

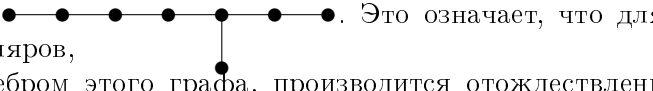
Структуры на многообразиях, листок 9

9.1. Рассмотрите касательное расслоение к комплексной проективной прямой $\mathbb{TP}_1(\mathbb{C})$. Покройте тотальное пространство этого расслоения картами с голоморфными функциями перехода и докажите его нетривиальность.

9.2*. Постройте проективную поверхность, которую естественно было бы назвать *проективным касательным расслоением* над комплексной проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Вычислите его гомологии и самопересечение канонического класса.

9.3. Введите на проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \approx_{\text{homeo}} \mathbb{S}^2$ риманову (на самом деле *кэлерову*) метрику, превращающую проективную прямую в *однородное* риманово многообразие. Рассмотрите компактное 4-многообразие *с краем* – так называемое *unit-disk bundle*, обозначаемое $\mathbb{DT}_{\mathbb{S}^2}$, – представляющее собой подмножество расслоения $\mathbb{TP}_1(\mathbb{C})$, состоящее из векторов длины ≤ 1 . Гомеоморфно ли оно произведению двумерной сферы на диск?

9.4. Идентифицируйте край (то есть *границу*) определённого в предыдущей задаче многообразия с краем $\mathbb{DT}_{\mathbb{S}^2}$.

9.5.** *Свяжите трубками*¹ восемь экземпляров многообразия $\mathbb{DT}_{\mathbb{S}^2}$ по схеме \mathbf{E}_8 . Это означает, что для каждой пары экземпляров,

связанных ребром этого графа, производится отождествление, состоящее в том, что на каждой сфере выделяется малый кружок, над которым расслоение дисков тривиализуется, то есть интерпретируется как *произведение* двух дисков, а затем база каждого из произведений отождествляется со слоем другого. Обозначим $\frac{1}{2}\mathbf{E}_8$ полученное многообразие с краем $\Sigma_{\mathbb{P}}$ (это – традиционное обозначение *гомологической сферы Пуанкаре*). Вычислив гомологии, убедитесь, что, согласно одной *теореме Фридмана*, это многообразие с обращённой ориентацией $\Sigma_{\mathbb{P}}^-$ – край *фальшивого шара*, который обозначим Δ_4 . Введите топологическое многообразие $\mathcal{M}_{\mathbf{E}_8} := \frac{1}{2}\mathbf{E}_8 \cup_{\Sigma_{\mathbb{P}}} \Delta_4$ и "докажите" (пользуясь *теоремой В.А. Розлина*), что это многообразие не допускает гладкой структуры.

9.6.** Постройте полную алгебраическую поверхность типа *семейство эллиптических кривых*, множество гладких структур на которой бесконечно.

22 апреля, Г.Б. Шабат

¹Мне не удалось найти хороший перевод английского слова *plumbing*. Фигурирующее в русскоязычном интернете слово *пламминг* представляется мне неприемлемым.