Научно-образовательный центр при МИАН, весна 2024

Структуры на многообразиях, листок 6

6.1. Вычислите форму Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

6.2. Докажите, что множество вещественных матриц с единичным определителем и нулевым следом изометрично гиперболической плоскости, если рассмотреть на этом множестве метрику, индуцированную метрикой Киллинга на множестве матриц с нулевым следом.

6.3. Постройте в явном виде биекцию между классами *конформной эквивалентности* римановых метрик, заданных в традиционном виде

$$E(\mathrm{d}x)^2 + 2F\mathrm{d}x\mathrm{d}y + G(\mathrm{d}y)^2,$$

и почти комплексными структурами, заданными в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \mapsto a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial y} \mapsto c\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial y}.$$

Ниже слова *риманова поверхность* означают *компактное связное одномерное комплексное многообразие.*

6.4. Пусть v комплекснозначное векторное поле на римановой поверхности, то есть сечение комплексифицированного касательного расслоения. С помощью локальных координат определите глобальный объект $\overline{\partial} v$ и докажите, что он является дифференциалом Бельтрами. Такие дифференциалы Бельтрами называются *инфинитиземально тривиальными.*

6.5. Пусть μ– дифференциал Бельтрами, а η – квадратичный дифференциал на римановой поверхности $\mathbf{X}$. Проверьте с помощью локальных координат, что $\mu\eta$ представляет собой (1,1)-форму на $\mathbf{X}$ и определите *спаривание* $\langle \mu, \eta \rangle := \int\int_{\mathbf{X}} \mu\eta$.

6.6. Докажите, что дифференциал Бельтрами инфинитиземально тривиален тогда и только тогда, когда он ортогонален любому квадратичному дифференциалу относительно спаривания, определённого в предыдущей задаче.

6.6. Докажите, что любой дифференциал Бельтрами на римановой сфере инфинитиземально тривиален.

25 марта, *Г.Б. Шабат*