МЦМУ «Математический институт им. В. А. Стеклова РАН»
МЦМУ «Математический центр в Академгородке»
Санкт-Петербургский международный математический институт имени Леонарда Эйлера

50 лет конечнозонному интегрированию

16–18 сентября 2024 г.

МИАН, г. Москва

Программный комитет

В. М. Бухштабер,
М. А. Семенов-Тян-Шанский,
И. А. Тайманов

Организационный комитет

Е. Ю. Бунькова, И. А. Дынников,
А. Е. Миронов, О. В. Постнова,
О. К. Шейнман

Приглашенные докладчики

М. В. Бабич, А. Ю. Буряк,
А. П. Веселов, Р. Н. Гарифуллин,
П. Г. Гриневич, С. Ю. Доброхотов,
А. Р. Итс, М. Э. Казарян,
Е. А. Кузнецов, С. К. Ландо,
А. Я. Мальцев, А. В. Маршаков,
В. Б. Матвеев, А. Е. Миронов,
О. И. Мохов, В. Ю. Новокшенов,
М. В. Павлов, А. О. Смирнов,
В. В. Соколов, О. К. Шейнман

Функциональный анализ и его приложения,
т. 8, вып. 3, 1974, 54—66.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА. I

С. П. Новиков

Введение

Уравнение Кортевега — де Фриза (КФ) появилось еще в XIX веке в теории мелкой воды. Как теперь известно (см., например, [15]), это уравнение может описывать распространения волн со слабой дисперсией в различных нелинейных средах. В приведенной форме оно имеет вид

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}.$$

В 1967 г. в известной работе Крускала, Грина, Гарднера и Миура [5] была открыта замечательная процедура интегрирования задачи Коши для этого уравнения на функциях $u(x)$, быстро убывающих при $x \to \pm\infty$. Эта процедура состоит в следующем: рассмотрим оператор Шредингера (Штурма — Лиувилля) $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u$; пусть $f(x, k)$ и $g(x, k)$ таковы, что $Lf(x, k) = k^2 f$, $Lg(x, k) = k^2 g$, причем $f(x, k) \to e^{-ikx}$ при $x \to -\infty$ и $g(x, k) \to e^{-ikx}$ при $x \to +\infty$. Тогда мы имеем две пары линейно независимых решений $f, \bar f$ и $g, \bar g$ и матрицу перехода

$$f(x, k) = a(k)\, g(x, k) + b(k)\, \bar g(x, k),$$
$$\bar f(x, k) = \bar b(k)\, g(x, k) + \bar a(k)\, \bar g(x, k).$$

Если потенциал u меняется во времени в силу уравнения КФ, то коэффициенты a и b меняются по закону $\dot a = 0$, $\dot b = 8ik^3 b$, а для собственной функции $f(x, k)$ имеет место уравнение $\dot f = Af + \lambda f$, где $A = 4\frac{d^3}{dx^3} - 3\left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right)$, $\lambda = 4ik^3$. Если $\lambda_n = + k_n^2 = (i\varkappa_n)^2$ — точка дискретного спектра потенциала $u(x)$, то $\dot\varkappa_n = 0$ и $\dot c_n = +8\varkappa^3 c_n$, где c_n — естественная нормировка собственной функции. Эти формулы позволяют задачу Коши для уравнения КФ на быстроубывающих функциях свести к обратной задаче теории рассеяния и воспользоваться результатами И. М. Гельфанда, Б. И. Левитана, В. А. Марченко, Л. Д. Фадеева (см. [2], [3], [4]). В дальнейшем П. Лакс [7] обнаружил то важное обстоятельство, что уравнение КФ тождественно уравнению для операторов $\dot L = [A, L]$, где $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u$, $A = 4\frac{d^3}{dx^3} - 3\left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right)$, так как $\dot L$ есть оператор умножения на $\dot u$, а $[A, L]$ оказывается оператором умножения на функцию $6uu' - u'''$. В частности, отсюда следует, что спектр оператора L есть интеграл уравнения КФ (это верно и в периодической задаче). Этот факт вскрывает

https://www.mathnet.ru/conf2461