Научно-образовательный центр при МИАН, весна 2024

Структуры на многообразиях, листок 7

7.1. Разбейте тор $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ на кубики, предложите названия этих кубиков и их граней и составьте диаграмму их примыкания.

7.2. Разбейте сферу $\mathbb{S}^2$ на небольшие части. Дайте им названия, разбейте многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ на клетки и составьте диаграмму их примыкания.

7.3. Постройте такое покрытие сферы $\mathbb{S}^3$, что геометрическая реализация её *нерва*[1] гомеоморфно той же сфере $\mathbb{S}^3$.
Совет. Для разгона решите аналогичную задачу для сферы $\mathbb{S}^2$ и других поверхностей.

7.4. Докажите, что фундаментальная группа $\pi_1\big(\mathsf{SO}_3(\mathbb{R})\big)$ сохраняющих ориентацию вращений пространства $\mathbb{R}^3$ является двухэлементной. Пользуясь какой-либо *параметризацией* группы вращений (например, *углами Эйлера*), предъявите нетривиальный элемент группы $\pi_1\big(\mathsf{SO}_3(\mathbb{R})\big)$.
Указание. Воспользуйтесь двулистным накрытием $\mathsf{SU}_2 \to \mathsf{SO}_3(\mathbb{R})\big)$, интерпретируя специальную унитарную группу SU_2 как мультипликативную группу *кватернионов* нормы 1.

7.5. Задайте *расслоение Хопфа* $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2 : (z_1, z_2) \mapsto (z_1 : z_2)$ функциями перехода в подходящей тривиализации. Здесь используются интерпретации $\mathbb{S}^3 = \big\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}\big\}$ и $\mathbb{S}^2 = \mathbf{P}_1(\mathbb{C})$ – проективная комплексная прямая с однородными координатами (z_1, z_2).

7.6. Рассмотрите два экземпляра *полнотория* и отождествите их границы с помощью *скручивания Дена,* то есть гомеоморфизма тора, который в 1-й группе гомологий с естественным базисом определяет изоморфизм, задаваемый матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Узнаёте ли вы получившееся многообразие?

7.7. Постройте два гомотопически эквивалентных, но не гомеоморфных 3-многообразия.

1 апреля, *Г.Б. Шабат*

---

[1] *Нерв* покрытия $\mathbf{X} = \cup_{i \in I} U_i$ – это симплициальная схема с множеством вершин $V = I$ и симплексами σ_J, соответствующими таким подмножествам $J \subseteq I$, что $\cap_{j \in J} U_j \neq \varnothing$.