении понятия функции и её свойств.

Для понимания учащимися курса алгебры в целом важно прежде всего, чтобы они полноценно усвоили первичные модели (функции). Это значит, что нужно организовать их деятельность по изучению той или иной функции так, чтобы рассмотреть новый объект (конкретную математическую модель — функцию) системно, с разных сторон, в разных ситуациях. В то же время эта системность не должна носить характер набора случайных сюжетов, различных для разных классов функций — это приведет к дискомфорту в обучении. Возникает методическая необходимость выделить в системе упражнений *инвариантнное ядро, универсальное для любого класса функций*. На наш взгляд, оно должно состоять из шести направлений: графическое решение уравнений; отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке; преобразование графиков; функциональная символика; кусочные функции; чтение графика. Образно выражаясь, это шесть красок, с помощью которых изучаемая математическая модель — новая (для школьников) функция — становится ёмкой, цельной, понятной, красивой и привычной.

И учителя, и школьники привыкают к тому, что какой бы новый класс функций ни изучался, в системе упражнений обязательно будут задания, рассредоточенные по указанным шести блокам. Создаётся эффект предсказуемости деятельности, что делает совместную работу учителя и учеников на уроке достаточно комфортной.

Functional constituent part as the base methodical line in content of the school course of algebra

A. G. Mordkovich

Moscow City Education University, Moscow, Russia
amordkovich@yandex.ru

Проблема «детей ЕГЭ». Условия выживания в экстремальной ситуации

И. С. Недосекина, Л. Р. Ким-Тян

Национальный исследовательский технологический университет "МИСиС Москва, Россия
inedosekina@yandex.ru, kim-tyan@yandex.ru

Не секрет, что на протяжении нескольких лет только ленивый не пнул злобного монстра по имени ЕГЭ.

Однако победить его пока не представляется возможным. А это значит - надо постараться выжить в условиях надвигающейся катастрофы с наименьшими потерями для всех участников игры.

Каждый год, 1 сентября, мы с коллегами с трепетом ожидаем, какие сюрпризы нам приготовит новое поколение первокурсников. Приходят милые дети, в большинстве своем, потенциально обучаемые, но не готовые к обучению в вузе. Почему?

Одна из причин - отсутствие единой обязательной программы для всех школ, «от Москвы до самых до окраин …». Представители старшего поколения еще помнят те времена, когда любой имеющий соответствующие способности и настойчивость абитуриент мог самостоятельно подготовиться по «Программе для поступающих в вузы» и далее успешно обучаться выбранной специальности, причем, совершенно бесплатно. А сейчас мы с удивлением узнаем от наших новобранцев, что тот или иной раздел элементарной математики, в той или иной школе не изучался, его просто не было в программе.

«В последний год нас, в основном, учили ставить крестики-нолики», - так реагируют ребята на наше недоумение по поводу обнаруженных пробелов в их знаниях. Первое, с чем мы сталкиваемся в вузе, это - незнание некоторых основных понятий и формул, которым дети должны быть обучены в школе (это разделы тригонометрии, решение рациональных уравнений и неравенств, решение иррациональных уравнений и неравенств, логарифмы, логарифмическая функция и др.) Подготовка к ЕГЭ в выпускном классе является определяющим фактором. И поэтому все силы учителей и учеников сосредоточиваются на решении тестовых заданий, а обучение основной программе, запланированной на этот период, остается за бортом.

Отсутствие устных экзаменов приводит к тому, что выпускники школ, приходя в вуз, часто оказываются в трудном положении из-за неумения грамотно сформулировать и произнести вслух применяемые правила. Одна из слабостей современных выпускников - отсутствие навыков запоминания, а без этого не будет ни знаний методов решения задач, ни умения их применять.

Поступление в ВУЗ и дальнейшая адаптация студента зависят от личности поступающего. Есть студенты, которые силой своего характера, старанием и терпением добиваются хороших результатов в учебе при, мягко говоря, недостаточной первоначальной базе. Но таких студентов - единицы.

Приведенные примеры говорят о необходимости решения проблемы адаптации выпускников школ к обучению в современном техническом вузе. Можно обсуждать возможные варианты решения, мы неоднократно экспериментировали с ними, но, как известно, «больших семь шапок из овцы не выкроить никак». Чтобы ликвидировать «провалы», надо иметь разумное число часов на математику (да и другие естественные науки), как в школьной, так и в вузовской программе. Ведь математика, кроме всего прочего полезного, позволяет выработать четкость мышления и изложения, что также необходимо в любой последующей профессиональной деятельности.

The problem of “children of Single State Examination”. Conditions of a survival in extreme situation

I. S. Nedosekina, L. R. Kim-Tyan

National Research Technological University "MISiS", Moscow, Russia
inedosekina@yandex.ru, kim-tyan@yandex.ru

Проблемы обучения математике в школе и в вузе детей с высоким уровнем мотивации

А. И. Новиков

Рязанский государственный радиотехнический университет, Рязань, Россия
novikovanatoly@yandex.ru

Вопросу обучения талантливых детей с недавнего времени уделяется повышенное внимание. Для решения этой очень важной проблемы предпринимаются конкретные шаги на всех уровнях управления. Однако в части обучения математике продуманной системы действий пока нет.

Слова «талантливый», «одаренный», «вундеркинд» предполагают наличие в человеке, к которому относят их, наличие врожденных выдающихся данных в соответствующей сфере человеческой деятельности. Число детей, имеющих выдающиеся способности, например математические, невелико даже в масштабах целой страны. Выявлять таких детей несложно, и потому направлять большие силы и материальные ресурсы на поиск вундеркиндов, вряд ли обоснованно. Важнее организовать системную работу с такими детьми специалистов высшей квалификации.

Есть еще одна большая по численности группа учащихся школ и студентов, имеющих большое желание получить качественное образование. Это дети с *высоким уровнем мотивации.* Они часто имеют различный начальный уровень математической подготовки, различные природные данные, но всех их объединяет готовность работать и желание получить хорошую подготовку. Однако и средняя школа, и вузы в настоящее время не обеспечивают такую возможность.

В советский период на работу с этой группой учащихся (одаренные дети в составе этой группы) были направлены значительные силы системы школьного и вузовского образования. Четко функционировала отлаженная система математических олимпиад, факультативных занятий по математике в школе. Формально такая система существует и в настоящее время. Однако ее эффективность не очень высока. *Потеряна связь школы с вузом.* Хотя, нужно признать, есть одиночные примеры успешного сотрудничества вузов со школами.

Система единого государственного экзамена по математике привела к тому, что математическая подготовка выпускников средней школы оказалась “замороженной” на так называемом *базовом уровне.* Сложилась практика, в соответствии с которой учитель математики отвечает за базовую подготовку своих учеников и не имеет особой мотивации для освоения ими математики на более высоком уровне.

В 2011 году ЕГЭ по математике сдавали 735 450 человек. Из них низкий уровень подготовки (от 0 до 30 баллов по 100 бальной шкале) показали $15,6\%$, базовый уровень (от 34 до 56 баллов) – $57,9\%$ [1]. Авторы цитируемого аналитического отчета отмечают, что абитуриенты из второй группы *«...не имеют достаточной подготовки для успешного* *продолжения образования по специальностям, требующим повышенного и высокого уровня компетентности»*. Но дальше подтверждают, что *«...фактически в 2011 году на технические специальности, а также на специальность «учитель математики» (!), к сожалению, зачислялись учащиеся из группы «базовый - 2» (от 46 до 56 баллов)»*.

Одна из важнейших проблем современного *массового* высшего образования заключается в том, что процент студентов, способных осваивать математику на соответствующем (достаточно высоком) уровне, незначителен. Низкий средний уровень познавательного потенциала студенческой аудитории вынуждает преподавателя упрощать изложение материала. В итоге *нарушается гарантированное конституцией право* численно меньшей, но имеющей высокие способности, части студенческой аудитории *на получение качественного образования.* Это одна из основных проблем высшего образования в нашей стране в настоящее время.

Без решения проблем математического образования в средней школе и в высшем естественнонаучном и техническом образованиях программа работы с одаренными детьми (в части математического образования) рискует превратиться в очередной «громкий» проект.

Литература

1. Аналитический отчет о результатах ЕГЭ 2011. ФИПИ. — URL: `http://www.fipi.ru/binaries/1190/2.1.%20ma-11-11.pdf`.

The problems of teaching mathematics at school and high-school to childern with high level of motivation

A. I. Novikov

The Ryazan state radio engineering university, Ryazan, Russia
novikovanatoly@yandex.ru

Об олимпиадах по математике для студентов нематематических специальностей: опыт и перспективы

Ю. К. Оленикова

Ярославский государственный технический университет,
Ярославль, Россия
olenikovajk@ystu.ru

Опыт. В Ярославском государственном техническом университете (ЯГТУ) вузовские математические олимпиады - первый этап Всероссийской студенческой олимпиады (ВСО) проводятся с 1971 года. С 1996 года по инициативе и при непосредственном участии автора проводятся областные и межрегиональные (II этап ВСО), а также всероссийские и международные (III этап ВСО) олимпиады. Студенты ЯГТУ неоднократно являлись победителями и призерами II и III этапа ВСО по математике, проводимой другими вузами. Завязались тесные контакты между организаторами ВСО всех вузов, происходит обмен опытом по организации и проведению олимпиад, математические олимпиады привлекают все большее количество участников. На многих олимпиадах по математике для нематематических специальностей проводятся методические семинары или научные конференции для преподавателей. Так, в VI Международной олимпиаде, проводимой ЯГТУ в 2012г, участвовали 167 студентов и в научно-методической конференции «Математическое образование и наука в технических и экономических вузах» более 80 преподавателей. Накоплен достаточно большой опыт, появились традиции в проведении олимпиад, появились новые сборники олимпиадных задач для подготовки к таким олимпиадам. Однако в последнее время появились и проблемы, затрудняющие и даже мешающие проведению ВСО. Доклад на конференцию подготовлен по просьбе организаторов ВСО по математике и преподавателей – руководителей команд студентов, участвующих в олимпиадах, с целью привлечь к проблемам ВСО внимание «широкой математической общественности».

История. Всероссийская студенческая олимпиада, сайт www.vsomon.ru, относится к одному из четырех приоритетных национальных проектов федерального уровня «Образование»: проект в рамках основного «Талантливая молодежь». История интеллектуальных конкурсов и олимпиад насчитывает более тысячи лет. В нашей стране первая массовая математическая олимпиада была организована для школьников в 1934 г в Ленинградском государственном университете. Ее организаторами были член-корреспондент АН СССР Б. Н. Делоне, профессора В. А. Тарковский и Г. М. Фихтенгольц и др. Студенческие математические олимпиады федерального уровня официально стали проводиться лишь в 1981 году. Это были Всесоюзные олимпиады, которые проводились по совместному постановлению Минвуза СССР и ЦК ВЛКСМ в числе мероприятий проекта «Студент и научно-технический прогресс». Местом проведения заключительного тура олимпиады по математике для студентов нематематических специальностей (технических и сельскохозяйственных вузов) был избран Омский политехнический институт. Выбор не был случайным – именно в Омске к тому времени был накоплен опыт проведения таких мероприятий, вплоть до республиканского уровня. Немаловажную роль сыграла и организаторская деятельность доцента кафедры высшей математики В.Н. Сергеева. Олимпиада проводилась только 5 лет: в 1981-1985 годах. Городские олимпиады по математике в Омске прекратили существование в 1987 году. Примерно в тот же период Всероссийский тур олимпиады по математике для студентов нематематических специальностей проходил в Барнауле. К сожалению, практически невозможно восстановить всю историю и материалы студенческих математических олимпиад в России даже федерального уровня. Проводились и прекратили свое существование олимпиады III тура ВСО в Нижегородском и Уральском государственных технических университетах; в Уральском и Самарском государственных экономических университетах, в Тольяттинском государственном университете, Самарском государственном архитектурно-строительном университете. Под вопросом дальнейшее проведение олимпиад в ЯГТУ и УГАТУ (Уфимском государственном авиационном техническом университете). Будут ли в этом году олимпиады в Иркутском и Южно-Российском государственных технических университетах, неизвестно. Плана Минобрнауки проведения ВСО в 2013г пока нет.

Проблемы. Некоторые из проблем являются общими для всех математических олимпиад, включая школьные, и на них неоднократно обращали внимание организаторы российских школьных олимпиад. Подробно о них написано в интервью с руководителем сборной команды школьников по математике Назаром Агахановым, опубликованном на сайте `http:www.polit.ru/article/2007/10/05/olimp`. Много проблем, связанных и с политикой в системе высшего образования, основные из которых:

1. Вузам невыгодно проводить олимпиады: проведение олимпиад не финансируется, не входит ни в аккредитационные показатели, ни в критерии эффективности вузов;
2. Число профессиональных математиков-энтузиастов, желающих посвящать себя олимпиадному движению, мало. И вряд ли они появятся, если сохранится политика, заключающая в том, что вузы сами должны зарабатывать деньги;
3. Проводится попытка унификации сверху системы олимпиад в стране, в то время как математические олимпиады принципиально отличаются от олимпиад по другим предметам, тем более для нематематических специальностей;
4. В 2013 году ужесточилось положение об организации и проведении олимпиад, критериев отбора базовых вузов, увеличилось количество документации, требуемое как для заявки на проведение III этапа ВСО, так и для отчета, и т.д..

Последнее, а также сам состав Центральной рабочей группы ВСО позволяет сделать вывод, что за руководство олимпиадами взялись люди, никогда их не проводившие, – типичная ситуация для России последних лет.

Перпективы. Математические олимпиады для нематематических специальностей вузов в последние годы стали составной частью учебного процесса. Цели, задачи и формы проведения таких олимпиад сформировались снизу в результате олимпиадного движения и подчинены одной общей идее – бережному отношению к нашему поколению и сохранению научного потенциала России. Благодаря массовости и возможности участвовать в олимпиадах лучшим студентам любого вуза преподаватели вузов организуют кружки для углубленного изучения математики, математические школы, математические лагеря. Это имеет большое значение для повышения качества образования и интереса к нему в условиях, когда математическое образование в вузах превратилось в поверхностное с элементами компетентностного подхода. Полезны и популярны были командные олимпиады, проведение которых прекратилось с созданием иерархической структуры проведения олимпиад на личное первенство. Однако выявление трех математических лидеров из нематематических вузов России по большому счету никому нужно. В настоящее время благодаря тому, что в соответствии с новыми требованиями к организации и проведению ВСО заявку на проведение второго этапа подавать не надо, в ряде вузов России стали организовывать Открытые областные и региональные олимпиады. Такие олимпиады, например, уже прошли в Иванове и Рыбинске, в ближайшее время будут проводиться в Костроме и Рязани. Но заявки на проведение третьего этапа организаторы пока подавать не собираются. Поэтому не исключено, что очень скоро из олимпиад по математике для нематематических специальностей вузов III этапа ВСО останется только Открытая Международная Интернет-олимпиада. Хорошая олимпиада, но традиционные она заменить не может.

Полный текст доклада будет опубликован на сайте `http://julia-ole.livejournal.com`

About competitions in mathematics for students nonmathematical specialties: experience and prospects

J. K. Olenikova

Yaroslavl state technical university, Yaroslavl, Russia
olenikovajk@ystu.ru

Профессиональная математическая компетентность бакалавров в условиях информатизации

А. Б. Ольнева

Московский государственный университет путей сообщения (Астраханский филиал), Астрахань, Россия
a.olneva@gmail.com

Указ Президента России от 7 мая 2012 за № 599 «О мерах по реализации государственной политики в области образования и науки», где в пункте один написано: «Разработать и утвердить в декабре 2013г. Концепцию развития математического образования в РФ на основе аналитических данных о состоянии математического образования на различных уровнях образования», подчеркивает важность решения задач, связанных с математическим образованием в средней и высшей школах.

Переход на двухуровневую основу обучения (бакалавр-магистр) изменил структуру обучения, потребовал перехода в учебных планах от часов к зачетным единицам, выделения компетенций, соответствующих требованиям к выпускникам высшей школы, необходимость формирования модели выпускников на базе компетенций. Кроме того, этот переход требует кардинального изменения документального и методического обеспечения учебного процесса, глубокой корректировки рабочих программ, создания возможностей динамического управления ее контентом. В ГОС ВПО третьего поколения по специальности «Информационная безопасность автоматизированных систем» математические дисциплины, такие как «Математический анализ», «Алгебра и геометрия», «Дискретная математика», «ТВ и МС», являются дисциплинами базовой части математического и естественнонаучного цикла, которые участвуют в формировании компетенций: ОНК-1, ОНК-2, ОНК-3; ИК-2, ИК-4, ИК-8. Одной из проблем реализации математического образования в техническом вузе есть необходимость применения информационных технологий. Это предусматривает более полное использование предоставляемой современной компьютерной техникой возможностей применения мультимедийных технологий, сред и форм обучения. В рамках математического образования это, прежде всего, проведение лабораторных работ в компьютерных классах. А это требует от преподавателей математики знания не только самой учебной математической дисциплины, но и умения применять компьютерную технику, знания современных математических пакетов программ, языков программирования. Поэтому возникает необходимость обучить студентов владению этими мат. пакетами, а уже потом их применению в рамках изучения соответствующей учебной дисциплины. Коллективам кафедр следует уделить внимание разработке методического обеспечения для проведения лабораторных работ с применением современных информационных технологий, включающего в себя описание возможностей используемых математических компьютерных программ, и способов реализации решаемых в рамках изучения тех или иных дисциплин задач с помощью этих программ. Названная проблема влечет за собой проблему повышения квалификации преподавателей математических кафедр в области информационных технологий, причем как в сфере работы с современными математическими пакетами и языками программирования, так и в сфере работы с офисными приложениями и средствами подготовки и обработки математических текстов (таких, например, как TeX). Развитие информационных технологий предоставляет большие возможности студенту и педагогу к тематическому поиску информации в библиотечных фондах, периодических изданиях, информационных системах и компьютерных сетях.

Professional mathematical competence of bachelors of conditions of information

A. B. Ol'neva

The Moscow state university of means of communication (the Astrakhan branch), Astrakhan, Russia
a.olneva@gmail.com

Проблемы отечественного математического образования при переходе к бально-рейтинговой системе

В. Т. Петрова

Московский физико-технический институт, Москва, Россия
petrovavtv@gmail.com

В настоящее время в отечественной средней школе проводится раннее профильное обучение, что ведет к сокращению программ и учебного времени для изучения многих классических дисциплин и снижению уровня математической подготовки абитуриентов-даже выпускников физико-математических классов. Для «решения» этих проблем в высшей школе стала вводиться бально-рейтинговая система. Не избежал этой участи, точнее, не отказался от нее, и Московский Физико-технический институт, где традиционно содержание математических курсов было ориентировано на уровень первых курсов мех-мата МГУ и было вполне оправдано тем, что давало качественную математическую базу будущим специальным знаниям и обучало студентов отбору и освоению знаний. Эта система обучения была создана великими учеными и педагогами, основавшими легендарный Физтех, и подтверждалась многолетним традиционно высоким рейтингом его выпускников в нашей стране и за рубежом.

Уже три года как в МФТИ введено так называемое «двухуровневое обучение»: по программам «базового уровня» и «продвинутого». Но программы уровня, названного «продвинутым»,– программы традиционных курсов математики МФТИ, а «базовые» – их существенно сокращенный вариант. Согласно такой модернизации на каждом из уровней студент может получить высшую оценку, поэтому большинство практичных студентов стало ориентироваться на сокращенную программу. Очевидное следствие этого - заметное снижение качества не только знаний, но и мышления студентов. Положение стали «поправлять» введением десятибалльной системы оценок. В результате успеваемость численно повысилась, при еще большем снижении качества предметных знаний. Причина этого в нарушении главного принципа интенсификации обучения математике: *дифференциация обучения должна стимулировать студента к углублению уровня освоения учебного материала, а не провоцировать его на более простой путь к получению удовлетворяющей его оценки.*

Некогда разработанная в МФТИ система семестровых заданий получила распространение по техническим (и не только!) вузам страны под названием «типовые расчеты». Однако во многих из них она превратилась из средства индивидуальной и качественной работы со студентами в свою противоположность: глобальное списывание материалов типовых расчетов, а то и профанацию контроля знаний. С большой вероятностью можно предвидеть результат тиражирования недавней «модификации» физтеховской системы обучения и директивного введения бально-рейтинговой системы на другие университеты. Чтобы избежать этого, важно понять актуальность проблем математического образования в современной высшей школе:

1. точно и грамотно определить содержание общих и специальных математических курсов для различных специальностей; объем и необходимую глубину владения математическими знаниями и методами для вузовских специальностях, в которых они используются;

2. разрабатывать методики преподавания математики в высшей школе, которые позволяли бы учитывать различную довузовскую подготовку студентов, а так же существенно интенсифицировали обучение студентов математическим дисциплинам, учитывая социологические, культурологические и информационные изменения;

3. выработать и апробировать современные критерии, методы и методики контроля качества математических знаний студентов, их владения необходимым математическим аппаратом.

Поскольку добиться реальных успехов реформирования можно только обучив современных студентов вузов интенсивным методам освоения и переработки информации, должны быть актуальны интенсивные методы и методики их обучения, самообучения и самоконтроля.Эффективными средствами достижения интенсификации обучения математическим дисциплинам в современной школе может служить выбор правильных дидактических основ и схем для создания и применения учебно-методических комплексов.

Литература

1. *Петрова В. Т.* Приемы технологий развивающего обучения в учебном курсе высшей математики современного технического вуза // Труды Международного коллоквиума «Des jeux a la creative. Methodes d'education active». — Boulogne-Billancourt, France. — 2007. — C. 116–121.

The problems in Russian mathematical education while the transition to balno-rating system

V. T. Petrova

MIPhT, Moscow, Russia
petrovavtv@gmail.com

Интерактивный подход в математическом образовании

М. С. Помелова

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
marimari07@mail.ru

В зависимости от уровня познавательной активности в учебном процессе различают пассивное и активное обучение. При пассивном обучении обучающийся выступает в роли объекта учебной деятельности: он должен усвоить и воспроизвести материал, который передается ему преподавателем или другим источником знаний. Обычно это происходит при использовании лекции-монолога, чтении литературы. Обучающиеся при этом, как правило, не сотрудничают друг с другом и не выполняют каких-либо проблемных, поисковых заданий.

При активном обучении слушатель в большей степени становится субъектом учебной деятельности, вступает в диалог с преподавателем, активно участвует в познавательном процессе, выполняя творческие, поисковые, проблемные задания. Осуществляется взаимодействие обучающихся друг с другом при выполнении заданий в паре, группе.

Одним из современных направлений «активного обучения» является интерактивное обучение.

Интерактивное обучение предполагает отличную от привычной логику образовательного процесса: не от теории к практике, а от формирования нового опыта к его теоретическому осмыслению через применение. Опыт и знания участников образовательного процесса служат источником их взаимообучения и взаимообогащения. Делясь своими знаниями и опытом деятельности, участники берут на себя часть обучающих функций преподавателя, что повышает их мотивацию и способствует большей продуктивности обучения.

Формы и методы интерактивного обучения можно разделить на: дискуссионные (диалог, групповая дискуссия, разбор ситуаций из практики, анализ ситуаций морального выбора и др.); игровые (дидактические и творческие игры, в том числе деловые (управленческие) игры, ролевые игры, организационно-деятельностные игры); тренинговые формы проведения занятий (коммуникативные тренинги, тренинги сензитивности), которые могут включать в себя дискуссионные и игровые методы обучения.

Интерактивное обучение одновременно решает три задачи: учебно-познавательную (предельно конкретную); коммуникационно-развивающую, связанную с общим эмоционально-интеллектуальным фоном процесса познания; социально-ориентационную, результаты которой проявляются уже за пределами учебного времени и пространства.

Философская основа: гуманистическая, природосообразная.

Методологический подход: коммуникативный.

Ведущие факторы развития: социогенные.

Научная концепция освоения опыта: ассоциативно-рефлекторная.

Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ, грант № 13-36-01223.

Ориентация на личностные сферы и структуры: информационная.

Характер содержания: адаптивно-вариативный.

Вид социально-педагогической деятельности: сопровождения.

Тип управления учебно-воспитательным процессом: взаимообучение.

Преобладающие методы: диалогические.

Организационные формы: любые.

Преобладающие средства: вербальные + программированные + аудиовизуальные + электронные.

Подход к ребенку и характер воспитательных взаимодействий: интерактивный, демократический, сотрудничества.

Направления модернизации: активизации.

Категория объектов: все категории.

Целевые ориентации: активизация индивидуальных умственных процессов обучающихся; возбуждение внутреннего диалога ученика; обеспечение понимания информации, являющейся предметом обмена; индивидуализация педагогического взаимодействия; вывод ученика на позицию субъекта обучения; достижение двусторонней связи (обмена информацией) учащего и учащегося.

Самой общей задачей учителя-ведущего в интерактивной технологии является фасилитация (поддержка, облегчение) – направление и помощь процессу обмена информацией: выявление многообразия точек зрения; обращение к личному опыту участников; поддержка активности участников; соединение теории и практики; взаимообогащение опыта участников; облегчение восприятия, усвоения, взаимопонимания участников; поощрение творчества участников.

Литература

1. *Селевко Г. К.* Современные образовательные технологии: Учебное пособие. — М.: Народное образование, 1998. — 256 с.

Interactive approach in mathematical education

M. S. Pomelova

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
marimari07@mail.ru

О подходах к повышению эффективности преподавания математических дисциплин в высшей школе в условиях реформы образования

Л. Н. Посицельская*, С. В. Злобина†

* *Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет, Москва, Россия*
posicelskaja@yandex.ru

† *Брянский государственный университет, Брянск, Россия*
zsvvmbox@mail.ru

Переход на двухуровневую систему обучения и введение новых федеральных образовательных стандартов существенно влияют на образовательный процесс. Возникают проблемы, связанные с сокращением количества аудиторных часов. Компенсировать недостаток учебного времени можно путем организации самостоятельной работы студентов, что рекомендовано стандартами. Еще одним резервом является использование в учебном процессе информационных технологий. Это естественно в современных условиях и может служить дополнительным источником мотивации к занятиям для студентов.

Новые условия работы требуют отказа от некоторых стереотипов: только тот материал, который был изложен на лекциях, можно включать в экзамен; теория, необходимая для решения задач на практических и лабораторных занятиях, должна быть предварительно рассмотрена на лекциях. При этом открываются новые возможности для организации учебного процесса.

I. Вынесение изучения части программного материала за пределы сетки аудиторных часов.

1. Преподаватель готовит авторские материалы в электронном виде для того, чтобы студенты могли с ними предварительно познакомиться до аудиторных занятий по данной теме [1]. В аудитории этот материал обсуждается: преподаватель задает контрольные вопросы, отвечает на вопросы студентов. Затем решаются задачи.

2. Часть учебного материала выделяется для изучения в форме докладов и рефератов. Докладчики выступают на занятиях и затем помогают товарищам в освоении представленного ими материала.

II. Использование балльно-рейтинговой системы.

1. Проведение коллоквиумов после изучения разделов с учетом полученных баллов.

2. Включение в контрольные работы дополнительных заданий, выполнение которых повышает итоговый балл за семестр.

3. Учет баллов за доклады, рефераты и активное участие в их обсуждении.

III. Использование в учебном процессе вычислительной техникой и информационных технологий.

1. Предоставление всем студентам доступа к электронным версиям докладов, рефератов, подготовленных в процессе изучения учебной дисциплины.

2. Формирование студентами библиотеки электронных учебников и учебных пособий по изучаемой дисциплине для использования в самостоятельной работе.

3. Использование калькуляторов и других технических средств для решения стандартных вычислительных задач, а также для проведения математических экспериментов [2].

4. Использование студентами математических пакетов, чтобы получить представление о свойствах изучаемых объектов, избежать рутинных вычислений, проверить результат.

Предлагаемые образовательные технологии могут, по нашему мнению, повысить эффективность учебного процесса и достигнуть результатов, предусмотренных новыми ФГОС.

Литература

1. *Травкин И. Ю.* “Перевернутое” обучение = активное обучение [Электронный ресурс] // Fun of Teaching, 6.12.2012. `http://funofteaching.tumblr.com/post/37260333098`
2. *Посицельская Л. Н.* Математический эксперимент как поддержка поддержка доказательства при изучении математики в вузе // Математика в высшем образовании. — 2012, № 10. — С. 43–48.

On approaches to improving the effectivness of the teaching of mathematics in higher school in the conditions of the education reform

L. N. Positselskaya*, S. V. Zlobina†

* *The Moscow State Automobile and Road Technical University, Moscow, Russia*
posicelskaja@yandex.ru

† *Bryansk State University, Bryansk, Russia*
zsvvmbox@mail.ru

О современном подходе к соединению учебного и научного процессов при подготовке специалистов в высшей школе

А. А. Пунтус

Московский авиационный институт , Москва, Россия
artpuntus@yandex.ru

Задача совершенствования подготовки высококвалифицированных специалистов в вузе является как традиционно актуальной задачей, так и особенно актуальной задачей в настоящее время - время активного развития научно-технического прогресса. Решению данной проблемы способствует развитие и совершенствование различных форм подготовки высококвалифицированных специалистов на основе соединения учебного и научного процессов обучения студентов. Важная основополагающая роль при этом состоит в определении содержания взаимодействия данных процессов и одновременно определения его конечной цели. Вне всякого сомнения, если поставить конечной целью данного взаимодействия задачу воспитания из подавляющего большинства студентов потенциальных квалифицированных инженерно-технических и научных сотрудников, то эта цель в полном объёме может оказаться не реализуемой. Но, с другой стороны, даже сомнение в необходимости привлечения студентов к различным видам выполнения самостоятельной творческой научно-исследовательской деятельности безусловно может нанести в этом случае совершенно непоправимый вред качеству подготовки будущих специалистов.

Опыт реализации процесса активного взаимодействия учебного и научного процессов на факультете прикладной математики и физики Московского авиационного института показал, что главной целью такого взаимодействия учебной и научной деятельности при подготовке специалистов в вузе является привитие будущим инженерам навыков научного подхода к решаемым инженерным задачам. Наряду с совершенствованием учебного процесса, весьма эффективным средством улучшения качества подготовки специалистов стало широкое привлечение студентов к творческой деятельности - научно-исследовательской работе студентов (НИРС). Этой конечной цели и должны быть подчинены различные формы соединения учебного и научного процессов. Участвуя в НИРС, будущий специалист убеждается в необходимости самостоятельного поиска путей постановки и решения задач, приобретает навыки творчества. Нормой его поведения становится осознанное отношение к активной трудовой деятельности, что обеспечивает его готовность к самостоятельной профессиональной деятельности.

На современном этапе развития НИРС, многообразии её форм и методов термин НИРС стал собирательным. Он включает в себя самые различные стороны учебной, научной, воспитательной и организационной деятельности вуза, которая обеспечивает:

- условия успешного овладения студентами своей специальностью;
- подготовку студентов к самостоятельной творческой деятельности;

- развитие навыков использования полученных знаний в практической работе;
- формирование потребности и умения постоянно накапливать и совершенствовать знания;
- расширение научно - технического кругозора;
- воспитание всесторонне развитой личности.

Для решения этих задач необходимо постоянно увеличивать сложность и объём знаний, умений и навыков, приобретаемых студентами в учебное и внеучебное время, обеспечивать преемственность методов и форм подготовки специалистов при переходе от одних знаний к другим, от курса к курсу. Решить вопросы совершенствования творческой подготовки студентов можно только на основе всё большего соединения НИРС с учебным процессом, когда НИРС становится его полноправной формой, а учебный процесс, в свою очередь, помогает решать научно-технические, производственные и общественно-воспитательные задачи вуза.

Активному взаимодействию учебного и научного процессов в значительной мере способствует такой вид самостоятельной работы студентов на базе научно-исследовательских работ, как лабораторные и курсовые работы. Это наиболее удобная форма учебных занятий, позволяющая включать в эти работы элементы исследовательской деятельности. А именно, этому способствует тот факт, что элементы поиска в лабораторных и курсовых работах дают возможность каждому студенту испытать себя в качестве исследователя. В соответствующие курсовые и лабораторные работы включаются различные виды учебно-исследовательского подхода к решению в этой работе поставленной задачи, а именно, анализ состояния вопроса, проведение расчёта и обработка его результатов, оформительские работы и планирование очередного этапа анализа и расчёта до получения окончательного результата. Чтобы в большей степени способствовать развитию у студентов навыков в выполнении научно-исследовательской работы, как лабораторная, так и курсовая работа, должны содержать познавательную часть, которая способствует лучшему усвоению соответствующего раздела курса. Кроме того, эти работы должны содержать также, в определенной степени, исследовательскую часть, связанную, например, с обоснованным выбором для данной задачи вычислительного алгоритма с последующим выполнением её расчётной части. Желательно, чтобы соответствующие курсовые и лабораторные работы базировались на тематике и возможно материальной части научных разработок коллектива кафедры. При выполнении таких лабораторных и курсовых работ студентам разъясняется цель соответствующих исследований при их выполнении и методика проведения в них расчётной части. Каждая группа студентов получает задание, в котором по возможности учитываются индивидуальные склонности и интересы студентов, а также их научная работа на предшествующих младших учебных курсах. При выполнении студенческих научно-исследовательских работ в рамках выполнения заданий учебных лабораторных и курсовых работ студенту задаются необходимые соответствующие условия работы исследуемой системы и указываются возможности самостоятельного выбора её структуры и элементов. Студенту рекомендуется методика исследования с подбором возможно определённой дополнительной литературы, для чего в этом случае в методические указания по соответственно лабораторным или курсовым работам включаются индивидуальные задания по тематике рекомендуемых творческих научных исследований. Студенты, выполняя по таким работам некоторый объём необходимых исследований и расчётов, имеют возможность при необходимости пользоваться консультациями преподавателя по данной дисциплине или специально выделяемого с такой целью руководителя. Таким образом, в результате выполнении учебных лабораторных и курсовых работ, не только закрепляются теоретические знания, но и приобретаются навыки проведения самостоятельных научно-практических исследований. Опыт выполнения таких работ показал, что проведение учебно-исследовательских лабораторных и курсовых работ наиболее рационально, когда отдельные соответствующие работы выполняются в логической последовательности и объединяются в общий учебно-методический практикум с единым учебно-научным исследовательским заданием.

Важную роль в совершенствовании процесса соединения учебного и научного процессов в вузе составляет практически достаточно результативно оправдавшая себя индивидуальная форма обучения студентов, проявивших способности к самостоятельной творческой научно-исследовательской деятельности, активно участвующих в НИРС. В данном случае, изучая или выбирая метод решения поставленной задачи прикладного характера, студент самостоятельно знакомится как с отечественной, так и зарубежной литературой по данному вопросу, при этом он должен проанализировать достоинства и недостатки выбранного для решения поставленной задачи метода, сравнивая его с другими возможными методами решения задачи. Данное активное сочетание учебного и научного подхода в подготовке студентов, позволяют выпускать из стен вуза достойных специалистов.

On the modern approach to the mix of educational and scientific processes with training in high school

A. A. Puntus

Moscow Aviation Institute ,Moscow, Russia
artpuntus@yandex.ru

Опыт преподавания курса математики для студентов инженерно-технических специальностей в Московском государственном индустриальном университете в связи с введением стандартов 3-го поколения (ФГОС-3)

Е. А. Пушкарь, В. Б. Миносцев, А. И. Мартыненко, Н. А. Берков

Московский государственный индустриальный университет, Москва, Россия
pushkar@msiu.ru, 4211904@mail.ru, mart@msiu.ru, berkow@mail.ru

В связи с введением в последние годы стандартов 3-го поколения (ФГОС-3) и массовым переходом на подготовку бакалавров со сроком обучения 4 года, количество аудиторных часов, отводимых учебными планами инженерных направлений на базовую часть математического цикла заметно сократилась (270 час. вместо 357 час.). Ёще более сократился объем лекционной нагрузки (32% часов, отведённых на лекции, вместо 43% ранее).

Всё это, в совокупности с общим снижением уровня подготовки выпускников средней школы, привело нас к необходимости излагать требуемый стандартами материал доступно, без излишних подробностей, адресуя хорошо подготовленных студентов для разбора сложного материала к учебной литературе, созданной на кафедре Общей и прикладной математики ФГБОУ ВПО МГИУ [1–3].

Вместе с тем, значительное внимание, как и прежде, уделяется усвоению студентами основных фундаментальных понятий, их свойств, определений, формулировок теорем, умению сформулировать задачу и объяснить полученные результаты.

Количество часов, выделенных на семинары, осталось практически без изменений. Следует особенно отметить, что в МГИУ существенная часть аудиторных часов учебными планами отведена на выполнение индивидуальных заданий, проводимых студентами под руководством преподавателей в интерактивном режиме.

Курс математики теперь разбит на несколько дисциплин: «Введение в математику», «Алгебра и геометрия», «Математический анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика», и «Математические методы в науке и технике», где излагаются основы теории дифференциальных уравнений и численные методы их решений. Во Введении в математику и первой части Математического анализа ставится зачёт при выполнении студентом индивидуального задания [2] и решения необходимого количества тестовых задач [3].

Остановимся на содержании и последовательности изложения материала в указанных разделах математики.

Во «Введение в математику» мы включили множества, системы координат, функции одной и нескольких переменных, графики, линии и поверхности. В «Математический анализ» включены: пределы, числовые ряды, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных, интегральные исчисления функций одной и нескольких переменных, элементы теории поля. При этом при изучении пределов значительное внимание уделяется использованию эквивалентности бесконечно малых и бесконечно больших величин, числовые ряды рассматриваются сразу после пределов и значительное внимание при этом уделяется «подобию» рядов. Ряды и формулу Тейлора мы вводим при исследовании функций, асимптотическом поведении функций и нахождении пределов, наряду с правилом Лопиталя, тригонометрические ряды излагаются и используются при решении задач математической физики. Такое распределение помогает существенно сократить время и вводить этот достаточно сложный материал там, где он используется.

По дисциплине «Алгебра и Геометрия», кроме выполнения индивидуального задания и текущего теста, предусмотрен экзамен с предварительно сданным экзаменационным тестом.

В каждом предмете введена и активно используется бальная (рейтинговая) система. Зачёт или удовлетворительно ставится при условии, если студент наберет не менее 60 баллов из 100. Хорошо соответствует 75-84 баллам, отлично (85-100 баллов) могут быть получено только на экзамене.

Во втором семестре изучается вторая часть Математического анализа - интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных и элементы теории поля с выполнением 2-х индивидуальных заданий, 2-х тестов и сдачей экзамена по годовому курсу.

На втором курсе в дисциплинах «Математическая методы в науке и технике» и «Теория вероятностей и математическая статистика» кроме индивидуальных заданий и тестов предусмотрены лабораторные работы по решению усложненных задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физике и математической статистике с помощью пакетов прикладных программ. Мы считаем, что подготовку инженерных кадров и обучение студентов методам решения задач с использованием пакетов прикладных программ необходимо начинать уже в курсе математики.

Вся разработанная на кафедре учебная литература [1–3] имеет гриф Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки Российской Федерации и допущена в качестве учебных пособий для студентов вузов, обучающихся по инженерно-техническим специальностям. Она представляет собой единое целое. Так, в разбираемых в индивидуальных заданиях [2] «нулевых» вариантах и необходимом теоретическом материале для решения тестов [3] даются ссылки на формулы, теоремы и разделы лекций [1].

В заключение остановимся на использовании математических пакетов прикладных программ. В настоящее время мы используем их, как отмечалось, лишь при решении усложненных задач в разделах математической физики и математической статистики [1]. При проведении тестов, зачетов и экзаменов студентам запрещается пользоваться ими. Однако при выполнении домашних и индивидуальных заданий некоторые студенты используют их, и мы разрешаем это для проверки полученных решений.

Совершенно очевидно, что в дальнейшем, с развитием компьютерной техники и интернета, использование студентами этих пакетов при изучении различных разделов математики будет расширяться. Бороться с этим явлением нецелесообразно и бессмысленно, поскольку при обучении на старших курсах и в своей дальнейшей профессиональной деятельности выпускники технических специальностей будут обязаны пользоваться такими пакетами.

Литература

1. Курс математики для технических высших заведений под редакцией В.Б. Миносцева и Е.А. Пушкаря, Части 1 - 4, М.: МГИУ, 2012.
2. Сборник индивидуальных заданий по математике для технических высших заведений под редакцией В.Б. Миносцева и Е.А. Пушкаря, Части 1 и 2, М.: МГИУ, 2012.
3. Сборник тестов по математике для технических высших заведений под редакцией В.Б. Миносцева и Е.А. Пушкаря, Части 1 и 2, М.: МГИУ, 2012.

Experience of teaching the mathematics course for students of engineering and technology specialities in Moscow State Industrial University with introduction of the third generation standards (FGOS-3)

E. A. Pushkar, V. B. Minostsev, A. I. Martynenko, N. A. Berkov

Moscow State Industrial University, Moscow, Russia
pushkar@msiu.ru, 4211904@mail.ru, mart@msiu.ru, berkow@mail.ru

Современные справочники математических функций в образовании

Ю. М. Раппопорт

Институт автоматизации проектирования, Российская Академия наук, Москва, Россия
jmrap@landau.ac.ru

Использование студентами и преподавателями вузов современных справочников математических функций и их электронных версий значительно повышает эффективность изучения курсов высшей, прикладной и вычислительной математики. Для специалистов естественнонаучного и инженерного профиля крайне важным представляется одновременное нахождение решения в замкнутой аналитической форме и получение численных значений результанта. Представление функции в виде степенного ряда или разложения по ортогональным полиномам позволяет свести изучение свойств приближаемой функции к более простой задаче.

Остановимся более подробно на Справочнике математических функций [1] и его электронной версии [2], предназначенных для использования в двадцать первом столетии. Справочник дополнен также cd-rom, содержащим текст книги.

Новый почти тысячестраничный справочник является результатом крупного десятилетнего проекта международной группы ведущих ученых по гранту Национального Научного Фонда США. Справочник состоит из 36 глав, посвященных основным элементарным и специальным функциям, а также алгебраическим и аналитическим методам, асимптотическим разложениям и численным методам.

Каждая глава содержит основные формулы, обозначения, приложения, численные методы, библиографию и указатель математического обеспечения и пакетов и библиотек программ.

Электронная версия справочника основана на современных достижениях информационных и интернет технологий, содержит интерактивные возможности и графические пространственные модели.

Отдельные главы справочника предназначены для информации о гамма функции, функции ошибок, неполной гамма функции, функциях Эйри, Бесселя, Струве, Лежандра, Матье, Ламе, параболических цилиндрических и ряде других функций. Особое внимание уделено семейству гипергеометрических функций, в том числе конфлюснтной, обобщенной и q - гипергеометрической функции.

Рассматриваются вопросы многомерных функций и функций матричного аргумента. Большие разделы посвящены ортогональным полиномам, комбинаторному анализу и функциям теории чисел. Как предмет для дальнейшего исследования приведены свойства трансцендситностей Пенлеве.

Расширенная электронная интернет версия справочника представляет множество дополнительных возможностей, в том числе цветного графического пространственного представления функций в интерактивном режиме. Имеется огромное количество интернет ссылок для получения расширенной информации о формулах, уравнениях, таблицах, математическом обеспечении для элементарных и специальных функций. Предусмотрена возможность уточнения и пополнения электронной версии справочника с течением времени.

Отметим, что в Справочнике даны ссылки на Серию Математических таблиц Вычислительного центра Академии наук СССР, например на книгу [3]. В главе Справочника, посвященной функциям Бесселя, даны ссылки и использованы работы автора [**?**, 4].

Работа выполнена при поддержке Филдсовского института, Тематическая программа по обратным задачам и изображениям.

Литература

1. NIST Handbook of Mathematical functions. Edited by Olver Frank W.J., Lozier Daniel W., Boisvert Ronald F. et al. New York: Cambridge University Press, 2010.
2. N'IST Digital Library of Mathematical Functions. Companion to the NIST Handbook of Mathematical Functions. 2010 - 2012. urlhttp://dlmf.nist.gov/
3. *Беляков В. М., Кравцова Р. И., Раппопорт М. Г.* Таблицы эллиптических интегралов. Том 1. Москва, Издательство Академии наук СССР, 1962.
4. *Раппопорт Ю. М.* Таблицы модифицированных функций Бесселя Москва, Наука, 1978.
5. *Fabijonas B. R., Lozier D. W., Rappoport J. M.* Algorithms and codes for the Macdonald functions: Recent progress and comparisons. J. Comput. Appl. Math., 2003, V. 161, № 1, P. 179-192.

Modern handbooks of mathematical functions in education

J. M. Rappoport

Institute for Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
jmrap@landau.ac.ru

Математическая составляющая физических задач в квантовой теории

В. В. Ржевский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, rzhevski@mig.phys.msu.ru

Цель настоящего сообщения - подчеркнуть важность диалога идей математики и квантовой физики в учебном процессе.

Иногда методы теоретической физики при изложении излишне формализованы, и не раскрыты конструктивные приемы их использования. Поэтому важно привить студентам навыки исследования физической задачи качественно, с помощью размерных или простых модельных оценок.При этом, детальное рассмотрение математической части задачи, снимающее математические затруднения существенно облегчает понимание физической стороны задачи. Особенно полезным это становится, когда при решении физической задачи удается выделить в физической проблеме точно сформулированный математический вопрос. Наглядным примером такого подхода может служить решение набора квантовомеханических задач о нахождении электронного энергетического спектра в потенциальных ямах разной геометрии, (потенциальный ящик, гармонический квантовый осциллятор, ангармонический осциллятор), [1]. Где основой математических вычислений оказалась зависимость ширины ямы от величины значения потенциала для соответствующего квантованного уровня энергии.

Вместе с тем, студентам следует иметь представление о том, что математика полезна для квантовой физики не только своей аналитической техникой вычислений, но и своими идеями. В современном развитии квантовой теории конденсированного состояния вещества, например, существенную роль играют используемые в ней понятия топологических фазовых переходов, топологических изоляторов, которые сродни идеям “новой качественной, геометрической, концептуальной математики”, по выражению В.И. Арнольда.

Важный раздел физики твердого тела, современная форма электронной теории металлов, созданная И.М.Лифшицем и его школой, [2], основана на геометрическом языке использующем представление об электронах как о квазичастицах со сложным (или произвольным, удовлетворяющем симметрии кристалла) законом дисперсии.

Поверхность Ферми, - изоэнергетическая поверхность в импульсном пространстве отделяющая занятые энергетические состояния электронов от незанятых, при $T = O^\circ K$, - обладает «индивидуальной» формой для каждого металла, и играет ключевую роль в исследованиях структуры электронного энергетического спектра металлов. Изменение топологии поверхности Ферми (или электронный топологический переход Лифшица) приводит к аномалиям в термодинамических и кинетических характеристиках металлов.

Ярким примером взаимного «проникновения» идей теоретической физики и математики служит δ-функция П. Дирака, которая широко используется в аппарате квантовой теории. Фактически δ-функцию можно рассматривать на основе альтернативного подхода к понятию функции: вместо задания способа вычисления функции, можно определить функцию, формулируя ее общие свойства.

В экспериментальной физике, такого рода извлечение закономерностей (фитинг) и последующий поиск эмпирической формулы часто применяется при обработке экспериментальных данных [3]

Введение П.Дираком δ-функции послужило развитию теории обобщенных функций в математике [4].

Литература

1. *Мигдал А. Б.* Качественные методы в квантовой теории. — М.: Физматлит, 1975.
2. *Лифшиц И. М.* Избранные труды. Электронная теория металлов. Физика полимеров и биополимеров. — М.: Наука, 1994.
3. *Зельдович Я. Б.* Высшая математика для начинающих. 4-е изд. — М.: Наука, 1968.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1959.

Mathematical component of physical problems in quantum theory

V. V. Rzhevskii

M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
rzhevski@mig.phys.msu.ru

О необходимости повышения мотивации к изучению математики в современном обществе

С. А. Розанова

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики, Москва, Россия
srozanova@mail.ru

7 мая 2012 года В.В. Путин подписал Указ "О мерах по реализации государственной политики в области образования и науки в котором, в частности, поручается Правительству Российской Федерации разработать и утвердить в декабре 2013 г. Концепцию развития математического образования в Российской Федерации на основе аналитических данных о состоянии математического образования на различных уровнях образования. 9 октября 2012г. в Доме Учителя г. Москвы под руководством министра образования г. Москвы, начальника Московского Департамента образования И.И. Калины состоялось совещание о проблемах математического образования, в работе которого приняли участие представители Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки РФ (НМС), директора ряда физматшкол, директор ЦНМО Ященко И.В. и др. В результате 2-х часовой беседы и обмена мнениями участники совещания пришли к выводу, что особенно остро стоит вопрос о негативном отношении к математике в нашем современном обществе.

Среди ряда разнообразных причин возникновения такой тенденции, следует отметить недостаточное понимание сути и роли математического образования в современном обществе, его социальной значимости. Это обусловлено зачастую неудовлетворительным качеством преподавания математики в школах, что, свою очередь, напрямую связано с предметным содержанием изучаемого учебного материала, которое местами выглядит неадекватно сложившимся социальным реалиям.

Так как одномоментная замена содержания действующих школьных учебников и соответствующего тематического планирования, очевидно, невозможна, то одним из важнейших способов улучшения общественного мнения о математике является более активное продвижение и распространение сведений о математике, дополняющих те, которые преподаются в школе. Эти сведения необходимы и для того, чтобы школьный материал осваивался с надлежащей эффективностью.

В результате рабочей группой НМС (Кириллов А.И., Розанова С.А., Семенов П.В., Ягола А.Г.) под руководством Емельянова С.В. было составлено и направлено Калине И.И. письмо с предложением об организации совместной работы в указанном направлении. В нем, в частности, указывается, что аналогичная ситуация — недооценка роли математики будущими специалистами гуманитарного профиля и как следствие, отсутствие мотивации для ее изучения, — возникла в вузах гуманитарной направленности в 90-х годах прошлого века.

Для преодоления этого негатива по инициативе НМС в 1995 году в учебные планы гуманитарных специальностей ВУЗ'ов был введен курс «Математика и информатика». При разработке программы членам НМС приходилось решать задачу о том содержании математики, которое является частью человеческой культуры и поэтому подлежит изучению всеми. Примерные программы курса были разработаны членами НМС, утверждены Министерством образования и рекомендованы всем вузам соответствующего профиля. Для преподавания курса «Математика и информатика» были созданы кафедры и написаны учебники. Методике преподавания курса были посвящены доклады на конференциях, статьи и диссертации.

НМС считает целесообразным собрать и изучить более чем 15-летний опыт преподавания курса «Математика и информатика» в ВУЗ'ах России и использовать этот опыт для формирования учебных и методических материалов, дополняющих школьные учебники в части, проясняющей суть математики и ее роль в обычной жизни. НМС предполагает, что такие материалы станут основой для печатных и электронных публикаций, популярных лекций и докладов на педагогических собраниях.

НМС ставит перед собой цель по разработке и внедрению научно-учебно-методического комплекса, организационных и научно-практических мероприятий, обеспечивающих повышение качества математического образования учащихся средней школы, НПО, СПО и студентов ВПО нематематических специальностей.

НМС сформулировал предварительный план работ и некоторые направления работ по повышению мотивации к изучению математики учащимися и студентами, которые будут конкретизированы в докладе. Здесь приведены только некоторые из них:

I. Создание научно-учебно-методического комплекса по математике (НУМКМ), направленного на повышение мотивации к изучению математики.

Обобщение опыта преподавания курса «Математика и информатика» студентам гуманитарных специальностей и экспертиза существующих ГОС последнего поколения и на этой основе

- выделение тех базовых идей и методов математики, овладеть которыми необходимо всем (концептуальные положения);
- создание соответствующих примерных программ;
- создание инновационных пособий по математике, в том числе и электронных, обеспечивающих наглядность математических идей и их приложений, содержащих исторические факты, задачи практического содержания, занимательные задачи и т.п. и повышающих мотивацию;
- разработка методических материалов для повышения научного уровня учебников, учебных пособий и методических рекомендаций учителям математики.

II. Разработка и апробация организационных и научно-практических мероприятий по внедрению НУМКМ:

- проведение творческих семинаров для преподавателей средних школ, НПО, СПО и ВПО на базе НМС (МИРЭА и РУДН);
- создание лектория для родителей, школьников и студентов для формирования правильных представлений о сути математики, её роли в обычной жизни, её значения при выборе будущей профессии. С этой целью использовать средства массовой информации, в том числе

и телепрограмму «Академия» на канале «Культура», и привлекать членов НМС для достижения этой цели;

- привлечение преподавателей математики и талантливых учеников физматшкол (и, возможно, других школ) к участию в школах молодых учёных, российских и международных конференциях, ежегодно проводимых НМС, с публикацией научных и научно-методических результатов;

- приглашение ведущих учителей математики школ к участию в работе секции средних школ, секции средних технических учебных заведений, секции компьютерной поддержки математического образования;

- проведение соревновательных мероприятий по математике для массового участия школьников и студентов с целью воспитания их успешности (пилотный проект на инновационных площадках НМС).

About need of increase of motivation to mathematics studying in modern society

S. A. Rozanova

Moscow state university of radio engineering, electronics and automatics, Moscow, Russia
srozanova@mail.ru

О программе повышения квалификации преподавателей математики высшей школы

С. А. Розанова, Т. А. Кузнецова

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики, Москва, Россия
srozanova@mail.ru

Развитие современной системы образования характеризуется переходом к непрерывному образованию, новым пониманием целей и ценностей образования, осознанием необходимости обновления содержания и технологий образования. Реформирование системы образования требует в целом и прежде всего совершенствования преподавательского состава высшей школы. В равной степени это касается преподавателей математики, обсуждение проблем повышения квалификации которых является темой данного сообщения.

Целью повышения квалификации является получение дополнительных компетенций преподавателей математики высшей школы, что в конечном итоге ведёт к повышению качества математического образования в вузах. Предлагаемая авторами программа предназначена для преподавателей математических кафедр вузов, планирующих повысить свою квалификацию, и позволит

- повысить свои знания в предметной области в двух направлениях: углубление математических курсов, преподаваемых в данном вузе; ознакомление с новейшими математическими курсами (фракталы, бифуркации, математика и суперкомпьютеры и др.);

- познакомиться с новыми технологиями преподавания математики в вузах(индивидуализация обучения, деловая игра, технология дистанционного обучения и др.);

- овладеть инструментарием решения профессионально-прикладных задач по профилям вузов (в в инженерии, экономике, биологии, медицине, химии, социологии и.т.д.) ; - расширить свои возможности использования готового пакета прикладных программ для решения математических и прикладных задач;

- познакомиться с новыми технологиями проверки и оценки результатов обучения;

- иметь возможность обсудить предлагаемые методики и поделиться своим опытом преподавания.

Примерная программа

Модуль 1. Нормативно-правовой модуль

Тема 1. Основные положения концепции государственной политики РФ в области математического образования

Тема 2. Государственные стандарты 3-го поколения по математике. Примерные программы.

Модуль 2. Психолого-педагогический модуль Сравнительный анализ методик преподавания математики в вузах различного профиля. Тема 1. Философские и психолого-педагогические аспекты математической культуры в образовании.

Тема 2. Концепция формирования математической культуры студентов в вузах различного профиля.

Тема 3 Сравнительный анализ методик преподавания математики в вузах различного профиля.

Модуль 3 Модуль предметной области (по выбору 4 темы из 8) Тема 1. Углубление основ теории вероятностей, математической статистики, случайных процессов

Тема 2. Углубление основ математической логики и теории алгоритмов

Тема 3. Углубление основ дискретной математики

Тема 4 Технический анализ и методика его преподавания

Тема 5 Финансовый анализ с моделями

Тема 6 Математические основы информатики

Тема 7 Фракталы вокруг нас

Тема 8 Элементы теории бифуркаций

Модуль 4. Модуль современных технологий Тема 1. Математика и суперкомпьютеры

Тема 2.Методы решения профессионально-прикладных задач по профилям вузов с помощью ИКТ (применение пакетов типа MathCAD, MathLAB, Mathematica, Statistica и др.)

Модуль 5. Контрольно-оценочный модуль Тема 1. Аналитический обзор существующих Аккредитационных педагогических измерительных материалов (АПИМ).

Тема 2. Специфика бально-рейтинговой системы проверки знаний

Модуль 6. Практический модуль Тема 1. Доклады слушателей по выбору на темы предметного модуля Тема 2. Доклады слушателей на темы психолого-педагогического модуля. Тема 3. Доклады слушателей на темы модуля современных технологий. Тема 4. Круглый стол по контрольно-оценочному модулю.

Модуль 7. Итоговая работа по различным темам предыдущих модулей

Эта программа утверждена Приказом №1098 Министерства образования и науки РФ, рассчитана на 72 часа, реализация программы поручена ИПК РУДН. Осуществлять тематику модулей программы будут ведущие специалисты в соответствующей области, члены НМС по математике Министерства образования и науки РФ.

About the program of professional development of teachers of mathematics of the higher school

S. A. Rozanova, T. A. Kuznetzova

Moscow state university of radio engineering, electronics and automatics, Moscow, Russia
srozanova@mail.ru

Гуманитарная математика

Н. Х. Розов

Московский государственный университет, Москва, Россия

Предлагаемый годовой курс математики, исключительно для краткости условно названный ГУМАНИТАРНОЙ МАТЕМАТИКОЙ, ориентирован на студентов «классических» гуманитарных специальностей высших учебных заведений. Во избежание недоразумений подчеркнём: речь идёт не об отдельных «точных разделах гуманитарных наук» (т.е. не о подготовке специалистов по экономике, математической лингвистике, математическим методам в психологии, социологии, криминалистике, истории и т. п.), а о «чистых гуманитариях» (филологах, литературоведах, журналистах, историках, искусствоведах, философах, юристах, политологах и др. в «общем понимании» этих профессий).

Курс ГУМАНИТАРНАЯ МАТЕМАТИКА не содержит доказательного изложения ни одного раздела математики, ни одной теории или метода. Всё сосредоточено исключительно на наглядно-описательном ознакомлении с фундаментом математики. В основу положен не исторический, а концептуальный принцип построения программы, что позволяет проследить диалектику становления и развития математического понятия, идеи, конструкции глобально, сразу «сквозь все времена».

Программа содержит основные «понятийные линии», для каждой из которых желательно описание её истории — предтеча, зарождение, начальное формирование, постепенное развитие, содержательное обогащение, современное состояние. Учитывая, что обучающиеся располагают ограниченным багажом технических навыков и формальных умений, всё внимание уделяется доступному и наглядному разъяснению концептуальных моментов, без углубления в детали и без овладения аналитической техникой решения задач.

Особенности предлагаемой программы и некоторые принципы ее реализации можно охарактеризовать следующим образом:

1. Программа ориентирована на ознакомление с концептуальными моментами математической теории и на принципиальный отказ от выработки технических навыков математических исчислений.

2. Программа должна познакомить с широким мозаичным полотном различных вопросов и вовсе не нацелена на подробное изучение какихлибо научных вопросов.

3. Программа ставит своей задачей снабдить гуманитария тем набором знаний, который позволит ему поверхностно понимать простейший объём математической информации.

4. Программа призвана помочь видеть математические понятия и понимать действие математических законов в окружающем нас мире, применять их для научного объяснения явлений.

5. Программа предполагает тесную увязку курса с общекультурными ценностями и общефилософскими концепциями, с событиями и фактами истории, с языками, искусством, литературой и т.д.

6. Программа предполагает учёт психологических особенностей мышления людей гуманитарного склада ума, замену строгих доказательств описательными рассуждениями и наглядными демонстрациями.

Humanitarian mathematics

N. Kh. Rozov

Moscow State University, Moscow, Russia

О стимулировании интереса к изучению анализа решения одной задачи небесной механики

А. И. Рубинштейн

Кафедра Высшей математики МГУ и кафедра Высшей математики МИФИ, Москва, Россия

Представляется, что в сегодняшнем втузовском математическом образовании недостаточно представлена мотивация излагаемого материала. Вместе с тем, развитие математических методов, как первый толчок, стимулировалось потребностями, прежде всего, физики, астрономии. Возникновение дифференциального и интегрального исчислений у Ньютона определялось необходимостью решения задач механики, в том числе небесной. Демонстрация того, как применение математического аппарата первого курса любого втуза позволяет количественно (в рамках модели задачи двух тел) описать движение планет, искусственных спутников должно, как представляется, убедить студентов в полезности предлагаемых знаний.

Итак, как же происходит движение Земли по орбите?

По первому закону Кеплера движение Земли описывается системой уравнений

$$x = \cos\varphi(t), \quad y = b\sin\varphi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

где $\varphi(0) = 0$ соответствует точке перигелия, а τ — период обращения. $\varphi(\tau) = 2\pi$.

Как указал Ньютон, вектор $\vec{v}(t)$ скорости движения равен $\vec{v}(t)$

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = (-a\sin\varphi(t); b\cos\varphi(t))\cdot\varphi'(t),$$

а по второму закону Ньютона и по закону всемирного тяготения сила $\vec{F}(t)$, создающая эту скорость, есть

$$\vec{F} = \vec{F}(t) = (m\vec{v}(t))' = m\vec{v}'(t) =$$

$$(-(am\sin\varphi(t))\varphi''(t) - (am\cos\varphi(t))\cdot(\varphi'(t))^2;$$

$$(bm\cos\varphi(t))\cdot\varphi''(t) - (bm\sin\varphi(t))(\varphi'(t))^2) =$$

$$\frac{k\frac{mM}{R^2}\left(-\frac{\vec{R}}{R}\right) = kmM\Big(c - a\cos\varphi(t)}{((a\cos\varphi(t)-c)^2 + (b\sin\varphi(t))^2)^{3/2};}$$

$$\frac{-a\sin\varphi(t)}{((a\cos\varphi(t)-c)^2 + (b\sin\varphi(t))^2)^{3/2}\Big),} \tag{1}$$

где m, M — массы Земли и Солнца, $\vec{R}$ — вектор Земля–Солнце, $R = |\vec{R}|$, k — постоянная всемирного тяготения, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

По второму закону Кеплера радиус вектор $\vec{R} = \vec{R}(t)$ Земля–Солнце в равные промежутки времени «заметает» равные площади. Приравнивая эти площади за промежутки времени $[t; t + \Delta t]$ и $[0; \Delta t]$ при малых Δt с помощью вычисления площадей треугольников и устремляя Δt к нулю, путём очень простых преобразований, получаем

$$(1 - \varepsilon \cos \varphi(t))\varphi'(t) = (1 - \varepsilon)\varphi'(0), \quad \varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{2}$$

Из (1) при $\varphi(0) = 0$ получаем

$$\varphi''(0) = 0; \quad (\varphi'(0))^2 = \frac{kM}{a^3(1 - \varepsilon)^2}$$

и по (2)

$$(1 - \varepsilon \cos \varphi(t))\varphi'(t) = \frac{\sqrt{kM}}{a^{3/2}},$$

откуда

$$\varphi(t) - \varepsilon \sin \varphi(t) = \frac{\sqrt{kM}}{a^{3/2}} t + C,$$

а так как $\varphi(0) = 0$, то $C = 0$ и окончательно

$$\varphi(t) - \varepsilon \sin \varphi(t) = \frac{\sqrt{kM}}{a^{3/2}} t, \tag{3}$$

что и определяет закон движения Земли по орбите. Так как

$$2\pi = \varphi(\tau) = \frac{\sqrt{kM}}{a^{3/2}} \tau,$$

то

$$\frac{\tau^2}{a^3}\ \frac{4\pi^2}{kM} \quad \text{— третий закон Кеплера.} \tag{4}$$

About stimulation of interest to studying of the analysis of the solution of one problem of heavenly mechanics

A. I. Rubenstein

Chair of the Higher mathematics of the Moscow State University and chair of the Higher mathematics of MEPhI

Научно-методические аспекты обучения студентов-гуманитариев математическим методам при решении исследовательских задач профессиональной направленности

А. А. Русаков, В. Н. Русакова

Специализированный учебно-научный центр (факультет) – школа-интернат имени А. Н. Колмогорова Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
Орловский государственный университет, Орел, Россия

В настоящее время трудно представить себе научное исследование в любой сфере деятельности не подкрепленное соответствующими математическими выкладками. Традиционное обучение основным разделам математики без практического применения полученных знаний в конкретной области (в будущей профессиональной деятельности студента) не дает будущему специалисту понимания необходимости, правильности и уместности применения математических методов. Поэтому так важно разработать систему практикоориентированных исследовательских заданий, решение которых, во-первых, подскажет область возможного применения таких методов; во-вторых, позволит отработать их применение в рамках конкретной задачной ситуации.

При проектировании указанной системы заданий будем опираться на положительный опыт преподавания математики в СУНЦ МГУ, см. [1]. В колмогоровской школе система обучения лекционно-семинарская. Здесь учат не столько фактам, сколько идеям и способам рассуждения, побуждая учеников к самостоятельным исследованиям. Технология обучения решению задач вырабатывалась в школе-интернате А.Н. Колмогорова с первых дней ее существования. Основное содержание составляют проблемные, познавательные задачи и задания, направленные на развитие творческого мышления учащихся.

Стержнем проектируемой методической системы обучения в школе-интернате должна была выступать, по мнению А.Н. Колмогорова, методико-математическая ситуация, естественно ставящая школьника в положение, когда он, осваивая новый учебный математический материал, не только накапливает сумму знаний, но в процессе успешного решения некой системы задач, у него формируется ощущение, что он сам решил математическую задачу, по сложности доступную студентам математических специальностей. Самое важное при этом, чтобы учащийся это ощущение успешности и необходимости пронес через всю жизнь.

Например, студентам, обучающимся по направлению подготовки 280700 Техносферная безопасность, квалификация (степень) бакалавр, можно предложить следующую тематику исследовательских проектных работ: Динамические модели эволюции; Стохастические модели эволюции; Модель конкуренции двух популяций; Взаимоотношения в системе «хищник–жертва»; Уравнения движения газа; Классификация режимов горения теплопроводной среды; Экологически приемлемые технологии сжигания углеводородных топлив; Гидрологический «барьер» против загрязнения грунтовых вод; Динамика скопления амеб; Климатические последствия ядерного конфликта.

Построение индивидуальной траектории работы над проектом, дозирование материала на каждом этапе с учетом возрастающего в ходе работы уровня подготовки студентов, постепенное подведение к «открытию» модели, позволит не только познакомиться с соответствующими математическими методами, но и мотивировать студентов к их тщательному изучению и дальнейшему применению.

Литература

1. *Русаков А. А.* Опыт, научно-методические аспекты формирования имиджа образовательного учреждения // Материалы X международного симпозиума «Имиджелогия-2012: драйвер развития». — М.: РИЦ АИМ, 2012. — С. 306–317.

Scientific and methodical aspects of training in mathematical methods of students of humanitarian specialties at the solution of research problems of a professional orientation

A. A. Rusakov, V. N. Rusakova

Moskow State Univversity Advenced Education and Science Center – A. N. Kolmogorov College, Moscow, Russia, vmkafedra@yandex.ru

Oryol State University, Oryol, Russia, v.n.rusakova@yandex.ru

Некоторые проблемы изучения математического анализа в профильной школе (взгляд учителя математики)

Т. Ю. Рябова

Школа №1, Фрязино, Россия
tamarik@inbox.ru

В настоящее время система школьного образования осуществляет реализацию Федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС) второго поколения, которые включают в себя требования к результатам освоения, к структуре и к условиям реализации основной образовательной программы (ООП). Особенностью нового поколения стандартов является выделение результатов освоения ООП, которые подразделяются на личностные, метапредметные и предметные. Предметные требования в области «Математика и информатика» представлены на двух уровнях: базовом и углубленном. В частности, стандарт предусматривает при обучении на углубленном уровне «сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа; сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей». Таким образом, в стандарт предполагает трудоемкую работу, как учителя, так и школьников по освоению последними элементов математического анализа. При этом следует отметить, что школьный учитель математики сталкивается с рядом проблем. Перечислим, на наш взгляд, самые главные:

1. Школьники зачастую с трудом понимают содержание математических текстов как содержащих символические обозначения, так и без них.

2. Мотивация к изучению математики и, как следствие, способность самостоятельно выполнять ряд необходимых операций, недостаточно высока.

3. Учебные пособия, которыми пользуются учащиеся, зачастую не соответствуют требованиям стандарта, а их издания оставляют желать лучшего.

4. Современный школьник не заинтересован в освоении такого вида математической деятельности, как доказательство сформулированных утверждений, считая его излишним и слишком трудоемким.

5. Использование результатов ГИА и ЕГЭ в качестве показателя качества работы учителя, ориентирует педагогов на натаскивание учащихся на решение определенного круга задач. К этому также подталкивает и регулярное уменьшение количества учебных урочных часов, выделяемых на изучение школьной программы.

6. Несмотря на то, что большинство учителей стараются использовать современные информационно - коммуникационные технологии, этот процесс осложняется отсутствием методик для использования на

уроках математики, в результате снижается эффективность их применения.

7. Одной из больших проблем представляется предпенсионный возраст большинства учителей математики и низкий приток в школы молодых квалифицированных кадров.

Перечисление проблем можно было бы продолжать, однако главное – найти эффективный выход из сложившейся ситуации. Казалось бы, что в классах с углубленным изучением математики большинство указанных проблем должно отсутствовать, однако и здесь учитель сталкивается с необходимостью решать их.

Рассмотрим, какие проблемы возникают при изучении начал математического анализа в классах с углубленным изучением математики и каким видится их решение.

Математический анализ – традиционно один из самых трудных разделов для понимания школьниками. Однако именно в этом разделе происходит синтез алгебраического и геометрического подходов к исследованию функций, школьник получает возможность сформулировать и решить реальную задачу из курса физики, геометрии, экономики, судебной медицины и т.д. Конечно, абсолютно справедливы замечания о том, что в школьном курсе невозможно изучить математический анализ на строгом научном уровне. Но и в рамках школьного курса мы можем сформировать у школьника правильное представление об основных понятиях, методах этого раздела. Способствовать этому может использование современных педагогических технологий, методически грамотный отбор содержания, правильно выстроенная последовательность изучения. Возможно, именно в этом разделе эффективно применима такая методика, как выполнение разноуровневых интегрированных домашних заданий, требующих от школьника не только качественного владения основными алгоритмами математического анализа, но и умения переформулировать задачу, самостоятельно найти способы ее решения, оформить свои результаты в виде презентации. Цель такой презентации – познакомить одноклассников или заинтересованных школьников из других классов с достигнутыми результатами, обучить элементарным способам представления защиты полученных решений. Таким образом, речь идет о формировании математической компетентности школьника в области начал математического анализа средствами современных технологий. Математическая компетентность, на наш взгляд, - это готовность применять приобретенные математические знания и способы деятельности в реальных ситуациях, в том числе и в нестандартных.

Таким образом, использование новых подходов к обучению, внедрение в ежедневный школьный процесс современных информационных технологий, требующих овладения математической компетентностью, может, на наш взгляд, повысить качество школьной математической подготовки, что, в итоге, приведет к восстановлению фундаментальности школьного математического образования.

Литература

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. — `http://www.standart.edu.ru`
2. *Рябова Т. Ю.* Методологические особенности реализации компетентностного подхода при обучении началам математического анализа в профильной школе // Сборник «Education, science and economics at universities. Integration to international educational area.Избранные труды международной конференции, 26-30 сентября, 2011» Ереван 2012. — С. 379–385.

Certain problems of studying mathematical analysis in a specialized school (from a teacher's viewpoint)

T. Y. Ryabova

School №1, Fryazino, Russia
tamarik@inbox.ru

Междисциплинарность формирования математического компонента профессионального инструментария бакалавров и магистров гуманитарных направлений

А. И. Самыловский

МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия
51300@starnet.ru

Действие ряда факторов обусловило возникновение к началу нынешнего века следующей проблемы математического образования. Во-первых, ряд традиционно гуманитарных научных областей начали довольно широко использовать математический инструментарий при анализе своих профессиональных задач. Во-вторых, студенты, поступающие на соответствующие направления высшего профессионального образования, изначально мотивированы и подготовлены к получению именно гуманитарного образования. В-третьих, математические учебные дисциплины для указанных направлений в вузе объединены в т.н. «высшую математику», что делает соответствующие учебные программы «безадресными» с точки зрения соответствующего профессионального образования. Перечисление подобных факторов можно продолжить. Можно сказать, что ситуация здесь напоминает ситуацию с математическим образованием для экономистов, сложившуюся к началу второй половины прошлого века: потребность в математических методах анализа экономики назрела, но опыт преподавания таких методов практически отсутствует.

Нынешняя образовательная проблема имеет и свои специфические аспекты. Во-первых, в отличие от экономики, в указанных гуманитарных областях определяющей является роль т.н. «человеческого фактора», что требует привлечения адекватных этому математических методов. Во-вторых, объем математики в учебных планах по указанным направлениям значительно меньше (в разы), чем в учебных планах по экономике. В-третьих, введение «бакалавриата» требует освоения студентами математических методов за более краткий срок, чем ранее – при пятилетнем «специалитете». Таким образом, в указанных гуманитарных областях необходимо, в рамках «сокращенного» срока обучения, обеспечить надежное владение студентами определенными математическими методами анализа соответствующих профессиональных проблем и решения профессиональных задач. Учебная дисциплина «Высшая математика», присутствующая в ГОС ВПО третьего поколения по указанным гуманитарным направлениям, и призвана в течение первого семестра повторить и закрепить результаты школьного образования, не беря на себя решение профессиональных социологических, политологических и т.д. задач.

В учебном плане бакалавриата по каждому их указанных гуманитарных направлений имеется значительная по объему общепрофессиональная учебная дисциплина, которая является основой формирования профессионального инструментария, объективно включающего математический компонент. У социологов – это «Методология и методики социологических исследований», у политологов – это «Политический анализ и прогнозирование», у менеджеров – это «Разработка управленческих решений», у юристов, ввиду особой гуманитарной специфики предмета права, это находит выражение в компетенции, посвященной «умению собирать и анализировать информацию». Указанные общепрофессиональные дисциплины нередко приобретают вербальный облик, не характерный уже в настоящее время для мирового профессионального сообщества. Реализация парадигмы междисциплинарных взаимодействий позволяет эффективно преодолеть такой разрыв, а именно, позволяет сформировать математический компонент профессионального инструментария и придать, на этой основе, необходимую «операционную конструктивность» указанным общепрофессиональным дисциплинам (компетенциям). Реализация парадигмы находит свое выражение в дисциплинах (как правило, второго-третьего курсов), состоящих в разборе профессиональных предметных ситуаций (т.н. «кейсов») с помощью математических методов, адекватных соответствующей гуманитарной области. Для социологов – это «Теория измерений» и «Математическая социология», для политологов – это «Количественные методы в политологии» и «Прикладные математические методы в политических исследованиях», для менеджеров – это «Исследование операций», для юристов – это «Анализ данных и подготовка правовых решений».

Interdisciplinary interactions in the process of professional instrument's mathematical component creation for bachelors and masters in the humanities

A. I. Samilovsky

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
51300@starnet.ru

Формирование опыта самообразования в процессе обучения математике студентов гуманитарного направления

Е. И. Санина, Н. Т. Ням

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
esanmet@yandex.ru, nntan73@yandex.ru

Самостоятельное образование студентов — это часть их учебной деятельности, в составе которой можно выделить умственные действия. Освоение этих действий и будет характеризовать уровень развития самообразования в целом. Развитие самостоятельного образования студентов представляет собой движение по спирали, характеризующееся развитием определенных умений, навыков, познавательных возможностей [1, с. 252].

Чтобы успешно достигнуть целей организации самообразования, очень важно дополнить существующую систему принципов реализации самообразования, из ряда возможных вариантов самообразования требующим осознанного выбора такого варианта, в данных условиях будет обеспечившего максимально возможную эффективность решения задач самообразования студентов при рациональных затратах времени и усилий преподавателей и студентов. Система принципов состоит из важных принципов: научность; связь самообразования с жизнью, с практикой коммунистического строительства; систематичность и последовательность; доступность; дидактический принцип; сознательность, активность и самостоятельность; наглядность.

Обучение математике специальностей направлено на понимание универсальности математических законов и методов, на формирование умений применять специфические закономерности математики в управленческой и социальной деятельности, поэтому преподавание математики исключительно на наглядно-описательном ознакомлении с фундаментом математики с изменением целей высшего профессионального образования требует переосмысления [2, с. 8].

Для определения уровня самообразования студентов мы выделяем следующие критерии:

– самостоятельная активность;
– самоорганизация;
– самореализация.

Первый критерий требует активности обучающихся в учебном процессе по математической дисциплине, желания самостоятельно решать поставленные задачи, стремления к выяснению смысла изучаемого содержания. При этом студенты не могут самостоятельно определить цель деятельности, а принимают цель, предложенную преподавателем. Процесс самостоятельной деятельности по решению учебно-исследовательских задач происходит при непосредственной организационной помощи со стороны преподавателя. План выполнения заданий или решения математической задачи носит в основном алгоритмический характер, элементы исследования, творчества встречаются эпизодически. Данный критерий характеризуется недостаточной устойчивостью волевых усилий студентов. При возникновении трудностей в решении поставленной учебной задачи часто обращается за помощью, не всегда доводит начатое дело до конца. Деятельность преподавателя заключается в организации самостоятельной деятельности студентов, в обучении их копирующим действиям, в формировании основ самостоятельной деятельности в процессе решения математических задач.

Второй критерий требует достаточно высокой мотивации студентов к самообразованию, осознанного принятия цели и направлен на решение учебных задач. Обучающиеся не просто самостоятельно решают поставленную учебную задачу, они самостоятельно планируют свою работу по достижению поставленной цели, умеют вести целенаправленный поиск и отбор информации, чтобы решить учебную задачу. Используя свободно поисковые и исследовательские методы, обучающиеся находят эффективное решение стоящей задачи. Характерным показателем этого критерия является высокая устойчивость волевых усилий, проявляющаяся в стремлении обучающихся довести начатое дело до конца, при возникновении затруднений они ищут другие пути решения. Консультативная деятельность преподавателя носит характер рекомендаций по использованию различных источников информации.

Третий критерий требует того, что обучающие самостоятельно ставят цель деятельности по решению учебной задачи, разрабатывают план, проникают глубоко в сущность явлений и их взаимосвязей, находят новые способы действий, создают новые, оригинальные продукты деятельности. Основными методами решения учебных задач выступают поисковые и исследовательские. Показателями данного критерия самообразования обучающихся являются теоретическое осмысление изучаемого учебного материала, интерес к процессу решения задачи, умение провести презентацию полученного результата или выполненного задания. Обучающиеся отстаивают собственную точку зрения или предложенный вариант решения, учебной задачи, проводят рефлексию процесса и результата самостоятельной деятельности и в соответствии с этим составляют план предстоящей деятельности, помогают в организации самостоятельной деятельности другим обучающимся. Деятельность преподавателя заключается в сотрудничестве с обучающимся на отдельных этапах решения математической задачи или выполнения задания.

Литература

1. *Ням Н. Т.* Оптимизация процесса самообразования студентов при обучении математике в вузах/ Ням Н. Т. // Теоретические и методологические проблемы современного образования: Материалы VII международной научно-практической конференции 30–31 декабря 2011 г. Москва, 2011. — С. 252–255.
2. *Санина Е. И., Морозова М. В.* Становление и перспективы обучения математике бакалавров гуманитарных направлений /Санина Е. И., Морозова М. В. // Математическое образование и информационное

общение: проблемы и перспективы: сборник трудов XLVIII Всероссийской (с международным участием) конференции (18-21 апреля 2012 г.) / Под общей редакцией Е. И. Саниной. — М.: РУДН, 2012. — С. 7–12.

Formation of experience self-education in teaching mathematics humanistic students

E. I. Sanina, N. T. Nham

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia
esanmet@yandex.ru, nntan73@yandex.ru

О существовании «реальной» школьной математики

П. В. Семенов

Московский городской педагогический университет, Москва, Россия
pavels@orc.ru

1. В докладе рассмотрены вопросы о содержательной непустоте, или об оценке меры, множества математических задач, адекватных, как минимум, следующим трем требованиям:

- *Школа*) реализуемость (в условиях, сложившихся к настоящему моменту) в процессе регулярного, обычного, ежедневного преподавания математики в средней школе;

- *Математика*) реализуемость принципа фундаментальности (научности), т.е. содержательности с точки зрения математики, как науки, и наличия существенной корреляции с дальнейшим изучением математики в высшей школе;

- *Реальность*) реализуемость принципа практико-ориентированности, т.е. наличия прямой связи с окружающей нас действительностью и, желательно, непосредственной применимости в этой самой действительности.

2. Множества задач, по отдельности удовлетворяющих условиям Ш, М, Р, попарно имеют весьма массивные пересечения, но и не менее объемные симметрические разности. Например, использование разнообразных методов равносильных систем (совокупностей) уравнений (неравенств), обширно присутствует в старшей школе, но, по моим оценкам, не наблюдаемо в современной математике, как науке. Тройное пересечение этих множеств, разумеется, непусто: пример - третий признак равенства треугольников. В то же время мера этого пересечения, на мой взгляд, ничтожно мала по сравнению с объемом учебных часов, отводимых на изучение математики. Прямой бюрократический вывод о том, что по этой причине следует сократить учебные часы и изучать те и только те задачи, которые удовлетворяют всем условиям Ш, М, Р неверен, безумен и педагогически нереализуем.

3. Усердно муссируемые в последнее время высказывания и мнения про «социальный заказ общества», про «непосредственное использование в жизни и личной карьере» и т.д., и т.п., вплоть до «А оно мне надо?», в целом, разрушают ткань любого вида образования, как способа передачи жизненного опыта и знаний от старших поколений социума к младшим. Знание и понимание в первооснове опирается на веру и доверие, а вовсе не наоборот. Ребенок и ученик сначала надеется, доверяет, верит и только вследствие этого (и других обстоятельств) что-то узнает, понимает и, в итоге, таки овладевает некими «компетентностями».

4. Практика последних 5-10 лет, когда практико-ориентированность и «реальность» математики стала насаждаться в степени, иногда напоминающей насильственный сев кукурузы севернее Москвы, привела к разнообразным результатам. Есть и действительно содержательные сюжеты, но куда больше монстров, бесполезных и прямо бессмысленных с точки зрения каждого из требований Ш, М, Р. Тут и урожайность картофеля, как причина для переезда из города в село, и откуда-то известный факт, что Аня обычно звонит Кате 4 раза в день, и площадь поверхности звезды, и совет считать, что $\pi = 3$, и нагрев воды в кормозапарнике с КПД в 21%, и равновероятность того, что гол будет забит любым из десяти футболистов команды, и многое другое.

В целом, процесс реализации в современной школе «реальной» математики лишь начат. Явно положительных эффектов пока не наблюдается, как не существует и конкретных примеров такой реализуемости на уровне действующих в школе учебников и задачников. Имеющийся опыт (в основном, в ГИА и ЕГЭ) требует серьезного анализа и детального обсуждения.

On an existence of “real” school mathematics

P. V. Semenov

Moscow City Education University, Moscow, Russia
pavels@orc.ru

Проблемы дидактического проектирования информационно-аналитических технологий в обучении математике

Е. Н. Трофимец

Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Россия
zemifort@inbox.ru

Активное развитие информационно-аналитической деятельности в российских государственных и коммерческих учреждениях приобрело характер одной из существенных тенденций последнего времени. В связи с этим существенно возрастают требования к качеству информационно-аналитической подготовки студентов-экономистов, которые должны уметь решать не только типовые задачи учетно-расчетного характера, при решении которых доминирующую роль играет операционная составляющая, но также и сложные задачи аналитического характера, при решении которых доминирующую роль играет интеллектуальная составляющая, базирующаяся на умении анализировать текущее и прогнозировать будущее состояние экономических объектов и процессов, мыслить и действовать в изменяющихся условиях, моделировать и находить оптимальные решения, основанные на применении современных математических моделей, методов и информационных технологий.

Особенность информационно-аналитических технологий обучения состоит в том, что наряду с информационной составляющей в них доминирующую роль играет математическая составляющая, которая является ключевой компонентой инструментальных методов решения сложных аналитических задач экономического характера. Таким образом, актуальной становится постановка и исследование проблемы дидактического и программного проектирования информационно-аналитических технологий обучения студентов-экономистов, как новой педагогической технологии, реализующей парадигму интегративного обучения на стыке математики, информатики и экономики.

Поэтому дидактическая эффективность ряда учебных дисциплин математического цикла (в частности, таких дисциплин, как «Математика», «Линейная алгебра», «Математический анализ», «Методы оптимальных решений», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Эконометрика» и др.) может быть повышена путем внедрения в образовательный процесс инновационных методов обучения, отличных от традиционных форм обучения, которые, в основном, направлены на механическое запоминание информации. Традиционные формы обучения должны дополняться новыми инновационными технологиями, разработанными в соответствии с интерактивными формами обучения, что позволит повысить качественный уровень подготовки студентов, поддерживая и направляя их интеллектуальный потенциал. Одной из таких технологий является технология компьютерного моделирования, которая позволяет органично синтезировать знания по экономике, математике, информационным технологиям и обладает значительным дидактическим потенциалом в формировании информационно-аналитической компетентности студентов-экономистов.

Значит, с одной стороны, наблюдаются возросшие требования практики к содержанию информационно-аналитической подготовки специалистов экономического профиля, а с другой стороны, очевидно отставание информационных образовательных технологий в этом направлении. Сложившееся противоречие обусловливает необходимость развития существующих и поиска новых подходов к организации информационно-аналитической подготовки специалистов финансово-экономического профиля.

Наряду с общими принципами проектирования компьютерных систем учебного назначения, процессу дидактического проектирования информационно-аналитических технологий присущи специфические черты, среди которых можно выделить следующие:

- ◇ априорная дидактическая система информационно-аналитической подготовки специалистов экономического профиля должна ориентироваться на концептуальную модель научно-методического аппарата решения профессионально-ориентированных экономических задач;
- ◇ элементы реальной дидактической системы информационно-аналитической подготовки специалистов экономического профиля должны соответствовать способам, методам и моделям обработки экономической информации, доминирующим в профессиональной деятельности;
- ◇ процесс построения и анализа однотипных моделей экономических систем должен основываться на общих методологических подходах и принципах;
- ◇ используемое учебно-методическое программное обеспечение должно быть ориентировано на обучаемых, не имеющих специальной математической подготовки, главной задачей которых является понимание только основополагающих идей и принципов, реализованных в изучаемых экономико-математических моделях и методах.

Таким образом, одним из начальных этапов дидактического проектирования системы информационно-аналитической подготовки специалистов экономического профиля является построение концептуальной модели научно-методического аппарата решения профессионально-ориентированных экономических задач (ПОЭЗ). Исходя из логики проектирования, построение такой модели должно начинаться с выявления существенных признаков ПОЭЗ, на основании которых они могли бы быть классифицированы и тем самым определены опорные направления для синтеза самой модели. Принимая во главу тот факт, что научно-методический аппарат решения ПОЭЗ является формальной конструкцией, особое внимание было обращено на формальные признаки профессионально-ориентированных экономических задач. Наиболее конструктивными формальными признаками ПОЭЗ, являются, на наш взгляд, признаки, сложившиеся в современной теории принятия решений.

Разработанные компьютерные практикумы по моделированию профессионально-ориентированных экономических задач: компьютерный практикум по моделированию профессионально-ориентированных экономических задач в оптимизационных постановках, компьютерный практикум по исследованию взаимосвязей социально-экономических процессов, компьютерный практикум по исследованию динамики социально-экономических процессов; компьютерный практикум по моделированию лизинговых операций помогают повысить качество информационно-аналитической подготовки студентов-экономистов, формированию у них знаний, умений и навыков применения научно-методического аппарата и информационных технологий в процессе обоснования экономических решений.

Problems of didactic designing of information-analytical technologies in training to the mathematician

E. N. Trophimets

Yaroslavl state technical university, Yaroslavl, Russia
zemifort@inbox.ru

Дискретные модели как пропедевтика непрерывных моделей в обучении математике в системе среднего профессионального образования

И. В. Турбина

Московский городской педагогический университет, Москва, Россия
zinukova@yandex.ru

Методике преподавания математики в системе СПО уделяется существенно меньше внимания по сравнению с начальной, основной и высшей школами. Между тем количество существенных предметных и методических проблем в системе СПО ничуть не меньше, а, за частую, и очевидно больше в сравнении, скажем, с основной школой. Следует также отметить, что вопросам повышения качества образования и подготовки специалистов в СПО в последнее время уделяется специальное внимание в ряде официальных и нормативных документов.

Одним из основных противоречий является следующее обстоятельство. С одной стороны, по действующим стандартам образования одним из основных итогов обучения должны являться достаточно развитые знания и умения, связанные с использованием непрерывных математических моделей: функции, графики и т.п. С другой стороны, опросы, неоднократно проведенные среди студентов различных учебных заведений СПО, обучающихся по социально-экономическим и юридическим направлениям, показывают, что априорное отношение к непрерывным моделям существенно хуже, нежели к дискретным, т.е. к конечным множествам, комбинаторике, логике и т.п.

Целью данной работы является методика активного использования дискретных моделей при изучении непрерывных. В качестве одной из возможных иллюстраций приведем следующий пример использования столбчатых диаграмм. В нем воспроизведена реальная диаграмма из трех десятков столбцов различной высоты, среди которых нет двух соседних столбцов одинаковой высоты.

Пример. *На диаграмме показана динамика курса доллара США в рабочие дни за ноябрь 2012 года. Найдите все дни из данного периода, когда курс:*

1) повысился по сравнению с предыдущим днём;

2) понизился по сравнению с предыдущим днём;

3) повысился по сравнению с предыдущим днём, но понизился на следующий день;

4) понизился по сравнению с предыдущим днём, но повысился на следующий день.

Можно задавать и более сложные вопросы о нахождении трех, четырех и т.п. подряд идущих дней, когда курс повышался (понижался), о количестве тех дней, когда курс понизился по сравнению с предыдущим днём, но повысился на следующий день и т.д. Систематическое использование примеров подобной структуры и с сюжетным наполнением, связанным с профессиональной деятельностью (количество тяжких преступлений по неделям, доходы банка по дням,...) позволяют реализовать пропедевтическую связь с основными свойствами функций (монотонность, экстремумы и т.п.), т.е. с базовыми непрерывными математическими моделями.

Discret models as a propaedeutics of continuous models in the course of mathematics at the middle professional educational system

I. V. Turbina

Moscow City Education University, Moscow, Russia
zinukova@yandex.ru

Разработка учебного комплекса по функциональному анализу для технического вуза

Н. В. Филимоненкова

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Россия
nf33@yandex.ru

Традиционная задача курса «Функциональный анализ» заключается в обобщении таких математических конструкций, как расстояние, длина, скалярное произведение, сходимость, ряд Фурье, линейный оператор, спектр и т.д., на случай бесконечномерных пространств произвольной природы, в основном функциональных. В техническом вузе этот курс играет особую роль представителя инородной, абстрактной науки, еще более удаленной от решения практических задач, чем математический анализ. В этом состоит основная причина, которая побудила автора разработать учебный комплекс (конспект лекций и сборник задач), который значительно отличается от учебников по функциональному анализу [1, 2], воплощающих классический, университетский, подход, и продолжает тенденцию учебников [3–5], ориентированных на технические вузы.

В данном учебном комплексе проведена значительная адаптация традиционного курса функционального анализа к уровню и запросам прикладной инженерной специальности. С одной стороны, изложение теоретических конструкций и фактов упрощено до элементарного. С другой стороны, сделана попытка довести теоретический факт до числа. Шаг в сторону вычислительной математики придает функциональному анализу не привычный для него междисциплинарный характер и ставит целью курса формирование не только общей математической культуры, но и навыков математической аргументации эффективной работы численных методов. Ради воплощения этой цели учебный комплекс снабжен широкой базой вычислительных задач, что не характерно для существующих классических задачников по функциональному анализу. Большое количество вычислительных задач преследует две цели: во-первых, это позволяет применить и закрепить важные навыки из курсов алгебры и математического анализа, во-вторых, через конкретные вычисления студенту-прикладнику проще освоить абстрактные конструкции функционального анализа.

В разработанной базе задач главное место занимают расчетные задания, предполагающие использование математических пакетов. Задействованы такие типы задач, как приближенное решение уравнений и задача аппроксимации функций. Например, в разделе, посвященном теории сжимающих отображений, имеется широкая подборка уравнений (числовых и функциональных, в том числе интегральных), для которых следует применить принцип сжимающих отображений и в одном из математических пакетов найти приближенное решение методом простых итераций. В разделе, посвященном теории обобщенных рядов Фурье, основное внимание уделяется задачам аппроксимации функции частичной суммой ряда Фурье по тригонометрической или по одной из полиномиальных систем: по ортогональным многочленам Лежандра, Чебышева, Эрмита и т.д. – опять же с реализацией в одном из математических пакетов. Задания, направленные на численную реализацию решений, способствуют формированию прикладной компоненты обучения, повышают мотивацию студентов и содействуют непосредственному освоению основных математических пакетов.

Разработка данного учебного комплекса основана на опыте преподавания функционального анализа студентам специальности «Прикладная математика» Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета. Учебный компекс предназначен студентам технических вузов для изучения таких дисциплин, как «Основы функционального анализа» или «Введение в функциональный анализ», рассчитанных на небольшое количество аудиторных часов.

Адаптация классического курса функционального анализа к уровню прикладной инженерной специальности – задача творческая, предлагаемое автором решение касается не только содержания курса, но и специфики организации учебного процесса.

Литература

1. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.
2. *Бакушинский А. Б., Худак Ю. И.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Издательский центр «Академия», 2011.
3. *Треногин В. А.* Функциональный анализ: учебник, изд. 3-е, испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
4. *Антоневич А. Б., Радыно Я. В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: лабораторный практикум. — Минск: БГУ, 2003.
5. *Лебедев В. И.* Функциональный анализ и вычислительная математика: учебное пособие, изд. 4-е, перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

The development of a training course in functional analysis for technical university

N. V. Filimonenkova

Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint-Petersburg, Russia
nf33@yandex.ru

Гуманистический подход к преподаванию курсов математики

С. В. Черняева, И. В. Эглите

Рижский технический университет, г. Рига, Латвия
sarmite.cernajev@rtu.lv, irina.eglite@rtu.lv

Гуманизация образования является актуальной темой, как в Латвии, так и в других постсоветских странах. Эти страны пережили переход к демократии и рыночной экономике. Изменения социально-политических принципов жизни определили новые требования к образованию, которое должно быть сосредоточено на учащемся как на личности.

Целью настоящего исследования является сравнение опыта учащихся в приобретении знаний по математике и выяснение причины изменения их мотивации к учебе, разработка рекомендаций, которые могли бы улучшить процесс обучения математике. Обучение математике длинный, непрерывный процесс, который начинается в 1-ом классе и продолжается в высших учебных заведениях. Мотивация обучению математики изменяется в процессе обучения.

Объектом исследования являются учащиеся из двух учебных заведений: средней школы Елгавского района, и студентов Рижского технического университета. Были проведены различные тесты по различным методикам:

1. Американским психологом Г. Гарднером [1] предложена теория «семи интеллектов»: вербальный интеллект, логико-математический интеллект, пространственно-визуальный интеллект, музыкально-ритмический интеллект, телесно-кинестетический интеллект, межличностный интеллект, внутриличностный интеллект. Классические тесты на интеллект мало говорят о том, насколько успешным будет человек в профессии. Преимущество же такого представления об интеллекте — отсутствие дискриминации, кроме того, каждый человек способен совершенствовать любой из семи интеллектов.

2. Тест Амтхауэра — тест, разработанный немецким психологом Р. Амтхауэром [2] для определения коэффициента интеллекта. В своих исследованиях Амтхауэр большое внимание уделял соответствию интеллекта и профессиональной деятельности человека.

При работе со студентами в университете, преподаватели должны принять во внимание, что студенты имеют различные уровни знаний и различное отношение к математике, сформировавшееся во время учебы в средней школе. Почти все учащиеся 1–4 классов имеют положительное отношение к математике. Трудности и изменение отношения обычно происходят в 7–9 классах, когда мотивация к изучению уменьшается, а учащимся приходится решать более сложные задачи, которые требуют больших интеллектуальных усилий. Психологические особенности этой возрастной группы также должны быть приняты во внимание. Учителя должны к ученикам относиться с большей терпимостью и вдумчивостью, демонстрируя интерес ко всем ученикам. Один из респондентов пишет: «Я люблю математику, если я понимаю материал». Если слишком много учеников в классе, трудно сосредоточиться на работе, и учитель не имеет возможности подойти к каждому ученику и объяснить непонятную тему. Если уроки интересны, учитель доброжелателен, ошибки объясняются без унижения обучаемого, это создает положительную мотивацию для приобретения знаний по математике. Многие учащиеся признаются, что их эмоциональное отношение к математике, а также их академические достижения очень зависят от отношения к учителю математики. Резюмируя результаты опроса, можно отметить, что личность учителя играет важную роль в процессе обучения математике. В качестве мотивации к обучению математике, учащиеся средних школ отмечают, что это будет полезно при обучении в университете.

Если учащиеся средних школ винят учителей в своих трудностях в математике, то студенты Рижского технического университета винят себя за то, что не предприняли достаточно усилий, чтобы освоить материал средней школы. Студенты заинтересованы в получении не только диплома, но и в получении качественного образования.

Для обеспечения преемственности в процессе обучения математике, сотрудничество между учителями средних школ и преподавателей университетов должно поощряться.

Необходимо конкретно формулировать цели программ курсов высшей математики, учитывая различный уровень подготовленности студентов, разнообразить методы преподавания и акцентировать связь осваиваемого теоретического материала с его практическим применением.

Литература

1. *Гарднер Г.* Структура разума. Теория множественного интеллекта. Вильямс, 2007
2. *Nikiforovs O.* Nikiforovs O. Amthauera intelekta strukturas tests (IST). Riga, 2002

Humanistic approach to teaching mathematics courses

S. V. Cernajeva, I. V. Eglite

Riga Technical university, Riga, Latvia
sarmite.cernajev@rtu.lv, irina.eglite@rtu.lv

Возможности активизации семантической памяти студентов в усвоении математики как перспективное направление решения проблем математического образования

И. Г. Шамсутдинова

Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия
sergilder@mail.ru

Математическое образование в вузе (по нематематическим специальностям) на со-временном этапе имеет ряд психолого-педагогических и методических проблем, содержание и пути решения которых являются предметом обсуждения ученых на научных конференциях [1–4]. Это проблемы: наличия мнимой части обучения математике (И.Г.Шамсутдинова); фрагментарности, информационной пересыщенности (В.Т.Петрова); необходимости интенсификации математического образования (В.Т.Петрова, С.А.Розанова); его интегративно-модульной организации (С.А.Розанова, Е.И.Исмагилова); структурирования учебных понятийных образований (В.Т.Петрова, С.В.Иванова); усиления ясности математики для студентов (И.Г.Шамсутдинова); «свертывания» и «развертывания» учебных математических знаний и действий (В.Т.Петрова, С.В.Иванова) и др.

Перспективным направлением решения этих и многих других проблем математического образования является, согласно нашему обоснованию, организация усвоения студентами математики с учетом и на основе психологических особенностей и возможностей когнитивных процессов, происходящих во внимании, мышлении, памяти самих студентов при усвоении ими математики (а не вопреки им, что нередко имеет место на практике).

В данном докладе раскрывается один аспект этого перспективного направления - активизация семантической памяти студентов. Исследования когнитивной психологии, раскрывая общие закономерности познавательных процессов, естественно, не доходят до их приложения к усвоению конкретных познаваемых предметов. А преподаватели (например, математики) нередко не знают этих психологических особенностей и возможностей студентов и поэтому их обучение ведется хотя и с глубоким знанием математики, но на эмпирической основе процесса. Что же происходит, например, в памяти студентов при усвоении ими математики? В таком ракурсе решение указанных проблем не рассматривалось.

В когнитивной психологии (Б.М.Величковский) обсуждается «когерентная картина системной организации памяти» [5, с. 407], соответствие форм кодирования информации и уровней когнитивной организации деятельности и познания (там же, с.412). В психологии памяти (В.В.Нуркова) раскрывается «синтетическая модель переработки информации в системе памяти» [6, с. 270]. В работах Б.М.Величковского, В.В.Нурковой по определенным критериям выделяются (хотя и условно) различные виды памяти: кратковременная (рабочая) и долговременная память; процедурная и декларативная; семантическая и эпизодическая; проспективная и ретроспективная [5, 6].

Семантическая память, являясь долговременной, отражает «организованное знание ... о символах, об их значениях ... о правилах, формулах и алгоритмах...» [5, с. 399]; обобщенные сведения, организованные в «сетевых структурах, которые состоят из узлов и отношений между ними» [6, с. 264], выделяемых на основе категоризации (ее параметров, степени), объектов, логических отношений между объектами. В докладе акцент делается на двух операциях: **распознавания и категоризации** (относящихся к долговременной памяти), - применительно к изучаемым математическим объектам. Рассматриваются схемы распознавания математического материала, направляющие его обработку. Когда студента спрашивают и он не может ответить, о чем идет речь в конкретной текстовой задаче по теории вероятностей – о случайном событии или случайной величине, это значит он не может категоризировать содержащуюся в тексте информацию, распознать в ней математические объекты. Для активизации рассматриваемых процессов студентам предлагается совместное с преподавателем построение схем и таблиц по теории вероятностей с выделением параметров категоризации, характеристик математических объектов (случайных событий, случайных величин), видов логических отношений между ними (зависимости, совместности, суммы, произведения). Примерами схем распознавания являются признаки категоризации различных видов числовых и функциональных рядов и алгоритмы их исследования. Четкое выделение параметров, определяющих прямую (плоскость) и их соотнесение с ее уравнениями направляет категоризацию и распознавание. Активизировать распознавание возможно путем расчленения определенного «блока» математической информации по соответствующим элементам теории (определения, свойства, способ вычисления, геометрические приложения и т.п.) В докладе рассматриваются выявленные возможности активизации семантической памяти студентов и ее роль в повышении результативности усвоения ими математики.

Литература

1. Международная научная конференция «образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство.» — г.Плоцк (Польша), 2008. — 907 с.
2. Международная научная конференция «образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство.» — г.Плоцк (Польша), 2008. — 725 с.
3. Проблемы преподавания математики в школе и вузе в условиях реализации новых образовательных стандартов. – Тез.докл. участников XXXI Всероссийского семи-нара преподавателей математики высших учебных заведений, посвященного 25-летию семинара. — Тобольск: ТГСПА им. Д.И. Менделеева, 2012. — 218 с.

4. Проблемы совершенствования математической подготовки в школе и вузе (Мате-риалы всероссийской конф.) //Под ред. В.Л.Матросова, Л.И.Боженковой. — М.: ФГБОУ ВПО МПГУ, 2012. — 386 с.
5. *Величковский Б. М.* Когнитивная наука: основы психологии познания: в 2 т. — Т. 1. — М.: Смысл: Изд. центр «Академия», 2006. — 448 с.
6. Общая психология. В 7 т.: учебник для студ. высш. учеб. завед. / под ред. Б.С. Братуся. — Т.3. Память. В.В. Нуркова. — М.: Изд.центр «Академия», 2006. — 320 с.

Possibility of activating semantic memory students in learning mathematics as a promising solution of problems of mathematical education

I. G. Shamsutdinova

Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia
sergilder@mail.ru

Как улучшить математическое образование

А. М. Шелехов

Тверской государственный университет, Тверь, Россия
amshelekhov@rambler.ru

Чтобы быть реализуемой, концепция улучшения образования, в частности, математического, должна учитывать действующие в нашем обществе объективные тенденции.

1. *Государство существенно уменьшает свое присутствие в образовании, передает значительную часть своих функций на места - в регионы, муниципалитеты и обществу.* Поэтому концепция должна в значительной своей части обращаться к регионам. Отношение регионов (читай: губернаторов) к отрасли образования понятное — на первом месте всегда «хозяйство», «экономика» и т.д., тем более что большинство регионов - дотационные. В сфере образования финансируется только самое необходимое. В государственной программе «Развитие образования» среди перечня финансово-экономических рисков указано «...недофинансирование мероприятий Государственной программы, в том числе, со стороны регионов, муниципалитетов, образовательных организаций...». Мы полагаем, что **в своих программах развития регионы должны предусмотреть подпрограммы улучшения математического образования, к составлению которых привлечь местных ученых и педагогов.**

2. Год от года уровень математических знаний учеников и учителей снижается, причем заметно. Объективность этого наблюдения подтверждается результатами ЕГЭ, отзывами преподавателей об «успехах» первокурсников, снижением уровня сложности олимпиадных задач и многими другими фактами.

Скажем точнее. Плохие ученики — это слабые студенты, значит, слабые будущие учителя; последние готовят еще более слабых абитуриентов и т.д. Это так называемый замкнутый цикл с положительной обратной связью. Цикл этот существует еще с советских времен, теперь он просто более резко проявился. Результат таков - система образования уже много лет функционирует неэффективно (если говорить об образовании населения в целом), ее КПД (коэффициент полезного действия) не более 15%, то есть хуже, чем у паровоза. В стране чрезвычайно низкий уровень профессионализма, и он постоянно падает во всех сферах деятельности. Что касается сферы образования, то уровень подготовки абитуриентов каждый год заметно падает, а учителей, способных решать задачи повышенной трудности, тем более олимпиадные задачи, почти не осталось.

Поэтому, если всерьез говорить об улучшении математического образования, то **начинать надо с поголовного и систематического повышения квалификации учителей математики. В течение пяти лет ее должны пройти все учителя.** Если государство в самом деле озабочено улучшением математического образования, то федеральный бюджет должен поучаствовать в софинансировании этого проекта. Я имею в виду **настоящее** повышение квалификации, на математических факультетах ведущих университетов, где учителей будут учить решать трудные и прикладные задачи, причем учить будут те, кто это умеет делать. Сейчас же повышение квалификации, в основном, сводится к тому, что учителям объясняют, как вместо слов «умения и навыки» пользоваться словом «компетенция». И никого при этом не смущает, что в переводе на русский язык быть в чем-то компетентным означает что-то знать и что-то уметь (по крайней мере, так обстоит дело в математике и у нормальных людей).

3. Система образования выполняет еще и важную социальную функцию - уменьшает молодежную преступность и молодежную безработицу. «Пусть уж лучше сидят в школе и ничего не делают, чем слоняются по улицам. Пусть лучше ходят иногда в институт, чем числятся безработными». Известно, что тюрьмы содержать дороже, чем школы. И школа все больше превращается в место тусовки, где приятно провести место с друзьями, покурить (возможно - «травку» или что-то покрепче), похвалиться новой машиной, показать, какой ты «крутой», какие у тебя «крутые» родители и т.п. Уровень ответственности за результаты образования у всех сторон, участвующих в учебном процессе, снижается.

Выполнение главной задачи - освоение государственной образовательной программы (стандарта) уходит на второй план.

Итак, с одной стороны, **в российском образовании присутствуют обязательные государственные стандарты и программы, с другой - сложилась порочная практика необязательности их исполнения.** В результате некоторые значительная часть учащихся получают дипломы только за то, что иногда приходят на занятия. Во многих вузах обстановка немногим лучше.

Могут возразить, что нечто подобное происходит не только у нас, достаточно посмотреть как ведут себя старшеклассники в некоторых американских фильмах. Но в американских школах нет государственного стандарта! И там ученик имеет право знать в 11-том классе математику на уровне нашего шестого, если она ему не нравится. И это честно и точно отражено в его дипломе, без всякого лицемерия. А у нас надо выполнять государственный стандарт и сдавать обязательный ЕГЭ по математике! В итоге, если говорить о математике, то значительная часть дипломов о среднем образовании - липовые.

Если не указать выход из этой циничной ситуации, то об улучшении математического образования просто смешно говорить.

Придется все-таки выбирать, чем будет наша школа: местом для тусовки или для честного выполнения государственной программы. Судя по всему, руководство страны склоняется к американскому варианту. Но тогда выход может быть только один - **ЕГЭ по математике не должен быть обязательным для всех, потому что именно по математике наибольший ложный процент успеваемости.**

Сейчас, чтобы получить минимальный допустимый балл, нужно ответить на несколько простейших вопросов из материала 8-9 класса или даже проще. **Поэтому в качестве обязательного экзамена для всех по математике вполне достаточно ГИА.**

А пока обучаемые и «обучатели» ведут себя как в том анекдоте советских времен («мы делаем вид, что работаем, а вы делаете вид, что нам платите»): мы делаем вид, что учимся, а вы делаете вид, что мы стандарт выполнили. Этот «высоконравственный» формализм большинство вполне устраивает. Поэтому часы на математику сокращаются, учителя перестают объяснять трудные вещи, доказывать теоремы, и т.п. В этой ситуации хорошие учителя уже не нужны - ведь объяснять и требовать уже не надо. Поэтому на роль учителя математики подойдет любой, кто когда-то, лет 30-50 назад сдал ее на тройку в каком-нибудь заштатном техническом вузе. И успеваемость у него в классе (группе) будет отменная. А тот факт, что специалисты из таких учеников, потом - студентов, будут плохие, что построенные ими крыши будут падать людям на голову - это, похоже, никого не волнует. И это сейчас реально происходит и в школах и на математических факультетах некоторых вузов - от требовательных педагогов избавляются, часто грубо и весьма цинично.

Итак, ученик девятого класса сдает ГИА, а далее у него выбор: либо он не ходит на уроки математики («лирики»), либо ходит на них («физики»), что дает ему право сдавать ЕГЭ и поступать в вуз на математические и естественно научные специальности. Для желающих ходить на уроки математики «просто так, для удовольствия», можно предусмотреть факультативы.

Ученики старших классов дифференцируются по степени отношения к математике, в этом смысле классы станут существенно более однородными. В результате достигается определенный психологический эффект: «ботаники» от математики перестанут казаться «белыми воронами», а «лирики» избавятся от комплекса математической неполноценности. И то, и другое, несомненно, положительно повлияет на эффективность обучения.

4. Государство упорядочивает свои действия в социальной сфере, положив в основу чисто финансовые соображения. Это, по большому счету, правильно. Но: **в эпоху демографического спада, если не сказать кризиса, подушевое финансирование в образовании и жесткие нормативы по наполняемости классов — очень сомнительное решение**. И это при том, что у государство позволяет себе невероятно дорогостоящие проекты существенно менее значимые для будущего страны, нежели образование. **Поэтому необходимо временно отменить принцип подушевого финансирования в образовании и указанные нормативы.**

5. Математика - гимнастика ума, но только для тех, кто ею занимается. Основная культурная роль математики — воспитывать в человеке честное мышление, то есть воспитывать честного человека. **Но если учащемуся вместо заслуженной двойки по математике ставят тройку или даже четверку — с помощью такой «математики» воспитывается не честное мышление, а нечто противоположное.** Поэтому в математике не столь важно чему учить, сколь важно учить честно. Учить честно — это значит правильно и полностью доказывать теоремы и решать задачи. Соотношение часов по анализу,

алгебре, геометрии — дело второстепенное. Тогда математика выполнит свою культурную и профессиональную роль.

On the barriers to mathematical education

A. M. Shelekhov

Tver State University, Tver, Russia
amshelekhov@rambler.ru

Расширение типологии задач курса теории вероятностей в техническом университете

А. Г. Шухов, О. А. Малыгина, И. Н. Руденская

Московский государственный технический университет МИРЭА, Москва, Россия
shuhovalexey@mail.ru, malygina58@mail.ru, irudensk@mail.ru

Современному выпускнику технического университета приходится работать не только в научно-исследовательских институтах, но и в страховых компаниях, банках, в коммерческих организациях, телекоммуникационных структурах. Решение профессиональных задач, с которыми сталкивается работник, зачастую связано с использованием теории вероятностей и математической статистики. Однако традиционные курсы теории вероятностей и математической статистики в основном ограничиваются изучением либо теоретических конструкций, либо учебных задач, не затрагивающих профессиональные аспекты.

Авторы предлагают дополнить курс теории вероятностей и математической статистики следующими профессиональными задачами.

1. Анализ обобщенного коэффициента NPS.

Коэффициент NPS (Net Promoter Score) в настоящее время является одним из ключевых инструментов измерения лояльности клиентов во многих клиентоориентированных структурах (страховых компаниях, телекоммуникационных компаниях, банках и т.д.). Понятие чистого коэффициента лояльности NPS было впервые введено Ф. Райхельдом. В работах [1, 2] введено понятие обобщенного коэффициента NPS с более гибкой шкалой по сравнению со шкалой Райхельда. Проведен анализ динамики данного коэффициента, основанный на использовании теории выборок из конечной генеральной совокупности и предельных теоремах. Изучение обобщенного коэффициента NPS позволяет студентам строить различные практически значимые модели, анализ которых, с одной стороны, требует использования стандартных методов теории вероятностей и математической статистики, а с другой - показывает особенности работы с конечными генеральными совокупностями, позволяет строить компромиссные оценки обобщенного коэффициента NPS на основе использования теории достоверности.

2. Приложения к исследованию систем передачи информации.

Важность изучения этого класса задач студентами подчеркивается в работе [1], содержащей значительное количество примеров.

3. Математические основы теории риска.

В задачах данного типа изучаются составные распределения, суммы случайного числа случайных величин, модель аккумуляции. Рассматриваются модели коллективного и индивидуального рисков, приложения к задачам страхования. Выделяются основные принципы расчета страхового тарифа в рисковом страховании. Приводятся примеры расчета страхового тарифа на базе индивидуальной модели.

Представленные типы задач имеют широкое применение в работе клиентоориентированных структур. В процессе их решения обеспечивается формирование как математических, так и целого ряда профессиональных компетенций. Усиление прикладной составляющей математических курсов путем введения современной проблематики способствует формированию профессиональной мобильности выпускников технических университетов.

Литература

1. *Малыгина О. А.* Формирование основ профессиональной мобильности в процессе обучения высшей математике. — М.: URSS, 2010.
2. *Малыгина О. А., Руденская И. Н., Шухов А. Г.* Методология NPS-подхода к оценке качества функционирования клиентоориентированных структур // Наукоемкие технологии. — 2011. — Т. 12, № 10. — С. 51–58.
3. *Белов П. В., Мироненко Е. С., Розанова С. А., Сирота А. И., Ярошевская К. Ш.* Линейная алгебра и теория вероятностей в приложении к исследованию систем передачи информации. — М.: МИРЭА, 1993.

Extension of typology of problems in probability course for Technical University

A. G. Shuhov , O. A. Malygina, I. N. Rudenskaya

Moscow State Technical University MIREA, Moscow, Russia
shuhovalexey@mail.ru, malygina58@mail.ru, irudensk@mail.ru

Секция 7. Образование и нравственность

Mathematics and credo

N. V. Sokolov

Saint Tikhon Orthodox University, Moscow, Russia
uminosi@rambler.ru

The problems of axioms and dogmas in Mathematics and Religion have been considered. It has been analyzed the difference of interpretations of infinity in mathematics and Religion in Cantor's letters and idea of great one. Interpretation of one passage of the New Testament with the aid Riemann's theorem of conditionally convergent rows has been done. It wrote an application of rows theory to second passage of the New Testament. Boris Rauschenbach vector's model of Trinity in Christian Theology and other mathematical models of trinity have been written. It has been stated the do not periodical recurrences of Orthodox Easter data with the aid of numerical decisions of Gauss's Easter formula. In particular has been found that: Early (Late) Orthodox Easter can only be repeated after 95 or 247 years. If an Early (Late) Orthodox Easter repeated after 247 years, it is three times will be repeated after 95 years, and then will be again after 247 years. An Early (Late) Orthodox Easter, which came in a non-leap year, the next time will be comes only after 95 years in a leap year or not a leap year. An Early (Late) Orthodox Easter, which came in a leap year, the next time will be comes only after 247 years in a non-leap year. After an Early Easter a Late Easter always occurs again after 68 years.

Беречь честь смолоду — важный принцип нравственного воспитания

Ф. С. Авдеев, Т. К. Авдеева

Орловский государственный университет, Орел, Россия
ivan_avd@mail.ru

XXI в. — век глобальных перемен в обществе, век высоких технологий и для развития такого общества необходимо воспитать Личность, которая, наряду с профессиональными компетенциями, будет обладать нравственными качествами. Поэтому среди всех аспектов, связанных с воспитанием молодежи, ведущее место, на наш взгляд, должно отводиться нравственному воспитанию. К нравственному воспитанию относится очень многое: отношение к труду, к своим родителям, коллективизм, товарищество и т.д. Как тонко подметил Л.Д. Кудрявцев «нравственным является то, что соответствует нашей совести» [1].

Хочется отметить неоценимую пользу возрождения исконно русских традиций, которые, на наш взгляд, играют важную роль в формировании нравственных качеств современной молодежи. Более десяти лет в Орловском государственном университете ведутся разыскания материалов о знаменитых орловцах. Собраны сведения, проведены исследования и опубликованы материала по А.П. Киселеву (1852-1940) и К.Д. Краевичу (1833–1892), ведутся исследования по И.И. Жегалкину (1869–1947) [2], [3]. Во всех документах Ив. Ив. Жегалкина он значится как «сын Потомственного Почетного гражданина города Мценска», интересной оказалась история происхождения этого понятия и полезной в плане нравственного воспитания студентов. Началась история с понятия именитый человек, которое появилось в 1610 году. В 1785 году это звание сменилось другим — именитые граждане, его учредила Екатерина II. Звания заслуженных людей в истории изменялось и уже в 1807 году для купцов (отец И.И. Жегалкина происходил из купцов) было установлено звание первостатейных. В 1832 г. Николай I ввел единое сословие почетных граждан. Получить почетное гражданство было непростым делом: требовалось предоставить доказательства о доходах и свидетельства о личных качествах, среди которых главное место занимали честность, порядочность. «В середине XIX в. В Орловской губернии насчитывалось 114 почетных граждан, в 1867 г. в Орле их было 189, в губернии — 544». [4]

В роду знаменитого математика и педагога И.И. Жегалкина звание Почетного гражданина г. Мценска было присвоено его прадеду - Алексею Федоровичу Жегалкину, 1793 года рождения. В рапорте Орловскому Гражданскому губернатору земляки так характеризовали А.Ф. Жегалкина «...в продолжение шестилетнего своего служения в должности (Мценский «Градской» Голова) неусыпно старался устроить, упрочить общественные нашего города Мценска выгоды и похвальными трудами своими всегда стремился к общественной пользе, ... и вообще все действия Г. Жегалкина в продолжении службы его клонились к беспримерной пользе общества ...» [д.649, л. 46] Звание «Потомственный Почетный Гражданин» предполагало особый стиль воспитания в семье, в которой поступки детей и взрослых должны были подтверждать особый высокий статус рода. Ив. Ив. Жегалкин своими делами и поступками гордо пронес это звание. Таким образом, проводя краеведческие разыскания, студенты убеждаются, что в память о человеке, прежде всего, остаются добрые дела и поступки, совершенные во благо других людей.

Во все времена главной фигурой в процессе обучения является учитель, именно он носитель высоких нравственных качеств и пример для подражания. Мы исследовали личности преподавателей Орловской гимназии, тех кто учил И.И. Жегалкина и занимался его воспитанием, достойный труд которых был отмечен различными наградами. Так, усердие и высокое качество преподавания Лаврентия Павловича Вараксевича (учитель математики) отмечено четырьмя орденами, среди которых особо следует отметить орден Св. Владимира 4 степени. Девиз этого ордена «Польза, честь и слава» точно характеризует этого преподавателя: своим трудом он принес большую пользу ученикам гимназии, а их труд и заслуги составили впоследствии его честь и славу.

Литература

1. *Кудрявцев Л. Д.* Избранные труды. Том третий. Мысли о современной математике и ее преподавании. — М.: Физматлит, 2008. — С. 185.
2. *Авдеев Ф. С., Авдеев Т. К.* Андрей Петрович Киселев. 1886. — Орел: Издательство Орловской государственной телерадиовещательной компании, 2002. — С. 17.
3. *Авдеев Т. К., Авдеев Ф. С.* Константин Дмитриевич Краевич. Жизнь. Педагогическая деятельность. Научное творчество: Монография. — Орел: ГОУ ВПО «ОГУ». — 2011.
4. *Гольцова А. В., Трохина О. М.* К истории почетного гражданства в Орле / В кн. А.И. Лысенко, Почетные граждане города Орла. — Орел, «Вешние воды», 2008. — С. 6–28.

«Keep honor his youth» — is an important principle of moral upbringing

F. S. Avdeev, T. K. Avdeeva

Orel State University, Orel, Russia, ivan_ avd@mail.ru

О Льве Дмитриевиче Кудрявцеве - ученом и человеке

В. А. Лазарев

Центр современного образования, Москва, Россия
victor.lazarev@mail.ru

В своей книге «Мысли о современной математике и её изучении», [1], Лев Дмитриевич Кудрявцев пишет: «Только тот преподаватель сможет добиться успеха в воспитании студента, которого студенты любят и уважают за его увлечённость своим делом и добросовестное отношение к своей работе, к своим обязанностям, за его доброту и человечность, принципиальность и объективность, нетерпимость к несправедливости, короче, который пользуется у них авторитетом и как специалист своего дела, и как человек».

Приведём ещё одну цитату, теперь уже о нём. «Вся жизнь Л.Д. Кудрявцева – непрерывный успех в воспитании многочисленной плеяды его учеников, студентов и в общении с коллегами, близкими по духу людьми». Этими словами крупные российские математики - А.А. Болибрух, В.А. Ильин, С.М. Никольский, В.М. Филиппов, Г.Н. Яковлев выразили свою признательность Льву Дмитриевичу, в дни его 80-летия, [2]. В той и другой цитатах речь идёт об успехе в воспитании. Здесь можно добавить, что около сорока лет Лев Дмитриевич Кудрявцев являлся членом Научно-методического совета по математике при Министерстве образования (НМС), в котором много лет был сначала председателем секции технических, экономических и сельскохозяйственных вузов. Около 15 лет Л.Д. являлся первым заместителем председателя президиума этого Совета, академика РАН С.В. Емельянова, и, по обоюдному согласию, осуществлял оперативное руководство Советом. Эту, по сути, общественную работу Л.Д. осуществлял также исключительно успешно. Эта успешность обеспечивалась рядом качеств Л.Д. Одна из них –ответственность.

Значимыми событиями для Л.Д были заседания НМС. Он к ним готовился заранее. Здесь работа поставлена таким образом, что за несколько недель до заседания, а они проводятся вот уже много лет по вторникам в 16.30, с ним согласовывалась повестка дня заседания. Эту работу вели заместитель председателя НМС, профессор МГУ Ягола А.Г. и учёный секретарь НМС, профессор МИРЭА Розанова С.А. На заседания приходят 60-70 математиков и методистов из вузов Москвы и приезжают из городов России, преимущественно из тех, где есть региональные отделения НМС, бывают приглашённые из Министерства образования и науки, учителя математики, аспиранты и студенты. Чувствуя персональную ответственность за состояние математического образования в стране, за те процессы, которые происходят в системе образования, Л.Д. последнее редактирование повестки дня заседаний оставлял за собой. И всегда просил принести ему домой распечатанную крупным шрифтом повестку заседания. Это может показаться мелочью. Но на самом деле, Лев Дмитриевич понимал свою ответственность, осознавал воспитательную роль заседаний НМС, где необходимо управлять процессом, поддерживать соответствующий уровень дискуссии, допуская, при этом, и свободные высказывания.

Так получилось, что в последние годы мне пришлось, может быть, чаще многих членов НМС по математике, лично общаться с Л.Д. Кудрявцевым по разным вопросам, относящимся к организационной работе НМС. Это общение много раз происходило в машине, когда мы, пробиваясь через московские пробки, по направлению к РУДН, обсуждали предстоящее заседание.

Настоящее сообщение посвящено Льву Дмитриевичу Кудрявцеву, его научно-организаторской деятельности на благо математике, воспоминаниям об этом замечательном человеке и ученом.

Литература

1. *Кудрявцев Л. Д.* Мысли о современной математике и её изучении. — М.: Наука, 1977.
2. *Болибрух А. А., Ильин В. А., Никольский С. М., Филиппов В. М., Яковлев Г. Н.* Кудрявцев Лев Дмитриевич. К 80-летию со дня рождения. — М.: Физматлит, 2003.

About Leo Dmitrievich Kudryavtsev - man and scientist

V. A. Lazarev

Center of Modern Education, Moscow, Russia
victor.lazarev@mail.ru

Математика как социально-духовное явление

В. П. Лексин*, А. В. Чернавский†

* *Московский государственный областной социально-гуманитарный институт, Коломна, Россия*
lexin_vp@mail.ru

† *Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия*
chernav@iitp.ru

Рождение теоретической математики (с рассуждениями и какими-то доказательствами) было едва ли не первым проявлением абстрактной человеческой мысли, которая выделила человека из окружающего его естественного физико-биологического окружения и превратившего его в человека размышляющего, познающего и преобразующего, а также передающего свои абстрактные знания (часто, на нынешний взгляд, вполне бесполезные) следующим поколениям. Это был момент (около трех тысяч лет назад) рождения человека в современном его понимании. В последующем во все времена вся жизнь значительной части людей была посвящена сохранению и развитию человеческих начал в жизни человеческих сообществ, борьбе за человеческое в человеке. Не удивительно, что уже в те давние времена математика тесно переплеталась с религией, которая посвящала себя борьбе за сохранение и развитие в человеке того, что от Бога. Вспомним о пифагорейском религиозно-математическом союзе, платоновскую академию, в которой философия исполняла роль религии и математика занимала в этой философии прочные позиции. Позднее математика в форме греческой геометрии заняла прочные позиции в христианском мировосприятии и образовании. Еще позже святой Августин учил, что «цифры — это мысли Бога». И конфликт во времена Феодосия Великого и затем Юстиниана между философствующими математиками и господствующей, тогда уже государственной, христианской религией указывает на основополагающее значение теоретической математики, соперничающей с религией за мировосприятие и мировоззрение людей. Обе стороны боролись, за человеческое, как говорили одни, и божественное по словам других, в человеке, за создание созидательного жизнеутверждающего мифа для всего общества.

Итак мы обсудим следующие темы.

1) Ссылаясь на Евангелие от Иоанна, в котором утверждалось, что Бог и начальное Слово – это синонимы, и отмечая, что начальное Слово имеет комбинаторную математическую структуру, мы утверждаем, что Математика – это Бог, или другими словами Математика – это Божественное Слово. В Математике реализован плодотворный синтез речи и мышления, или точнее, языка и мышления, в котором сила символизма и знаковой системы языка доведены до высочайшего уровня. Здесь мы обсуждаем социальную роль математики в рождении человеческого общества.

2) Далее, ссылаясь на Евангелия и вспоминая об «игольном ушке», можно утверждать, что акцент в первоначальном христианстве

делался на нестяжательстве. Занятие Математикой – это служение Богу и оно несовместимо со служением Мамоне. К. Якоби говорил, что человек занимается математикой ради чести человеческого духа и доказательства тривиальности смерти. В этом разделе мы обсуждаем различные формы организации мирской жизни, основанные на рабстве (рабовладение и феодализм), деньгах (капитализм), на труде и взаимопомощи (социализм).

3) Однако мы люди, а не Боги и нам нужно жить, а для этого, без стяжательства, нам необходимо добывать хлеб насущный. Математика – первая древнейшая наука, но не первая древнейшая профессия. Математика вообще не профессия. Приобщение к Богу (человеческому в человеке, по своей сути) не является профессией. Бросив взгляд на историю развития математики, легко заметить, что большинство математиков зарабатывали на жизнь, занимаясь преподаванием. Это по сути единственный нестяжательный и доступный способ заработать хлеб насущный. А, по словам А.С.Пушкина, образование для всех и постепенное повышение уровня культуры всех – это самый надежный путь улучшения нравов в обществе. Здесь мы обсуждаем социальные и духовные проблемы при обучении математике.

Литература

1. *Лексин В. П., Чернавский А. В.* Школа и нравственность // Еженедельная газета «Слово». — № 41–42 (708–709) от 12–25 ноября 2010 года. — С. 10–13; № 43–44 (710–711) от 25 ноября – 9 денабря 2010 года. — С. 12–14.
2. *Лексин В. П.* Об одной сельской школе в одном районе (личные наблюдения) / в кн. «Мы математики с Ленинских гор». Часть 4. О математике. Проблемы преподавания. — М: Грета-Сервис, 2009. — С. 214–219.
3. Чернавский А. В. Зачем математика в школе. В книге «Мы математики с Ленинских гор». Часть 4. О математике. Проблемы преподавания. М: Грета-Сервис, 2009. С.81-86.
4. *Покорный Ю. В.* Унижение математикой? — Воронеж: Центрально-Черноземное изд-во, 2006. — 320 с.

Mathematics as a social-spiritual phenomenon

V. P.Leksin*, A. V. Chernavskiy†

* *Moscow State Region Social-Humanity Institute , Kolomna, Russia*
lexin_ vp@mail.ru

† *Institute for Information Transmission Problems of RAS, Moscow, Russia*
chernav@iitp.ru

Проблемы нравственности в образовании

М. А. Мкртчян

Министерство образования и науки РА, Ереван
acf2004@yandex.ru

1. Социальная действительность имеет со-бытийную сущность и программно-целевую обусловленность. Именно это обстоятельство пораждает идею нравственности, как один из главных факторов регулирования социальных взаимодействий и обеспечения общественного порядка. Недостаточность образовательно-нравственного уровня общества вынуждает обществу обращатся к другим рычагам обеспечения общественного порядка, например к материально-финансовым средсвам, или к установлению законов и правил общежития.

Фактически, наличие необходимости обеспечения общественного порядка через законов и правил есть признак образовательно - нравственной недоразвитости общества.

2. В частности, в сфере образования проблема нравственности встает как минимум в трех планах.

- Обязательность образования.

Само по себе обязывание, как явление не может быть нравственным или безнравственным, гуманным или негуманным. Наооборот из за со-бытыйной сущности социальной действительности существуют определенные нормы, которые предявляются как обязательные для любого члена общества. Нравственным или безнравственным может быть только содержание и формы обязывания. В частности, идеология общего и обязательного образования исходит из потребностей социальной экологии (см. предыдущий пункт) и не может рассматриватся как безнравственным или негуманным.

- Характер учебно-воспитательного процесса.

Традиционный учебный процесс, господствующий во всех существующих типах образовательных учреждений и определяющий классно-урочный и лекционно-семинарский способы организации обучения, устроен так, чтобы в каждый конкретный момент все участники процесса занимаются одним и тем же делом, одним и тем же способом, за одно и то же время, однимы и теми же средствами. Это обстоятельство вынуждает организатора процесс ориентироваться на усреденое общегрупововое состояние и исключает принципиальную возможность учета индивидуальных особенностей каждого участника учебного процесса. Имея такую аморальную основу традиционный учебный процесс, а сним и вышеупомянутые способы организации пораждают разнообразные поведенческие аномалии субектов педагогической действительности.

- Ценностные ориетиры педагогических кадров.

Конечно, любой педагог, как человк и гражданин должен быть носителем общечеловеческих ценностей и общепризнанных морально-этических норм поведения. Однако существуют аксиомы , которыми должны руководствоваться педагоги, как нормы профессиональной нравственности. Они следующие:

Первый. Каждый здоровый человек может освоить любой учебный материал.

Второй. Дети отличаются не своими возможностями усвоить тот или иной материал, а индивидуальными способами и средствами освоения этого материала.

Третий. Интерес ученика к изучаемому материалу определяется не содержанием этого материала, а успешностью действий ученика в процессе освоения этого материала.

Issues of Morality in Education

M. A. Mkrtchyan

Ministry of Education and Sciense, Armenia, Yerevan
acf2004@yandex.ru

О содержании математики в начальном звене обучения основной школы для развития личностных качеств учащихся

В. Н. Сукманюк

Краснодарский краевой институт повышения профессионального педагогического образования, Краснодар, Россия
sukman@mail.ru

Одной из задач федеральных государственных стандартов основного общего образования является развитие *личностных качеств*. Для реализации этих задач при обучении математике необходимы изменения, в том числе и при отборе учебного материала курса математики в 5-6 классах.

Уже является общепризнанным тот факт, что *формирование комбинаторного и пространственного* мышления должно начинаться с 5–6 классов ввиду имеющихся в этом возрасте способностей учащихся.

Введение наглядной геометрии в этом звене обучения до сих пор «пробуксовывало» исключительно из-за отсутствия большого числа наглядного дидактического материала доступного учителю. В современное время, в эпоху ИКТ технологий, высококачественной полиграфии изучению наглядной геометрии должно отводиться существенно больше времени, как и основам комбинаторики. В этом случае личность, способности которой были развиты своевременно, добьется больших успехов не только в предметной области, но и в своем психологическом и эмоциональном развитии.

Одной из важных задач школьного образования является обеспечение его успешной *адаптации в реальном мире*. До сих пор российские школьники существенно отстают в решении практико-ориентированных задач по сравнению со сверстниками многих стран. Поэтому, включение большого числа практических задач, исследований и проектов является необходимым условием в обучении математике в школе, в частности, и к прохождению порога успешности на едином государственном экзамене. Само содержание учебного курса в 5-6 классах должно быть дополнено еще и разделом описательной статистики.

Такие личностные качества, как *честность* и *принципиальность*, умение отличать ложь от истины, рассуждать и доказывать, должны формироваться через ранее привитие таких правильных привычек, как обосновывать решения и высказывания, приводить аргументы и контраргументы. Здесь содержание курса математики в 5-6 классах должно быть обогащено задачами на развитие основ формальной логики (и это не обязательно должны быть традиционные логические задачи). Работа с высказываниями, с их обоснованием истинности, как в письменной, так и в устной форме удачно обеспечивается учебным материалом теории делимости чисел и элементарной геометрией. В последнем случае свойства элементарных тел и фигур могут проверяться учащимися эмпирически. Это позволит им научиться выдвигать гипотезы, которые далее будут постулироваться (на основе проведенных наблюдений и экспериментов), а некоторые и доказываться на соответствующем уровне строгости.

Эрудиция — одно из важных качеств любого человека, основы, которой закладываются со школы. Расширение кругозора учащихся на уроках математики через энциклопедические справки географического, исторического свойства, касающиеся учебных тем курса, позволят сформировать условия для дальнейшего увлечения личности одной из сторон жизнедеятельности человека. Это, в свою очередь, обеспечит *профориентационную работу*, работу по самоопределению, выбора профиля. К основным потребностям личности, которые не насыщаемые и присущи каждому человеку от рождения относят *потребности познавать или заниматься умственной деятельностью.* Поэтому, использование учебного материала, раскрывающего применение теории в практике, междисциплинарные связи позволит обеспечить целесообразность обучения математике с 5-6 класса, что, в целом, формирует познавательный интерес к самому предмет.

Для гармоничного развития личности, безусловно, особое внимание следует уделить развитию *эстетического* воспитания учащихся, умению ценить и творить красоту. Содержание школьного курса математики, содержащего большое число геометрического материала, как раз и позволит лучшим образом познакомить с принципами симметрии, ее присутствием в природе, в быту, искусстве. Вместе с этим, на уроках математики возможно привитие вкуса к «красивым» решениям задач, что в целом формирует желание к их поиску, а значит, в конченом счете, желание совершенствовать мир.

The content of mathematics in the initial phase of the primary school education for the development of personal qualities of students

B. N. Sukmanyuk

Krasnodar Regional Institute of Advanced Professional Teacher Education, Krasnodar, Russia
sukman@mail.ru

Секция 8. История математики и естествознания

Трактат ибн ал-Хайсама об устранении сомнения в одном из предложений «Начал» Евклида

Д. Д. Аль-Даббах

Упомянутый в названии доклада трактат является частью рукописи, найденной в 1974 году в публичной библиотеке г. Куйбышев (Самара). Этот трактат принадлежит великому арабскому ученому Абу Али ал-Хасан ибн ал-Хайсам (965-1038). В нем автор обращает свое внимание на важный пробел в доказательстве 17-го предложения 12-ой книги «Начал» Евклида, в котором требуется вписать в большую из двух концентрических сфер многогранник, грани которого не пересекают и не касаются меньшей сферы. Ибн ал-Хайсам утверждает, что Евклид ограничился доказательством того, что перпендикуляр, опущенный из центра двух сфер на сторону грани построенного им многогранника больше радиуса меньшей сферы. Он пишет, что из этого не следует, что эта грань не будет касаться меньшей сферы. Мы показываем, что утверждение ибн ал-Хайсама неверно, т.к. Евклид доказывал, что перпендикуляр, опущенный из центра на грань больше радиуса меньшей сферы. Тем не менее возражение ибн ал-Хайсама справедливо, т.к. в доказательстве Евклида имеется грубое допущение и, построенный им многогранник не удовлетворяет требуемому условию. Ибн ал-Хайсам дает свой метод построения многогранника и доказывает, что он удовлетворяет условию задачи. Он отмечает, что никто из его предшественников не обратил внимания на этот недостаток в данном предложении «Начал» Евклида.

Ibn's treatise al-Haysama about elimination of doubt in one of offers of “Beginnings” of Euclid

D. D. Al-Dabbah

Исследовательские математические центры в США в XIX веке

В. Г. Алябьева

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь, Россия
alyabieva@rambler.ru

В последней четверти XIX века США превратились в могущественную индустриальную державу, однако развитие наук в США отставало от европейского уровня и от потребностей американской жизни. Правительство страны и администрации штатов стали проявлять обеспокоенность неудовлетворительным развитием науки в стране и поддерживать реформаторские проекты в сфере высшего образования. В 1876 году открыт университет Джона Гопкинса в Балтиморе – первый университет в США нового типа, воспринявший многие черты немецкого университета. Главной из этих черт явилось создание исследовательских центров при университете, где сообща вели работу преподаватели, аспиранты, студенты. Кафедру математики возглавил известный английский математик Дж. Сильвестр [1, 2].

Дж. Дж. Сильвестр прибыл в университет Дж. Гопкинса в 1876 году и стал первым професором математики в истории высшего образования США и в истории американской математики [3]. Его научная и преподавательская деятельность в Балтиморе стимулировала новые работы американцев в области чистой математики. В декабре 1883 года Сильвестр вернулся в Англию. Оставшиеся без его руководства молодые американские математики были не в состоянии поддерживать высокий уровень научных исследований.

Возникший после отъезда Сильвестра вакуум в математических исследованиях США через 10 лет восполнил Феликс Клейн, который в течение 10 лет, начиная с 1880 года, активно влиял на математические исследования в США. Клейн культивировал научные связи со многими ведущими математиками своего времени и привлекал студентов из разных стран на свои лекционные курсы и семинары. Американские ученики Клейна продолжали свои исследования, вернувшись на родину. В целом, влияние Клейна на его американских учеников характеризуется не столько его конкретной программой исследований, сколько его способностью стимулировать математичекие исследования.

В 1893 году Клейн посетил США. Поводом для его визита послужил Математический конгресс, проводимый в рамках Всемирной выставки. Клейн был основным докладчиком на конгрессе. Президентом конгресса был молодой американский профессор из Чикаго Элиаким Гастингс Мур. Мур проявил себя как глубокий исследователь и умелый организатор науки [4]. Мур и его ученики: Л. Диксон, О. Веблен, Г. Биркгоф, – составили славу американской математической науки. Благодаря усилиям Мура Нью-йоркское математическое общество было реорганизовано в общенациональное Американское математичесое общество.

Конец XIX столетия стал переломным в истории американской математики. Окрепло Американское математическое общество. Оно насчитывало более 500 членов. Выросло поколение учёных, способных вести самостоятельные научные исследования и обладающих необходимыми знаниями для обучения своих преемников. Становлению американской математики способствовали перечисленные факторы: создание университетов нового типа, огромное влияние таких учёных как Сильвестр, Клейн, Мур, создание профессионального сообщества.

Литература

1. *Parshall, Karen Hunger*The Emergence of the American Mathematical Research Community // Mathematics and the Historian's Craft. Series: CMS Books in Mathematics. — Brummelen, Glen and Kinyon, Michael. Springer New York: 2005. — P. 183–202.
2. *D. Rowe* Research Schools in the United States // Историко-математические исследования. — 1997. — № 37. — P. 103–127.
3. *Алябьева В.Г.* Размышления Дж.Сильвестра о комбинаторике // История и методология науки. — Межвузовский сб. научных трудов. — Пермь: 1999. — № 6. — С. 142–149.
4. *Алябьева В.Г.* Вклад Е.Г. Мура и его учеников в развитие дискретной математики // История и методология науки // Межвузовский сб. научных трудов. — Пермь: 2000. — № 7. — С. 89–99.

Research mathematical Centers in the XIX century in USA

V. G. Alyabieva

Perm Humanitarian-Pedagogical State University, Perm, Russia
alyabieva@rambler.ru

Преобразование уравнения Бюргерса

А. Э. Бирюк

Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия
abiryuk@kubsu.ru

Одномерное уравнение Бюргерса можно записать в одной из следующих двух эквивалентных форм:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{v^2}{2}\Big) = \nu v_{xx} \quad \text{или} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v v_x = \nu v_{xx}\,. \tag{1}$$

Следует отметить, что это уравнение появляется в начале XX века в монографии Форсайта [1].

Рассматривая задачу сведения линейнейного уравнения

$$\nu(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(t,x)u = 0\,,$$

где $u = u(t,x)$ к уравнению $v_t = \nu(t,x)v_{xx}$ с помощью линейной замены $u = \lambda(t,x)v$, где $\lambda = \lambda(t,x)$ -некоторая фиксированная (известная) функция (параметр замены), а $v = v(t,x)$ - новая неизвестная функция, Форсайт показал, что это возможно тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\gamma + \nu\Big(\frac{\alpha}{\nu}\Big)_x - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\alpha}{\nu}\right) = 0\,. \tag{2}$$

В случае $\nu = const$ условие (2) является ни чем иным, как уравнением Бюргерса относительно α:

$$\alpha_t + \alpha\alpha_x = \nu\alpha_{xx} + 2\nu\gamma_x\,.$$

Под многомерными уравнениями Бюргерса понимают непосредственные обобощения на многоменый случай формул (1) приводящие к следующим различным (не эквивалентыным) уравнениям:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla\frac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}{2} = \nu\Delta\boldsymbol{v} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} = \nu\Delta\boldsymbol{v}\,. \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, а ν — положительная константа. Напомним, что $(\boldsymbol{v},\nabla)$ — это оператор дифференцирования вдоль векторного поля $\boldsymbol{v}$. Символы ∇ и Δ обозначают операторы набла (градиент) и Лапласа, действующие только по переменным $\boldsymbol{x}$. В общем случае $\nabla\dfrac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}{2} \neq (\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v}$. Если рассматривать потенциальный случай $(\boldsymbol{v} = \nabla H)$, то оба уравнения в (3) совпадают.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда «Династия».

В этом случае уравнение Бюргерса (3) можно переписать в потенциалах:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla H, \nabla H) - \nu \Delta H = 0\,. \tag{4}$$

Уравнение Бюргерса в потенциалах (4) может быть обобщено на случай переменных коэффициентов следующим образом:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \alpha(\nabla H)^2 + \beta(\nabla H, \nabla \psi) - \nu \Delta H + f = 0\,, \tag{5}$$

где α, β, ν, ψ, и f – некоторые функции, зависящие от $\boldsymbol{x}$ и времени t.

В.А.Флорин в конце сороковых годов XX века, рассматривая проблему консолидации влажной почвы, изучал уравнение (5) для определения гидростатического давления H. В работе [2] на странице 1392, при предположении $\alpha/\nu = const$, Флорин делает подстановку

$$H = -\frac{\nu}{\alpha} \ln(\varphi + C) + D\,, \tag{6}$$

где C и D — некоторые постоянные, и сводит уравнение (5) к следующему линейному уравнению:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \beta(\nabla\varphi, \nabla\psi) - \nu\Delta\varphi - \frac{\alpha}{\nu}(\varphi + C)f = 0\,. \tag{7}$$

В случае $\beta = f = 0$ уравнение (7) принимает вид уравнения теплопроводности: $\varphi_t - \nu\Delta\varphi = 0$.

Преобразование уравнения Бюргерса с постоянными коэффициентами к уравнению теплопроводности было опубликовано в начале пятидесятых годов XX века независимо друг от друга Е. Хопфом [3] и Дж. Коулом [4].

Литература

1. *A. R. Forsyth A. R.* Theory of differential equations. Vol 6. — Cambridge University Press, 1906.
2. *В. А. Флорин В. А.* Некоторые простейшие нелинейные задачи консолидации водонасыщенной земляной среды // Известия Акад. Наук СССР. Отд. техн. наук. — 1948. — Т. 1948, № 9. — С. 1389–1402.
3. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. — 1950. — Vol. 3. — P. 201–230.
4. *Cole J. D.,* On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. — 1951. — Vol. 9. — P. 225–236.

Transformation of Burgers equation

A. E. Biryuk

Kuban State University, Krasnodar, Russia, abiryuk@kubsu.ru

Некоторые аспекты истории российских школьных учебников по математике (150 лет первому учебнику А. Ю. Давидова)

Л. И. Брылевская

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия, brylevl@mail.ru

В следующем году исполняется 150 лет со дня выхода в свет первого из написанных Августом Юльевичем Давидовым учебников для школы. Учебники Давидова стали заметной вехой в истории отечественной учебной математической литературы. Автор был хорошо знаком с преподаванием математики в школах. Он начал свою преподавательскую работу в кадетском корпусе, был инспектором по частным учебным заведениям, членом Попечительского совета Московского учебного округа, принимал участие в составлении университетских программ для абитуриентов и т.д., то есть активно занимался вопросами преподавания математики и, в особенности, в средних учебных заведениях. Это позволило ему подготовить и в период с 1864 по 1877 гг. издать пять учебников по различным разделам школьного курса математики [1–4,4]. Некоторые из них оказались долгожителями, например, «Элементарная геометрия в объеме гимназического курса», выдержавшая 39 изданий, последнее из которых было осуществлено уже в советское время. В начале XX века учебники по алгебре и геометрии Давидова постепенно уступили место книгам А.П. Киселева.

Учебники Давидова имели ряд особенностей, определявшихся взглядами автора на математику как науку и его представлениями о цели обучения и месте математики как учебной дисциплины в системе образования России XIX века.

Основной характерной чертой, выделяющей эти книги из числа других, можно назвать их практическую направленность. Автор подбирал много задач, умение решать которые могло бы пригодиться в ученику в жизни. Начиная с самых простых в «Руководстве по арифметике» [3], где он подробно рассмотрел различные задачи на простые и сложные проценты, «правило товарищества», цепное правило, правило смешения; и, завершая наиболее сложными задачами «Элементарной геометрии» [1], где рассматриваются мензульная съемка местности, построения в определенном масштабе и т.п.

Изложение теории сопровождалось большим количеством примеров, которые должны были помочь учащемуся сформировать как можно более полное представление об изучаемом вопросе. Причем задачи приводились не только как иллюстративный материал в изложении теории, но также предлагались задания для самостоятельной работы. Даже с позиций современной методики преподавания математики отдельные главы учебников Давидова могут служить достойными примерами доходчивого изложения материала.

В конце XIX века наиболее уязвимой стороной методической концепции Давидова считали недостаточно строгое в логическом отношении построение курса и неудовлетворительное развитие логических навыков у учащихся. Но несмотря на замечания коллег с 70-х годов XIX в. Давидов не вносил в текст учебников исправлений или дополнений. Справедливости ради следует отметить, что школьная учебная литература XIX века в целом не отличались чрезмерной строгостью изложения математической теории.

Современное состояние вопроса о построении курсов математики для средней школы позволяет внести некоторые коррективы в осмысление опыта известного педагога. Несмотря на все выявленные недочеты, учебники А.Ю. Давидова оказали значительное влияние на отечественную учебную математическую литературу и на методику преподавания математики в средних учебных заведениях России.

Литература

1. *Давидов А.Ю.* Элементарная геометрия в объеме гимназического курса. — М., 1863.
2. *Давидов А.Ю.* Начальная алгебра. – М., 1866.
3. *Давидов А.Ю.* Руководство к арифметике. — М., 1870.
4. *Давидов А.Ю.* Геометрия для уездных училищ. — М. 1873.
5. *Давидов А.Ю.* Начальная тригонометрия. — М., 1877.

Some aspects of the history of russian school manuals of mathematics (150 anniversary of the first A. Davidov's manual)

L. I. Brylevskaia

St. Petersburg National Research University of IT, Mechanics and Optics, St. Petersburg, Russia, brylevl@mail.ru

Педагогическая деятельность академика А.Н. Крылова в Институте инженеров путей сообщения (к 150-летию со дня рождения)

М. М. Воронина

Петербургский государственный университет путей сообщения, Санкт-Петербург, Россия, margo@TV2662.spb.edu

Академик А.Н. Крылов в своей книге о преподавании механики в высших учебных заведениях СССР вспоминал, что во время его учебы в Морском Кадетском корпусе дьякон вещал: «Чудо есть всякое проявление всемогущества божия, уму человеческому непостижимое» и добавлял: «например, аэростат, локомотив, ракета». Собственно такими «чудесами» великий ученый и занимался всю свою жизнь. Его основные труды посвящены теории корабля, строительной механике, теории гироскопов, теории дифференциальных уравнений и истории науки. Часть его творческой, многогранной жизни прошла в стенах института путей сообщения.

С самого основания в институте существовала традиция приглашать ведущих ученых страны для чтения лекций своим студентам. Осенью 1910 года директор А.А.Бранд пригласил А.Н. Крылова в институт инженеров путей сообщения для преподавания механики. В Центральном государственном архиве Санкт-Петербурга имеется собственноручное письмо Крылова. «СПб. 26-го ноября 1910. Его Превосходительству А.А.Брандту. Милостивый Государь Александр Андреевич! Я глубоко благодарен вашему Превосходительству и СОВЕТУ Института инженеров путей сообщения Императора Александра I, за оказанную мне честь предложением принять на себя чтение лекций и ведение практических занятий по Теоретической механике в Институте начиная с января 1911 года».

А.Н. Крылову предложили «принять на себя чтение лекций и ведение практических занятий по теоретической механике в Институте... в количестве 2 годовых часов лекций и часов упражнений в неделю с вознаграждением по 900 р ($300\times2 + 150\times2$) в год с 1 января 1911 года». Вместе со своим согласием Алексей Николаевич представил программу курса лекций по кинематике, прося при этом профессора института Янковского указать, какие разделы надо читать подробнее, а какие более кратко, «ввиду того, что кинематический отдел курса Теорет. Мех. (так у А.Н.) имеет тесную связь с курсом Прикладной механики и Механизмов».

Экзаменационная программа курса кинематики в институте инженеров путей сообщения этих же лет имеет более прикладную направленность и незначительно отличается от программы, предложенной А.Н. Крыловым.

Педагогическая деятельность А.Н. Крылова в институте была достаточно плодотворной. По свидетельству бывших воспитанников института, лекции А.Н. Крылова наряду с лекциями профессоров института инженеров путей сообщения Н.А.Белелюбского, Л.Ф.Николаи, Д.П.Коновалова, С.Д.Карейши, Г.О.Графтио, пользовались наибольшей популярностью.

В эти годы в институте все упражнения и дипломное проектирование проводилось под руководством профессоров и преподавателей, причем каждый из них имел определенное количество прикрепленных к нему студентов. Поскольку посещение лекций и практических занятий было необязательным, большое значение придавалось своевременному выпуску учебников и учебных пособий. Почти все профессора печатали свои курсы лекций или в сборниках института, или в виде отдельных изданий. В рассматриваемый период было опубликовано свыше 30 учебных курсов, в том числе профессора А.Н. Крылова по теоретической механике.

А.Н. Крылов проработал в институте несколько лет. «Высочайшим приказом по Морскому ведомству от 26 августа 1913 г. согласно прошению отчислен от должности экстраординарного профессора Института инженеров путей сообщения Императора Александра I.» (л. 3, об).

Однако, надо отметить, что А.Н. Крылов не прерывал связи с институтом и после официального ухода из него. Как и в прошлом веке, институт являлся организатором публичных лекций, главным образом, по электрификации железных дорог, воздухоплаванию, строительному искусству и некоторым другим вопросам транспортной науки и техники. Лекции читали, например, инженер Г.О.Графтио, авиатор, инженер В.Ф.Найденов, а также профессор А.Н. Крылов.

Кроме того, в институте проводились вечерние факультативные занятия, в которых А.Н. Крылов принимал активное участие. В начале 1914 г. он читал курс: «Теория малых колебаний в связи с теорией гироскопа. Технические приложения гироскопа». Осенью того же года — курс приближенных вычислений. Кроме А.Н. Крылова факультативные курсы также читали: «Я.В.Успенский: теория потенциала в приложении к вопросам математической физики (2 часа в неделю), Я.Д.Тамаркин: Об уравнении тепла (2 часа в неделю), С.П.Тимошенко: 1) Теория тонких стержней в связи с расчетом рельс, 2) Тонкие пластинки (2 часа в неделю)» (там же, л. 199).

А.Н. Крылов работал в институте инженеров путей сообщения в 1911- 1914 годах и оставил значительный след в жизни института.

Литература

1. *Крылов А. Н.* Мысли и материалы о преподавании механики в высших технических учебных заведениях СССР. — М.-Л., 1943. — С. 23.
2. *Крылов А. Н.* ЦГИА СПб ф. 381, оп. 11, д.22, 1910-1913, л.7, 10, 11

The pedagogical activity of academician A.N. Krylov in the Institute of engineers of means of communication (to the 150 anniversary of the birth)

M. M. Voronina

Petersburg State University of means of communication, Sankt-Petersburg, Russia, margo@TV2662.spb.edu

Деятельность Ариян П. Н. для женского образования России

З. С. Галанова, Н. М. Репникова

Петербургский государственный университет путей сообщения, Санкт-Петербург, Россия
margo@TV2662.spb.edu

Прасковья Наумовна Ариян (1862 -1944) известна как общественный деятель, публицистка, активнейший организатор Высших Женских Поли-технических курсов в Петербурге, составительница Первого Женского Ка-лендаря (ПЖК).

Она окончила физико-математическое отделение Высших Женских курсов в Петербурге (бестужевских курсов) в 1884г., после окончания курсов слушала лекции П.Ф. Лесгафта и краткие курсы по кооперации. Ареной своей деятельности избрала народное образование.

Работала в «Новостях», «Биржевые ведомости», «Спутник здоровья», «Вестник благотворительности», «Вестник знания», «Искусство и жизнь» и др. Женский вопрос того времени знала досконально, что отразилось в календарях, которые поражают насыщенностью информацией.

Первый Женский Календарь появился в 1899 г. и выходил ежегодно вплоть до 1915 г. Основной материал, кроме поименованных статей, которых очень мало, составлен самой Ариян П.Н. Это были книги около 400 с., содержащие как календарную, юридическую, медицинскую информацию, так и статьи об известных женщинах. При свойственной календарю способности ежегодного возобновления совершающееся развитие женского дела было отражено в этих изданиях. Календарь стал летописью развития общественной и экономической женской жизни.

Особый интерес представляет отдел «женское образование». Этот отдел освещается подробно и в динамике. В нем дана полная информация об общем, среднем, высшем, специальном женском образовании России, о женских гимназиях в губернских городах Ведомства императрицы Марии и Министерства Народного просвещения, частных гимназиях с указанием программ и правил приема и др. Дан обзор высших учебных заведений за границей, открытых для женщин. Что очень важно для учащейся женщины, описаны условия жизни за границей (в Париже, в Брюсселе, в Швейцарии, в Германии, Англии, Франции), даже даны рекомендации по устройству быта студентки за границей.

На страницах календарей даны подробные статьи о бестужевских курсах, высших женских политехнических курсах, курсах Герье, московских высших женских курсах и др.

Дана история возникновения Высших Женских Политехнических курсов в Петербурге, первого высшего политехнического института для женщин. Здесь неоценимы заслуги самой П.Н. Ариян, которая взяла на себя заботу о воплощении этого замысла в жизнь, начиная с докладов в комиссии по высшему техническому образованию Русского технического общества, составления устава общества доставления средств курсам и проведения его по правительственным инстанциям, приглашения профессоров и директора курсов и кончая съемом квартиры для курсов на свое имя. Хлопот было много. Курсы были открыты в 1906г., имеют свою историю, получили в дальнейшем статус Политехнического женского института. К 1924 г., когда курсы были расформированы, они дали стране 500 хорошо подготовленных женщин инженеров.

Интересен отдел по статистике женского труда. Приводятся списки учреждений, допускающих женский труд. Приведены таблицы, показывающие, как расширилась сфера деятельности женщин с того времени, когда даже образованные женщины могли работать только гувернантками и акушерками.

Календарь охватывал все стороны женского вопроса в России. Так, в 1902 – 1903 г.г. в Петрограде проводилось большое экономическое обследование положения ремесленниц и чиновниц. Данные внесены в календарь: статья «Из статистики женских тружениц». В календарях можно найти сведения и о предложениях рабочих мест.

Большое внимание уделяет календарь различным женским обществам в России и за рубежом. Это первая школа, которая приводит женщину к самостоятельному труду и образованию. Много места уделено положению женщин вообще. Так, пользуясь со-общениями различных заграничных обществ, П.Н. Ариян составила статью «Положение женщин за границей, их клубы и общества».

Не менее важен для женского самосознания отдел «Из прошлого и настоящего». Здесь публиковались биографии заслуженных людей России, в основном женщин, юбилеи, некрологи. Первая биография, напечатанная в календаре, была биография С.В. Ковалевской (ПЖК за 1900 г., год второй). Там же биографии видных деятелей женского движения Е.И. Лихачевой, П.Ф. Лесгафта, Н.В. Стасовой.

На страницах календарей есть сведения о женщинах-математиках: В.И. Шифф, Н.Н. Гернет, Е.Ф. Литвиновой.

Многочисленные отзывы в газетах о календаре говорят, что это серьезная справочная книга для женщин, с полезной информацией.

Доклад составлен по материалам рукописного отдела Пушкинского Дома в Петербурге, фонд 117, дела 1–84.

Activity Arijan P.N. for female formation of Russia

Z. S. Galanova, N. M. Repnikova

Petersburg State University of means of communication, Sankt-Petersburg, Russia, margo@TV2662.spb.edu

О математических основах теории музыки в трудах Л.Эйлера и ал-Фараби

Н. Г. Голикова

Московская государственная академия коммунального хозяйства и строительства, Москва, Россия
nurgol37@mail.ru

В 2008 г. Президент Швейцарского центра в Петербурге (Международного центра научного и культурного сотрудничества «Helenika») Мадлен Изабель Люти передала в дар в библиотеку нашей академии русскоязычное издание трактата Леонарда Эйлера о музыке под названием «Опыт новой теории музыки», ясно изложенной в соответствии с непреложными принципами гармонии, подготовленное центром «Helenika» совместно с учеными СПБНЦРАН и Музея музыки в Шереметьевском дворце к 300-летию Л. Эйлера, которое представляет несомненный интерес для математиков, физиков, музыковедов и др.

Фундаментальный труд Л. Эйлера (1707–1783) по теории музыки и теории слуха был опубликован в Петербурге в 1739 г. на латинском языке, в котором были рассмотрены многие аспекты работы слухового аппарата, в том числе логарифмический закон восприятия звука, который впоследствии был экспериментально доказан и в настоящее время носит название закона Вебера–Фехнера (XIX в.)

$$W = \begin{cases} k \log \frac{J}{J_0}, \ J > J_0 \\ 0, \ J \leqslant J_0 \end{cases}$$

где W — сила ощущения, J — интенсивность сигнала, J_0 — пороговое значение интенсивности.

В своем трактате Л.Эйлер систематизировал и переработал знания из области теории музыки, которую он представлял как раздел математики, основывающийся на строгих физических принципах, в частности, он привел формулу для частоты колеблющейся струны с заданной длиной и изгибной жесткостью.

В докладе приводится сравнительная характеристика трактата Л. Эйлера с трактатом ученого-энциклопедиста средневекового Востока Абу Насраал–Фараби (870–950) «Большая книга музыки». В этом фундаментальном труде ал-Фараби, в частности, впервые экспериментальным путем получил результаты, которые позволяют сказать, что он стоял у истоков логарифмического закона восприятия звука. Кроме того, в «Большой книге музыки» ал-Фараби встречаются задачи по элементарной комбинаторике, функциональные зависимости в виде таблиц, а также некоторые инфинитезимальные идеи.

Литература

1. *Эйлер Л.* Опыт новой теории музыки / Пер. с латинского Н.А. Алмазовой. — СПб.: Нестор-История, 2007.

2. *Кубесов А.* Математическое наследие аль-Фараби. — Алма-Ата: Наука, 1974. — С 183–208.
3. *Омар Хайям.* Речь о родах, которые образуются квартой / Пер. Б.А. Розенфельда, Н.Г. Хайретдиновой. — М.: Наука ,1974. — ИМИ. — Вып. XIX. — С. 279–284.

On the mathematical foundation of the theory of music in Leonard Euler's and Alpharabius's works

N. G. Golikova

Moscow Academy of City Economy and Building, Moscow, Russia
nurgol37@mail.ru

Советская математическая школа: истоки и первые шаги

С. С. Демидов

Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН, Москва, Россия, serd42@mail.ru

Процесс развития математических исследований в СССР во второй половине 20-х – в 30-е гг. мог пойти разными путями. Тот путь, которым ему суждено было последовать, был в значительной мере определён внешними обстоятельствами — сталинским планом строительства Советской науки, в свою очередь продиктованным внешнеполитическими обстоятельствами. Закончилась эпоха, содержание которой определялось мечтой о грядущей «мировой революции». Ощущалось дыхание приближающейся мировой войны. Отсюда необходимость создания мощной военной промышленности, требующей хорошо работающих систем науки и образования. Согласно сталинскому плану, наука выстраивалась в виде гигантской пирамиды, в вершине которой располагалась реформированная Академия наук СССР — «штаб советской науки». Согласно Уставу, принятому в 1927 году (а затем совершенствуемому в 1930 и 1935 гг.), Академия объявлялась головным научным учреждением страны. Её основной задачей провозглашалась задача социалистического строительства. В 1934 году Президиум Академии и ряд ведущих академических институтов, среди них и Математический институт им. В.А. Стеклова, были переведены в Москву. Для развития математики в нашей стране это был судьбоносный акт. Длительное время находившиеся в конфронтации математические сообщества двух столиц были вынуждены жить и работать совместно. В результате возник удивительный синтез традиций двух школ — Московской, выросшей на основании Московской школы теории функций Д.Ф. Егорова – Н.Н. Лузина, и Ленинградской, основанной П.Л. Чебышевым. Это образование, усиленное математиками, съехавшимися в новую столицу (Москва была провозглашена столицей СССР в 1918 году) из провинциальных научных центров, стало основой формирования Советской математической школы, одной из ведущих во второй половине XX века.

Soviet Mathematical school: its sources and first steps

S. S. Demidov

S.I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology, Moscow, Russia serd42@mail.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-06-00119а.

Классификация особых точек дифференциальных уравнений первого порядка

Д. Б. Китаев

Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия
Davidkitaev@mail.ru

Одной из важнейших задач качественной теории дифференциальных уравнений первого порядка является изучение топологической структуры интегральных кривых в окрестности их особых точек. Систематическое изучение этого вопроса было положено мемуаром А. Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» (1881–1886 гг.). В этом мемуаре, в частности была дана классификация особых точек и даны их критерии их различения. Менее известен тот факт, что исторически первая классификация особых точек появилась ранее — в 1876 году, в магистерской диссертации Н. Г. Жуковского «Кинематика жидкого тела». В этой работе, относящейся к области гидродинамике, был исследован вопрос о линиях тока плоского течения жидкости в окрестности точек, составляющие скорости которой обращаются в нуль. Решение этой задачи привело Н.Е. Жуковского к исследованию поведение интегральных кривых уравнения в окрестности начала координат.

Жуковский приводит классификацию особых точек уравнений, аналогичную той, которую впоследствии дал Пуанкаре, и исследует поведение интегральных кривых в их окрестности. Жуковский не дает специальные наименования каждому типу особых точек, которых у него насчитывается шесть; случай, который по терминологии Пуанкаре носит название узла, распадается у него на три, получивших в дальнейшем наименование простого, вырожденного и дикритического узлов. Исследование особых точек было подчинено у него изучаемым вопросам гидродинамики и не получило самостоятельного развития. Поэтому оно долгое время оставалось незамеченным, вплоть до 1924 г., когда на него обратил внимание Д. М. Синцов [6].

Следующая по времени классификация особых точек изложена в упоминаемом выше мемуаре Пуанкаре, который исследовал поведение интегральных кривых уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Y}{X}$ в окрестности начала координат, где и Y — полинома относительно x и y:

Он классифицировал особые точки по характеру корней характеристического уравнения следующим образом:

1. Уравнение имеет два действительных различных корня одного знака. В этом случае через точку проходит бесконечное множество интегральных кривых. Такая особая точка называется узлом.

2. Уравнение имеет два действительных корня противоположных знаков. В этом случае через точку проходят две и только две интегральные кривые. Такая особая точка называется седлом.

3. Уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня с нулевой действительной частью. Интегральные кривые в этом случае — спирали, имеющие точку (α, β) асимптотической точкой, вокруг которой они

делают бесконечное количество оборотов. Такая точка называется фокусом.

4. Уравнение имеет две сопряженных, чисто мнимых корня. Интегральными кривыми в окрестности точки (α, β), является семейство замкнутых кривых, окружающих эту точку. Такая точка называется центром.

Следует отметить, что Пуанкаре в своем мемуаре исследовал лишь простые особые точки, т.е. тот случай, когда $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Исследование сложных особых точек в этом мемуаре не приводилось. По этому поводу Пуанкаре писал следующее: «Различные особенности, которые могут представить такие особые точки, слишком многочисленны и разнообразны для того, чтобы мы стали их здесь подробно изучать [5, с. 31]. Изучение этого вопроса впервые было проведено И.О. Бендиксоном в 1901 г. в его мемуаре, опубликованном в «Acta mathematica» [2] в 1901 г. под тем же названием, что и мемуаре Пуанкаре. В этой работе были получены существенные обобщения результатов Пуанкаре по качественному изучению интегральных кривых на плоскости.

Существенное место в ней занимает изучение сложных особых точек. Изучая топологическую структуру сложных особых точек в случае равенства нулю одного корня характеристического уравнения, Бендиксон пришел к выводу о существовании особых точек трех типов – седла, узла и седло-узле и дал критерии их различия. Наибольшую сложность, как отмечал автор мемуара, представляет изучение сложной особой точки в случае равенства нулю обоих корней характеристического уравнения. Впервые такая задача была решена в 1955 г. А.Ф. Андреевым, применившим для этой цели прямой геометрический метод исследования – метод Фроммера. При этом автор пришел к выводу о существовании семи типов сложных особых точек: (1) седла, (2) узла, (3) фокуса, (4) центра, (5) седло-узла, (6) вырожденной особой точки (имеющей 2 гиперболических сектора), (7) сложной особой с эллиптической областью (имеющей один эллиптический и один гиперболический сектор) и установил критерии их различения. Позднее, в 1959 году, к аналогичным результатам пришла К.А.Губарь, принимавшая в своих исследованиях метод Бендиксона. Особые точки этих типов были затем подвергнуты различными авторами во главе с Ф.Дюмортье исследованиям на предмет выявления их бифуркаций при малых изменениях параметров исходной системы.

Литература

1. *Андреев А. Ф.* Исследование поведения интегральных кривых одной системы двух дифференциальных в окрестности особой точки // Вестник ЛГУ. — 1955. — С.183-216.
2. *Бендиксон И. О.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — УМН. — 1941. — Т. 9. — С. 3–91.
3. *Губарь Н. А.* Исследование методом Бендиксона топологической структуры расположения траекторий в окрестности особой точки

одной динамической системы // Известия вузов. Радиофизика. — 1959. — Т. 2, № 6. —С. 48–72.
4. *Жуковский Н. Е.* Кинематика жидкого тела // Математический сборник. — 1876. — Т. 8. — С. 125–204.
5. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л., 1944.
6. *Синцов Д. М.* Н. Е. Жуковский и классификация особых точек дифференциальных уравнения первого порядка // Ученые записки научно-исследовательских кафедр Украинского Отделения математики. — 1924. — Вып. 1. — С. 76–80.

Classification of the first-order differential equation singularities

D. B. Kitaev

Russian State Hymanity University, Moscow, Russia
Davidkitaev@mail.ru

Вклад А.Ю. Давидова в развитие гидромеханики

Ю. В. Лобзина

Орловский государственный университет, Орел, Россия
yvlobzina@mail.ru

Начало XIX столетия характеризуется бурным развитием техники и ростом промышленного производства. Решению многих прикладных задач предшествовало интенсивное развитие теоретической науки. Такие тенденции наблюдались в гидромеханике.

В 1848 году вышел научный труд, магистерская диссертация молодого математика, выпускника Московского университета Августа Юльевича Давидова — «Теория равновесия тел, погруженных в жидкость». Это сочинение представляло собой приложение математического анализа к исследованию закона Архимеда. Основной проблемой, занимающих учёных в этой области в тот период, являлось определение максимального числа положений равновесия плавающего тела.

К середине XIX века наибольших успехов в исследовании положений равновесия плавающих тел достиг французский геометр Франсуа Пьер Шарль Дюпен, который в научной работе «Developpements geometriques» (1818 г.) показал геометрический способ построения положений равновесия некоторых плавающих тел, но не указал способ определения количества положений равновесия плавающего тела. Исследование российского математика А.Ю. Давидова отличались от исследования французского геометра не только аналитическим подходом к решению вопроса, но и обширностью достигнутых результатов, что и определило его важное значение для развития гидромеханики, в частности, ее раздела - гидростатики.

Работа А.Ю. Давидова состояла из трех глав.

В первой главе учёный исследовал задачу, заключающуюся в отделении некоторой части от плавающего тела определенной формы, которая бы при погружении в жидкость вытесняла вес жидкости, равный весу всего тела. А.Ю. Давидов рассматривал однородные тела, у которых центр тяжести расположен на одной вертикальной прямой с центром тяжести вытесненной жидкости. Это позволило ему выделить конечное число решений, поскольку в противном случае число положений равновесия бесконечно. В ходе исследования А.Ю. Давидов задал аналитически условия закона Архимеда и ввёл уравнение прямой сечения. Рассмотрев все возможные положения данной прямой, Август Юльевич получил уравнения кривой (линии) и поверхности сечения, а также уравнения кривой (линии) и поверхности центров.

Во второй главе А.Ю. Давидов добился ценных научных результатов в изучении положений равновесия плавающих тел. Изучая составленные дифференциальные уравнения и полученные выражения для линий и поверхностей сечения и центров, учёный находил все положения равновесия для тела определенной геометрической формы. Для каждого тела А. Ю. Давидов определял кривую сечения и кривую центров, затем устанавливал количество положений равновесия рассматриваемого тела по числу действительных решений уравнений этих кривых. В этой главе аналитически были разобраны сложные случаи установления положений равновесия для плавающих тел, ограниченных поверхностями второго порядка, и для трехгранной призмы, погруженной в жидкость при негоризонтальных образующих. До выхода научной работы А.Ю. Давидова задача определения положений равновесия разрешалась лишь в частных случаях. В основном, исследовался случай равновесия трехгранной призмы из однородного материала при горизонтальном положении ребер. Т.о, молодой 24-летний математик исследовал вопрос о равновесии плавающего тела гораздо глубже своих предшественников в науке.

Третья глава работы посвящалась исследованию прочности равновесия плавающих тел, в современном понимании — исследованию устойчивости положения равновесия плавающих тел, и имела особую научную ценность. Если нахождение положения равновесия тела уже исследовалось, то решение проблемы устойчивости положения равновесия принадлежит исключительно А.Ю. Давидову. В.В. Бобынин, признавал указанную главу самостоятельным достойным учёным трудом: см. [1].

«Теорию равновесия тел, погруженных в жидкость» высоко оценили коллеги А.Ю. Давидова. В 1885 году известный математик того периода А.В. Летников говорил следующее: «В момент своего появления эта диссертация была явлением беспримерным; да и по настоящее время едва ли в истории русской математической науки можно указать на другой подобный случай, в котором бы молодой 24-летний учёный являлся на научное поприще с учёным трудом равного достоинства. Теория равновесия плавающих тел развивается Давидовым в этом сочинении в изящной аналитической форме, и притом, не для частных случаев, как это делалось его предшественниками, а в надлежащей общности для тела произвольного вида»: см. [2]. «Теория равновесия тел, погруженных в жидкость» получила достойное признание в Петербургской Академии наук, присудившей за эту работу Демидовскую премию.

Научные результаты, полученные А.Ю. Давидовым в теории равновесия тел, вызвали живой интерес в европейской науке. Признанием Августа Юльевича на европейском научном поприще стала публикация двух научных статей о равновесии плавающей трехгранной призмы в математических журналах, имеющих мировую известность: Journal von Crelle (т.XXXVIII, 1849 г.), Bulletin physico-mathematique de l'Academie de St-Petersburg (т. XIII, 1854 г.).

Научные исследования положений равновесия плавающих тел А.Ю. Давидова стали поводом научных работ в этой области таких русских учёных–математиков как Ф.А. Слудский, Ф.С. Сигов, Н.В. Татаринов.

Сам А.Ю. Давидов относился критически к своему достижению в гидромеханике. Так, во введении к «Теории равновесия тел, погруженных в жидкость» он написал, что «три главы этого рассуждения далеко не исчерпывают всей теории плавающих тел, потому что полная теория должна бы содержать исследования малых качаний около прочного положения равновесия, также и влияние капиллярности»: см. [3]. Явлением капиллярности учёный начал заниматься сразу после защиты магистерской диссертации, поскольку, по его словам, это было крайне необходимым для построения полной теории плавающих тел. Уже в 1851 году он написал фундаментальный труд «Теория капиллярных явлений»

Литература

1. *Бобынин В. В.* А. Ю. Давидов (некролог) // Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем. — 1886. — Т. 2, № 1. — С. 18.
2. Воспоминания об А.Ю. Давидове // Известия общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. — 1887. — Т. 51 (Приложение). — С. 40.
3. *Давидов А. Ю.* Теория равновесия тел, погруженных в жидкость. — М.: Университетская типография, 1848.

Davydov's contribution to the development of hydromechanics

Y. V. Lobzina

Orel State University, Orel, Russia
yvlobzina@mail.ru

О семействе треугольников, порождающем две замечательные кривые

Ю. В. Павлюченко

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия, pavyuri@yandex.ru

В богатейшем наследии математиков прошлого сохранилось множество замечательных кривых; несколько сотен из них представлено в атласе плоских кривых Е.В. Шикина и М.М. Франка-Каменецкого, [1], а также в более ранних справочниках [2, 3]. В своё время некоторые из этих кривых строились для того, чтобы подтвердить или опровергнуть те или иные утверждения или гипотезы; другие понадобились авторам для решения популярных в те времена классических задач. Несомненно, в их открытии не последнюю роль играло вдохновение и «радость созерцания формы», которая, по словам Ф.Клейна, характеризует истинного геометра. Хрестоматийный набор таких кривых (безотносительно к истории их происхождения) стал неотъемлемой частью «начального образования» математиков последующих времен. Сохранив имена своих «творческих прародителей», они уже не напоминают об актуальных научных проблемах тех времен. Между тем, в глубокой древности (III век до н.э.) циклоида Диоклеса была придумана в поисках решения делосской задачи об удвоении куба, а конхоида Никомеда была применена для решения задачи о трисекции угла. В сообщении рассматривается геометрическая конструкция, в которой одновременно появляются эти замечательные кривые. Дадим следующее

Определение. Треугольник, в котором биссектриса, медиана и высота, проведенные их разных вершин, пересекаются в одной точке, называется *p-треугольником* (от слова *perfectum* – совершенное, лат).

Пусть в треугольнике ABC с основанием AB проведены биссектриса $AA1$, медиана $BB1$ и высота $CC1$. По теореме Джованни Чевы о трех отрезках, проведенных из разных вершин треугольника и пересекающихся в одной точке (обозначим ее P), имеем следующее соотношение:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\ \frac{BA_1}{A_1C}\ \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Полагая $AB = 1$, $AC1 = x$, угол $BAC = 2\alpha$, получаем необходимое и достаточное условие *p-треугольности*:

$$x = 1 - \cos 2\alpha.$$

Рассматривается семейство $\Delta(\alpha)$, $0 < \alpha <$ j π, всех p-треугольников ABC с общим основанием $AB = 1$ и углом 2α при основании.

Покажем, что кривая, образованная вершинами $C(\alpha)$ этих треугольников, является *конхоидой Никомеда.* Через точку B перпендикулярно основанию AB проведем прямую и продолжим сторону AC до пересечения с этой прямой в точке D. Поскольку ортогональная проекция отрезка CD на основание AB равна $\cos 2\alpha$, то сам отрезок CD независимо от значения α равен единице, и, следовательно, геометрическое место вершин C принадлежит левой ветви конхоиды.

Покажем, что кривая, образованная точками $P(\alpha)$ пересечения медианы, биссектрисы и высоты в p-треугольниках семейства $\Delta(\alpha)$, является *циссоидой Диоклеса.* С этой целью построим окружность единичного радиуса с центром в точке B и через правый конец E ее горизонтального диаметра проведем к ней касательную. Продолжим отрезок AP до пересечения с окружностью в точке F и далее с касательной в точке G. Несложный подсчёт показывает, что $AF = PG$ $(= 2\cos\alpha)$, поэтому $AP = FG$ и, следовательно точка P принадлежит циссоиде Диоклеса.

Прямоугольный p-треугольник разбивает семейство $\Delta(\alpha)$ на два подмножества – остро- и тупоугольных треугольников. Между этими подмножествами устанавливается взаимно однозначное соответствие так, что у соответствующих треугольников сумма углов при вершине равна двум прямым. Треугольники, находящиеся в соответствии, имеют один и тот же радиус описанной окружности, центры этих окружностей симметричны относительно основания AB.

Значение угла α, отвечающее прямоугольному p-треугольнику, определяется уравнением: $\cos 2\alpha + \cos 2\alpha - 1 = 0$; поэтому точка $C1$ делит основание AB в золотом сечении.

Литература

1. *Шикин Е.В., Франк-Каменецкий М.М.,* Кривые на плоскости и в пространстве. Справочник. — М.: Фазис, 1997.
2. *Савелов А. А.* Плоские кривые. Систематика, свойства, применения // Справочное руководство. — Физматгиз, 1960.
3. *Смогоржевский А.С., Столова Е.С.*, справочник по теории плоских кривых третьего порядка. — М.: Физматгиз, 1961.

Set generative cissoid of Diocles and conchoid of Nicomedes

J. V. Pavlyuchenko

Peoples' Friendship University of Russia,Moscow, Russia
pavyuri@yandex.ru

Из истории преподавания математики студентам нематематических специальностей: В.А. Кудрявцев (1886–1953)

С. С. Петрова

Московский государственный университет, Москва, Россия
serd42@mail.ru

Первое издание «Краткого курса высшей математики» В.А. Кудрявцева и Б.П. Демидовича, появилось на свет в 1949 г. Большая его часть была написана Кудрявцевым и представляла изложение курса лекций по математике, на протяжении многих лет читавшегося им на естественных факультетах МГУ имени М.В. Ломоносова. Некоторая часть теоретического характера была написана Демидовичем (1906-1977), им же были составлены задачи. Книга включала в небольшом объеме аналитическую геометрию на плоскости и в пространстве с упражнениями после каждой главы. Почти три четверти объема книги было отведено математическому анализу функций одной переменной. Одна глава посвящена функциям нескольких переменных. По одной главе отводилась на ряды и основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Характерной особенностью курса является то, что при соблюдении достаточной строгости рассуждений имеет место известное упрощение доказательств, большая, чем в учебниках, предназначенных для студентов-математиков, опора на наглядность, наконец, обилие примеров и геометрических иллюстраций. В дальнейшем учебное пособие переиздавалось довольно часто - в 1959 (рецензентом этого издания выступил Л.Д. Кудрявцев), 1962, 1975. В каждое новое издание Демидович вносил изменения и дополнения. Учебник оказался чрезвычайно востребованным. Дальнейшие стереотипные издания выходили в 1978, 1986, 1989, 2001, 2003, 2005 и 2007 гг.

Если имя Бориса Павловича Демидовича широко известно, то восстановить биографию Кудрявцева оказалось непросто. Выяснилось, что Всеволод Александрович Кудрявцев — пасынок выдающегося русского историка и общественного деятеля профессора Московского университета А.А. Кизеветтера (1866–1933). В 1910 г. окончил Московский университет и был оставлен в нем для подготовки к профессорскому званию. В 1916-17 году в качестве приват-доцента читал два полугодовых спецкурса «Уравнения с числовыми коэффициентами» и «Теорию Галуа», а в 1917–18 учебном году спецкурс по теории групп. Послереволюционная эмиграция его отчима и матери стала пятном на его советской биографии. В 20-е годы преподавал в Ярославле, в 30-е работал в Лесотехническом институте. В 1933 вернулся в Университет: вначале доцентом, а затем профессором механико-математического факультета. В течение долгих лет читал курс математики на естественных факультетах университета. В 30-е годы преподавал математику в своего рода «тайной гимназии» на дому, среди учеников которой был А.Д. Сахаров.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-06-00119а.

On the history of the mathematical teaching for the students of non-mathematical specializations: V.A. Kudryavtsev (1886–1953)

S. S. Petrova

Moscow State University, Moscow, Russia
serd42@mail.ru

Понятие связности в математическом анализе XIX века

Г. И. Синкевич

Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Россия, Galina.sinkevich@gmail.com

Понятие связности ввёл И.Б. Листинг (Listing, 1802–1882) в 1847 году; М.Е.К. Жордан (Jordan, 1838–1922) в 1866 году определил его иным способом на основе изучения работ Г.Ф.Б. Римана (Riemann, 1826–1866), написанных в 1851 и 1857 годах. Строгое обоснование понятию связности дал Ж.А. Пуанкаре (Poincaré, 1854–1912) в 1895 году.

В 1817 году Б. Больцано (Bolzano, 1781-1848) рассматривал понятие связности, доказывая с привлечением понятия верхней границы области теорему о корневом интервале: если непрерывная функция имеет разные знаки на краях интервала, то внутри него она примет нулевое значение. В 1821 году О. Коши (Cauchy, 1789–1857) доказал эту же теорему, используя сходящиеся последовательности. Сейчас эта теорема носит имя Больцано-Коши, хотя история её началась значительно раньше.

В 1872 году Г. Кантор (Cantor, 1845–1918) определил понятия предельной точки, производного множества, замкнутого и открытого множества – фундаментальные понятия топологии точечных множеств. В 1878 году Кантор с помощью теоремы Больцано–Коши пытался доказать невозможность взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения между многообразиями различного числа измерений. Общее доказательство этой теоремы дал Л.Э.Я. Брауэр (Brouwer, 1854–1966) в 1910 году.

К. Вейерштрасс (Weierstrass, 1915–1897) своих лекциях 1854–1887 годов дал строгое обоснование математическому анализу, включая понятие непрерывности, окрестности, точной верхней границы. В лекциях 1886 года он обосновывает понятие связности континуума, используя новую концепцию действительного числа и непрерывности и понятия теории множеств. В определении окрестности Вейерштрасс пользуется методами вариационного исчисления. На основе понятия предельной точки Вейерштрасс развивает понятие точной верхней границы, используя теорему Больцано-Коши. На её основе он вводит понятие связности: «исходя из любой точки континуума, мы всегда в нём и останемся».

В 1906 году М.Р. Фреше (Fréchet, 1878–1973) в своей диссертации ввёл понятие компактного пространства. Его работа была естественным развитием понятия непрерывности, обогащённого трудами Кантора, Дедекинда, Гейне и Вейерштрасса. Следующим этапом было появление понятия полного пространства, которое ввёл С. Банах (Banach, 1892–1945) в 1922 году в своей диссертации, а затем дал его развитие в 1932 году.

The notion of connectivity in Analysis of XIX century

G. I. Sinkevich

St.-Petersburg Architectural-Building University, St.-Petersburg, Russia
Galina.sinkevich@gmail.com

Роль научных школ в становлении молодого ученого

Л. И. Хохлова

Мурманский государственный технический университет, Мурманск, Россия, xoxlovaluda@rambler.ru

Место мыслителя в науке определяется, в том числе и тем, создал ли он свою научную школу, имел ли учеников и последователей. Сейчас вопрос о создании и работе научных школ и среды, где могли проявляться и развиваться пытливые умы, становится все более актуальным. Работа таких научных сообществ оказывает определяющее влияние на все дальнейшее развитие науки. Это можно проследить на примере работы Московской философско-математической школы и Венского кружка, образовавшихся и работающих в России и в Австрии в конце XIX – начале XX в.

Московская философско-математическая школа появилась в конце 60-х годов девятнадцатого века. Влияние этой школы на развитие российской математики и философии трудно переоценить. Н.В. Бугаев, декан физмата МГУ по праву считается одним из главных основателей этой знаменитой философско-математической школы. Ученый считал, что математика, обобщая факты внешнего мира, приводя их к единству, является в то же время одной из первых ступеней в области нравственного мира, т.к. человек стремится, при помощи числа и меры, возвыситься до идеального состояния, которое обусловливало бы полную власть над внешнею и внутреннею природой и вносило бы гармонию и эстетическое чувство в каждое проявление человеческого духа. Работы Бугаева, его лекции, общение с ним оказали сильное влияние на формирование математических и философских взглядов его ученика П.А. Флоренского.

Флоренский, выпускник физико-математического факультета Московского университета — математик, философ, богослов на всех уровнях стремился выразить единство бытия. Он всегда подчеркивал, что естественные науки, математику и физику, нельзя рассматривать в отрыве от философии. После прочтения работ Кантора по теории множеств, Флоренский пришел к выводу, что источник перестройки всего миросозерцания лежит именно в теории множеств. Это утверждение вполне сопоставимо с тем, что ещё с древнейших времён философы пытались найти единые первоначала для выражения взаимосвязи понятий Космос, природа, человек в категориях множества, части, единичного, особенного, всеобщего. Флоренский — выпускник физико-математического факультета Московского университета – во время обучения одновременно посещал и лекции по философии Трубецкого и по математике Бугаева, что, несомненно, оказало определяющее влияние на его развитие.

В свою очередь, Флоренский оказал сильнейшее влияние на одного из лучших математиков XX века Н.Н. Лузина, и именно оно оказалось, в конечном счете, решающим в обращении математика к философии, причем философии религиозной. Они познакомились еще, будучи студентами Московского университета, в который Лузин поступил в 1901 году, то есть годом позже Флоренского и поддерживали постоянно тесную связь, о чем свидетельствует их переписка. Работы Флоренского перевернули всю жизнь Лузина и указали новый смысл и профессиональной деятельности. Возможно, именно благодаря их постоянному общению, интерес математика к философии стал носить мировоззренческий характер, причем философское влияние Флоренского на Лузина сохранялось на протяжении всей его жизни.

В дальнейшем посещение докладов Флоренского в лаборатории высокого вакуума Всесоюзного электротехнического института в Москве, лекций по теоретической физике выдающегося российского мыслителя, апологета нелинейного мышления Л.И. Мандельштама повлияло на творческое становление выдающегося русского мыслителя-вероятностника В.В. Налимова, профессора МГУ, академика Российской академии естественных наук, создателя нескольких новых научных направлений: метрологии количественного анализа, химической кибернетики, математической теории эксперимента и наукометрии. Его научные интересы определялись возможностью применения математики, логики для вероятностного описания внешнего мира. Размышления Налимова о вероятностной модели языка, о вероятностной теории смыслов и об эволюции и экологии очень интересны. Он считал, что естествоиспытатель, обращенный к вероятностно-статистическим методам, начинает мыслить иначе, чем это традиционно принято.

Возможно, личность Павла Флоренского, его труды, которыми Налимов должен был непременно заинтересоваться, повлияли на развитие личности философа-вероятностника. Именно Флоренский видел в математике инструмент бесконечного самопознания, считая, что теория вероятности должна стать одним из основных способов трактовки исторических наук и философских наук. Скорее всего, лично они и не общались, но все же несколько лет работали в одном институте (ВЭИ), где одно время Флоренский был заместителем директора по науке, поэтому Налимов должен был заинтересоваться столь неординарной личностью.

В сравнении с работой Московской философско-математической школы можно рассмотреть деятельность в Австрии знаменитого «Венского кружка» и его влияние на развитие гениального ученого, философа, логика, математика – Людвига Витгенштейна, идеи которого оказали огромное влияние на философию и культуру нашего столетия. В Венском университете в начале 20 века собралась группа молодых интеллектуалов, живо интересовавшихся проблемами обоснования науки и логикой. Группа философов и учёных, сформированных и организованных профессором М. Шликом при кафедре индуктивных наук Венского университета в 1922 году, получила название «Венский кружок» и стала идейным ядром логического позитивизма. В работе кружка принимали участие: математик К. Гёдель, логик Р. Карнап, социолог О. Нейрат и др. В 1929 г. на конференции в Праге Нейрат от имени кружка выступил с манифестом «Научное понимание мира. Венский кружок». В Манифесте были указаны те направления философской и научной мысли, продолжателями которых считали себя члены кружка.

Для анализа языка науки и рассмотрения структуры научного знания, члены Кружка использовали аппарат математической логики. В дальнейшем это помогало доказывать или опровергать научные теории. Философия Витгенштейна — это, метод, подход. Философия представляется ему деятельностью по прояснению мыслей. Целью философских занятий мыслитель всегда считал достижение ясности. Стремление к ясности у него имело значение этического принципа, оно было выражением требования честности и искренности в мыслях, добросовестного и последовательного определения своего места в мире. В дальнейшем основные концепции, на которые основывался Венский кружок это идеи «Логико-философского трактата» Л. Витгенштейна. Одной из идей является та, что реальность устроена так же, как формальный язык логики: имеются «атомарные» предложения, из которых с помощью логических связок, кванторов и операторов образуются сложные, «молекулярные» предложения.

Этот интерес к логико-философскому, построенному на хорошем математическом фундаменте анализу языка, знаков, символов объединяет Флоренского, Витгенштейна и Налимова. Во многом, они тоже считали философию деятельностью по прояснению мыслей. В частности, Налимов постоянно обращается к «Логико-философского трактату» Л.Витгенштейна, занимаясь анализом смыслов в работе «Спонтанность сознания».

Role of scientific schools in the formation of the young scientist

L. I. Hohlova

Murmansk State Technical University, Murmansk, Russia
xoxlovaluda@rambler.ru

Использование дробно-рациональных приближений для вычисления констант в работах Леонарда Эйлера

Е. В. Шухман

Оренбургский государственный педагогический университет, Оренбургский государственный университет, Оренбург, Россия
shukhman.elena@gmail.com

Широко известно, что великий математик XVIII в. Л. Эйлер (1707-1783) использовал для представления трансцендентных функций бесконечные ряды и непрерывные дроби, что позволило ему вычислить с большой точностью значения констант π, e, γ. Однако в историко-математической литературе не рассмотрены подробно результаты Эйлера, связанные с аппроксимацией дробно-рациональными функциями.

В работе «Nova ratio quantitates irrationales proxime exprimendi» («Новые отношения, дающие приближение иррациональных величин») [1], написанной в 1772 г., Эйлер получает приближенные представления в виде последовательности дробно-рациональных функций для степенной $(1+x)^n$ (в том числе для дробных показателей), логарифмической $\ln(1+x)$ и экспоненциальной e^x функций.

Для логарифмической функции Эйлер нашел следующие дробно-рациональные приближения:

$$\ln(1+x) \approx \frac{2x}{2+x} \approx \frac{6x+3x^2}{6+6x+x^2} \approx \frac{60x+60x^2+11x^3}{60+90x+36x^2+3x^3} \approx$$
$$\approx \frac{420x+630x^2+260x^3+25x^4}{420+840x+540x^2+120x^3+6x^4} \approx \dots,$$

что позволило вычислить $\ln 2 \approx \frac{2}{3} \approx \frac{9}{13} \approx \frac{131}{189} \approx \frac{1335}{1926}$.

Аналогично для экспоненциальной функции Эйлер получил следующие приближения:

$$e^x \approx \frac{2+x}{2-x} \approx \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} \approx \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}$$
$$\approx \frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4} \approx \dots$$

Для многочленов A_n в числителе и B_n в знаменателе дробно-рационального приближения $e^x \approx \frac{A_n}{B_n}$ он вывел рекуррентные соотношения:

$$A_0 = 1, A_1 = 2+x, \dots, A_n = (4n-2)A_{n-1} + A_{n-2}x^2, \dots$$
$$B_0 = 1, B_1 = 2-x, \dots, B_n = (4n-2)B_{n-1} + B_{n-2}x^2, \dots$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-06-31060.

Подставляя $x = 1$, Эйлер получил приближения для константы e:

$$\frac{3}{1} \approx 3,0; \frac{19}{7} \approx 2,714285714; \frac{193}{71} \approx 2,718309859; \frac{2721}{1001} \approx 2,718281718.$$

С точки зрения современной математики дробно-рациональные приближения, полученные Эйлером, совпадают с диагональными аппроксимациями Паде для соответствующих функций [2]. Отметим, что в монографии К. Брезински [3], посвященной истории непрерывных дробей и аппроксимаций Паде, не упоминается работа Эйлера [1]. К. Брезински пишет, что впервые дробно-рациональные приближения для экспоненциальной функции были получены Ж.Г. Дарбу в 1876 г. [3, p. 239]. Общие формулы для дробно-рациональных приближений открыл К. Якоби в 1849 г.

Таким образом, Эйлер задолго до открытия общих формул для дробно-рациональных аппроксимаций применял их частные случаи с целью вычисления приближенных значений трансцендентных функций и констант.

Литература

1. *Euler L.* Nova ratio quantitates irrationales proxime exprimendi // Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. — 1774. — Vol. 18. — P. 136–170.
2. *Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986.
3. *Brezinski C.* History of continued fractions and Pade approximants. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

Using of rational approximations for the calculation of constants in works by Leonhard Euler

E. V. Shukhman

Orenburg State Pedagogical University, Orenburg State University, Orenburg, Russia, shukhman.elena@gmail.com

Секция 9. Информационные технологии в образовании

Formation of adult competence in information technology at postgraduate studies

T. Kruszewski, J. Mianecka

Pawel Wlodkowic University College, Plock, Poland
tkruszewski@wlodkowic.pl, julia.mianecka@wlodkowic.pl

The article concerns adult competences forming issues in information technology on postgraduate studies. The authors pay attention for need and specificity of adult education in the field of information technology what should be a permanent process at the time of information society. Common using of computers technology and permanent education have been characteristics of the information society. To keep up with fast civilization changes it is necessary of adaptation the adult education to our country needs (B. Siemieniecki, 2002, p.9). Information technology development, mass media and telecommunication aids brought about changes and now a human being is faced with huge number of resources of accumulated knowledge, information about the world. To reach the data and be fluent, a human being has to possess specialized knowledge, permanently develop indispensable skills and new mental features (A. M. Atajan, access: 2009, Feb. 30). Due to review the specialist literature, the authors have defined IT competences as a collection of knowledge and skills in information technology and their use in didactic-educational process, experiences in specific problems solving, connected tasks and instructions, attitudes and values in mentioned above scope, indispensable for effective didactic-educational tasks assumed. As a consequence, IT competences have been considered as a entirety of mentioned above elements. The authors quoted theoretical-didactic adult education guidelines in information technology on postgraduate studies. The studies have been a kind of academic adult education as well as development of vocational skills for graduates of a university. More and more adults take an opportunity to develop their vocational skills in postgraduate studies. Permanent training and increasing professional qualifications provide the proper position in the contemporary world.

К вопросу фундаментализации подготовки педагогов в области информатики и информатизации образования

Е. Ы. Бидайбеков, Г. Б. Камалова, Б. Г. Бостанов

КазНПУ имени Абая, Алматы, Казахстан
esen_bidaibekov@mail.ru, g_kamalova@mail.ru, bbgu@mail.ru

Современное образование этапа информатизации и глобальной массовой коммуникации характеризуется активным использованием информационных и коммуникационных технологий (ИКТ) и различных устройств на их базе, обеспечивающих доступ к глобальным ресурсам Интернет; функционирование систем автоматизации управленческой деятельности; применение электронных средств образовательного назначения, реализованных на базе технологий обработки аудиовизуальной информации и информационного взаимодействия; компьютерную психолого-педагогическую диагностику. Это свидетельствует о необходимости подготовки педагогов, в том числе и учителей информатики, к компетентному использованию средств ИКТ в решении профессиональных задач.

В настоящее время в программу их подготовки в педагогических вузах входит множество дисциплин, в числе которых и курсы информатики, и методики обучения различным дисциплинам, которые, так или иначе, освещают особенности осуществления педагогической деятельности в условиях использования ИКТ. Однако этого явно недостаточно для нынешнего периода развития современного образования. Да и изученные при этом конкретные средства и технологии устаревают настолько быстро, что после окончания вуза педагог наверняка столкнется с совсем другими средствами, которыми он не владеет. Поэтому очевидна необходимость обеспечения его общетеоретическими, фундаментальными, не подверженными влиянию времени долгоживущими, инвариантными знаниями в области информатизации образования (ИО) и формирования готовности применить эти знания в будущей профессиональной деятельности, которая существенно расширяется внедрением в ближайшем будущем в среднее образование системы электронного обучения. Приоритетным направлением в обучении педагогов ИО должен стать переход от обучения техническим и технологическим аспектам работы с компьютерными средствами к обучению корректному содержательному формированию, отбору и уместному использованию образовательных электронных изданий и ресурсов, к системной ИО.

В полной мере сказанное можно отнести и к будущим учителям информатики. Однако здесь, поскольку и для самой предметной области «информатика» характерен достаточно высокий темп обновления знаний, необходима фундаментализация в целом всей их профессиональной подготовки, включая и подготовку в области ИО.

Одним из возможных способов обеспечения фундаментализации их подготовки по информатике может быть усиление математической ее составляющей. Добиться его можно, делая акцент на вычислительной информатике [1], объединяющей информационные дисциплины предметной подготовки будущих учителей информатики, связанные посредством математических и информационных моделей и включающей математические основания информатики, формируемые теорией представления числовой информации в памяти ЭВМ, алгоритмы, как формы записи методов вычислений, теорию и практические приемы реализации вычислительных алгоритмов, математическое моделирование и формализацию.

Сказанное предполагает необходимость дальнейшей поисковой работы как по фундаментализации обучения информатике и ИО, так и выделению фундаментальных составляющих методической их подготовки. При этом рассмотрение проблем фундаментализации обучения информатике и ИО и создания системы фундаментальной методической подготовки учителей информатики необходимо осуществлять взаимосвязано.

Фундаментализация подготовки педагогов в целом, обеспечивая их фундаментальными знаниями, позволит не только создать прочную основу для сознательного использования методов и средств информатизации в учебной деятельности, но также сформировать и развить у будущих педагогов компетенций, позволяющих им активно овладевать этими знаниями в настоящем и осваивать новые способы деятельности в будущем.

Литература

1. *Бидайбеков Е. Ы., Камалова Г. Б.* Вычислительная информатика в подготовке учителей информатики // Материалы межд. науч.-методич. конф. «Информатизация образования–2006». — Тула, 2006. — С. 36–49.

To the question of fundamental nature of teacher training in computer science and information of education

E. I. Bidaibekov, G. B. Kamalova, B. G. Bostanov

Kazakh national pedagogical university named after Abai, Almaty, Kazakhstan
esen_bidaibekov@mail.ru, g_kamalova@mail.ru, bbgu@mail.ru

Использование виртуальной среды MOODLE в качестве интерактивного ресурса самостоятельной подготовки студентов

Е. А. Благовещенская[*], Н. В. Попова[†]

[*] *Петербургский государственный университет путей сообщения, Санкт-Петербург, Россия*
kblag2002@yahoo.com

[†] *С. Петербургский государственный политехнический университет, Санкт-Петербург, Россия*
ninavaspo@mail.ru

Применение информационных технологий в высшей школе является одним из ключевых направлений современных исследований и основным подходом совершенствования дидактических средств обучения. Характерной особенностью современного этапа развития компьютерной обучающей среды является не только потребность в новых программных продуктах, но и тщательный и гибкий подбор уже существующих электронных ресурсов для оптимизации преподавания таких фундаментальных дисциплин вузовской подготовки как высшая математика и иностранный язык, которые являются базовыми дисциплинами в подготовке инженеров, и применение схожих методов обучения способствует лучшему усвоению материала в целом.

На сегодняшний день существует несколько десятков платформ электронного обучения, построенных по принципу открытых источников. В исследовании [1] были отобраны девять наиболее популярных открытых платформ и проведено всестороннее сопоставление их возможностей: ATutor (`http://www.atutor.ca`), Dokeos (`http://www.dokeos.com`), dotLRN (`http://www.dotlrn.org`), ILIAS (`http://www.ilias.de/index.html`), LON-CAPA (`http://www.lon-capa.org15`), Moodle (`http://moodle.org`), OpenUSS (`http://www.openuss.org`), SpaghettiLearning (`http://www.spaghettilearning.com`), Sakai (`http://sakaiproject.org`).

Указанные платформы для организации электронного обучения сравнивались по 34 параметрам, сгруппированным в 8 блоков: (1) инструменты управления учебным курсом, (2) возможности администрирования, (3) технические аспекты, (4) возможности адаптации, (5) удобство использования платформы, (6) управление данными пользователя, (7) объекты обучения и (8) средства общения. Согласно проведенному исследованию, явным лидером оказалась система Moodle, которая действительно является удобной и надежной платформой для размещения интерактивных курсов на базе университета. Виртуальная образовательная среда (ВОС) Moodle предлагает широкий спектр возможностей для полноценной поддержки обучения в дистанционной среде. ВОС Moodle располагает большим разнообразием модулей, которые могут быть использованы для создания курсов любого типа, см. [2]. В зависимости от содержания курса и концепции преподавания, создатель курса может включить лишь наиболее подходящие элементы и ресурсы, предоставляемые ВОС Moodle. Интерактивные ресурсы системы Moodle — это лекция, задание, тест, глоссарий, форум, анкета, чат, пакет SCORM, Wiki и Hot Potatoes Quiz. Ресурс ТЕСТ позволяет создавать наборы тестовых заданий, и поэтому он наиболее востребован в преподавании высшей математики.

Что касается использования ВОС Moodle для целей преподавания иностранного языка, то указанная ВОС не предоставляет готового полного курса или программы дисциплины, но предлагает набор возможностей, которые преподаватель может использовать по своему усмотрению в зависимости от того, какая из них является наиболее приоритетной на том или ином этапе обучения (см. `http://moodle.lingua.spbstu.ru/login/index.php`).

Общие компьютерные технологии, применяемые в преподавании различных дисциплин, делают процесс подготовки будущих инженеров целостным и эффективным, способствующим их успешной адаптации в современном информационном поле.

Литература

1. *S. Graf, B. List* An evaluation of Open Source E-Learning Platforms Stressing Adaptation Issues // Proceedings of the Fifth IEEE International Conference on Advanced Learning Technologies. — 2005. — P. 163–165.
2. Moodle: официальный сайт: [веб-сайт]. — 2012. — URL: `http://moodle.org/` (дата обращения: 13. 05. 2012).

Virtual learning environment MOODLE as interactive resource of independent students' work

E. A. Blagoveshchenskaya*, **N. V. Popova**†

* *Petersburg State Transport University, St. Petersburg, Russia*
kblag2002@yahoo.com

† *St. Petersburg State Polytechnical University, St. Petersburg, Russia*
ninavaspo@mail.ru

Информационные технологии в формировании профессиональных компетенций на уроках математики

В. В. Ведищева, Л. Н. Уфимцева

Волгоградский политехнический колледж им. В.И. Вернадского, Волгоград, Россия, vvedisheva@mail.ru

Математическое образование играет важную роль в формировании у обучающихся способности к будущей активной профессиональной деятельности. Достижение этой цели с точки зрения компетентностного подхода должно носить продуктивный характер, а формирование профессиональных компетенций базироваться на понимании роли математики в будущей профессиональной деятельности.

Одной из задач преподавания математики является развитие интереса к дисциплине, что достигается внедрением в учебный процесс инновационных технологий обучения, направленных на подготовку будущего квалифицированного специалиста.

В Волгоградском политехническом колледже им. В.И. Вернадского на кафедре математических и естественнонаучных дисциплин активно применяются информационные технологии обучения, а также цифровые образовательные ресурсы, являющиеся важной составляющей компетентностной модели образования. Большое внимание уделяется работе научно-технического общества «Математика и моя будущая профессия». Важнейшим из средств обеспечения прикладной направленности в преподавании математики является реализация межпредметных связей.

Специфика нашего учебного заведения предполагает использование в преподавании математики межпредметных связей с химией, технологией химического производства, это способствует более полному формированию профессиональных компетенций для будущей практической деятельности.

Чтобы начать работу по выбранной методике преподавания, были скорректированы учебные рабочие программы по математике таким образом, что каждый из разделов дисциплины заканчивается темой «Применение полученных знаний в будущей профессиональной деятельности». Средством реализации такого подхода к изучению материала, является математическое моделирование при решении задач прикладного характера.

Такие задачи традиционно имеют химическое или физическое содержание и находятся на стыке двух дисциплин. Например, по специальности «Химическая технология органических веществ» совместно с преподавателями специальных дисциплин была смоделирована задача прикладного характера по процессу сульфирования и хлорирования. Суть задачи состоит в отыскании оптимальных условий протекания технологического процесса. Необходимо было рассчитать максимальную освещенность для фотохимического процесса.

При изучении темы «Производная и ее приложение» рассматриваются технологические процессы с максимальной скоростью протекания химических реакций. Например, нахождение максимальной скорости окисления окиси азота, этилена.

Работа по применению математического моделирования в прикладных задачах по специальности начинается на уроках математики и имеет свое продолжение в научно-исследовательской работе обучающихся с выходом на научно-практические конференции внутри колледжа, областные и Всероссийские форумы.

Практические задачи решаются с помощью абстрактных математических моделей, в которых реальные величины заменяются математическими понятиями, а их связи функциями, уравнениями, изучаются свойства и особенности математической модели, формируются профессиональные компетенции:

Первый этап — создание математической модели — перевод задачи на математический язык. Этот этап обязательно проходит с преподавателями спец. дисциплин, так как необходимы знания из конкретной ситуации по специальности.

Второй этап — исследование модели, решение математической задачи средствами выбранной теории. Эта задача является основной в курсе математики и призвана обеспечить подготовку будущих специалистов.

Третий этап — интерпретация полученного решения с точки зрения смежной дисциплины, перевод результатов решения математической задачи на язык той отрасли в которой была сформулирована. Поэтому на данном этапе, как и на первом, проводятся консультации с преподавателями спец. дисциплин. Здесь очевидна необходимость изучения математики для будущего специалиста.

Применение математического моделирования при решении задач прикладного характере формирует у студентов следующие компетентности:

- компетентность в сфере самостоятельной деятельности;
- компетентность, основанная на усвоении способов приобретения знаний из различных источников информации;
- компетентность в сфере будущей профессиональной деятельности.

На кафедре математических и естественнонаучных дисциплин смоделированы задачи прикладного характера и разработаны проекты по специальностям «Химическая технология органических веществ» и «Технология жиров и жирозаменителей».

Работа с обучающимися проводится в рамках кружковых занятий, где подбираются задания для выполнения исследовательской работы по решению задач прикладного характера по выбранной специальности. Решение таких задач обучающимися химических специальностей позволяет им прийти к выводу, что очень важно умение пользоваться математическим аппаратом, умение выбрать из многочисленных методов и приемов математики те, которые нужны для решения данной инженерной задачи, и правильно воспользоваться ими.

Итогом проектной деятельности обучающихся явилось применение смоделированных прикладных задач по специальности в реальном дипломном и курсовом проектировании. Работы студентов представлены на областных и Всероссийских студенческих научно-практических конференциях, опубликованы в «Сборниках студенческих работ», отмечены дипломами, сертификатами.

В процессе работы над моделированием прикладных задач у обучающихся формируется умение использовать учебную, справочную, нормативную, литературу. При выполнении проектов исследовательского характера происходит развитие мыслительной и практической деятельности, раскрывается творческий потенциал личности.

Следует отметить, что в дальнейшем у обучающихся, разрабатывающих проекты с применением математического моделирования, формируются профессиональные компетенции, позволяющие самостоятельно пополнять знания и ориентироваться в возрастающем потоке информации. В дальнейшем перспективность и возможность применения полученных знаний обсуждается с преподавателями спец. дисциплин.

На втором и третьих курсах в курсовом и дипломном проектировании продолжается работа по выбранной теме. Проектная деятельность принимает новые формы и продолжает образовательный процесс студента, а сформированные компетенции дают возможность повышать свой профессиональный уровень.

Ведущая роль математического моделирования в проектной технологии обучения направлена на формирование профессиональных компетенций, активной личности, способной самостоятельно строить и корректировать свою познавательную деятельность, повышая уровень самообразовательных умений и способствуя профессиональному росту.

Математическое моделирование прикладных задач по специальности позволяет соединить теоретические знания обучающихся с их потребностями, даёт возможность искать пути расширения применения теоретических знаний в будущей специальности непосредственно в процессе обучения, формирует профессиональные компетенции.

Information technologies in formation of professional competences on the lessons of mathematics

V. V. Vedisheva, L. N. Ufimtseva

Volgograd Polytechnic College of V.I. Vernadsky, Volgograd, Russia
vvedisheva@mail.ru

Дистанционные образовательные технологии в преподавании математики

П. А. Вельмисов, Т. М. Егорова

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия, velmisov@ulstu.ru, egorovatm@ido.ulstu.ru

Будущий инженер или экономист, кроме знаний по предметам специализации, должен обладать информационной культурой и знаниями в области применения средств новых информационных технологий в своей будущей профессиональной деятельности. Это требует дополнения и совершенствования традиционной методики обучения.

В настоящее время наблюдается устойчивая тенденция отставания математического образования в вузах от развития самой науки. Преодоление этого кризиса возможно при смене целей: от цели приобретения знаний, умений и навыков в форме научно-теоретического содержания науки, к цели развития студента как личности, его способностей, творческого потенциала. Указанный взгляд на цели требует и соответствующего отношения к содержанию обучения, соответственно — к средствам новых информационных технологий.

В современных условиях жизни, когда большая часть образовательного контента отстает от создаваемых и используемых технологий на 2-3 поколения, когда всю необходимую информацию можно найти в сети, когда происходит неуклонное уменьшение количества часов, выделяемых на математическое образование в учебных планах технических специальностей, выход видится в применении дистанционных образовательных технологий (ДОТ).

Учебное воздействие со стороны преподавателя в e-learning рассматривается как модерация (регулирование и управление руководством в электронной среде); визуализация содержания, обязательная визуальная и словесная презентация наработок; осуществление обратной связи; благоприятная групповая атмосфера.

От преподавателя требуется новое педагогическое мышление, постоянное совершенствование, владение компьютерными методами сбора, хранения и обработки информации; умение разрабатывать электронные образовательные ресурсы и использовать в своей деятельности инструменты и методики e-learning.

Электронный учебник по дисциплине «Математика» созданный на кафедре «Высшая математика» Ульяновского технического университета, позволяет развивать способности самостоятельного обучения, раскрыть творческий потенциал обучаемого. В университете он является фактически сайтом данной дисциплины, который содержит методические рекомендации студенту по изучению, теоретическую информацию, встроенную систему проверки знаний, терминологические тренинги, виртуальные лаборатории, практикумы, окно доступа в комнату видеоконференцсвязи, выход на видеопортал и электронную библиотеку. Для формирования компетенций в области математики обучаемые решают конкретные прикладные задачи. На кафедре «Высшая математика» для студентов, изучающих специальные курсы современных численных методов, разработан цикл из 5 лабораторных работ, которые должны выполняться в прикладной системе MathCAD, 2001 professional. Для самостоятельной работы студента предусмотрено выполнение лабораторных работ на созданных в программе Adobe Captivate электронных тренажерах. Тренажеры имитируют программную среду MathCAD, имеют 2 режима (демонстрационный и интерактивный), в случае необходимости (ошибки) указывают студенту правильную траекторию выполнения и позволяют приобрести навыки работы с дорогостоящим программным средством, которое не каждый студент может установить на своем компьютере. После выполнения студент должен ответить на контрольные вопросы и переслать их на проверку преподавателю, используя при этом инструменты LMS Moodle. Преподаватель имеет возможность поставить оценку, написать замечания, которые затем будут отображаться в статистике изучения дисциплины студентом наряду с другими параметрами (результаты прохождения тестов, выполнения контрольных работ и т.д.)

Каждый преподаватель кафедры имеет свой уникальный материал и методики. Поэтому встал вопрос объединения уже созданного, апробированного, структурированного материала с возможностью для преподавателя постоянной актуализации, добавления, изменения и расширения имеющегося контента. Было принято решение объединить все ресурсы в единый учебно-методический комплекс по дисциплине как совокупность:

- базовой части;

- вариативной части.

Базовая часть представляет собой объединение следующих составляющих: библиотека учебных модулей, библиотека тестов, дидактические материалы, сведения об авторе, список литературы базовых учебников, практикум для формирования базовых (установленных в ФГОС и РП) компетенций в контексте дисциплины, выходные сведения.

Вариативная часть представляет собой объединение следующих составляющих: записи вебинаров и подкастов учебных он-лайн мероприятий, оперативно изменяемый учебный и организационно-методический материал. Техническая постановка задачи проекта выглядит так:

1. Обеспечить имеющийся выверенный контент защитой от изменения и удаления преподавателем.

2. Обеспечить возможность добавления новых элементов контента, модулей, практических работ преподавателем.

В результате проведенных исследований и сравнения результатов по обоим вариантам был разработан программный код, переопределяющий роль преподавателя на роль ассистента преподавателя для всех существующих элементов курса.

Вновь созданные элементы после выполнения работы данного скрипта изменения не затрагивают. Таким образом преподаватель в рамках курса в каждом элементе неизменяемого контента имеет роль ассистента, что запрещает ему редактировать и изменять другим образом уже настроенную часть, но в рамках курса позволяет создавать и изменять собственные модули, элементы, блоки.

Distance education technologies in the teaching of mathematics

P. A. Velmisov, T. M. Egorova

Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russia
velmisov@ulstu.ru, egorovatm@ido.ulstu.ru

Метод проектов как средство развития интеллектуальных умений у обучающихся в профессиональном образовании колледжа

Н. Н. Головина

Волгоградский политехнический колледж имени В.И. Вернадского, Волгоград, Россия, gnn65@rambler.ru

По мнению А.А. Скамницкого [3], недостатки профессиональной подготовки в средних специальных учебных заведениях обусловлены тем, что обучающейся выступает объектом массового процесса педагогического воспроизводства, при организации процесса обучения недостаточно внимания обращается на возможности предметного содержания при формировании профессиональной компетентности и интеллектуальных умений.

Современные специалисты среднего звена должны быть способными не только к репродуцированию уже имеющихся знаний, но и к творческой деятельности, к нестандартным решениям, поэтому учебный процесс, в колледже необходимо ориентировать на формирование интеллектуальных умений.

В ходе теоретического анализа научно-методической литературы выделена структура интеллектуальных умений обучающихся колледжей: логические; эвристические; оценочно-регулируемые [1].

Основу интеллектуальных умений составляют: анализировать; синтезировать, абстрагировать, сравнивать, обобщать, конкретизировать, классифицировать.

Последнее время идёт использование педагогических технологий. Наиболее эффективной, на занятиях по дисциплине «Информатика и ИКТ» является технология учебного проектирования [4]. Учебный проект направлен на результат, получаемый при решении человеком (обучающимся) значимой для него практической или теоретической проблемы. Результат проектной деятельности представляется в виде некоторого конечного продукта, материального или информационного [2]. В ходе проектной деятельности используются приобретенные ранее знания и умения, извлекаются из разных источников новые знания и осваиваются необходимые способы действия. В основе метода проектов «лежит развитие познавательных навыков учащихся, умений самостоятельно конструировать свои знания, умений ориентироваться в информационном пространстве, развитие интеллектуальных умений и творчества» [4]. В ходе реализации проекта изменяется уровень взаимоотношения преподавателя и студента, отношение к изучаемому материалу: обучающийся более не является пассивным слушателем и исполнителем воли преподавателя, а становится активным деятелем по достижению своих образовательных целей, учебный материал из ранга предмета освоения переводится в ранг средства достижения учебной цели. Преподаватель организует познавательную исследовательскую деятельность обучающихся является компетентным помощником и консультантом. Он вместе с обучающимися находится в поиске наиболее эффективных путей усвоения знаний, поощряет продуктивные способы организации работы, стимулирует обучающихся к рефлексии своей деятельности, осознанию ошибок, их причин, обсуждает меры их устранения [3].

Этапы проектной деятельности:

1. Погружение в проект.
2. Организация деятельности
3. Осуществление деятельности
4. Защита проекта

Обучающиеся с разработанными проектами приняли участие в научно-практических конференциях различных уровней, на которых имели возможность рассказать о своей работе и ответить на вопросы оппонентов. Проектный метод обучения носит комплексный характер, развивающий наибольшее количество интеллектуальных умений [3].

Литература

1. *Головина Н. Н.* Модель формирования интеллектуальных умений студентов при изучении курса «Математика и информатика» / Т.К. Смыковская, Н.Н. Головина // Среднее профессиональное образование. — 2008. — № 12. — С. 36–38.
2. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования / Под ред. Е.С. Полат, и др. — М.: «Академия», 2005. — 272 с.
3. Педагогика профессионального образования / Под ред. В.А. Сластенина. — М.: Изд. Академия, 2007. — 368 с.
4. Педагогические технологии / Под общей редакцией В.С. Кукушина. — М.: ИКЦ «МарТ»: – Ростов н/Д: изд. центр «МарТ», 2006. — 336 с.

Project-based learning as a means of developing the intellectual skills of students in vocational education college

N. N. Golovina

Volgograd Polytechnic College of the V.I. Vernadsky, Volgograd, Russia
gnn65@rambler.ru

Опыт преподавания курса «Математической статистики» в техническом университете с использованием мультимедийных средств и информационных технологий

В. А. Карасев

Национальный исследовательский технологический университет (МИСиС), Москва, Россия
karasev-v-a@yandex.ru

Совершенствование высшего образования, изменение его характера и целей становится все более очевидным приоритетом в развитии стран всего мира. В Российской Федерации при разработке нового стандарта высшего образования предполагается использование компетентностной модели выпускника. Под компетентностным подходом в образовании понимается реализация таких образовательных программ, которые направлены на формирование способности личности самостоятельно применять полученные в процессе подготовки знания и умения.

Одним из важнейших аспектов высшего технического образования является развитие компетентностного подхода в математическом образовании. В рамках этого подхода ставится цель:

– сформировать у студентов убеждение в важности математических методов для решения профессиональных задач;
– поднять уровень использования математического аппарата при изучении общетехнических и профессиональных дисциплин;
– развить стремление к самостоятельной работе и обучению, умение находить и принимать оптимальное решение различных профессиональных задач.

В докладе излагается опыт преподавания курса «Математической статистики» на кафедре математики в Национальном Исследовательском Технологическом Университете (МИСиС) с использованием мультимедийных технологий. Идея мультимедиа заключается в использовании различных способов подачи информации, обеспечения эффективной обратной связи между студентом и преподавателем в процессе обучения.

Схема изучения курса с использованием мультимедийных технологий сводится к следующему:

1. Знакомство с теоретическим материалом на лекциях применяя в демонстрационных целях мультимедийный проектор и компьютер для преподавателя. Использование демонстрационных элементов на лекциях позволяет существенно усилить наглядность изучаемого материала, помогает студенту глубже понять сущность математических методов, заинтересовать студента.

2. Изучение методов или алгоритмов решения задач на практических занятиях на учебных примерах из стандартных задачников, не требующих больших затрат времени и громоздких вычислений.

3. Самостоятельная работа студента во внеучебное время по выполнению индивидуальных заданий или типовых расчетов с контролем выполнения и организаций обратной связи на компьютере.

4. В конце изучения каждого раздела проводится аудиторная контрольная работа, в заданиях которой в компактном виде представлены все темы, включенные в типовые расчеты.

Для организации самостоятельной работы студентов на кафедре высшей математики НИТУ МИСиС под руководством автора была разработана автоматизированная компьютерная система обеспечения практикума по высшей математике (электронный задачник). Практикум предназначен для обучения высшей математике студентов технических вузов в режиме самостоятельных занятий с проверкой ответов в диалоговом режиме. Электронный задачник ориентирован на работу с большими студенческими потоками, включает систему подготовки неповторяющихся заданий примерно одинаковой сложности практически по всем разделам высшей математики, изучаемым в технических вузах, и ответов к ним, защищенных оригинальной системой кодирования.

Программная система, реализующая информационный и контролирующий комплекс, представляет собой систему управления реляционной базой данных, предназначенной для хранения и использования заранее подготовленных вариантов исходных данных и ответов к заданиям. Практикум разработан в ОС Windows, функционирует в среде Internet с доступом через Web-сервер в режиме самостоятельных занятий студентов. Представление математических формул в общепринятой математической символике обеспечивается специальным редактором формул (язык XML-MathML).

Работа с электронным задачником начинается с регистрации студента путем введения номера группы и номера по журналу. С помощью многоуровневого меню, реализованного на экране в виде оглавления, студент выбирает тему и номер задания. Далее студент получает краткое описание задания, условие, в общепринятой математической символьной форме и требуемую точность получаемого ответа.

В системе в диалоговом режиме реализуется контроль результатов. По каждому заданию студент может ввести полученный им результат (как промежуточный, так и окончательный) и получить ответ, верен его результат или нет. Тем самым, вместе с консультациями преподавателя, для студента создается обратная связь, активизирующая его самостоятельную работу.

Кроме комплекса выдачи индивидуального задания и диалоговой системы проверки расчетов, электронный задачник содержит информационный комплекс, который включает подробное описание каждого типового расчета. Оно состоит теоретической части, рекомендаций по выполнению расчета и примеров решения.

В курсе математической статистики используются, как правило, типовые расчеты, в которых условия задач одинаково, а варианты различаются числовыми значениями. Приведем пример такого типового расчета: «Сравнение двух случайных выборок».

Содержание типового расчета: Заданы результаты двух серий измерений (две случайные выборки) объема n_1 и $n2$. Требуется:

- найти по каждой выборке оценку математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения;

- предполагая, что результаты измерений в каждой серии независимы и имеют нормальное распределение, найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения с доверительной вероятностью ;

- с уровнем значимости а проверить гипотезы о равенстве дисперсий и о равенстве математических ожиданий этих двух выборок при альтернативных гипотезах: дисперсии не равны друг другу, математические ожидания не равны друг другу;

- проверить гипотезу о нормальном распределении объединения данных двух выборок, используя интервалы равной вероятности в количестве L;

- построить гистограмму объединения данных двух выборок.

При формировании данных этого типового расчета выбираются математические ожидания и средние квадратические отклонения для каждой выборки исходя из содержания задачи, которое определяется согласно специальностям факультета. Затем формируются случайные выборки с помощью датчика псевдослучайных чисел с нормальным законом распределения. Таким образом, получаются данные, имитирующие реальные результаты эксперимента.

В докладе приводятся демонстрационные материалы, используемые на лекциях, варианты контрольных работ, демонстрируется работа электронного задачника-тренажера.

The experience of teaching the course «Mathematical statistics» at the technical University with the use of multimedia and information technology

V. A. Karasev

National University of Science and Technology "MISIS", Moscow, Russia
karasev-v-a@yandex.ru

Применение современных информационных технологий в преподавании высшей математики

В. В. Карасева

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Москва, Россия, vkaraseva@yandex.ru

Совершенствование образования становится все более очевидным приоритетом в развитии всех стран мира. В России Федеральные государственные образовательные стандарты третьего поколения призваны стать стандартами, обеспечивающими дальнейшее развитие высшего профессионального образования с учетом требований рынка труда и имеют выраженный компетентностный характер.

Компетентностный подход предусматривает иную роль студента в учебном процессе. В его основе — работа с информацией, моделирование, рефлексия. Студент должен уметь не просто воспроизводить информацию, а самостоятельно мыслить и быть готовым к реальным жизненным ситуациям. Перевести образовательный процесс на этот новый качественный уровень не возможно без эффективного методического и информационного обеспечения отечественной сферы образования, внедрению в учебный процесс новейших информационных технологий. Однако многие существующие программы не удовлетворяют потребностям преподавателей и студентов. Кроме того, в преподавании многих предметов, особенно математических и естественно-научных, преобладает традиционный подход обучения.

Для разрешения этого противоречия на кафедре высшей математики НИТУ МИСиС была разработана автоматизированная компьютерная система обеспечения практикума по высшей математике (электронный задачник). Практикум предназначен для обучения высшей математике студентов технических вузов в режиме самостоятельных занятий с проверкой ответов в диалоговом режиме. Электронный задачник ориентирован на работу с большими студенческими потоками, включает систему подготовки неповторяющихся заданий примерно одинаковой сложности практически по всем разделам высшей математики, изучаемым в технических вузах, и ответов к ним, защищенных оригинальной системой кодирования.

Программная система, реализующая информационный и контролирующий комплекс, представляет собой систему управления реляционной базой данных, предназначенной для хранения и использования заранее подготовленных вариантов исходных данных и ответов к заданиям. Практикум разработан в ОС Windows, функционирует в среде Internet с доступом через Web-сервер в режиме самостоятельных занятий студентов. Представление математических формул в общепринятой математической символике обеспечивается специальным редактором формул (язык XML-MathML).

Часть работы выполнена при поддержке проекта №3.2.3/6542 «Методология проектирования информационных ресурсов в формате SCORM 2004: модели, методы, образовательные технологии» АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)».

На базе НИЯУ МИФИ разработаны отдельные электронные учебные курсы по прикладным предметам: «Финансовая математика» «Дискретная математика», «Методы оптимизации и исследование операций» и т.д.

Курсы реализованы в виде SCORM-пакета и может взаимодействовать через интернет или интранет с системами управления обучением LMS, поддерживающими стандарт SCORM 2004 (например, свободно распространяемой системой Moodle).

Курсы состоят из опорного конспекта лекций, по всем основным темам преподаваемого предмета. Все темы заканчиваются модулями с тестовыми заданиями, результаты выполнения которых суммируются и по выходу из электронного курса передаются в систему управления обучением LMS.

В настоящий момент проводится работа по сбору и обработке статистических данных, с целью определения эффективности предложенных методик по сравнению с традиционными методами обучения. Однако, уже получены предварительные результаты, показывающие что

– применение информационных обучающих технологий дает возможность оперативно модифицировать учебные материалы
– применение информационных обучающих технологий делает учебные материалы доступными в любой момент времени
– тестовые системы предоставляют особые возможности для создания и модификации банка контрольных заданий, что позволяет максимально индивидуализировать контрольные мероприятия.
– применение компьютера существенно облегчает работу преподавателя по проверке студенческих работ, что сокращает время между этапами выполнения контрольного задания студентами, анализа его результатов и этапом коррекции.
– система проверки ответов и подробное описание каждого задания, создает возможности для студентов обучаться самостоятельно решать поставленные задачи.

The use of a new information technology in higher mathematics teaching

V. V. Karaseva

National Research Technological University "MISiS", Moscow, Russia
vkaraseva@yandex.ru

Алгоритм формирования индивидуальных заданий в системах дистанционного обучения

А. И. Кибзун, А. В. Наумов, А. О. Иноземцев

Московский авиационный институт, Москва, Россия
a.inozemtsev@me.com

В данной работе рассматривается задача формирования индивидуальных заданий в системе дистанционного обучения CLASS.NET [1, 2], разработанной в Московском авиационном институте.

На данный момент не разработано формальных методов формирования учебных материалов, весь процесс формирования материалов и их оценки лежит на эксперте – преподавателе.

Постановка задачи. Пусть существует множество (контент) состоящее из $n \in \mathbb{N}$ задач, содержащее в себе непересекающиеся подмножества $Z_1, \ldots, Z_m$ задач m различных типов и задачи каждого типа могут иметь различную сложность, измеряемую в определенной шкале. Матрицу A размерности $n \times m$:

$$A_{n\times m} = \|a_{ij}\|, \; a_{ij} = \begin{cases} 1, & z_i \in Z_j, \\ 0, & z_i \notin Z_j, \end{cases}$$

назовем матрицей принадлежности. Она определяет принадлежность имеющегося контента (набора задач) из Z типам $1, \ldots, m$. Если $a_{ij} = 1$, то i-ая задача имеет j-ый тип. Индивидуальным заданием будем называть подмножество задач из Z.

Пусть задан вектор $w = (w_1, \ldots, w_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, где w_i – сложность i-ой задачи. Введем в рассмотрение вектор $x, \; x_i \in \{0, 1\}$ компоненты которого будут принимать значение 1, если задача присутствует в индивидуальном задании и 0, если задача отсутствует.

Требуется составить множество индивидуальных заданий из k задач, принадлежащих разным типам, предполагая, что $k \geqslant m$. Все индивидуальные задания должны иметь суммарную сложность в пределах $[c-\varepsilon, \; c+\varepsilon]$, где $c, \; \varepsilon \in \mathbb{R}_+$, c – требуемый уровень сложности, ε – параметр, задающий диапазон допустимых изменений сложности индивидуального задания.

Пусть $X^\varepsilon(i)$ – матрица, зависящая от параметра i, определяемого ниже, столбцами которой являются вектора, принадлежащие множеству $\bigcup\limits_{j=1}^{i-1} X_*^j$, где

$$V_*^j = \operatorname{Arg} \min_{x,\varphi\in B_j} \varphi,$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-07-00191-а.

$$B_j = \left\{ (x,\varphi): \quad \begin{matrix} A^\top x \geqslant e_m, \\ {e_n}^\top x = k, \\ \varphi \geqslant 0, \\ \varphi \leqslant \varepsilon, \\ c - w^\top x \leqslant \varphi, \\ w^\top x - c \leqslant \varphi, \\ \left(X^\varepsilon\left(j\right)\right)^\top x < k \cdot e_s, \\ x \in \{0,1\}^n. \end{matrix} \right\}, \tag{1}$$

$j = \overline{1,\ l}$, $X_*^j = \left\{ x_*^j : \left(x_*^j, \varphi_*^j \right) \in V_*^j \right\}$, s — текущее число полученных индивидуальных заданий (число столбцов матрицы $X^\varepsilon(i)$), вектора $e_m = (1,\ldots,1)^\top$, $e_n = (1,\ldots,1)^\top$ и $e_s = (1,\ldots,1)^\top$ имеют размерности m, n и s соответственно, а величина l определяется в результате решения задачи (1), до тех пор пока не окажется, что $X_*^j \neq \varnothing$. Здесь $X^\varepsilon\left(j\right)$ – матрица, столбцы которой задают все индивидуальные задания, найденные к j-ой итерации. Обозначим $X^\varepsilon = X^\varepsilon\left(l\right)$ – искомая матрица индивидуальных заданий.

Подход к решению. Для решения рассматриваемой задачи разработана оригинальная модификация метода ветвей и границ (branch and bound) [3] и доказана ее сходимость.

Литература

1. Система дистанционного обучения Class.net [Электронный ресурс]. — URL: `http://distance.mai.ru/` (дата обращения 10.02.2013).
2. *Кибзун А. И., Вишняков Б. В., Панарин С. И.* Оболочка системы дистанционного обучения по математическим курсам // Вестник компьютерных информационных технологий. — 2008. — № 10. — С. 43–48.
3. *Land A., Doig A.* An automatic method of solving discrete programming problems // Econometrica. — 1960. — Vol. 28, № 3. — P. 497–520.

Algorithm of generating individual problem sets in learning management systems

A. I. Kibzun, A. V. Naumov, A. O. Inozemtsev

Moscow aviation institute, Moscow, Russia
a.inozemtsev@me.com

Об опыте разработки и внедрения в учебный процесс систем и сценариев виртуальной реальности

М. М. Лаврентьев*, Т. С. Васючкова*, Л. В. Городняя*, М. А. Держо*, Н. А. Иванчева*, А. Г. Минак*, В. И. Новожилова*, В. С. Бартош†, И. В. Белаго†

* *Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), Новосибирск, Россия,*
mmlavrentiev@gmail.com, tava@mail.ru, lidvas@gmail.com, m_ derjo@mail.ru, iva@ci.nsu.ru, minak@ngs.ru, valentina.novozhilova@uriit.ru

† *Институт автоматики и электрометрии СО РАН (ИАиЭ СО РАН), Новосибирск, Россия*
vas@sl.iae.nsk.su, bel@sl.iae.nsk.su

В статье рассматривается опыт разработки и использования инновационных технологий виртуальных миров для активизации и повышения эффективности учебного процесса.

Видеоролик с демонстрацией урока размещен по ссылке (`http://www.youtube.com/watch?v=Yq7z1-4ClZM`). При обсуждении новых образовательных технологий сегодня все чаще упоминаются технологии виртуального мира и систем виртуальной реальности. Виртуальный мир, его уникальные возможности, метафора построения кардинально меняют характер учебного процесса, создают новые стимулы для проведения обучения как в очном, так и в дистанционном форматах.

Кафедра Систем информатики Факультета информационных технологий Национального Исследовательского Государственного Университета (НГУ) всегда уделяла должное внимание разработке инновационных технологий обучения и внедрению их в учебный процесс. Особое место в ряду этих технологий заняли виртуальные миры. Преподаватели кафедры в сотрудничестве со специалистами Института Автоматики и Электрометрии СО РАН, компании СофтЛаб-НСК разработали проект, цель которого — дать школе и ВУЗу новые образовательные технологии для активизации учебного процесса, повышения его эффективности, результативности и привлекательности для учащихся.

Проект – Виртуальная Деятельностная Образовательная 3-D Среда (ВДОС), реализует технологии, погружающие участников учебного процесса в виртуальные миры, где они получают уникальные возможности для изучения и освоения материала, взаимодействия и общения. Участники учебного процесса при этом представлены аватарами, работающими в виртуальных классах. ВДОС может использоваться как удаленными участниками при дистанционном образовании, так и в реальных классах и аудиториях при очном обучении.

Учебно-методический контент, используемый ВДОС, формируется и поддерживается посредством широко известной и распространенной среды Moodle, в которую могут быть загружены учебные материалы по любому предмету. Участники учебного процесса — учитель и ученики посредством своих аватаров встречаются и проводят занятия в виртуальных классах. При этом при помощи специального медиаэкрана в виртуальной аудитории они могут использовать контент, хранимый в Moodle, размещенный на Youtube (фильмы, ролики, видеолекции), других источниках Интернета. Общение участников возможно как голосовое, так и посредством чата.

Образовательная среда ВДОС прошла апробацию в учебном процессе и была представлена преподавателям школ и ВУЗов на учебно-методических семинарах и научной и профессорского-преподавательской общественности на научно-практических конференциях.

Центральным моментом таких презентаций являлась демонстрация возможностей виртуальной дистанционной 3D образовательной среды (ВДОС) на примере подготовки к ЕГЭ по информатике.

Макетный образец системы экспонировался на УчСиб 2012, где был удостоен Большой золотой медали. Примечателен яркий интерес школьников среднего звена к работе с аватарами.

В перспективе возможности проекта видятся следующим образом:

– 3-х мерное виртуальное пространство как дистанционная среда полноценного обучения по любым дисциплинам;
– виртуальные лаборатории с эффектом присутствия для проведения учебных экспериментов и проектной деятельности на уровне реального общения без географических границ;
– логическое формирование учебных групп, обеспечивающее социально-этический контекст обучения и воспитания в позитивном творчестве и производстве;
– обустройство тиражируемых педагогических технологий активного обучения по полному циклу школьных дисциплин на примере подготовки к ЕГЭ по информатике;
– перспектива принципиального решения проблем культурного разнообразия и кадрового дефицита, а также смягчение проблем удаленных территорий;
– возможность индивидуального гибкого управления темпом и глубиной обучения в зависимости от целей и категорий обучаемых;
– инструментальная среда конструирования учебных тренажеров для раннего обучения информатики на основе опыта новосибирских Школ юных программистов, а также специализация дидактического материала по информатике для профориентации в направлении инженерного и среднего специального образования.

Литература

1. *Лаврентьев М. М. и др.* «Виртуальная 3D образовательная среда – новый подход к подготовке к ЕГЭ по информатике» // Материалы конференции «Телематика», Санкт-Петербург, ИТМО, 2012 г.
2. *Лаврентьев М. М. и др.* «Виртуальная деятельностная образовательная среда(ВДОС) – инновационный 3D-инструмент обучения и подготовки к ЕГЭ с использованием ДОТ», Материалы Десятой

открытой Всероссийской конференции «Преподавание информационных технологий в Российской Федерации», 16–18 мая 2012 г., г. Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова

Systems and scenarios of virtual reality in the educational process: experience and implementation

M. M. Lavrentiev*, T. S. Vasyuchkova*, L. V. Gorodnyaya*, M. A. Derzho*, N. A. Ivancheva*, A. G. Minak*, V. I. Novozhilova*, V. S. Bartosh†, I. V. Belago†

* *Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia, mmlavrentiev@gmail.com, tava@mail.ru, lidvas@gmail.com, m_derjo@mail.ru, iva@ci.nsu.ru, minak@ngs.ru, valentina.novozhilova@uriit.ru*

† *Institute of Automation and Electrometry Siberian Branch of Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia vas@sl.iae.nsk.su, bel@sl.iae.nsk.su*

Вычислительный эксперимент, как основной инструмент познания в математическом моделировании

А. И. Лебо, И. Г. Лебо

МГТУ МИРЭА, Москва, Россия
lebo@mirea.ru

Важную роль в изучении закономерностей объективного мира играет математическое моделирование. Наряду с теорией и практикой математическое моделирование является одним из основных методов познания [1]. Эффективным инструментом познания в математическом моделировании является вычислительный эксперимент (как теоремы и доказательства в теории, наблюдения и измерения в практике). При этом, практика остается «критерием истинности», то есть «завершающим звеном в цепи познания».

Грамотно сформулированный и поставленный вычислительный эксперимент позволяет существенно удешевить исследования при сохранении их актуальности и познавательности. Это свойство является чрезвычайно важным при проведении научных исследований студентами и аспирантами и подготовке ими дипломных проектов и диссертаций.

В докладе приводятся основные принципы постановки и проведения вычислительных экспериментов на примерах научных исследований, выполненных аспирантами МГТУ МИРЭА.

Приведены результаты решения трех задач: (1) развитие модели переноса энергии в турбулентной плазме [2], и интерпретация с ее помощью результатов конкретных натурных экспериментов по взаимодействию мощных лазерных импульсов с мало плотными конденсированными мишенями, выполненных на йодном лазере «PALS» [2]; (2) расчеты динамики сжатия лазерных термоядерных мишеней (описание основных идей и физических процессов, заложенных в концепцию лазерного термоядерного синтеза можно найти в [4]); (3) расчеты кинетики α-частиц в сжатой плазме с учетом влияния спонтанных магнитных полей.

Решались численно двумерные нелинейные уравнения газовой динамики и теплопереноса [5], кинетики термоядерных реакций, генерации и эволюции спонтанных магнитных полей, кинетики переноса быстрых частиц в плазме с учетом влияния этих полей.

Сформулированы методические рекомендации для постановки и проведения вычислительных экспериментов.

Литература

1. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование. — М.: Физматлит, 1997.
2. *Лебо А. И., Лебо И. Г.* Взаимодействие мощных лазерных импульсов с малоплотными мишенями в экспериментах на установке “PALS”. // Мат. моделирование. — 2009. — Т. 21, № 1. — С. 75–91.

3. *Jungwirth K. et al.* The Prague Asterix Laser System // Phys. Plasmas. — 2001. — Vol. 8. — P. 2495–3006.
4. *Басов Н. Г., Лебо И. Г., Розанов В. Б.* Физика лазерного термоядерного синтеза. — М.: Знание, 1988.
5. *Лебо И. Г., Тишкин В. Ф.* Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах ЛТС методами математического моделирования. — М.: Физматлит, 2006.

Computer experiment, as basic tool of knowledge in the mathematical modeling

A. I. Lebo, I. G. Lebo

MSTU MIREA, Moscow, Russia
lebo@mirea.ru

Система Intermay как средство контроля текущих знаний студентов

С. Б. Луковкин, Л. И. Хохлова

Мурманский государственный технический университет, Мурманск, Россия, kendato@rambler.ru, xoxlovaluda@rambler.ru

Происходящие в обществе процессы информатизации и компьютеризации затрагивают практически все сферы социума и приводят к значительным изменениям в жизни людей. В полной мере это относится и к сфере образования. Постоянная модернизация общества требует непрерывного обучения людей на протяжении всей жизни. Поэтому, обеспечение равного доступа к образованию для всех членов общества, возможность свободно развивать свои способности в выбранном направлении — важная задача современности. Применение информационных технологий призвано обеспечить возможность получения нужного образования всеми желающими, независимо от места их проживания. Одним из инструментов достижения этой цели является дистанционное обучение (ДО) — важный признак перемен в сфере образования: возникают дистанционные университеты, виртуальные аудитории и т.п. ДО внедряется в образовательный процесс и на дневных факультетах ВУЗов, там, где контакт преподавателя и студента традиционно проходил в очной форме. Электронные учебники, конспекты лекций, компьютерное тестирование — это уже реальность современного обучения.

Важным элементом образовательного процесса является контроль уровня знаний, которым овладел студент в процессе обучения. В последние годы широкое распространение приобрели методы тестирования с использованием компьютера, так называемое электронное тестирование. Дальнейшее распространение в будущем этой формы проверки знаний, на наш взгляд, не вызывает сомнений. Однако, в настоящее время преобладающей формой е-тестирования является метод, при котором тестируемый должен выбрать правильный ответ из некоторого набора предлагаемых вариантов ответов, проставляя «галочку» в соответствующее поле. При этом преподаватель не может проконтролировать мотив, на основе которого студентом был сделан выбор правильного ответа, более того, преподаватель не может быть уверен даже в том, что этот выбор сделал именно тот студент, на чьё имя была заполнена соответствующая форма.

Мы предлагаем использовать в некотором смысле новую форму удалённого е-тестирования – видео тестирование. Одна из возможных программных реализаций такого подхода носит название «Intermay» и проходит сейчас тестовые испытания в рамках учебного процесса по математике и информатике в Мурманском техническом государственном университете.

Суть видеотестирования заключается в следующем. Преподаватель разрабатывает набор вопросов по некоторой теме изучаемой дисциплины и располагает их на сайте в Интернете. Для прохождения тестирования студенты должны иметь ПК с веб-камерой и микрофоном и, конечно, широкополосный выход в Интернет. Этим требованиям отвечают сейчас все стандартные ноутбуки. Студенты в удобное для себя время заходят на сайт, регистрируются, выбирают нужный тест и отвечают на предложенные вопросы перед видеокамерой. На экране появляется вопрос, студент отвечает на него в течение заданного преподавателем времени, а ответ записывается в видеофайл, который хранится на сервере. Преподаватель в удобное для себя время может просмотреть записанные ответы студентов, выставить оценку, отправить студенту по e-mail какие-либо замечания и комментарии.

Такой способ тестирования наиболее приближается к обычному опросу студентов в рамках экзамена, зачёта или коллоквиума. При этом студент отвечает на предлагаемые вопросы тогда, когда он готов и когда это ему удобно. С другой стороны, преподаватель проверяет видеотесты в удобное для себя время. Видеофайлы с ответами хранятся на сервере и могут просматриваться неоднократно.

Итак, с помощью системы Intermay можно:

– организовать систему мониторинга качества обучения – быструю и эффективную с точки зрения устных ответов;
– компенсировать невозможность выслушивания ответов всех учащихся во время занятий, что послужит, в том числе и развитию речи учащихся
– организовать оценку знаний детей-инвалидов или часто болеющих студентов;
– организовать оценку знаний при заочной (экстернатной) форме обучения;
– повысить эффективность работы с одаренными детьми (за счет реализации в рамках системы дополнительных заданий повышенного уровня).

Система Intermay также позволяет оперативно отслеживать работу преподавателей, контролировать объективность выставленных оценок и собирать статистику по количеству проведенных тестирований, полученным оценкам и другим параметрам.

В системе размещаются вопросы для различных групп обучающихся и предметов обучения. Система Intermay может быть реализована:

– как самостоятельный интернет-портал;
– как система, интегрированная с порталом образовательного учреждения.

Ознакомиться с демо-версией системы Intermay можно по адресу `http://intermay.smbonline.ru/`. Особенно эффективно систему Intermay можно использовать при тестировании студентов по гуманитарным дисциплинам.

Intermay system as a means of monitoring of current knowledge of students

S. B. Lukovkin, L. I. Hohlova

Murmansk State Technical University, Murmansk, Russia
kendato@rambler.ru, xoxlovaluda@rambler.ru

Использование информационных технологий при обучении математике

Г. С. Лукьянова, К. В. Бухенский, Н. В. Елкина

Рязанский государственный радиотехнический университет, Рязань, Россия
lukyanova.g.s@rsreu.ru, bukhensky.k.v@rsreu.ru, elkina.n.v@rsreu.ru

Обучение математике в техническом вузе направлено не только на овладение студентами необходимыми математическими знаниями, но и на формирование общекультурных и профессиональных компетенций, связанных со способностями работать с информацией с помощью компьютера и в глобальных сетях. Использование информационных технологий на занятиях позволяет формировать требуемые компетенции и активизирует познавательную деятельность студентов, что ведет к лучшему усвоению изучаемого материала.

Применение информационных технологий преподавателями кафедры высшей математики РГРТУ развивается в двух направлениях:

– использование мультимедийных средств и возможностей мобильных пользовательских устройств (смартфонов, планшетов, нетбуков и т.п.) на аудиторных занятиях;
– использование дистанционных учебных курсов.

Рассмотрим возможности применения мобильных устройств на практических занятиях. При изучении темы «Кратные интегралы» использование таких программ как Quick Graph (для IPad и IPhone) или MathStudio (для IPad или на Андроид) позволяет получать качественные двумерные и трехмерные графики за считанные секунды и сэкономить время для отработки навыков расстановки пределов при вычислении кратных интегралов. On-line система Wolfram Alpha (http://www.wolframalpha.com/) будет полезна при изучении таких тем, как нахождение производных и интегралов, решение дифференциальных уравнений, на занятиях по дискретной математике, так как она позволяет рассмотреть этапы решения задачи «по шагам».

Дистанционные курсы (ДК) используются при организации самостоятельной работы студентов. В настоящее время разработаны ДК по всем разделам математики, изучаемым в нашем вузе. Они регистрируются в ОФЭРНИО и используются при обучении всех студентов заочного отделения, а также для изучения отдельных разделов математики студентами очного отделения.

Все курсы разработаны в среде Moodle, содержат интерактивные лекции, практикумы, задания и тесты. В лекциях используются разнообразные цветовые оформления, рисунки, в том числе анимированные, и аудиофайлы, что отличает их от печатных аналогов. ДК включают в себя ссылки на видео-лекции, учебные фильмы, презентации и видеоролики, созданные на кафедре или находящиеся в свободном доступе в интернете.

Использование ДК позволяет студенту изучать учебный материал в удобное время и с комфортной скоростью. В процессе обучения студенты имеют возможность общаться друг с другом и преподавателем на форумах и в личных сообщениях, поэтому ни один вопрос не остается без ответа. Итоговый контроль за усвоением учебного материала проводится очно, что исключает возможность несамостоятельного выполнения заданий.

Практика показала, что при использовании ДК студентами заочной формы обучения в среднем на 0.5 повышается экзаменационный балл по математике. Проведенное анкетирование выявило, что 82% студентов не испытывали особых сложностей при работе с ДК и оценили его полезность для подготовки к экзамену. Вынесение раздела «Дискретная математика» для дистанционного изучения студентами некоторых направлений очной формы обучения позволило освободить аудиторные часы для углубленного изучения других тем и, вместе с тем, появляется возможность достаточно подробно рассмотреть вопросы этого раздела, предусмотренные рабочими программами. Проведенные по итогам дистанционного обучения контрольные работы и тесты показали, что студенты, активно работавшие в ДК, освоили данный раздел на оценки 4 и 5. В настоящее время наряду с аудиторными занятиями по «Теории вероятностей и математической статистике» планируется использовать ДК.

Использование информационных технологий способствует повышению успеваемости студентов, а также позволяет углубить взаимодействие преподавателей и студентов.

The usage of information technology in teaching mathematics

G. S. Lukyanova, K. V. Bukhensky, N. V. Elkina

Ryazan state radio engineering university, Ryazan, Russia
lukyanova.g.s@rsreu.ru, bukhensky.k.v@rsreu.ru, elkina.n.v@rsreu.ru

Точность и надежность тестирования. Теоретико-игровой подход

М. М. Луценко, Н. В. Шадринцева

Петербургский государственный университет путей сообщения, Санкт-Петербург, Россия
ML4116@mail.ru, shadrinceva@mail.ru

Важнейшая задача тестирования — оценка уровня знаний испытуемого по результатам теста. Задача становится особенно актуальной, если по результатам тестирования принимают административные решения: выдача аттестата об образовании, зачисление в ВУЗ и др. Анализу тестов и оценкам их точности посвящена обширная литература (см. [2, 5]).

Однако, все оценки точности (надежности) тестирования проводят в предположении о нормальности распределения уровней знаний испытуемых.

Но с этим предположением трудно согласиться. При тестовом контроле уровня знаний учащихся существенная часть процесса обучения посвящена подготовке к прохождению теста.

Так как, зная форму теста, темы и типы задач, учащиеся способны так трансформировать свои знания, что объективная оценка знаний будет затруднена.

Таким образом, мы имеем конфликтную ситуацию (игру), участники которой: испытуемый, стремящийся меньше времени затратить на подготовку к тесту и при этом получить наивысший балл и лицо, принимающее решение (Статистик), стремящимся наиболее точно оценить уровень знаний испытуемого.

Следовательно, для оценки уровня знаний учащегося следует использовать не классические статистические модели, а теоретико-игровые, которые лучше описывают возникающую конфликтную ситуацию.

Для оценки точности (надежности) тестирования мы составим статистическую игру, в которой Статистик стремится наиболее точно оценить состояние (действие) Природы по результату наблюдения за некоторой случайной величиной $\mathbf{X}_\theta$ (результатом теста), распределение которой зависит от состояния Природы θ (уровня знаний тестируемого). Мы будем считать известными: Θ - множество допустимых состояний Природы, D — множество допустимых решений (оценок) Статистика, X — множество наблюдений (значений случайной величины $\mathbf{X}_\theta$), $\{P_\theta(x)\}_{\theta\in\Theta}$ — семейство распределений случайных величин $\mathbf{X}_\theta$. Таким образом, игроки выбирают: Природа значение параметра θ, Статистик решение d. Так как решение Статистика зависит от наблюдаемого им значения случайной величины $\mathbf{X}_\theta$, то за его чистую стратегию в статистической игре следует брать решающую функцию $\delta : X \to D$. Множество решающих функций мы обозначим через $\mathbf{D} = D^X$. Если множество наблюдений X конечно и число его элементов равно N , то решающую функцию можно записать в виде вектора $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N)$, где $d_k = \delta(x_k)$, $k = \overline{1, N}$.

В докладе будут рассмотрены три статистические игры "тестирование"с пороговыми функциями выигрыша (см $[1, 3, 4]$) и получены их решения: вероятность правильной оценки Статистиком состояния Природы (уровня знаний испытуемого), наихудшее распределение параметра θ, оптимальную рандомизированную решающую функцию Статистика.

Решение этих игр было найдено с помощью стандартных подпрограмм решения экстремальных задач MS Excel без предположений о нормальности распределения уровней знаний испытуемых. Из выше сказанного можно сделать вывод о том, что если испытуемому известны критерии выставления оценок, то он сможет так организовать свою подготовку к тестированию, что эти оценки будут плохо отражать уровень знаний испытуемого. Следовательно, тестирование не может быть единственным критерием оценки уровня знаний учащегося.

Литература

1. *Луценко М. М.* Теоретико-игровой подход к оценке сложности тестирования // Математическая теория игр и ее приложения. — Т. 1, №. 4. — С. 63–77.
2. *Нейман Ю. М.,Хлебников В. А* Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов. — М.: Изд-во «Прометей», 2000. — 168 с.
3. *Луценко М. М.,Шадринцева Н. В.* О точности педагогического тестирования // Известия ПГУПС. — 2011. — Вып. 1.
4. *Луценко М. М.,Шадринцева Н. В.* Reliability of test score // Известия ПГУПС. — 2012. — Вып. 4.
5. Handbook of Modern Item Response Theory / Editors Win J.van der Linden, R.K. Hambleton. — N.Y.: Springer-Verlag, 1997. — 510 p.

Accuracy and reliability of testing. Game-theory approach

M. M. Lutsenko, N. V. Shadrintseva

Saint-Petersburg Transport University, Saint-Petersburg, Russia
ML4116@mail.ru, shadrinceva@mail.ru

Некоторые результаты, полученные на факультете ВМК МГУ в 2012 году

Е. И. Моисеев, С. А. Ложкин, В. В. Тихомиров

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Эти результаты уже используются в учебном процессе при реализации образовательной программы «Прикладная математика и информатика» (интегрированный магистр). Объем статьи не позволяет полностью, сформулировать все результаты и описать все стороны учебного процесса, педагогические стратегии для подготовки специалистов высокой квалификации, способных решать важные научные и практические задачи. Вот часть этих результатов.

С помощью спектрального метода решена задача для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в трехмерной области. Исследованы обратные задачи для уравнений математической физики, описывающих стационарные и нестационарные процессы в геофизике, электродинамике, электрофизиологии.

На основе метода дискретных источников разработана и реализована математическая модель оптической антенны, представляющая собой совокупность наноразмерных диэлектрических частиц, расположенных внутри металлической пленки на прозрачной подложке.

Проведены исследования чувствительности различных компонент электромагнитного поля при морских зондированиях неоднородностей под морским дном. Разработан бимодальный метод решения двумерной обратной задачи магнитотеллурического зондирования при морских исследованиях. Разработана информационно-вычислительная система вариационной ассимиляции геофизических данных наблюдений в акваториях Мирового океана с учетом приливообразующих сил.

Разработана 2D-подпись для идентификации наркотических веществ. Предложен метод улучшения качества изображения в устройства пассивной THz-спектроскопии. Обнаружено формирование солитона на поверхности фотонного кристалла.

Методами теории катастроф проведен анализ процессов перезамыкания магнитных силовых линий в плазме. Проведено исследование математических свойств модели вертикальной неустойчивости плазмы в установках токомак.

Разработаны новые вычислительные эллипсоидальные методы для решения задач достижимости и синтеза управлений при неопределенности.

Получены предельные теоремы теории вероятностей, исследованы оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме, построены асимптотически наиболее мощные критерии в задачах проверки гипотез, доказана сходимость EM-алгоритма.

Разработана математическая модель иерархической контрольной структуры. Для этой модели поставлена и решена задача оптимальной организации: найдена стратегия, обеспечивающая невыгодность правонарушений и коррупционных сделок при минимальных затратах на функционирование структуры.

Исследованы методы обработки биометрической информации для задач защиты и аутентификации персональных данных.

Получены асимптотические оценки высокой степени точности функции Шеннона для сложности формул стандартного базиса, имеющих ограниченную глубину альтернирования. Показано, что схема фермионного вычисления с управлением в виде изменения внешнего поля и туннелирования способна реализовать любой квантовый алгоритм за время порядка квадрата от времени на абстрактном квантовом компьютере.

Разработаны квантовомеханические модели и проведены суперкомпьютерные расчеты устройств памяти, основанной на фазовых переходах.

Разработана имитационная модель поведения вредоносного программного обеспечения в глобальных компьютерных сетях и метод обнаружения вредоносного исполняемого кода.

Проведено исследование методов прямой и обратной инженерии знаний для программных систем автоматического планирования, систем автоматического синтеза программ и интеллектуальных программных систем решения сложных многошаговых многовариантных задач.

Созданы алгоритмы отображения программ на архитектуру высокопроизводительных массивно-параллельных ЭВМ и применены к алгоритмам биоинформатики при решении задач на супер-ЭВМ. Разработан новый алгоритм ретроанализа полнопереборных задач, позволяющий значительно (в 10 и более раз) сократить объем вычислений и распараллелить решение этих задач.

Литература

1. *Моисеев Е.И., Ложкин С.А., Тихомиров В.В.* Инновационная научно-образовательная деятельность на факультете ВМК МГУ // Международная конференция «Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство», Москва, 2011, октябрь. Труды, тезисы. — С. 151–152.
2. *Моисеев Е.И., Тихомиров В.В.* Подготовка кадров на факультете ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова // Прикладная информатика. — 2010. — № 3 (27). — С. 24–31. —2010.

Some results obtained at faculty of VMK MSU

E. I. Moiseev, S. A. Lozhkin, V. V. Tikhomirov

Moscow State University

Сетевое взаимодействие и его педагогическое сопровождение

Н. Г. Недогреева, О. В. Пикулик

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия, nata-ned@mail.ru

Сейчас в обществе меняется система организации производства, и отношения между людьми все чаще из иерархической системы переходят в плоскость более децентрализованных. Логично ожидать соответствующих изменений и в моделях обучения. Перед образованием стоят задачи формирования личности, способной к саморазвитию в условиях электронной информационной среды. Вполне оправдано то, что поиск решения этих задач мы будем искать в среде информационных, компьютерных и сетевых дисциплин. Одна из основных тенденций развития образования в связи с этим состоит в пересмотре концепций организации учебной деятельности. В учебной практике процессы формирования сетевых децентрализованных моделей сегодня еще мало заметны, но именно сетевые технологии готовят для них почву [1].

Модернизация системы образования и внедрение в него сетевых информационных технологий вносят коррективы в организацию образовательного процесса в школе. Это приводит к необходимости поиска новых форм работы с учащимися с использованием сетевых информационных технологий. При этом важным вопросом является взаимодействие учащихся, их общение между собой и учителем, правильно организованное педагогическое сопровождение, направленное на саморазвитие личности обучающегося.

В общем смысле, сетевое взаимодействие — это система связей, позволяющая разработать, апробировать и представлять профессиональному педагогическому сообществу инновационные модели содержания образования и управления системой образования; это способ деятельности по совместному использованию ресурсов. Сетевое взаимодействие открывает новые перспективы в сфере образования. Внедрение данной технологии в школе становится не просто веяньем времени, а жизненной необходимостью. Это позволяет вывести образование на качественно новый уровень. В образовании школьников сетевое взаимодействие проявляется в таких формах организации обучения, как дистанционные курсы, сетевые образовательные программы для самообразования и саморазвития; сетевые семинары, конференции, проекты; сетевые олимпиады, конкурсы, викторины, марафоны и пр. Педагогическое сопровождение рассматривается нами как система специфических методов и приемов педагогической работы на разных этапа ее реализации (проектирование, поддержка, сотрудничество).

В практике работы Саратовского института повышения квалификации учителей используется сетевое взаимодействие в виде трех моделей: «учитель – ученик», «ученик – ученик», «учитель – учитель» [2]. Приведем примеры организации сетевого взаимодействия.

Модель «учитель – ученик»: учитель организует сетевое взаимодействие с одним или несколькими учениками, не предполагающее общение учеников друг с другом, средствами организации являются ставшие популярными в последнее время блоги и сайты педагогов, ICQ и Skype, Twitter, Facebook и Friendfeed, электронная почта. Такое взаимодействие помогает решить ряд важных задач: организовать дополнительную работу с учениками, стремящимися получить дополнительные знания по предмету или слабо успевающими; организовать учебную деятельность детей, часто отсутствующих на уроках (дети со слабым здоровьем; спортсмены, выезжающие на соревнования и сборы; одаренные дети, участвующие в творческих школах, конкурсах, концертах); развивать познавательную активность школьников, используя их интерес к современным информационным технологиям; сформировать у школьников компетентности, умения и качества XXI века.

Модель «ученик-ученик»: учитель организует сетевую деятельность нескольких учеников, определяющую их взаимодействие друг с другом, предполагает организующую и направляющую роль учителя (фасилитатора) и коллективную деятельность учеников, направленную на достижение общего результата. Сетевое взаимодействие школьников происходит в различных дистанционных мероприятиях – проектах, конкурсах, олимпиадах. Известно, что современные школьники самостоятельно и успешно организуют сетевое взаимодействие друг с другом в различных социальных сетях. Правда, это не имеет отношения к образовательной деятельности. Педагогам следует активно использовать в образовательных целях существующую потребность школьников в сетевом взаимодействии и имеющиеся у них навыки сетевого общения.

Модель «учитель-учитель»: продуктивное взаимодействие педагогов друг с другом с использованием различных сетевых средств – это универсальный способ решения профессиональных проблем, непрерывное повышение квалификации, постоянное общение и обмен знаниями с коллегами, представление своего педагогического опыта широкой аудитории. Совместными усилиями создается общая копилка методических и дидактических материалов. Преимущества сетевого взаимодействия педагогов дают возможность найти единомышленников, расширить круг общения, узнать мнение коллег-профессионалов, получить бесплатные консультации, советы и рекомендации, обсудить злободневные проблемы методики преподавания предмета, школы, образования в целом, повысить самооценку и получить стимул для творчества и профессионального развития. Для этого надо узнать правила сетевого общения и приобрести навыки дистанционной работы. А значит, шагать в ногу со временем и принимать участие в различных сетевых проектах.

Литература

1. *Патаракин Е. Д.* Социальные взаимодействия и сетевое обучение 2.0. — М.: НП «Современные технологии в образовании и культуре», 2009.
2. *Ильковская И. М., Недогреева Н. Г., Пикулик О. В.* Организация сетевого взаимодействия между обучающимися и учителем с использованием информационных компьютерных инструментов: Методическое пособие. — Саратов: ГАОУ ДПО «СарИПКиПРО», 2012.

Networking and his pedagogical support

N. G. Nedogreeva, O. V. Pikulik

Saratov state university of name N.G. Chernyshevsky, Saratov, Russia
nata-ned@mail.ru

Компьютерное моделирование патологических примеров из курса математического анализа

А. А. Никитин[*], А. Ю. Яковчук[†]

[*] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
nikitin@cs.msu.su

[†] *Высшая школа экономики, Москва, Россия*
yakovchuck_ lesya@mail.ru

В настоящее время математический анализ как никакая другая область математики остро нуждается в красивых и наглядных компьютерных иллюстрациях. Это связано с тем, что данный учебный курс является очень требовательным к математической культуре и пространственному восприятию учащихся. К сожалению, у многих студентов данный тип мышления недостаточно развит, что сильно повышает потребность в иллюстрациях. Однако построение актуальных рисунков весьма затруднительно в аудиторных условиях. Отметим также, что большую ценность несут в себе различные примеры и контрпримеры к математическим понятиям и утверждениям.

В рассматриваемой работе предпринята попытка визуализировать некоторые из подобных объектов — разнообразных патологических примеров функций и множеств, как классических, так и современных. Перечислим в этом качестве сингулярную функцию Кантора, трёхмерную функцию Римана, кривую Пеано–Гильберта и фрактальное построение всюду непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции. Детальное описание перечисленных примеров может быть найдено в книгах [1, 2]. Компьютерная визуализация была реализована средствами системы *MatLab*. В заключение мы приведём несколько из получившихся иллюстраций.

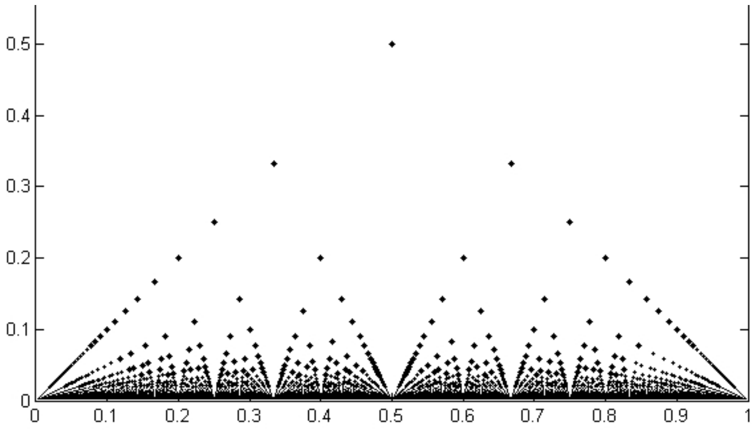


Рис. 1. Функция Римана

Рис. 2. Всюду непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция

Авторы признательны своему коллеге Бодрову А.Г. за полезные обсуждения и помощь в работе.

Литература

1. *Макаров Б. М.* Избранные задачи по вещественному анализу. — Санкт-Петербург, 2004.
2. *Шибинский В. М.* Примеры и контрпримеры из курса математического анализа. — М.: Высшая школа, 2007.
3. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967.

Computer simulation of pathological examples from the course of mathematical analysis

A. A. Nikitin*, **A. Yu. Yakovchuk**†

* *Moscow State University, Moscow, Russia*
nikitin@cs.msu.su

† *Higher school of economics, Moscow, Russia*
yakovchuck_ lesya@mail.ru

Особенности методической системы подготовки преподавателя математики в педвузе с использованием информационных образовательных ресурсов

И. А. Новик, Н. В. Бровка, С. И. Зенько

Белорусский государственный педагогический университет им. Максима Танка, Минск, Беларусь
sergey.zenko@tut.by

Отбор содержания обучения математике с использованием информационно-образовательных ресурсов при подготовке преподавателя математики должен происходить с учетом лучших традиций национальной науки и культуры и подчиняться целям социальной и экономической жизни страны. Целесообразной представляется разработка методической системы предметного обучения с наперед заданными свойствами. Такая система должна согласовываться с внешними условиями, призванными обеспечить её эффективное функционирование, обладать внутренними, специфичными для нее свойствами и отвечать дидактическим принципам обучения.

Мероприятия, разработанные в рамках выполненных в Республике Беларусь программ Министерства образования, предусматривающих создание необходимой инфраструктуры информатизации системы образования являются внешними условиями данной методической системы образования. К ним относятся: (1) сокращение периодичности повышения квалификации учителей информатики до 2–3 лет; (2) создание медиацентров по разработке ЭСО в высших учебных заведения РБ в рамках программы «Комплексная информатизация системы образования РБ на 2007–2010 гг.»; (3) Планирование до 2015 г. создания национальной информационной среды системы образования РБ, с помощью которой будет формироваться национальная система электронных образовательных ресурсов; (4) расширение обеспечения доступа к открытым образовательным ресурсам (Интернету) - не менее одного компьютерного класса с широкополосным доступом к сети Интернет на учреждение; (5) использование основных информационных образовательных ресурсов (ИОР) двух видов: а) ИОР: учебно-методические материалы, которые свободно доступны в глобальной сети; б) ИОР Commons: ИОР, доступные через специально созданные фонды; (6) использование открытых образовательных ресурсов, в частности информационно-методического портала для учителей (`http://nastaunik.info/`), порталов и сайтов высших и средних специальных учебных заведений, ИОР в электронных библиотеках; (7) создание региональных учебно-методических коллекций ЭСО и отраслевого фонда программных средств в структуре учреждения «Главный информационно-аналитический центр МО»; (8) создание межведомственной рабочей группы для подготовки специалистов в области информационных технологий при МО РБ.

Учет специфики методической системы преподавания математики с использованием информационно-образовательных ресурсов позволяет выделить внутренние, наперед заданные свойства. К ним относятся: научность изложения материала; полное соответствие методических материалов учебной программе по предмету; связь теории обучения с практикой; целенаправленное единство образования и воспитания; нацеленность на самостоятельную работу по овладению знаниями и умениями; воспитание интереса к обучению и творчеству, сохранение лучших духовных традиций системы образования; наличие во всех ЭСО следующих компонентов: информационной части курса, упражнений для закрепления полученных знаний и тестов для их оценки; все ЭСО должны быть представлены в едином формате и модернизироваться с помощью автоматизированной системы управления учебным процессом.

Литература

1. *Новик И. А., Бровка Н. В., Круглик Т. М.* Электронные учебники для курсов по выбору по математике: основные направления и технология создания // Новые технологии в обучении математике и информатике в вузе и школе: матер. 2-ой Междунар. науч.-практ. конфер. — Орехово-Зуево, 2007. — С. 97–100.
2. *Зенько С. И.* Использование инфокоммуникационных технологий в процессе совершенствования методической подготовки студентов специальности «Математика. Информатика» в педагогическом вузе // Информационные технологии в образовании, науке и технике: тез. Междунар. науч.-практ. конфер. — Т. 2. — Черкасы, 2012. — С. 40-41.

Features of the methodological training system of teachers of mathematics at pedagogical university with the use of information educational resources

I. A. Novik, N. V. Brovka, S. I. Zenko

Belarusian state pedagogical university named after Maxim Tank, Minsk, Belarus, sergey.zenko@tut.by

Персональный web-сайт и информационная поддержка балльно-рейтинговой системы

О. А. Пыркова

Московский физико-технический институт, Москва, Россия
opyr@mail.ru

Целью образования является подготовка человека к будущей деятельности в обществе [1]. Развитие информационных и телекоммуникационных технологий (ИКТ) сильно изменило процессы общения и информационное взаимодействие человека с социумом. Замечено, что в современном обществе, которое можно охарактеризовать, как информационное, молодые люди предпочитают брать готовую информацию из Интернета, а не нарабатывать личностное знание [2], необходимое при подготовке конкурентноспособных и востребованных специалистов высокого уровня.

В последнее время все большую популярность приобретает балльно-рейтинговая система (БРС), ставящая студентов в такие условия, чтобы они постоянно уделяли внимание учебному процессу, т.к. в этой накопительной системе индивидуальный рейтинг, влияющий на итоговую оценку, определяется по результатам всех видов занятий и вариантов контроля, в том числе и проверяющих осмысленное применение знаний. ИКТ позволяют достаточно быстро осуществлять сбор и систематизацию информации, являющихся лишь первым этапом решения проблемы. Однако «для решения математической задачи требуются специальные умственные действия, невозможные без усвоения знаний» [2]. Упрощение начального этапа у некоторых учащихся вызывает иллюзию быстрого усвоения математических дисциплин. Однако «знание в математике — это переработанные смыслы, прошедшие ступени анализа, проверки на непротиворечивость, генетическую совместимость со всем предыдущим опытом, последовательно переведенные с уровня «абстрактного» на уровень «обыденного». Это не позволяет считать способность к редукции полноценным усвоением» [2], а также требует определенных временных затрат.

Применение ИКТ в процессе обучения дает и новые возможности образовательной среде. Создание индивидуальных сайтов преподавателей ВУЗов, укомплектованных личными учебными коллекциями и являющихся гибкими мобильными структурами, органично дополняет более масштабные структуры в рамках ВУЗа, или объединения нескольких ВУЗов, образуя некоторое подобие фрактальной структуры [3]. Использование ИКТ оказывает существенную помощь как при передаче знаний, при индивидуальной работе со студентами, так и при информационной поддержке текущей успеваемости и научно-исследовательской деятельности студентов.

Отражение текущего рейтинга студента на персональном web-сайте преподавателя позволяет активизировать интенсивность работы студентов, стимулировать качество самостоятельной подготовки, обеспечивает

Работа выполнена при поддержке ГЗ05.

удовлетворенность от использования ИКТ. Также имеет смысл указывать не только суммарный рейтинг студента, но и отдельные его составляющие: обозначенные низким баллом по отдельным темам пробелы в знаниях, могут быть своевременно устранены, предотвращая лавинообразный рост дальнейших ошибок.

Информационная поддержка БРС на персональном web-сайте в итоге способствует качественному росту знаний студентов. Это позволяет повысить эффективность учебного процесса, обеспечивая наравне с фундаментальностью образования развитие и активацию творческих и профессиональных компетенций студентов как будущих специалистов, направленную на приобретение ими новых навыков и знаний, потребности в непрерывном самообразовании.

Литература

1. *Боровских А. В., Розов Н. Х.* Деятельные принципы в педагогике и педагогическая логика: Пособие для системы профессионального педагогического образования, переподготовки и повышения квалификации научно-педагогических кадров. — М.: Макс Пресс, 2010.
2. *Тестов В. А.* Новая парадигма математического образования // Математическое образование и информационное общество: проблемы и перспективы: сборник трудов XLVIII Всероссийской (с международным участием) конференции. — М.: РУДН, 2012. — С. 28–33.
3. *Пыркова О. А.* Использование персонального web-сайта в процессе обучения // Инновационные информационные технологии: Материалы международной научно-практической конференции. — М.: МИЭМ, 2012. — С. 121–123.

Personal web-site and information support of top score system

O. A. Pyrkova

Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia
opyr@mail.ru

Элементы электронного обучения в физике твердого тела

В. В. Ржевский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
rzhevski@mig.phys.msu.ru

Различная природа твердых тел, их многообразие, необходимость для объяснения их свойств обращаться к совершенно разным разделам физики и математики, делает для студентов физику твердого тела предметом весьма сложным. Но даже, если при изложении курса ограничиваться сравнительно простой математикой, опуская тонкости и громоздкие вычисления, то при этом не удастся избежать идейной сложности, обусловленной необходимостью введения принципиально новых понятий, отсутствующих в других разделах физики [1].

В настоящей работе рассматривается применение элементов электронного обучения, как попытка помощи студентам в преодолении именно такой идейной сложности курса физики твердого тела, путем использования образовательных ресурсов сети Internet.

Опыт работы автора в этом направлении в течение ряда лет, в рамках кафедрального компьютерного спецпрактикума, показывает, что использование в режиме «онлайн» оригинальных журнальных статей, анимационных моделей, научных и учебных университетских презентаций и пособий, как отечественных, так и зарубежных, существенно влияет на овладение студентами основными принципами и понятиями физики твердого тела. Роль преподавателя в таком учебном процессе, велика. Совместные со студентами, сравнение и анализ различных определений одного и того же понятия у разных авторов, разбор множества примеров использования этого понятия в разных контекстах – залог успешного усвоения студентами всех физических аспектов изучаемого явления.

Многократные разноплановые обращения к предмету изучения, возможные благодаря сети Internet, позволяют студенту проявить индивидуальные черты и выработать профессиональные навыки исследователя, быстро ориентирующегося в новых постановках задач. Усилия потраченные на поиск научных сведений, использование онлайн-переводов, освоение анимационных приложений, которые позволяют увидеть зависимость физических эффектов от изменения параметров задачи — все это ведет к постепенному «привыканию» студентов к новым понятиям и их пониманию, делает приемы электронного обучения эффективным инструментом при изучении сложных разделов физики конденсированного состояния вещества.

К вопросам физики твердого тела, для освоения студентами которых, элементы интерактивного обучения особенно полезны, можно отнести следующие: симметрия кристаллов и ее роль в формировании закона дисперсии, обратные решетки, I-я зона Бриллюэна, квазичастицы, квазиимпульс, геометрическое представление электронного энергетического спектра, зонная теория, процессы переброса, модель Кронига-Пенни, эффективная масса квазичастиц, электронно-топологические переходы Лифшица, [2, 3].

Литература

1. *Каганов М. И., Ржевский В. В.* Введение в квантовую теорию твердого тела. — М.: МГУ, 1987.
2. *Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И.* Электронная теория металлов. — М.: Наука, 1979.
3. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. — М.: Наука, 1978.

Elements of e-learning in solid state physics

V. V. Rzhevskii

M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
rzhevski@mig.phys.msu.ru

Компьютерная визуализация в формировании математического интуитивного опыта

И. В. Сейферт

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия, sivis@inbox.ru

Рассматривая информационные технологии как полифункциональное средство обучения, следует обратить особое внимание на их возможности в усвоении обучающимися математического знания, опираясь на наглядные образы.

Познание начинается с восприятия реальных объектов. При восприятии объект категоризируется, происходит выделение существенных и несущественных свойств объекта. После чего субъектом восприятия создается новый класс объектов, если данный объект не принадлежит ни одному из классов, или же объект относится по сходству к одному из существующих классов. Когда класс объектов содержит более одного, среди них определяются наиболее типичные, и создается образ класса — абстракция, понятие, характеризующее данный класс объектов. Восприятие и опознание объекта предполагают акт категоризации на основании перцептивных признаков. При этом выводы о принадлежности объекта определенному классу ничем не отличаются от других категориальных выводов. Можно говорить о существовании понятия, когда существует мысленный образ класса. Наиболее естественный процесс создания образа — зрительный, хотя, конечно, в создании образа участвует вся воспринимающая система. Зрительный образ наиболее емок, так как в нем практически одномоментно представлена информация о пространственных, динамических, фигуративных и цветовых характеристиках объекта, что позволяет мгновенно «схватывать», понимать отношения, существующие между различными элементами воспринимаемой ситуации. Зрительный образ воспринимаемого объекта существенно отличается от мысленного образа класса. Поскольку воспринимаемая информация должна еще пройти этап перекодирования, перевода на «язык» тех перцептивных моделей, которые уже усвоены субъектом. Мысленные образы класса создаются уже в терминах собственной ментальной репрезентации и представляют собой единицы мышления, которые также могут образовывать новые классы, но уже образов классов. При этом зрительного образа класса не существует и может существовать только мысленный. Так происходит с образами всех отвлеченных понятий, в том числе и математических.

Адекватность первичных образов очень важна, поскольку они имеют чувственную основу. В математике нет вещей, которые имели бы реальный прототип. Все вещи в математике суть идеальные. Один из самых простых и, тем не менее, самых коварных примеров — это образ точки. В качестве первичного, чувственного образа точки мы используем очень малые отрезки или круги с очень малыми радиусами. Если закрепить этот образ как мысленный образ класса «точка», то при изучении анализа столкнемся с препятствием, которое может быть преодолено только перестройкой образа точки и, как следствие, всей системы знания, где точка присутствовала как элемент. Проблема в том, что далеко не всегда удается легко обнаружить такого рода неадекватность. Однако компьютерная визуализация может оказать нам неоценимую услугу в формировании интуитивного опыта.

Следующей существенной трудностью в освоении математики является понятие о бесконечном процессе, который к тому же обозначается существительным. Предел, производная, интеграл... За существительными скрываются бесконечные процессы. В структуре языка существительным описывается предмет, а глагол используется для выражения действия. Номинализация представляет собой статический момент процесса. В математике же существительные, определяющие процессы (предел, интеграл, ряд и др.), не подразумевают «остановки». Их содержание отражает бесконечный непрерывный процесс.

Учитывая выше сказанное, мы можем теперь определить рекомендации к созданию электронных учебников по математике, касающиеся их содержательной части. Визуализация желательна всегда при восприятии новых объектов. Во-первых, это помогает сформировать адекватный образ нового понятия. Зрительное восприятие позволяет увидеть непосредственно многие теоремы, вытекающие из определения. Во-вторых, поскольку в содержание образа входят основные признаки класса, то демонстрация объектов, не принадлежащих данному классу особенно важна. Наглядное разнообразие развивает чувствительность к различиям, что потребуется при работе с объектами в дальнейшем. В-третьих, математический язык — символьный, но когда воспринимаются не символы сами по себе, а их содержание, что, по сути, и является мысленным образом, то и использование этого языка становится равносильным использованию языка в речи. Поскольку решение задач требует определенной скорости обработки информации, эти факторы имеют первостепенное значение.

При визуализации условий теорем необходимо рассматривать примеры, в которых теорема выполняется. Но особое значение имеют примеры, где какое-либо условие не выполняется. Эта возможность наглядного представления невыполнения условий теорем воспитывает и логическую культуру. Обязательными являются примеры, где интуиция не может нам подсказать соответствующий пример. Так, интуиция нам говорит, что если функция непрерывная, то график функции между двумя различными достаточно близкими точками соединяется отрезком и тогда в промежуточных точках существует касательная, т.е. производная. Но если функция всюду не дифференцируема, то каждая точка является угловой (например, функция Вейерштрасса). Нарисовать это невозможно. Компьютерное моделирование позволяет в этом убедиться.

В заключение следует отметить, что никакое использование компьютерных средств не может заменить строгость изложения материала. Визуализация может лишь создать наиболее благоприятные условия для усвоения предмета: снять противоречия между интуитивным и логическим.

Computer visualization in the forming of mathematical intuitive experience

I. V. Seifert

St. Petersburg National Research University of IT, Mechanics and Optics, St. Petersburg, Russia, sivis@inbox.ru

Использование базы знаний для адаптивного обучения

А. В. Скрябин, И. М. Лазарева

Мурманский государственный технический университет, Мурманск, Россия, skryabin_a_v@mail.ru, lazarevaim@mail.ru

Организация процесса адаптивного обучения с использованием компьютерных технологий, то есть обучения по различным сценариям, зависящих от характеристик конкретного обучаемого, требует наличия специально разработанных учебно-методических материалов и комплекса программных средств, реализующих адаптивную технологию обучения.

На кафедре Высшей математики и программного обеспечения ЭВМ МГТУ ведется разработка программных средств организации учебного процесса с возможностью адаптации контента в соответствии с уровнем знаний студента [1, 2]. Работа этих программ основывается на использовании базы знаний, содержащей информационные материалы по учебным курсам. В разработанной базе знаний, включающей программные продукты «Редактор базы знаний» и «База знаний», был апробирован подход, использующий объектно-ориентированные базы данных для обеспечения работы базы знаний.

Упомянутые программы создают справочную систему на основе электронного конспекта лекций (ЭКЛ), представленного в виде файла MS Word. Для осуществления перевода контента ЭКЛ в формат базы знаний была разработана система, осуществляющая конвертацию ЭКЛ, имеющего фиксированную структуру, из формата MS Word в XML-файл. Прямой перевод из формата MS Word в формат базы знаний невозможен, так как на этом этапе требуется дополнительная информация о контенте – его семантическая разметка, внесенная в соответствии со структурой документа и позволяющая выделить смысловые единицы, воспринимаемые базой знаний.

База знаний, содержащая XML-файлы, может быть использована для первичной адаптации курса и выявления в нем сложных для восприятия моментов. Для внедрения элементов адаптации в учебный курс используется отдельное программное средство. С помощью него в структуру XML-файлов, хранящихся в базе знаний, включается информация об уровнях сложности фрагментов учебного материала, а также о возможных вопросах к ним. Возможности созданной таким образом базы знаний позволят впоследствии сформировать список вопросов для тестирования. На основании результатов тестирования обучаемому будет представлен материал, соответствующий его уровню. Выборка необходимых фрагментов материала также осуществляется средствами базы знаний.

Наконец, непосредственно для работы с базой знаний в процессе обучения используется программная оболочка, которая формирует запросы к базе знаний и предоставляет обучаемому результаты. Результатами могут быть как список вопросов для тестирования по пройденному материалу, так и множество фрагментов учебного материала.

Критерием для формирования множества фрагментов служит оценка усвоения материала, которая проставляется автоматически на основе пройденного тестирования. Если в учебный материал еще не внедрены элементы адаптации, то обучаемому предоставляется полное множество фрагментов материала. Внешний вид отображения результатов запросов может быть настроен. Так реализуется концепция разделения данных и их представления

Таким образом, процесс подготовки и использования учебной базы знаний выглядит следующим образом: создание ЭКЛ в формате MS Word, конвертация его в формат базы знаний, внедрение элементов адаптации (опционально) и передача студенту для изучения.

Литература

1. *Кацуба В. С., Лазарева И. М.* Методика проектирования электронных конспектов лекций // Сборник тезисов Международной научной конференции «Образование, наука и экономика в ВУЗах. Интеграция в международное образовательное пространство», г. Плоцк, Польша, 2008. — С. 736–742.
2. *Скрябин А. В.* Моделирование компьютерной адаптивной обучающей системы // Сборник тезисов Российской школы-конференции с международным участием «Математика, информатика, их приложения и роль в образовании», г. Москва, 2009. — С. 218–219.

The using of knowledge base for adaptive learning

A. V. Skryabin, I. M. Lazareva

Murmansk State Technical University, Murmansk, Russia
skryabin_ a_ v@mail.ru, lazarevaim@mail.ru

Компьютерное сопровождение преподавания теории автоматов и формальных языков

В. А. Соколов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия, valery-sokolov@yandex.ru

В этом сообщении нам хотелось обсудить те разделы теории автоматов и формальных языков, которые было бы полезно, на наш взгляд, сопровождать компьютерной поддержкой. Заметим сразу, что мы не являемся сторонниками полного перевода «в цифру» преподавания какого-либо предмета. Наш многолетний опыт чтения студентам самых различных математических курсов убедил нас в необходимости живого общения студентов с преподавателем и соучастия студентов в тех маленьких математических открытиях, которые совершаются перед их глазами с помощью мела и доски.

Приведём пример нашей программы курса теории автоматов и формальных языков, рассчитанной на студентов факультета информатики. Программа традиционно включает в себя следующие разделы.

– Основные понятия и определения теории формальных языков и грамматик.
– Конечные автоматы.
– Детерминированные конечные автоматы (распознаватели).
– Языки и детерминированные конечные автоматы.
– Недетерминированные конечные автоматы (распознаватели).
– Эквивалентность детерминированных и недетерминированных конечных автоматов.
– Минимизация конечных автоматов.
– Регулярные выражения.
– Связь между регулярными выражениями и языками, распознаваемыми конечными автоматами.
– Регулярные грамматики.
– Связь между регулярными выражениями и регулярными языками.
– Свойства регулярных языков. Замкнутость класса регулярных языков.
– Алгоритмические проблемы регулярных языков.
– Лемма о расширении регулярных языков.
– Контекстно-свободные грамматики и языки.
– Грамматический разбор. Неоднозначность КС-грамматик и КС-языков.
– Методы преобразования контекстно-свободных грамматик.
– Нормальные формы контекстно-свободных грамматик.
– Свойства контекстно-свободных языков. Лемма о расширении.
– Свойства замкнутости класса контекстно-свободных языков.
– Некоторые алгоритмические проблемы для контекстно-свободных языков.
– Магазинные автоматы.
– Недетерминированные магазинные автоматы.
– Детерминированные магазинные автоматы.

– Магазинные автоматы и контекстно-свободные языки.

В этой программе можно выделить две группы тем: для одной полезно сопровождение в виде имитационных моделей автоматов и грамматик, а для другой – в виде компьютерной реализации алгоритмов эквивалентных преобразований автоматов и грамматик с возможностью последующего тестирования получающегося в результате такого преобразования объекта для «демонстрации» его эквивалентности исходному объекту с использованием имитационной модели.

Динамические имитационные модели на базе мультимедийной технологии создаются для демонстрации пошагового функционирования детерминированных и недетерминированных конечных автоматов-распознавателей, для недетерминированных и детерминированных магазинных автоматов-распознавателей, а также для регулярных грамматик и для контекстно-свободных грамматик с возможностью построения в них выводов сентенциальных форм и соответствующих деревьев вывода. Такие модели являются хорошей иллюстрацией для объяснения весьма абстрактных математических конструкций, вызывающих трудности первоначального восприятия у студентов.

Программная реализация алгоритмов эквивалентных преобразований автоматов и грамматик включает устранение переходов по пустой строке в недетерминированном конечном автомате, преобразование такого автомата в детерминированный конечный автомат, минимизацию детерминированного конечного автомата с построением в качестве результата диаграммы переходов автомата. Для контекстно-свободных грамматик предусмотрена реализация алгоритмов устранения продукций с правой частью в виде пустой строки, устранения цепных продукций, бесполезных продукций, леворекурсивных продукций, алгоритмов приведения КС-грамматик к нормальной форма Хомского и нормальной форме Грейбах.

Описанные программные модули могут быть интегрированы в обучающую систему по дисциплине «Теория автоматов и формальных грамматик». Но даже их изолированное использование на лекциях и на практических занятиях безусловно будет способствовать лучшему усвоению студентами материала этого курса.

Литература

1. *Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Дж.* Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. 2-е изд. — М.: «Вильямс», 2002.

Computer aided teaching of the theory of automata and formal languages

V. A. Sokolov

Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia
valery-sokolov@yandex.ru

Авторский указатель

Г

Д

Е

Ж

З

И

К

Функциональные пространства

Дифференциальные операторы

Общая топология

Проблемы математического образования

Тезисы докладов
Четвёртой Международной конференции,
посвященной 90-летию со дня рождения
члена-корреспондента РАН,
академика Европейской академии наук
Л.Д. Кудрявцева

Москва, РУДН, 25–29 марта 2013 г.

Технический редактор *Н. А. Ясько*
Компьютерная вёрстка: *А. В. Корольткова, Д. С. Кулябов*
Дизайн обложки *М. В. Рогова*

Издание подготовлено в авторской редакции

Подписано в печать 12.03.13 г. Формат 60×84/16. Тираж 400 экз.
Усл. печ. л. 45,75. Заказ 221.

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3