**Научно-образовательный центр при МИАН,** весна 2024

## Структуры на многообразиях, листок 10

В задачах будут фигурировать *алгебры с делением* и антиавтоморфизмами[1] $\boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}}$. Они определяются рекурсивно:

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} + \mathbb{R}\mathrm{i} \text{ и } (x_1 + y_1\mathrm{i})(x_2 + y_2\mathrm{i}) := x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)\mathrm{i},\ \overline{x + y\mathrm{i}} := x - y\mathrm{i},$$

$$\mathbb{H} := \mathbb{C} + \mathbb{C}\mathrm{j} \text{ и } (z_1 + w_1\mathrm{j})(z_2 + w_2\mathrm{j}) := z_1z_2 - w_1\overline{w_2} + (q_1r_2 + w_1\overline{z_2})\mathrm{j},\ (z + w\mathrm{j})^* := \overline{z} - w\mathrm{j},$$

$$\mathbb{O} := \mathbb{H} + \mathbb{H}\ell \text{ и } (q_1 + r_1\ell)(q_2 + r_2\ell) := q_1q_2 - r_1r_2^* + (q_1r_2 + r_1r_2^*)\ell,\ (q + r\ell)^* := q^* - r\ell.$$

Для алгебры $A \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{R}\}$ определяем *норму* $||a|| := (\sqrt{a\overline{a}}, \sqrt{aa^*}, \sqrt{aa^*})$.

Для алгебры $A \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ определяем *мультипликативную группу* $A^\times := A \setminus \{0\}$ и *проективную прямую* $\mathbf{P}_1(A) := \frac{(A\times A)\setminus\{(0,0)\}}{A^\times}$, где подразумевается действие $A^\times$ на $(A \times A$, определённое формулой $\lambda \cdot (a_1, a_2) := (\lambda a_1, \lambda a_2)$; орбита точки $(a, b) \in A \times A$ обозначается $(a : b)$.

Фиксируем покрытие проективной прямой $\mathbf{P}_1(\mathbb{H}) = U_0 \cup U_\infty$, где $U_0 := \{(z : w) \mid w \neq 0\}$ и $U_\infty := \{(z : w) \mid z \neq 0\}$.

**10.1*.** Рассмотрим для $h, m \in \mathbb{Z}$ расслоение над $\mathbf{P}_1(\mathbb{H})$ со слоями $\mathbb{S}^{\nvDash}$, которые будут интерпретироваться как кватернионы нормы 1, и с функцией перехода (в указанном покрытии) $(q, y) \mapsto \left(\frac{1}{q}, \frac{q^hyq^m}{||q||^{h+m}}\right)$. Обозначим $\Sigma_{h,m}$ тотальное пространство этого расслоения. Докажите, что в случае $h + m = 1$ имеет место <u>гомео</u>морфизм $\Sigma_{h,m} \approx_{\text{homeo}} \mathbb{S}^7$.
<u>Указание</u>. Один из возможных подходов – использовать *теорию Морса.*
**10.2**.** Докажите, что в случае $h + m = 1, (h - m)^2 \notin 7\mathbb{N} + 1$ многообразие $\Sigma_{h,m}$ –*экзотическая сфера*, то есть $\Sigma_{h,m} \not\approx_{\text{diffeo}} \mathbb{S}^7$.

**10.3.** Определим $\mathrm{Re} : \mathbb{O} \to \mathbb{R} : o \mapsto o + o^*$ и $\mathrm{Im}\mathbb{O} := \ker(\mathrm{Re})$; октонионы из послелднего пространства называются *мнимыми.* Докажите, что сферу $\mathbb{S}^6$ можно реализовать как множество мнимых октонионов единичной нормы.
**10.4.** Определите *ортогональность* октонионов.
**10.5.** Для $u \in \mathbb{S}^6$ обозначим *правый сдвиг* $R_u : \mathbb{O} \to \mathbb{O} : o \mapsto ou.$ Докажите, что правые сдвиги сохраняют плоскости $\langle 1, u\rangle$ и 6-мерные пространства $\langle 1, u\rangle^\perp$. С помощью сдвига в начало координат установите изоморфизм

$$\langle 1, u\rangle^\perp \simeq \mathrm{T}_u\mathbb{S}^6$$

и сделайте вывод о том, что $R_u$ определяет комплексную структуру на $\mathrm{T}_u\mathbb{S}^6$ для каждого $u \in \mathbb{S}^6$. (Это и значит, что $\mathbb{S}^6$ – *почти комплексное* многообразие).
**10.6*.** Проверьте, что введённая в предыдущей задаче почти комплексная структура *не интегрируема.*

29 апреля, *Г.Б. Шабат*

---

[1] Линейное отображение алгебры $\lambda : A \to A$ называется *антиавтоморфизмом*, если $\forall a, a' \in A\ [\lambda(aa') = \lambda(a')\lambda(a)]$.